JAMES STEWART | LOTHAR REDLIN | SALEEM WATSON

# PRECÁLCULO 6e

## MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

SEXTA EDICIÓN

# PRECÁLCULO
## MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

SEXTA EDICIÓN

# PRECÁLCULO
## MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

**JAMES STEWART**
McMASTER UNIVERSITY AND UNIVERSITY OF TORONTO

**LOTHAR REDLIN**
THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY

**SALEEM WATSON**
CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LONG BEACH

**TRADUCCIÓN:**
**ING. JORGE HUMBERTO ROMO MUÑOZ**
TRADUCTOR PROFESIONAL

**REVISIÓN TÉCNICA:**
**DR. ERNESTO FILIO LÓPEZ**
UNIDAD PROFESIONAL EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**M. EN C. MANUEL ROBLES BERNAL**
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

**Precálculo. Matemáticas para el cálculo**
**Sexta Edición**
James Stewart/Lothar Redlin y
Saleem Watson

*Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:*
Fernando Valenzuela Migoya

*Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:*
Ricardo H. Rodríguez

*Gerente editorial para Latinoamérica:*
Patricia La Rosa

*Gerente de procesos para Latinoamérica:*
Claudia Islas Licona

*Gerente de manufactura para Latinoamérica:*
Raúl D. Zendejas Espejel

*Coordinador de manufactura:*
Rafael Pérez González

*Editores:*
Sergio R. Cervantes González
Timoteo Eliosa García

Diseño de portada:
Lisa Henry

*Imagen de portada:*
© Jose Fuste Raga/CORBIS

*Composición tipográfica:*
Ediciones OVA


Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.


Traducido del libro
*Precalculus. Mathematics for Calculus. Sixth Edition.*
Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson
Publicado en inglés por Brooks & Cole, una compañía de Cengage Learning © 2012
ISBN: 978-0-8400-6807-1

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James/Lothar Redlin y Saleem Watson
*Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición.*
ISBN: 978-607-481-826-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

# ACERCA DE LOS AUTORES

**James Stewart** recibió su maestría de la Universidad de Stanford y su doctorado de la Universidad de Toronto. Realizó una investigación en la Universidad de Londres y fue influenciado por el famoso matemático George Polya en la Universidad de Stanford. Stewart es profesor emérito de la Universidad McMaster y actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad de Toronto. Su campo de investigación es el análisis armónico y las conexiones entre las matemáticas y la música. James Stewart es el autor de una exitosa serie de libros de texto para cálculo publicada por Brooks/Cole, Cengage Learning, incluyendo *Cálculo, Cálculo: trascendentes tempranas*, y *Cálculo: conceptos y contextos*; una serie de textos de precálculo, y una serie de libros de texto de matemáticas para secundaria.

**Lothar Redlin** creció en la isla de Vancouver, recibió una licenciatura en Ciencias de la Universidad de Victoria, y recibió un doctorado de la Universidad de McMaster en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación y docencia en la Universidad de Washington, la Universidad de Waterloo, y la Universidad Estatal de California en Long Beach. En la actualidad es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de Pennsylvania, en el Campus de Abington. Su campo de investigación es la topología.

**Saleem Watson** recibió su licenciatura en Ciencias de la Universidad Andrews, en Michigan. Realizó estudios de posgrado en la Universidad de Dalhousie y la Universidad de McMaster, donde recibió su doctorado en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia en Polonia. También enseñó en la Universidad Estatal de Pennsylvania. Actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de California, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Stewart, Redlin y Watson también han publicado *College Algebra, Trigonometry, Algebra and Trigonometry*, y (con Phyllis Panman) *College Algebra*: *Concepts and contexts.*

## Acerca de la Portada

La fotografía de la portada muestra el Museo de la Ciencia en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia, España, con un planetario en la distancia. Construido de 1991 a 1996, fue diseñado por Santiago Calatrava, arquitecto español. Calatrava siempre ha estado muy interesado en cómo las matemáticas pueden ayudar a materializar los edificios que imagina. Siendo un joven estudiante, él mismo aprendió geometría descriptiva de los libros con el fin de representar objetos tridimensionales en dos dimensiones. Formado como ingeniero y arquitecto, escribió una tesis doctoral en 1981, titulada "Sobre el doblado de las estructuras espaciales", que está llena de matemáticas, especialmente transformaciones geométricas. Su fortaleza como ingeniero le permite ser atrevido en su arquitectura.

# CONTENIDO

## CAPÍTULO 3 FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES 223



## CAPÍTULO 4 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 301



## CAPÍTULO 5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA 369

# PREFACIO

¿Qué necesitan saber realmente los estudiantes para estar preparados para el cálculo? ¿Qué herramientas necesitan realmente los profesores para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas han motivado la escritura de este libro.

Para estar preparado para el cálculo, un estudiante necesita no sólo de conocimientos técnicos sino también de una clara comprensión de conceptos. De hecho, la *comprensión conceptual* y los *conocimientos técnicos* van de la mano y se refuerzan entre sí. Un estudiante también necesita valorar el poder y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real. Todos los temas de este libro de texto están destinados a promover estos objetivos.

Al escribir esta Sexta Edición, nuestro propósito es mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción para profesores y como herramienta de aprendizaje para estudiantes. Hay varios cambios importantes en esta edición, incluyendo una reestructuración de cada uno de los conjuntos de ejercicios para alinear mejor los ejercicios con los ejemplos de cada sección. En esta sección cada conjunto de ejercicios empieza con *Ejercicios conceptuales*, que estimulan a estudiantes a trabajar con conceptos básicos y usar apropiadamente vocabulario matemático. Varios capítulos han sido reorganizados y reescritos (como se describe a continuación) para enfocar más la exposición en los conceptos principales; hemos agregado un nuevo capítulo sobre vectores en dos y tres dimensiones. En todos estos cambios, así como en otros muchos (pequeños y grandes), hemos retenido el contenido principal que ha contribuido al éxito de este libro.

## Nuevo en la Sexta Edición

- **Ejercicios** Más del 20% de los Ejercicios son nuevos. Esto incluye nuevos Ejercicios conceptuales y nuevos ejercicios *Acumulativos de repaso.* Los ejercicios clave están vinculados a ejemplos en el texto.
- **Sitio web acompañante del libro** Un nuevo sitio web **www.stewartmath.com** contiene *Proyectos de descubrimiento* para cada capítulo y secciones de *Enfoque en la solución de problemas*, que destacan diferentes principios para resolución de problemas compendiados en el Prólogo.
- **CAPÍTULO 2 Funciones** Este capítulo ha sido reescrito por completo para enfocarse con más precisión en el concepto fundamental y de importancia esencial de *función.* El material sobre funciones cuadráticas, que ya estaba antes en este capítulo, ahora es parte del capítulo sobre funciones polinomiales.
- **CAPÍTULO 3 Funciones polinomiales y racionales** Este capítulo ahora empieza con una sección sobre funciones cuadráticas, lo que lleva a un más alto grado de funciones con polinomios.
- **CAPÍTULO 4 Funciones exponenciales y logarítmicas** El material sobre la función exponencial natural está ahora en una sección por separado.
- **CAPÍTULO 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo incluye una nueva sección sobre funciones trigonométricas inversas y sus gráficas. La introducción de este tema aquí refuerza el concepto de función en el contexto de trigonometría.

- **CAPÍTULO 6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo** Este capítulo incluye una nueva sección sobre funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos (Sección 6.4) que es necesaria para aplicar las Leyes de Senos y Cosenos en la siguiente sección, así como para resolver ecuaciones trigonométricas en el Capítulo 7.
- **CAPÍTULO 7 Trigonometría analítica** Este capítulo ha sido modificado completamente. Hay dos nuevas secciones sobre ecuaciones trigonométricas (Secciones 7.4 y 7.5). El material acerca de este tema (antes en la Sección 7.5) ha sido expandido y modificado.
- **CAPÍTULO 8 Coordenadas polares y ecuaciones paramétricas** Este capítulo está ahora enfocado con más precisión en el concepto de un sistema de coordenadas. La sección sobre ecuaciones paramétricas es nuevo para este capítulo. El material sobre vectores está ahora en su propio capítulo.
- **CAPÍTULO 9 Vectores en dos y tres dimensiones** Éste es un nuevo capítulo con una nueva sección de *Enfoque sobre modelado.*
- **CAPÍTULO 10 Sistemas de ecuaciones y desigualdades** El material acerca de sistemas de ecuaciones no lineales está ahora en una sección por separado.
- **CAPÍTULO 11 Secciones cónicas** Este capítulo está ahora más estrechamente dedicado al tema de geometría analítica, en especial a las secciones cónicas; la sección sobre ecuaciones paramétricas se ha cambiado al Capítulo 8.

## Enseñanza con la ayuda de este libro

Estamos profundamente conscientes de que la buena enseñanza se presenta en muchas formas, y que hay numerosos métodos diferentes para enseñar los conceptos y conocimientos de precálculo. La organización de los temas de este libro está diseñada para contener diferentes estilos de enseñanza. Por ejemplo, los capítulos de trigonometría han sido organizados de modo que el método de circunferencia unitaria o el de triángulo rectángulo se pueden impartir primero. A continuación veamos otros aspectos especiales que se pueden usar para complementar diferentes estilos de enseñanza:

**CONJUNTOS DE EJERCICIOS** La forma más importante de animar la comprensión conceptual y perfeccionar los conocimientos técnicos es a través de los problemas que el profesor asigna. Con este fin hemos incluido una amplia selección de ejercicios.

- **Ejercicios de concepto** Estos ejercicios piden al estudiante use lenguaje matemático para expresar datos fundamentales acerca de temas de cada sección.
- **Ejercicios de conocimientos** Cada conjunto de ejercicios está cuidadosamente clasificado, avanzando desde ejercicios básicos para desarrollo de conocimientos hasta problemas más difíciles que requieren síntesis de material previamente aprendido con nuevos conceptos.
- **Ejercicios de aplicaciones** Hemos incluido innumerables problemas aplicados que pensamos captarán el interés de estudiantes.
- **Aprendizaje por descubrimiento, escritura y en grupo** Cada conjunto de ejercicios termina con un bloque de ejercicios llamado *Descubrimiento* ▪ *Discusión* ▪ *Redacción*. Estos ejercicios están diseñados para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos, con los conceptos desarrollados en la sección y luego escribir acerca de lo que hayan aprendido, más que sólo ver la respuesta.
- **Ahora intente hacer el ejercicio...** Al final de cada ejemplo en el texto, el estudiante es dirigido a un ejercicio similar en la sección que ayuda a reforzar los conceptos y conocimientos desarrollados en ese ejemplo (vea, por ejemplo, la página 4).
- **Verifique su respuesta** Los estudiantes son animados a comprobar si la respuesta que obtuvieron es razonable. Esto se destaca en todo el texto en numerosas secciones de notas marginales llamadas *Verifique su respuesta*, que acompañan a los ejemplos. (Vea, por ejemplo, la página 52).

**UN CAPÍTULO COMPLETO DE REPASO** Hemos incluido un extenso capítulo de repaso principalmente como referencia práctica para los conceptos básicos que son preliminares a este curso.

- **Capítulo 1** Éste es el capítulo de repaso; contiene los conceptos fundamentales de álgebra y geometría analítica que un estudiante necesita para iniciar un curso de precálculo. Es necesario todo lo que en clase pueda estudiarse de este capítulo, dependiendo de la experiencia de los estudiantes.
- **Examen del Capítulo 1** El examen del Capítulo 1 está diseñado como examen de diagnóstico para determinar qué partes de este capítulo de repaso tiene que enseñarse. También sirve para ayudar a estudiantes a medir exactamente qué temas necesitan repasar.

**MÉTODO FLEXIBLE A LA TRIGONOMETRÍA** Los capítulos de trigonometría de este texto han sido escritos de modo que se puedan enseñar en primer término ya sea el método del triángulo rectángulo o de la circunferencia unitaria. Poniendo estos dos métodos en capítulos diferentes, cada uno con sus amplificaciones relevantes, ayuda a aclarar el propósito de cada uno de estos métodos. Los capítulos que introducen la trigonometría son como sigue:

- **Capítulo 5 Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria** Este capítulo introduce la trigonometría por el método de la circunferencia unitaria, mismo que resalta el hecho de que las funciones trigonométricas son de números reales, igual que las funciones polinomiales y exponenciales con las que los estudiantes están más familiarizados.
- **Capítulo 6 Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo** Este capítulo introduce la trigonometría por el método del triángulo rectángulo, que tiene como base un curso convencional en trigonometría de preparatoria.

Otra forma de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos. Algunos profesores imparten este material en el siguiente orden: Secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 6.4, 6.5 y 6.6. Nuestra organización facilita hacer esto sin ocultar el hecho de que los dos métodos contienen distintas representaciones de las mismas funciones.

**COMPUTADORAS Y CALCULADORAS GRAFICADORAS** Hacemos uso de computadoras y calculadoras graficadoras en ejemplos y ejercicios en todo el libro. Nuestros ejemplos orientados a calculadoras están siempre precedidos por ejemplos en los que los estudiantes deben graficar o calcular manualmente, por lo que pueden entender con precisión lo que hace la calculadora cuando más adelante la usan para simplificar la rutina, parte mecánica de su trabajo. Las secciones, subsecciones, ejemplos y ejercicios referentes a calculadoras graficadoras, todos ellos marcados con el símbolo especial, son opcionales y pueden ser omitidos sin pérdida de continuidad. Usamos las siguientes funciones de la calculadora.

- **Gráficas, regresión, álgebra de matrices** Las funciones de la calculadora graficadora se usan en todo el texto para graficar y analizar funciones, familias de funciones y sucesiones; para calcular y graficar curvas de regresión; para ejecutar álgebra de matrices; para graficar desigualdades lineales; y otros poderosos usos.
- **Programas sencillos** Explotamos las funciones de programación de una calculadora graficadora para simular situaciones reales, para sumar series o para calcular los términos de una sucesión periódica. (Vea, por ejemplo, páginas 787 y 791.)

**ENFOQUE SOBRE MODELADO** El tema del "modelado" se ha utilizado en todo el libro para unificar y aclarar las numerosas aplicaciones de precálculo. Hemos hecho un gran esfuerzo para aclarar los procesos esenciales de traducir problemas del inglés al lenguaje de matemáticas (vea páginas 214 y 636).

- **Construcción de modelos** Hay numerosos problemas aplicados en todo el libro, en donde al estudiante se le da un modelo a analizar (vea, por ejemplo, página 228). Pero el material sobre modelado, en el que al estudiante se le pide *construir* modelos matemáticos, ha sido organizado en secciones y subsecciones claramente definidas (vea, por ejemplo, páginas 213, 340 y 427).
- **Enfoque sobre modelado** Cada capítulo concluye con una sección de *Enfoque sobre modelado*. La primera de estas secciones, después del Capítulo 1, introduce la idea básica del modelado de una situación real al ajustar rectas a datos (regresión lineal). Otras secciones presentan formas en las que sistemas de desigualdades y funciones con polinomios, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se usan para modelar fenómenos familiares de ciencias y de la vida real (vea, por ejemplo, páginas 296, 357 y 427).

**SITIO WEB ACOMPAÑANTE DEL LIBRO** Un sitio web que acompaña a este libro se puede ver en **www.stewartmath.com**. El sitio incluye numerosas fuentes útiles para enseñar precálculo, incluyendo lo siguiente:

- **Proyectos de descubrimiento** Los *Proyectos de descubrimiento* para cada capítulo se encuentran en el sitio web. Cada proyecto contiene un conjunto de actividades difíciles pero accesibles que hace posible que los estudiantes (quizá trabajando en grupos) exploren a mayor profundidad un interesante aspecto del tema que acaban de aprender. (Vea, por ejemplo, los Proyectos de descubrimiento *Visualizar una fórmula, Relaciones y funciones, ¿Sobrevivirá la especie?* y *Gráficas por computadora I* y *II.*)
- **Enfoque en la solución de problemas** En el sitio web se encuentran varias secciones de *Enfoque en la solución de problemas*, cada una de las cuales destaca uno de los principios para resolver problemas que se introduce en el Prólogo e incluye varios problemas con grado de dificultad. (Vea, por ejemplo, *Reconocer patrones, Uso de analogía, Introducción de algo extra, Tomar casos* y *Trabajar a la inversa.*)

**VIÑETAS MATEMÁTICAS** En todo el libro hacemos uso de los márgenes para presentar notas históricas, ideas clave o aplicaciones de matemáticas en el mundo moderno. Éstas sirven para avivar el material y demostrar que las matemáticas son una actividad importante, vital, y que aun a este nivel elemental es fundamental para la vida diaria.

- **Viñetas matemáticas** Estas viñetas incluyen biografías de interesantes matemáticos y a veces incluyen una idea clave que el matemático descubrió y que es relevante para el precálculo. (Vea, por ejemplo, las viñetas de Viète, página 49; Salt Lake City, página 84; y datación por radiocarbono, página 333).
- **Las matemáticas en el mundo moderno** Ésta es una serie de viñetas que destaca el papel central de las matemáticas en los actuales avances en tecnología y las ciencias (vea páginas 283, 700 y 759, por ejemplo).

**SECCIONES DE REPASO Y EXÁMENES DE CAPÍTULO** Cada capítulo termina con una extensa sección de repaso que incluye lo siguiente

- **Verificación de conceptos** La *Verificación de conceptos* al final de cada capítulo está diseñada para hacer que los estudiantes piensen, y expliquen con sus propias palabras, las ideas presentadas en el capítulo. Éstas se pueden usar como ejercicios de escritura, en una situación de discusión en clase, o para estudio personal.
- **Ejercicios de repaso** Los *Ejercicios de repaso,* al final de cada capítulo, recapitulan los conceptos y conocimientos básicos e incluyen ejercicios que combinan las diferentes ideas aprendidas en el capítulo.
- **Examen de capítulo** Las secciones de repaso concluyen con un *Examen de capítulo* diseñado para ayudar a estudiantes a medir su avance.
- **Exámenes acumulativos de repaso** Los *Exámenes acumulativos de repaso,* que siguen a los capítulos 4, 7, 9, 11 y 13, combinan conocimientos y conceptos de los capítulos precedentes y están diseñados para destacar las conexiones entre los temas de estos capítulos relacionados.
- **Respuestas** Al final de este libro se dan breves respuestas a ejercicios de número impar en cada sección (incluyendo los ejercicios de repaso), y a todas las preguntas de los Ejercicios de conceptos y Exámenes de capítulo.

## Reconocimientos

Agradecemos a los siguientes revisores sus cuidadosos y constructivos comentarios.

**REVISORES PARA LA QUINTA EDICIÓN** Kenneth Berg, University of Maryland; Elizabeth Bowman, University of Alabama at Huntsville; William Cherry, University of North Texas; Barbara Cortzen, DePaul University; Gerry Fitch, Louisiana State University; Lana Grishchenko, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Bryce Jenkins, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Margaret Mary Jones, Rutgers University; Victoria Kauffman, University of New Mexico; Sharon Keener, Georgia Perimeter College; YongHee Kim-Park,

California State University Long Beach; Mangala Kothari, Rutgers University; Andre Mathurin, Bellarmine College Prep; Donald Robertson, Olympic College; Jude Socrates, Pasadena City College; Enefiok Umana, Georgia Perimeter College; Michele Wallace, Washington State University; y Linda Waymire, Daytona Beach Community College.

**Revisores para la Sexta Edición** Raji Baradwaj, UMBC; Chris Herman, Lorain County Community College; Irina Kloumova, Sacramento City College; Jim McCleery, Skagit Valley College, Whidbey Island Campus; Sally S. Shao, Cleveland State University; David Slutzky, Gainesville State College; Edward Stumpf, Central Carolina Community College; Ricardo Teixeira, University of Texas at Austin; Taixi Xu, Southern Polytechnic State University; y Anna Wlodarczyk, Florida International University.

Agradecemos a nuestros colegas que continuamente comparten con nosotros sus ideas para enseñar matemáticas. En especial, agradecemos a Andrew Bulman-Fleming por escribir la Guía de estudio y el Manual de soluciones, y a Doug Shaw de la Universidad de Northern Iowa por escribir la Guía del profesor.

Agradecemos a Martha Emry, nuestra editora de arte y servicio de producción; su energía, dedicación, devoción, experiencia e inteligencia fueron componentes esenciales en la creación de este libro. Agradecemos a Barbara Willette, nuestra editora de ejemplares, por su atención a todo detalle del manuscrito. Agradecemos a Jade Myers y su personal de Matrix Art Services por sus atractivas y precisas gráficas, y a Precision Graphics por dar vida a nuestras ilustraciones. Agradecemos a nuestra diseñadora Lisa Henry por el elegante y apropiado diseño para el interior del libro.

En Brooks/Cole especialmente agradecemos a Stacy Green, editora de desarrollo, por guiar y facilitar todo aspecto de la producción de este libro. De entre el personal de Brooks/Cole que intervinieron en este proyecto, particularmente agradecemos a los siguientes: Jennifer Risden, gerente de proyecto del contenido; Cynthia Ashton, editora asistente; Lynh Pham, editora de medios; Vernon Boes, director de arte; y Myriah Fitzgibbon, gerente de mercadotecnia. Todos ellos hicieron un excelente trabajo.

Otras numerosas personas intervinieron en la producción de este libro, incluyendo editores de permisos, investigadores de fotografía, diseñadores de texto, tipógrafos, expertos en composición, lectores de pruebas, impresores y muchos más. Les agradecemos a todos.

Sobre todo, agradecemos a nuestro editor Gary Whalen. Su vasta experiencia editorial, su extenso conocimiento de problemas actuales en la enseñanza de matemáticas y en especial su profundo interés en libros de matemáticas, han sido recursos de gran valor en la escritura de este libro.

# RECURSOS PARA EL PROFESOR

## Impresos

**Complete Solution Manual (Manual de soluciones completas)**
ISBN-10: 0-8400-6880-8; ISBN-13: 978-0-8400-6880-4
El manual de soluciones completas contiene soluciones resueltas de todos los problemas del texto.

**Instructor's Guide (Guía del profesor)**
ISBN-10: 0-8400-6883-2; ISBN-13: 978-0-8400-6883-5
Doug Shaw, autor de las Guías para el profesor para los ampliamente empleados libros de texto de cálculo de Stewart, escribió este útil acompañante de enseñanza. Contiene puntos a subrayar, tiempo sugerido a asignar, temas de discusión del texto, materiales medulares para clases, sugerencias taller/discusión, ejercicios de trabajo en grupo en una forma apropiada para información, soluciones para ejercicios de trabajo en grupo, y sugirió problemas de tarea.

## Medios

**Enhanced WebAssign (TareaWeb mejorada)**
ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1
Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign ofrece un extenso programa en línea para Precálculo, para estimular la práctica que es tan crítica para conocer a fondo los conceptos. La pedagogía meticulosamente trazada y los ejercicios de este texto son incluso más eficientes en este Enhanced WebAssign, suplementado por material didáctico de multimedia e inmediata retroalimentación cuando el estudiante complete sus tareas. Los problemas de algoritmos permiten dejar como tarea versiones individuales para cada estudiante. El artículo Practice Another Version (Practique otra versión, activado a discreción) permite que el estudiante aborde las preguntas con nuevos conjuntos de valores hasta que sienta confianza suficiente para trabajar el problema original. Los estudiantes se benefician de un nuevo Premium eBook que contiene artículos de investigación y de énfasis; Personal Study Plans (Planes de Estudio Personal, basados en preguntas de diagnóstico) que identifican temas de capítulo que será necesario dominen; y vínculos para soluciones de video, materiales didácticos interactivos y hasta ayuda en línea, en vivo.

**ExamView Computerized Testing (Examen computarizado ExamView)**
El software de exámenes ExamView® permite rápidamente a profesores crear, entregar y personalizar exámenes para sus grupos, en formatos impresos o en línea, y permite calificaciones automáticas. Incluye un banco de exámenes con cientos de preguntas personalizadas directamente al texto. ExamView está disponible dentro del CD-ROM PowerLecture.

**Solution Builder** **www.cengage.com/solutionbuilder**
Esta base de datos en línea para el profesor ofrece soluciones trabajadas completas a todos los ejercicios del texto, permitiéndole crear impresiones de soluciones seguras, personalizadas (en formato PDF) comparadas exactamente a los problemas que asigne en clase.

**PowerLecture con ExamView**
ISBN-10: 0-8400-6901-4; ISBN-13: 978-0-8400-6901-6
Este CD-ROM dota al profesor con herramientas dinámicas de medios para la enseñanza. Crea, entrega y personaliza exámenes (impresos o en línea) en minutos con ExamView Computerized Testing Featuring Algorithmic Equations. Construya fácilmente conjuntos de solución para tarea o exámenes usando el manual de soluciones en línea Solution Builder's. Las transparencia y figuras Microsoft PowerPoint del libro también están incluidas en este CD-ROM.

# RECURSOS PARA EL ESTUDIANTE

## Impresos

**Student Solution Manual (Manual de soluciones para el estudiante)**
ISBN-10: 0-8400-6879-4; ISBN-13: 978-0-8400-6879-8
Contiene soluciones completamente resueltas para todos los ejercicios de número impar del texto, lo que da a estudiantes una forma de verificar sus respuestas y asegurar que tomaron los pasos correctos para llegar a una respuesta.

**Study Guide (Guía de estudio)**
ISBN-10: 0-8400-6917-0; ISBN-13: 978-0-8400-6917-7
Este cuidadosamente trazado recurso de aprendizaje ayuda a estudiantes a perfeccionar sus técnicas para resolver problemas, al tiempo que refuerza la comprensión con explicaciones detalladas, ejemplos resueltos y problemas de práctica. Los estudiantes también hallarán listas de las ideas clave a conocer a fondo. Cada sección del texto principal tiene una sección correspondiente en la Guía de estudio.

## Medios

**Enhanced WebAssign** ISBN-10: 0-538-73810-3; ISBN-13: 978-0-538-73810-1
Exclusivamente de Cengage Learning, Enhanced WebAssign® ofrece un extenso programa en línea para Precálculo para estimular la práctica que es tan crítica para conocer a fondo los conceptos. El estudiante recibirá apoyo didáctico de multimedia cuando complete sus tareas. También se beneficiará del nuevo Premium eBook que contiene artículos de investigación y de énfasis; Personal Study Plans (Planes de estudio personal, basados en preguntas de diagnóstico) que identifican temas de capítulo que será necesario dominen; y vínculos para soluciones de video, materiales didácticos interactivos y hasta ayuda en línea, en vivo.

**Book Companion Website**
Un nuevo sitio web **www.stewartmath.com** contiene secciones *Discovery Projects* (Proyectos de descubrimiento) para cada capítulo y *Focus on Problem Solving* que destacan diferentes principios para solución de problemas compendiados en el Prólogo.

**CengageBrain.com**
Visite **www.cengagebrain.com** para acceso a materiales adicionales para el curso y otros recursos acompañantes. En la página inicial de CengageBrain.com, busque el ISBN de su título (de la tapa posterior de su libro) usando la caja de búsqueda en la parte superior de la página. Esto le llevará a la página del producto en donde pueden hallarse los recursos acompañantes gratuitos.

**Text-Specific DVDs** ISBN-10: 0-8400-6882-4; ISBN-13: 978-0-8400-6882-8
Los Text-Specific DVDs incluyen nuevos videos de exposición en clase basados en objetivos de aprendizaje. Estos DVD dan una cobertura completa del curso, junto con explicaciones adicionales de conceptos, problemas de muestra y aplicaciones, que ayudan a estudiantes a repasar temas esenciales.

# AL ESTUDIANTE

Este libro de texto ha sido escrito para usted como guía para que conozca a fondo las matemáticas del precálculo. A continuación veamos algunas sugerencias para ayudarle a sacar el máximo provecho de su curso.

Antes que nada, debe leer la sección apropiada de texto *antes* de intentar resolver sus problemas de tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente a leer una novela, un periódico o hasta otro libro. Puede que tenga que releer un pasaje varias veces antes de entenderlo. Ponga especial atención a los ejemplos y resuélvalos usted con lápiz y papel a medida que los lea y, a continuación, haga los ejercicios relacionados mencionados en "*Ahora intente hacer el ejercicio…*" del final de cada ejemplo. Con esta clase de preparación podrá hacer su tarea con mucha mayor rapidez y mejor entendimiento.

No cometa el error de tratar de memorizar cada una de las reglas o dato que se encuentre. Las matemáticas no son simplemente memorización, sino que son el *arte de resolver problemas,* no sólo un conjunto de datos. Para conocer a fondo el tema, usted debe resolver problemas, muchos problemas; haga tantos como pueda. Asegúrese de escribir sus soluciones en una forma lógica, paso a paso. No se rinda ante un problema si no puede resolverlo en seguida. Trate de entender el problema más claramente, vuelva a leerlo por completo y relaciónelo con lo que ya haya aprendido de su profesor y de los ejemplos del texto. Luche con el problema hasta que lo resuelva; una vez que haya hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que se tratan las matemáticas.

Las respuestas a ejercicios de número impar, así como todas las respuestas al examen de cada capítulo, aparecen al final del libro. Si su respuesta difiere de la dada, no suponga de inmediato que usted está en error. Puede ser un cálculo que enlace las dos respuestas y ambas sean correctas. Por ejemplo, si usted obtiene $1/(\sqrt{2} - 1)$ pero la respuesta dada es $1 + \sqrt{2}$, la respuesta de usted *es* correcta porque puede multiplicar el numerador y denominador de su respuesta por $\sqrt{2} + 1$ para cambiarla a la respuesta dada. Al redondear respuestas aproximadas, siga las guías del Apéndice: *Cálculos y cifras significativas*.

El símbolo se usa para advertirle de no cometer un error. Hemos puesto este símbolo en el margen para señalar situaciones donde hemos encontrado que muchos de nuestros estudiantes cometen el mismo error.

# ABREVIATURAS

| | | | |
|---|---|---|---|
| **cm** | centímetro | **mg** | miligramo |
| **dB** | decibel | **MHz** | megahertz |
| **F** | farad | **mi** | milla |
| **ft** | pie | **min** | minuto |
| **g** | gramo | **mL** | mililitro |
| **gal** | galón | **mm** | milímetro |
| **h** | hora | **N** | Newton |
| **H** | Hertz | **qt** | cuarto |
| **in.** | pulgada | **oz** | onza |
| **J** | Joule | **s** | segundo |
| **kcal** | kilocaloría | **Ω** | ohm |
| **kg** | kilogramo | **V** | volt |
| **km** | kilómetro | **W** | watt |
| **kPa** | kilopascal | **yd** | yarda |
| **L** | litro | **yr** | año |
| **lb** | libra | **°C** | grado Celsius |
| **lm** | lumen | **°F** | grado Fahrenheit |
| **M** | mol e soluto por litro de solución | **K** | Kelvin |
| **m** | metro | $\Rightarrow$ | implica |
| | | $\Leftrightarrow$ | es equivalente a |

# VIÑETAS MATEMÁTICAS



## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

# PRÓLOGO PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Chuck Painter/Stanford News Service

**GEORGE POLYA** (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas sobre resolución de problemas. Sus conferencias sobre este tema en la Universidad de Stanford atraían a multitudes a las cuales él llevó al borde de sus asientos, conduciéndolos a descubrir las soluciones por sí mismos. Él era capaz de hacer esto debido a su profundo conocimiento de la psicología de la resolución de problemas. Su conocido libro *How to solve it* ha sido traducido a 15 idiomas. Dijo que Euler (véase la página 266) fue el único grande entre los matemáticos, porque explicó cómo encontraba sus resultados. Polya dice a menudo a sus alumnos y colegas: "Sí, veo que la demostración es correcta, pero ¿cómo lo descubrió?" En el prefacio de *How to solve it*, Pólya escribe: "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero es un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Usted puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas, y si lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento."

La capacidad de resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de nuestras vidas, es sin duda una parte importante de cualquier curso de matemáticas. No hay reglas duras y rápidas que aseguren el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, en este prólogo se proponen una serie de pasos generales en el proceso de resolución de problemas y le damos los principios que son útiles en la solución de ciertos problemas. Estas medidas y principios hacen explícito el sentido común. Se han adaptado del perspicaz libro de George Polya *How To Solve It*.

## 1. Entender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de que usted lo entiende. Hágase las siguientes preguntas:

*¿Qué es lo desconocido?*
*¿Cuáles son las cantidades que se señalan?*
*¿Cuáles son las condiciones dadas?*

Para muchos problemas, es útil

*dibujar un diagrama*

e identificar las cantidades que se requieren en el diagrama. Por lo general, es necesario

*introducir notación adecuada*

en la elección de los símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $x$, y $y$, aunque en algunos casos, ayuda utilizar las iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, para el volumen $V$ o $t$ para el tiempo.

## 2. Piense en un plan

Encuentre una conexión entre la información dada y la desconocida que le permita calcular la incógnita. A menudo es útil preguntarse a sí mismo de forma explícita: "¿Cómo puedo relacionar lo conocido y lo desconocido?" Si usted no puede ver una conexión inmediata, las siguientes ideas pueden ser útiles en la elaboración de un plan.

### ▶ Trate de reconocer algo familiar

Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe la incógnita y trate de recordar un problema más familiar que tenga una incógnita similar.

### ▶ Trate de reconocer patrones

Ciertos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón que está ocurriendo. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si usted puede ver la regularidad o repetición en un problema, entonces podría ser capaz de adivinar cuál es el patrón y luego probarlo.

### ▶ Use analogías

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, un problema similar o relacionado, pero que es más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar, más simple, entonces le puede dar las pistas que necesita para resolver el original, más difícil. Por ejemplo, si un problema implica un número muy grande, usted puede en primer lugar intentar resolver un problema similar con un número menor. O si el problema está en la geometría tridimensional, se podría buscar algo similar en la geometría de dos dimensiones. O si el problema inicial es de carácter general, primero se podría tratar un caso especial.

### ▶ Introduzca algo adicional

A veces podría ser necesario introducir algo nuevo, "una ayuda extra", para hacer la conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema para el cual un diagrama es útil, la ayuda podría ser una nueva línea dibujada en el diagrama. En un problema más algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relaciona con la incógnita original.

### ▶ Tome casos

A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada caso. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia para hacer frente a un valor absoluto.

### ▶ Trabaje hacia atrás

A veces es útil imaginar que su problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a los datos proporcionados. Entonces usted podría ser capaz de revertir sus pasos y así construir una solución al problema original. Este procedimiento se utiliza comúnmente en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, en la solución de la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que $x$ es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sume 5 a cada lado de la ecuación y luego divida ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos se puede revertir, ha resuelto el problema.

### ▶ Establezca metas secundarias

En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple sólo parcialmente). Si usted puede lograr o alcanzar estos objetivos parciales, entonces usted podría ser capaz de construir sobre ellos para alcanzar su meta final.

### ▶ Razonamiento indirecto

A veces es apropiado para atacar un problema indirectamente. En el uso de la prueba por contradicción para probar que $P$ implica $Q$, se supone que $P$ es cierta y $Q$ es falsa y se trata de ver por qué esto no puede suceder. De alguna manera tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción a lo que sabemos que es verdad absoluta.

### ▶ La inducción matemática

Para probar las declaraciones que implican un entero positivo $n$, a menudo es útil utilizar el Principio de inducción matemática, que se discute en la sección 12.5.

## 3. Lleve a cabo el plan

En el paso 2, se ideó un plan. Para llevar a cabo ese plan, usted debe comprobar cada etapa del plan y escribir los detalles que demuestran que cada etapa es la correcta.

## 4. Mire hacia atrás

Después de haber completado la solución, es conveniente mirar hacia atrás sobre ella, en parte para ver si se han cometido errores y en parte para ver si se puede descubrir una manera más fácil de resolver el problema. Mirar hacia atrás también le ayudará a familiarizarse con el método de solución, que puede ser útil para resolver un problema en el futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Ilustraremos algunos de estos principios de resolución de problemas con un ejemplo.

### PROBLEMA | Rapidez promedio

Una conductora se embarca en un viaje. Durante la primera mitad de la distancia, ella conduce al ritmo pausado de 30 km/h, durante la segunda mitad conduce a 60 km/h. ¿Cuál es su rapidez promedio en este viaje?

#### PIENSE EN EL PROBLEMA

Es tentador tomar el promedio de las rapideces y decir que la rapidez promedio de todo el viaje es

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ mi/h}$$

Sin embargo, ¿este enfoque simple es realmente correcto?

Intente un caso especial ▶

Veamos un caso fácil de calcular especial. Supongamos que la distancia total recorrida es de 120 millas. Los primeros 60 km se recorren a 30 km/h, lo que tarda 2 horas. Las siguientes 60 millas se viaja a 60 km/h, lo que dura una hora. Por lo tanto, el tiempo total es $2 + 1 = 3$ horas y la rapidez promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ mi/h}$$

Por tanto, nuestra estimación de 45 mi/h estaba equivocada.

#### SOLUCIÓN

Entienda el problema ▶

Tenemos que mirar con más cuidado en el significado de la rapidez promedio. Se define como

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introduzca una notación ▶

Identifique la información dada ▶

Sea $d$ la distancia recorrida en cada mitad del viaje. Sean $t_1$ y $t_2$ el tiempo tomado para la primera y segunda mitad del viaje. Ahora podemos escribir la información que se nos ha dado. Para la primera mitad del viaje tenemos

$$30 = \frac{d}{t_1}$$

y para la segunda mitad tenemos

$$60 = \frac{d}{t_2}$$

Identifique la incógnita ▶

Ahora podemos identificar la cantidad que se nos pide encontrar:

$$\text{rapidez promedio del viaje completo} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Relacione la información proporcionada con la incógnita ▶

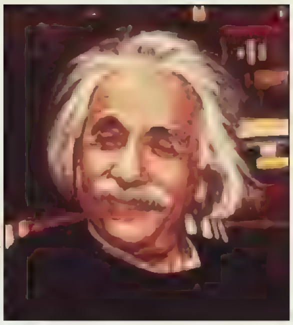
Para calcular esta cantidad, necesitamos conocer $t_1$ y $t_2$, así que resolvemos las ecuaciones anteriores para estos tiempos:

$$t_1 = \frac{d}{30} \qquad t_2 = \frac{d}{60}$$

Ahora tenemos los ingredientes necesarios para calcular la cantidad deseada:

$$
\begin{aligned}
\text{rapidez promedio} &= \frac{2d}{t_1 + t_1} = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}} \\
&= \frac{60(2d)}{60\left(\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}\right)} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por 60} \\
&= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40
\end{aligned}
$$

Por tanto, la rapidez promedio del viaje completo es 40 mi/h. ■





No se sienta mal si usted no puede resolver estos problemas de inmediato. Los problemas 1 y 4 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wertheimer. Einstein (y su amigo Bucky) disfrutaba de los problemas y le escribió a Wertheimer. Esta es parte de su respuesta:

> Su carta nos dio un montón de pruebas divertidas. La primera prueba de inteligencia nos ha engañado a ambos (Bucky y yo). ¡Sólo trabajándolo fuera me di cuenta de que no se dispone de tiempo para la trayectoria descendente! Bucky también fue engañado en el segundo ejemplo, pero yo no. ¡Curiosidades como ésta nos muestran lo tontos que somos!

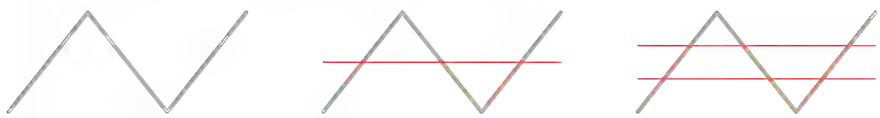
(Véase *Mathematical Intelligencer*, Primavera de 1990, página 41.)

## PROBLEMAS

**1. Distancia, tiempo y velocidad** Un automóvil viejo tiene que recorrer un camino de 2 millas, cuesta arriba y hacia abajo. Debido a que es tan viejo, el automóvil puede subir a la primera milla, de subida, no más rápido que la rapidez media de 15 km/h. ¿Qué tan rápido tiene que viajar el automóvil la segunda milla, en el descenso puede ir más rápido, por supuesto, para lograr una rapidez media de 30 km/h para el viaje?

**2. Comparando descuentos** ¿Cuál precio es mejor para el comprador, un descuento del 40% o dos descuentos sucesivos del 20%?

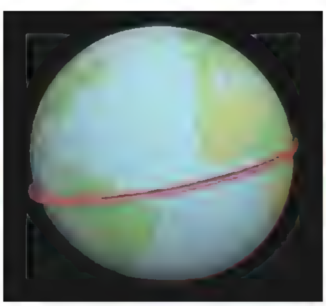
**3. Cortar un alambre** Se dobla un pedazo de alambre, como se muestra en la figura. Puede verse que un corte a través del cable produce cuatro piezas y dos cortes paralelos producen siete piezas. ¿Cuántas piezas se produjeron por 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para el número de piezas producidas por $n$ cortes paralelos.



**4. Propagación de amibas** Una amiba se propaga por división simple, cada división toma 3 minutos para completarse. Cuando esa amiba se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente está lleno de amibas en una hora. ¿Cuánto tiempo haría falta para que el contenedor se llenara si en lugar de comenzar con una amiba, comenzamos con dos?

**5. Promedios de bateo** El jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para toda la temporada?

**6. Café y crema** Se toma una cucharada de crema de una jarra de crema y se coloca en una taza de café. El café se agita. A continuación, una cucharada de esta mezcla se pone en la jarra de crema. ¿Hay ahora más crema en la taza de café o más café en la jarra de leche?



**7. Envolviendo el mundo** Una cinta se amarra fuertemente alrededor de la Tierra en el ecuador. ¿Cuánta más cinta necesita si usted ha colocado la cinta 1 pie por encima del ecuador en todas partes? (No es necesario conocer el radio de la Tierra para resolver este problema.)

**8. Para terminar donde empezó** Una mujer parte de un punto $P$ sobre la superficie de la Tierra y camina 1 milla al sur, luego 1 milla al este y luego 1 milla al norte, y se encuentra de vuelta en $P$, el punto de partida. Describa todos los puntos $P$ para los cuales esto es posible. [*Sugerencia*: Hay un número infinito de esos puntos, todos menos uno de los cuales se encuentran en la Antártida.]

Muchos problemas más y ejemplos que ponen de relieve diferentes principios de resolución de problemas están disponibles en el sitio web del libro: **www.stewartmath.com**. Usted puede intentarlos a medida que avanza en el libro.

CAPÍTULO 1

# FUNDAMENTOS



En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan \$9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga $y$ por trabajar $x$ horas mediante la ecuación $y = 9x$. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación $y = 9x$ en un *plano coordenado* nos ayuda a "ver" cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

# 1.1 NÚMEROS REALES

**Propiedades de los números reales ▶ Adición y sustracción ▶ Multiplicación y división ▶ La recta de números reales ▶ Conjuntos e intervalos ▶ Valor absoluto y distancia**

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche," y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones de enteros. Entonces, cualquier número racional $r$ puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde $m$ y $n$ son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros y por tanto se denominan **números irracionales.** Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que estos números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir "número real". La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

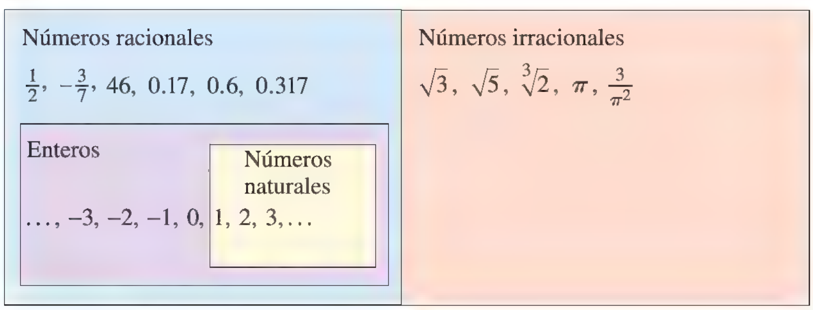



**FIGURA 1** El sistema de números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón entre dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar $x$ por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su correspondente decimal es periódico.

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

## Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde $a$ y $b$ son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

### PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

| Propiedades | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **Conmutativas** | | |
| $a + b = b + a$ | $7 + 3 = 3 + 7$ | Cuando sumamos dos números, el orden no importa. |
| $ab = ba$ | $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ | Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa. |
| **Asociativas** | | |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$ | Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero. |
| $(ab)c = a(bc)$ | $(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$ | Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero. |
| **Distributivas** | | |
| $a(b + c) = ab + ac$<br>$(b + c)a = ab + ac$ | $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$<br>$(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ | Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados. |

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales $a$, $b$ y $c$.

La Propiedad Distributiva es de importancia crítica porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

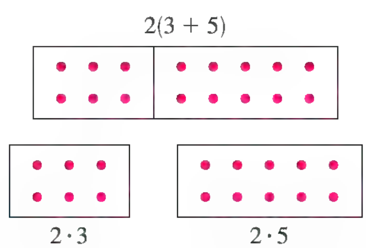



**FIGURA 2** La Propiedad Distributiva

## EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

**(a)** $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

**(b)** $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ — Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de $a$. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (Propiedad 2), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real $a$. Todo número real $a$ tiene un **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

### PROPIEDADES DE NEGATIVOS

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $(-1)a = -a$ | $(-1)5 = -5$ |
| **2.** $-(-a) = a$ | $-(-5) = 5$ |
| **3.** $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ | $(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$ |
| **4.** $(-a)(-b) = ab$ | $(-4)(-3) = 4 \cdot 3$ |
| **5.** $-(a + b) = -a - b$ | $-(3 + 5) = -3 - 5$ |
| **6.** $-(a - b) = b - a$ | $-(5 - 8) = 8 - 5$ |

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos entre sí. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

## EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sea $x$, $y$ y $z$ números reales.

**(a)** $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

**(b)** $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real $a$. Todo número real $a$ diferente de cero tiene un **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como $a/b$. Nos referimos a $a/b$ como el **cociente** entre $a$ y $b$ o como la **fracción** de $a$ sobre $b$; $a$ es el **numerador** y $b$ es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

### PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ | $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$ | Para **multiplicar fracciones**, multiplique numeradores y denominadores. |
| **2.** $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ | $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$ | Para **dividir fracciones**, multiplique por el recíproco del divisor. |
| **3.** $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ | $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$ | Para **sumar fracciones** con el mismo denominador, **sume los numeradores**. |
| **4.** $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ | $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$ | Para **sumar fracciones** con **denominadores diferentes**, encuentre un común denominador y a continuación sume los numeradores. |
| **5.** $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ | $\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$ | **Cancele** números que sean **factores comunes** en numerador y denominador. |
| **6.** Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$ | $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ | **Multiplicación cruzada**. |

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

**SOLUCIÓN** La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3} \qquad \text{Use común denominador}$$

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360} \qquad \text{Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario $O$, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo $x$ está representado por el punto sobre la recta a una distancia de $x$ unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a $x$ unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto $P$ se llama coordenada de $P$ y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real.** A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

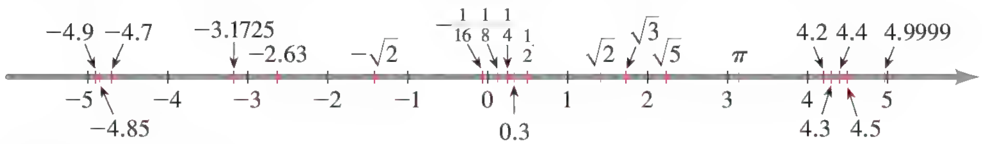



**FIGURA 3** La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que $a$ está a la izquierda de $b$ en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "$a$ es menor o igual a $b$". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

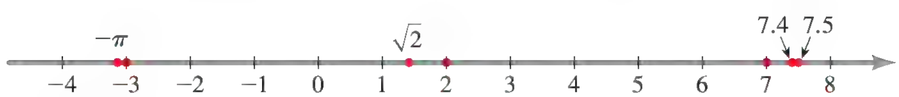



**FIGURA 4**

## Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si $S$ es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que $a$ es un elemento de $S$, y $b \notin S$ quiere decir que $b$ no es un elemento de $S$. Por ejemplo, si $Z$ representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto $A$ que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir $A$ en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

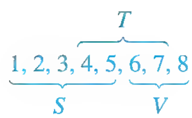
que se lee "$A$ es el conjunto de todas las $x$ tales que $x$ es un entero y $0 < x < 7$".

Si $S$ y $T$ son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en $S$ *o* $T$ (o en ambos). La **intersección** de $S$ y $T$ es el conjunto $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en $S$ y $T$. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de $S$ y $T$. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

## EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.




**SOLUCIÓN**

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — Todos los elementos en $S$ o $T$

$S \cap T = \{4, 5\}$ — Elementos comunes a $S$ y $T$

$S \cap V = \varnothing$ — $S$ y $V$ no tienen elementos en común

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

**FIGURA 5** El intervalo abierto $(a, b)$

**FIGURA 5** El intervalo cerrado $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con frecuencia en cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de $a$ a $b$ está formado por todos los números entre $a$ y $b$ y se denota con $(a, b)$. El **intervalo cerrado** de $a$ a $b$ incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

Nótese que los paréntesis en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

| Notación | Descripción de conjunto | Gráfica |
|---|---|---|
| $(a, b)$ | $\{x \mid a < x < b\}$ | a b |
| $[a, b]$ | $\{x \mid a \le x \le b\}$ | a b |
| $[a, b)$ | $\{x \mid a \le x < b\}$ | a b |
| $(a, b]$ | $\{x \mid a < x \le b\}$ | a b |
| $(a, \infty)$ | $\{x \mid a < x\}$ | a |
| $[a, \infty)$ | $\{x \mid a \le x\}$ | a |
| $(-\infty, b)$ | $\{x \mid x < b\}$ | b |
| $(-\infty, b]$ | $\{x \mid x \le b\}$ | b |
| $(-\infty, \infty)$ | $\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales) | |

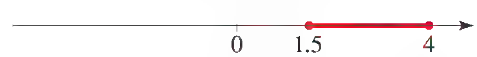
El símbolo $\infty$ (infinito) no representa un número. La notación $(a, \infty)$, por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

## EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

**(a)** $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$

**(b)** $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$

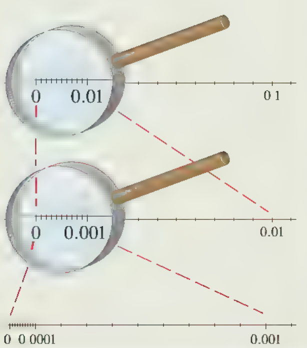



**(c)** $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

**No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto**

Cualquier intervalo contiene un número infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 más cercano, 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo.




## EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

**(a)** $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

**(b)** La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

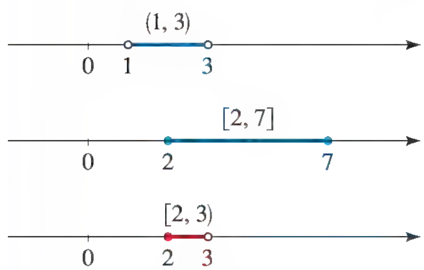



**FIGURA 7** $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

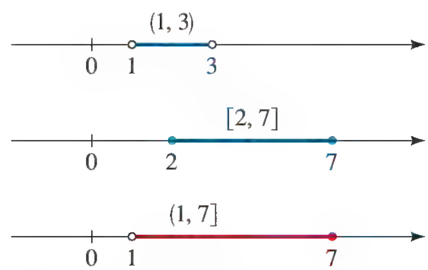



**FIGURA 8** $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

## Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número $a$, denotado por $|a|$, es la distancia de $a$ a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número $a$. Recordando que $-a$ es positivo cuando $a$ es negativo, tenemos la siguiente definición.

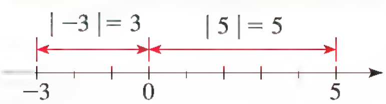



**FIGURA 9**

**DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO**

Si $a$ es un número real, entonces el **valor absoluto** de $a$ es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

## EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

**(a)** $|3| = 3$

**(b)** $|-3| = -(-3) = 3$

**(c)** $|0| = 0$

**(d)** $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

### PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

| Propiedad | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $\lvert a \rvert \geq 0$ | $\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$ | El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero. |
| **2.** $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$ | $\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$ | Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto. |
| **3.** $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$ | $\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$ | El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos. |
| **4.** $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$ | $\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$ | El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos. |

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números $-2$ y 11? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $|11 - (-2)| = 13$ o $|(-2) - 11| = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

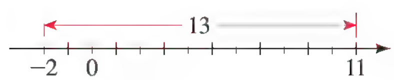



**FIGURA 10**

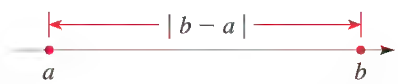



**FIGURA 11** La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

### DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si $a$ y $b$ son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos $a$ y $b$ sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de $a$ a $b$ es la misma distancia de $b$ a $a$.

## EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos en la recta real

La distancia entre los números $-8$ y 2 es

$$d(a, b) = \lvert -8 - 2 \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

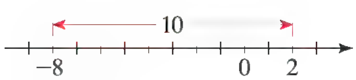



**FIGURA 12**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73**

## 1.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Dé un ejemplo de:

**(a)** Un número natural

**(b)** Un entero que no sea número natural

**(c)** Un número racional que no sea entero

**(d)** Un número irracional

**2.** Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.

**(a)** $ab =$ ________; ________ Propiedad

**(b)** $a + (b + c) =$ ________; ________ Propiedad

**(c)** $a(b + c) =$ ________; ________ Propiedad

**3.** El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:

________en notación constructiva de conjuntos y

________en notación de intervalos.

**4.** El símbolo $|x|$ representa la _______del número $x$. Si $x$ no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre_______.

### HABILIDADES

**5-6** ■ Mencione los elementos del conjunto dado que sean

**(a)** números naturales

**(b)** números enteros

**(c)** números racionales

**(d)** números irracionales

**5.** $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

**6.** $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

**7-14** ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

**7.** $7 + 10 = 10 + 7$

**8.** $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

**9.** $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

**10.** $2(A + B) = 2A + 2B$

**11.** $(5x + 1)3 = 15x + 3$

**12.** $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

**13.** $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

**14.** $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

**15-18** ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

**15.** Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$

**16.** Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$

**17.** Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$

**18.** Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$

**19-24** ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

**19.** $3(x + y)$ **20.** $(a - b)8$

**21.** $4(2m)$ **22.** $\frac{4}{3}(-6y)$

**23.** $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ **24.** $(3a)(b + c - 2d)$

**25-30** ■ Ejecute las operaciones indicadas.

**25.** **(a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **(b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

**26.** **(a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **(b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

**27.** **(a)** $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **(b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

**28.** **(a)** $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **(b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

**29.** **(a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

**30.** **(a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

**31-32** ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

**31.** **(a)** $3 \quad \frac{7}{2}$ **(b)** $-3 \quad -\frac{7}{2}$ **(c)** $3.5 \quad \frac{7}{2}$

**32.** **(a)** $\frac{2}{3} \quad 0.67$ **(b)** $\frac{2}{3} \quad -0.67$ **(c)** $|0.67| \quad |-0.67|$

**33-36** ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

**33.** **(a)** $-6 < -10$ **(b)** $\sqrt{2} > 1.41$

**34.** **(a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

**35.** **(a)** $-\pi > -3$ **(b)** $8 \leq 9$

**36.** **(a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **(b)** $8 \leq 8$

**37-38** ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

**37.** **(a)** $x$ es positivo

**(b)** $t$ es menor a 4

**(c)** $a$ es mayor o igual a $\pi$

**(d)** $x$ es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a $-5$

**(e)** La distancia de $p$ a 3 es como máximo 5

**38.** **(a)** $y$ es negativa

**(b)** $z$ es mayor a 1

**(c)** $b$ es como máximo 8

**(d)** $w$ es positiva y menor o igual a 17

**(e)** $y$ está al menos 2 unidades de $\pi$

**39-42** ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

**39.** **(a)** $A \cup B$ **(b)** $A \cap B$

**40.** **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

**41.** **(a)** $A \cup C$ **(b)** $A \cap C$

**42.** **(a)** $A \cup B \cup C$ **(b)** $A \cap B \cap C$

**43-44** ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

**43.** **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

**44.** **(a)** $A \cap C$ **(b)** $A \cap B$

**45-50** ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

**45.** $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$

**47.** $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

**49.** $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

**51-56** ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

**51.** $x \leq 1$ **52.** $1 \leq x \leq 2$

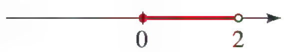
**53.** $-2 < x \leq 1$ **54.** $x \geq -5$

**55.** $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

**57–58** ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

**57.** **(a)**

**(b)**

**58.** **(a)**



**(b)**

**59-64** ■ Grafique el conjunto.

**59.** $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

**61.** $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

**63.** $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

**65-70** ■ Evalúe cada expresión.

**65.** **(a)** $|100|$ **(b)** $|-73|$

**66.** **(a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **(b)** $|10 - \pi|$

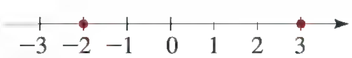
**67.** **(a)** $||-6| - |-4||$ **(b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

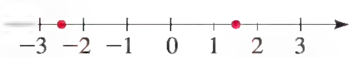
**68.** **(a)** $|2 - |-12||$ **(b)** $-1 - |1 - |-1||$

**69.** **(a)** $|(-2) \cdot 6|$ **(b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

**70.** **(a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **(b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

**71-74** ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

**71.**



**72.**



**73.** **(a)** 2 y 17 **(b)** −3 y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

**74.** **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** −38 y −57 **(c)** −2.6 y −1.8

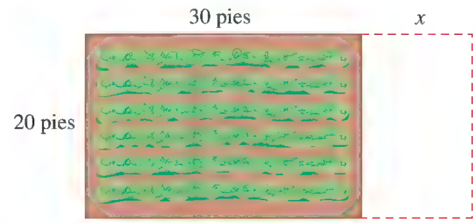
**75-76** ■ Exprese cada decimal periódico como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

**75.** **(a)** $0.\overline{7}$ **(b)** $0.\overline{28}$ **(c)** $0.\overline{57}$

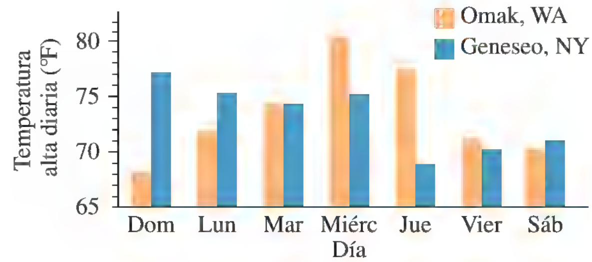
**76.** **(a)** $5.\overline{23}$ **(b)** $1.3\overline{7}$ **(c)** $2.1\overline{35}$

## APLICACIONES

**77. Área de un jardín** El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?




**78. Variación de temperatura** La gráfica de barras muestra las altas temperaturas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con $T_O$ la temperatura en Omak y $T_G$ la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

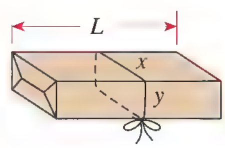


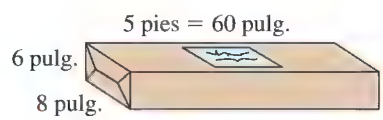

**79. Envío de un paquete por correo** La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales la longitud más la circunferencia no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

**(a)** ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

**(b)** ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**80. Signos de números** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

(a) $-a$ (b) $-b$ (c) $bc$

(d) $a \quad b$ (e) $c \cdot a$ (f) $a + bc$

(g) $ab + ac$ (h) $-abc$ (i) $ab^2$

**81. Sumas y productos de números racionales e irracionales** Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números irracionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales necesariamente es irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

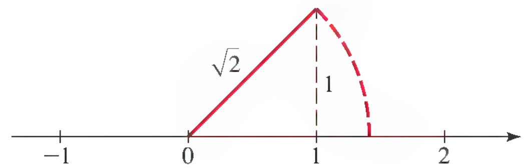
**82. Combinación de números racionales con números irracionales** ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

**83. Limitación del comportamiento de recíprocos** Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando $x$ crece? ¿Y cuando $x$ disminuye?

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 10 | |
| 100 | |
| 1000 | |

| $x$ | $1/x$ |
|---|---|
| 1.0 | |
| 0.5 | |
| 0.1 | |
| 0.01 | |
| 0.001 | |

**84. Números irracionales y geometría** Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.




**85. Operaciones conmutativa y no conmutativa** Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿La sustracción es conmutativa?

(b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

# 1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros (negativos y positivos) ▶ Reglas para trabajar con exponentes ▶ Notación científica ▶ Radicales ▶ Exponentes racionales ▶ Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente $m/n$ es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces $n$.

## ▼ Exponentes enteros (negativos y positivos)

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como $5^3$. En general, tenemos la siguiente definición.

### NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si $a$ es cualquier número real y $n$ es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de $a$ es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número $a$ se denomina **base**, y $n$ se denomina **exponente**.

## EJEMPLO 1 | Notación exponencial

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y $-3^4$. En $(-3)^4$ el exponente se aplica al $-3$, pero en $-3^4$ el exponente se aplica sólo al 3.

**(a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

**(b)** $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$

**(c)** $-3^4 = -(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3) = -81$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Podemos expresar varias reglas útiles para trabajar con notación exponencial. Para descubrir la regla para multiplicación, multiplicamos $5^4$ por $5^2$:

$$5^4\cdot 5^2 = \underbrace{(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)}_{\text{4 factores}}\underbrace{(5\cdot 5)}_{\text{2 factores}} = \underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{\text{6 factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Es evidente que *para multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos sus exponentes.* En general, para cualquier número real $a$ y cualesquier enteros positivos $m$ y $n$, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{m\text{ factores}}\underbrace{(a\cdot a\cdot\cdots\cdot a)}_{n\text{ factores}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{m+n\text{ factores}} = a^{m+n}$$

Entonces $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera verdadera aun cuando $m$ y $n$ fueran 0 o enteros negativos. Por ejemplo, debemos tener

$$2^0\cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto puede ocurrir sólo si $2^0 = 1$. Igualmente, deseamos tener

$$5^4\cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones llevan a la siguiente definición.

### EXPONENTES CERO Y NEGATIVOS

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y $n$ es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## EJEMPLO 2 | Exponentes cero y negativos

**(a)** $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

**(b)** $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

**(c)** $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## Reglas para trabajar con exponentes

La familiaridad con las reglas siguientes es esencial para nuestro trabajo con exponentes y bases. En la tabla las bases $a$ y $b$ son números reales, y los exponentes $m$ y $n$ son enteros.

### LEYES DE EXPONENTES

| Ley | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **1.** $a^m a^n = a^{m+n}$ | $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ | Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes. |
| **2.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | $\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$ | Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes. |
| **3.** $(a^m)^n = a^{mn}$ | $(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$ | Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes. |
| **4.** $(ab)^n = a^n b^n$ | $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$ | Para elevar un producto a una potencia, eleve cada uno de los factores a la potencia. |
| **5.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ | $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$ | Para elevar un cociente a una potencia, eleve el numerador y el denominador a la potencia. |

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 3** Si $m$ y $n$ son enteros positivos, tenemos

$$(a^m)^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n$$

$$= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}}$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}$$

Los casos para los que $m \le 0$ o $n \le 0$ se pueden demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 4** Si $n$ es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = a^n b^n$$

Aquí hemos empleado repetidamente las Propiedades Conmutativa y Asociativa. Si $n \le 0$, la Ley 4 se puede demostrar usando para ello la definición de exponentes negativos. ■

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar las Leyes 2 y 5.

## EJEMPLO 3 | Uso de las Leyes de Exponentes

**(a)** $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

**(b)** $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

**(c)** $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

**(d)** $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

**(e)** $(3x)^3 = 3^3 x^3 = 27x^3$ Ley 4: $(ab)^n = a^n b^n$

**(f)** $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ Ley 5: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35, 37** Y **39** ■

## EJEMPLO 4 | Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique

**(a)** $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

**SOLUCIÓN**

**(a)**
$$\begin{aligned}(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n\\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn}\\ &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

**(b)**
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Leyes 5 y 4}\\ &= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3}\\ &= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Agrupe factores de la misma base}\\ &= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Leyes 1 y 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47**

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de exponentes para llegar a su propio método. A continuación damos dos leyes adicionales que son útiles en la simplificación de expresiones con exponentes negativos.

**LEYES DE EXPONENTES**

| Ley | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| **6.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ | Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente. |
| **7.** $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$ | $\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$ | Para pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambie el signo del exponente. |

**DEMOSTRACIÓN DE LA LEY 7** Usando la definición de exponentes negativos y luego la Propiedad 2 de fracciones (página 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

En el Ejercicio 94 nos piden demostrar la Ley 6.

## EJEMPLO 5 | Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine exponentes negativos y simplifique cada expresión.

**(a)** $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos la Ley 7, que nos permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador (o viceversa) cambiando el signo del exponente.

$t^{-4}$ pasa al denominador y se convierte en $t^4$

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

$s^{-2}$ pasa al numerador y se convierte en $s^2$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

**(b)** Usamos la Ley 6, que nos permite cambiar el signo del exponente de una fracción al invertir la fracción.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

## Notación científica

Los científicos usan notación exponencial como una forma compacta de escribir números muy grandes y números muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana además del Sol, Proxima Centauri, está aproximadamente a 40,000,000,000,000 de km de distancia. La masa del átomo de hidrógeno es alrededor de 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y escribir, de modo que los científicos por lo general los expresan en *notación científica.*

### NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se dice que un número positivo $x$ está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando decimos que la distancia a la estrella Proxima Centauri es $4 \times 10^{13}$ km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal debe recorrerse 13 lugares a la *derecha:*

$$4 \times 10^{13} = 40{,}000{,}000{,}000{,}000$$

Mueva el punto decimal 13 lugares a la derecha

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es $1.66 \times 10^{-24}$ g, el exponente $-24$ indica que el punto decimal debe moverse 24 lugares a la *izquierda:*

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mueva el punto decimal 24 lugares a la izquierda

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

Aun cuando no observamos su presencia, las matemáticas permean casi todos los aspectos de la vida en el mundo moderno. Con el advenimiento de la moderna tecnología, las matemáticas desempeñan una función cada vez más grande en nuestras vidas. Hoy en día es probable que alguien sea despertado por un reloj de alarma digital, hizo una llamada telefónica con transmisión digital, envió un mensaje de e-mail en la Internet, manejó un auto con inyección controlada digitalmente, escuchó música en un reproductor de CD o MP3, quizá vio televisión digital o un DVD, luego durmió en una habitación cuya temperatura estaba controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas intervienen en forma decisiva. En general, una propiedad, como por ejemplo la intensidad o frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape de un auto, los colores en una imagen, o la temperatura de una habitación, son transformados en sucesiones de números por refinados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, que suelen estar formados por muchos millones de bits (los dígitos 0 y 1), son transmitidos y reinterpretados. Trabajar con estas cantidades enormes de datos no fue posible sino hasta la invención de computadoras, máquinas cuyos procesos lógicos fueron inventados por matemáticos.

Las aportaciones de las matemáticas en el mundo moderno no están limitadas a avances tecnológicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se emplean ahora para analizar complejos problemas en ciencias sociales, políticas y biológicas en formas nuevas y sorprendentes. Los avances en matemáticas continúan y, algunos de los más emocionantes, se dieron tan sólo en la década pasada.

En otro libro, llamado *Mathematics in the Modern World*, describiremos con más detalle el modo en que las matemáticas influyen en nuestras actividades diarias.

## EJEMPLO 6 | Cambio de notación decimal a científica

En notación científica, escriba cada uno de los números siguientes.

**(a)** 56,920 **(b)** 0.000093

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\underbrace{56{,}920}_{\text{4 lugares}} = 5.692 \times 10^4$ **(b)** $\underbrace{0.000093}_{\text{5 lugares}} = 9.3 \times 10^{-5}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79**

Para usar notación científica en una calculadora, presione la tecla marcada EE o EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para ingresar el número $3.629 \times 10^{15}$ en una calculadora TI-83, ingresamos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

Con frecuencia se usa notación científica en una calculadora para ver un número muy grande o uno muy pequeño. Por ejemplo, si usamos calculadora para elevar al cuadrado el número 1,111,111, la pantalla puede exhibir (dependiendo del modelo de calculadora) la aproximación

1.234568 12 o 1.23468 E12

Aquí los dígitos finales indican la potencia de 10 e interpretamos el resultado como

$$1.234568 \times 10^{12}$$

## EJEMPLO 7 | Cálculo con notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use calculadora para aproximar el cociente $ab/c$.

**SOLUCIÓN** Podríamos ingresar los datos usando notación científica, o bien, podríamos usar leyes de exponentes como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36} \end{aligned}$$

En el Apéndice *Cálculo de cifras significativas* vea guías para trabajar con cifras significativas.

Expresamos la respuesta redondeada a dos cifras significativas porque el menos preciso de los números dados se expresa a dos cifras significativas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **83** Y **85**

## Radicales

Sabemos lo que $2^n$ significa siempre que $n$ sea un entero. Para dar significado a una potencia, por ejemplo $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar radicales.

El símbolo $\sqrt{\phantom{x}}$ significa "la raíz positiva de". Entonces

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa que} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y $-3$, pero la notación $\sqrt{9}$ está reservada para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si deseamos tener la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es $-3$.

Como $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces $n$. La raíz $n$ de $x$ es el número que, cuando se eleva a la $n$ potencia, dará $x$.

### DEFINICIÓN DE UNA RAÍZ $n$

Si $n$ es cualquier entero positivo, entonces la **raíz $n$ principal** de $a$ se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{significa que } b^n = a$$

Si $n$ es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidas. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definida porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Nótese que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre es verdadera; lo es sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas empleadas para trabajar con raíces $n$ se citan en el recuadro siguiente. En cada propiedad suponemos que existen todas las raíces dadas.

### PROPIEDADES DE RAÍCES $n$

| Propiedad | Ejemplo |
|---|---|
| **1.** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$ |
| **2.** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ | $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$ |
| **3.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ | $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$ |
| **4.** $\sqrt[n]{a^n} = a$ si $n$ es impar | $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$, $\sqrt[5]{2^5} = 2$ |
| **5.** $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ si $n$ es par | $\sqrt[4]{(-3)^4} = \lvert -3 \rvert = 3$ |

## EJEMPLO 8 | Simplificación de expresiones con raíces $n$

**(a)** $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 x}$ — Factorice el cubo más grande

$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x}$ — Propiedad 1: $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$

$= x\sqrt[3]{x}$ — Propiedad 4: $\sqrt[3]{a^3} = a$

**(b)** $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ — Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}\,|y|$ — Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$= 3x^2|y|$ — Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $|x^2| = x^2$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

Con frecuencia es útil combinar radicales semejantes en una expresión, por ejemplo $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Esto se puede hacer usando la Propiedad Distributiva. Así,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

El siguiente ejemplo ilustra más aún este proceso.

Evite el siguiente error:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{Error!}$$

### EJEMPLO 9 | Combinación de radicales

**(a)** $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ — Factorice los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ — Propiedad Distributiva

**(b)** Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ — Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ — Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ — Propiedad Distributiva

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

## Exponentes racionales

Para definir lo que significa *exponente racional*, o bien, lo que es lo mismo, un *exponente fraccionario*, como por ejemplo $a^{1/3}$, necesitamos usar radicales. Para dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de forma que sea consistente con las Leyes de Exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, por la definición de la raíz $n$,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos exponentes racionales como sigue:

**DEFINICIÓN DE EXPONENTES RACIONALES**

Para cualquier exponente racional $m/n$ en sus términos más elementales, donde $m$ y $n$ son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o lo que es equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si $n$ es par, entonces requerimos que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que *las Leyes de Exponentes también se cumplen para exponentes racionales.*

### EJEMPLO 10 | Uso de la definición de exponentes racionales

**(a)** $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

**(b)** $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ — Solución alternativa: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

**(c)** $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$ **(d)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

**DIOFANTO** Vivió en Alejandría hacia el año 250 d.C. Su libro *Arithmetica* es considerado el primer libro de álgebra donde da métodos para hallar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Arithmetica* fue leído y estudiado durante más de mil años. Fermat (vea página 99) hizo algunos de sus más importantes descubrimientos cuando estudiaba este libro. La mayor aportación de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aun cuando su simbolismo no es tan sencillo como el que usamos ahora, fue un avance considerable para escribir todo en palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\alpha\,\varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\gamma}\zeta\mathring{M}\varepsilon\iota^{\sigma}\kappa\delta$$

Nuestra moderna notación algebraica no entró en uso común sino hasta el siglo XVII.

## EJEMPLO 11 | Uso de las leyes de exponentes con exponentes racionales

(a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

(b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ — Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ — Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ — Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

(d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ — Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ — Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ — Leyes 1 y 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63, 67** Y **69**

## EJEMPLO 12 | Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

(a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ — Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ — Ley 1

(b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ — Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ — Ley 1

$= x^{3/4}$ — Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **71** Y **75**

## ▼ Racionalización del denominador

A veces es útil eliminar el radical en un denominador al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión apropiada. Este procedimiento se denomina **racionalización del denominador.** Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a}$. Al hacer esto multiplicamos por 1 la cantidad dada, de modo que no cambiamos su valor. Por ejemplo,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Nótese que el denominador de la última fracción no contiene radical. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizará el denominador, porque (para $a > 0$)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

## EJEMPLO 13 | Racionalización de denominadores

Esto es igual a 1

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

**(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

**(c)** $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}}\dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **89** Y **91**

## 1.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir el producto $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ como ______.
   **(b)** En la expresión $3^4$, el número 3 se denomina______, y el número 4 se llama______.
2. **(a)** Cuando multiplicamos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $3^4 \cdot 3^5 =$ ______.
   **(b)** Cuando dividimos dos potencias con la misma base, ______ los exponentes. Por tanto, $\dfrac{3^5}{3^2} =$ ______.
3. **(a)** Usando notación exponencial, podemos escribir $\sqrt[3]{5}$ como ______.
   **(b)** Usando radicales, podemos escribir $5^{1/2}$ como ______.
   **(c)** ¿Hay diferencia entre $\sqrt{5^2}$ y $(\sqrt{5})^2$? Explique.
4. Explique qué significa $4^{3/2}$ y, a continuación, calcule $4^{3/2}$ en dos formas diferentes:
   $(4^{1/2})^{\square} =$ ________ o $(4^3)^{\square} =$ ________
5. Explique cómo racionalizar un denominador y luego complete los siguientes pasos para racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$:
   $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\square}{\square} = \square$
6. Encuentre la potencia faltante en el siguiente cálculo:
   $5^{1/3} \cdot 5^{\square} = 5$.

### HABILIDADES

**7-14** ■ Escriba cada expresión radical usando exponentes, y cada expresión exponencial usando radicales.

| | Expresión radical | Expresión exponencial |
|---|---|---|
| 7. | $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ | |
| 8. | $\sqrt[3]{7^2}$ | |
| 9. | | $4^{2/3}$ |
| 10. | | $11^{-3/2}$ |
| 11. | $\sqrt[5]{5^3}$ | |
| 12. | | $2^{-1.5}$ |
| 13. | | $a^{2/5}$ |
| 14. | $\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$ | |

**15-24** ■ Evalúe cada expresión.

15. **(a)** $-3^2$ **(b)** $(-3)^2$ **(c)** $(\frac{1}{3})^4(-3)^2$
16. **(a)** $5^4 \cdot 5^{-2}$ **(b)** $\dfrac{10^7}{10^4}$ **(c)** $\dfrac{3}{3^{-2}}$
17. **(a)** $(\frac{5}{3})^0 2^{-1}$ **(b)** $\dfrac{2^{-3}}{3^0}$ **(c)** $(\frac{1}{4})^{-2}$
18. **(a)** $(-\frac{2}{3})^{-3}$ **(b)** $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ **(c)** $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$
19. **(a)** $\sqrt{16}$ **(b)** $\sqrt[4]{16}$ **(c)** $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$
20. **(a)** $\sqrt{64}$ **(b)** $\sqrt[3]{-64}$ **(c)** $\sqrt[5]{-32}$
21. **(a)** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **(b)** $\sqrt[4]{256}$ **(c)** $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$
22. **(a)** $\sqrt{7}\sqrt{28}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$
23. **(a)** $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ **(b)** $(-32)^{2/5}$ **(c)** $-32^{2/5}$
24. **(a)** $1024^{-0.1}$ **(b)** $(-\frac{27}{8})^{2/3}$ **(c)** $(\frac{25}{64})^{3/2}$

**25-28** ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

25. $\sqrt{x^2 + y^2}$
26. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$
27. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$
28. $(xy)^{2z}$

**29-34** ■ Simplifique la expresión.

29. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$
30. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$
31. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$
32. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$
33. $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$
34. $\sqrt[3]{2y^4} - \sqrt[3]{y}$

**35-40** ■ Simplifique cada expresión.

35. **(a)** $x^8x^2$ **(b)** $(3y^2)(4y^5)$ **(c)** $x^2x^{-6}$
36. **(a)** $x^{-5}x^3$ **(b)** $w^{-2}w^{-4}w^6$ **(c)** $z^5z^{-3}z^{-4}$
37. **(a)** $\dfrac{y^{10}y^0}{y^7}$ **(b)** $\dfrac{x^6}{x^{10}}$ **(c)** $\dfrac{a^9a^{-2}}{a}$
38. **(a)** $\dfrac{z^2z^4}{z^3z^{-1}}$ **(b)** $(2y^2)^3$ **(c)** $(8x)^2$

**39.** **(a)** $(a^2a^4)^3$ **(b)** $\left(\dfrac{a^2}{4}\right)^3$ **(c)** $(3z)^2(6z^2)^{-3}$

**40.** **(a)** $(2z^2)^{-5}z^{10}$ **(b)** $(2a^3a^2)^4$ **(c)** $\left(\dfrac{3x^4}{4x^2}\right)^2$

**41-52** ■ Simplifique la expresión y elimine cualquier exponente(s) negativo(s).

**41.** **(a)** $(4x^2y^4)(2x^5y)$ **(b)** $(8a^2z)(\frac{1}{2}a^3z^4)$

**42.** **(a)** $b^4(3ab^3)(2a^2b^{-5})$ **(b)** $(2s^3t^{-2})(\frac{1}{4}s^7t)(16t^4)$

**43.** **(a)** $(5x^2y^3)(3x^2y^5)^4$ **(b)** $(2a^3b^2)^2(5a^2b^5)^3$

**44.** **(a)** $(s^{-2}t^2)^2(s^2t)^3$ **(b)** $(2u^2v^3)^3(3u^{-3}v)^2$

**45.** **(a)** $\dfrac{6y^3z}{2yz^2}$ **(b)** $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^2y^2z)^3}$

**46.** **(a)** $\dfrac{2x^3y^4}{x^5y^3}$ **(b)** $\dfrac{(2v^3w)^2}{v^3w^2}$

**47.** **(a)** $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^5\left(\dfrac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ **(b)** $\dfrac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

**48.** **(a)** $\left(\dfrac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\dfrac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ **(b)** $\dfrac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

**49.** **(a)** $\dfrac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

**50.** **(a)** $\dfrac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

**51.** **(a)** $\left(\dfrac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ **(b)** $\left(\dfrac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

**52.** **(a)** $\left(\dfrac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)$ **(b)** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

**53-60** ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras denotan cualesquier números reales.

**53.** $\sqrt[4]{x^4}$ **54.** $\sqrt[5]{x^{10}}$

**55.** $\sqrt[4]{16x^8}$ **56.** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

**57.** $\sqrt[6]{64a^6b^7}$ **58.** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

**59.** $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ **60.** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

**61-70** ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

**61.** **(a)** $x^{3/4}x^{5/4}$ **(b)** $y^{2/3}y^{4/3}$

**62.** **(a)** $(4b)^{1/2}(8b^{1/4})$ **(b)** $(3a^{3/4})^2(5a^{1/2})$

**63.** **(a)** $\dfrac{w^{4/3}w^{2/3}}{w^{1/3}}$ **(b)** $\dfrac{s^{5/2}(2s^{5/4})^2}{s^{1/2}}$

**64.** **(a)** $(8y^3)^{-2/3}$ **(b)** $(u^4v^6)^{-1/3}$

**65.** **(a)** $(8a^6b^{3/2})^{2/3}$ **(b)** $(4a^6b^8)^{3/2}$

**66.** **(a)** $(x^{-5}y^{1/3})^{-3/5}$ **(b)** $(2x^3y^{-1/4})^2(8y^{-3/2})^{-1/3}$

**67.** **(a)** $\dfrac{(8s^3t^3)^{2/3}}{(s^4t^{-8})^{1/4}}$ **(b)** $\dfrac{(32y^{-5}z^{10})^{1/5}}{(64y^6z^{-12})^{-1/6}}$

**68.** **(a)** $\left(\dfrac{x^8y^{-4}}{16y^{4/3}}\right)^{-1/4}$ **(b)** $\left(\dfrac{-8y^{3/4}}{y^3z^6}\right)^{-1/3}$

**69.** **(a)** $\left(\dfrac{x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{1/6}$ **(b)** $\left(\dfrac{4y^3z^{2/3}}{x^{1/2}}\right)^2\left(\dfrac{x^{-3}y^6}{8z^4}\right)^{1/3}$

**70.** **(a)** $\left(\dfrac{a^{1/6}b^{-3}}{x^{-1}y}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$ **(b)** $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}\left(\dfrac{3s^{-2}}{4t^{1/3}}\right)^{-1}$

**71-76** ■ Simplifique la expresión y elimine cualesquier exponente(s) negativo(s). Suponga que todas las letras denotan números positivos.

**71.** **(a)** $\sqrt[6]{y^5}\sqrt[3]{y^2}$ **(b)** $(5\sqrt[3]{x})(2\sqrt[4]{x})$

**72.** **(a)** $\sqrt[4]{b^3}\sqrt{b}$ **(b)** $(2\sqrt{a})(\sqrt[3]{a^2})$

**73.** **(a)** $\sqrt{4st^3}\sqrt[6]{s^3t^2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}$

**74.** **(a)** $\sqrt[5]{x^3y^2}\sqrt[10]{x^4y^{16}}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[3]{8x^2}}{\sqrt{x}}$

**75.** **(a)** $\sqrt[3]{y\sqrt{y}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{16u^3v}{uv^5}}$

**76.** **(a)** $\sqrt{s\sqrt{s^3}}$ **(b)** $\sqrt[3]{\dfrac{54x^2y^4}{2x^5y}}$

**77-78** ■ Escriba cada número en notación científica.

**77.** **(a)** 69,300,000 **(b)** 7,200,000,000,000
**(c)** 0.000028536 **(d)** 0.0001213

**78.** **(a)** 129,540,000 **(b)** 7,259,000,000
**(c)** 0.0000000014 **(d)** 0.0007029

**79-80** ■ Escriba cada número en notación decimal.

**79.** **(a)** $3.19 \times 10^5$ **(b)** $2.721 \times 10^8$
**(c)** $2.670 \times 10^{-8}$ **(d)** $9.999 \times 10^{-9}$

**80.** **(a)** $7.1 \times 10^{14}$ **(b)** $6 \times 10^{12}$
**(c)** $8.55 \times 10^{-3}$ **(d)** $6.257 \times 10^{-10}$

**81-82** ■ Escriba en notación científica el número indicado en cada enunciado.

**81.** **(a)** Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es alrededor de 5,900,000,000,000 millas.

**(b)** El diámetro de un electrón alrededor de 0.0000000000004 centímetros.

**(c)** Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

**82.** **(a)** La distancia de la Tierra al Sol es de unos 93 millones de millas.

**(b)** La masa de una molécula de oxígeno es de unos 0.000000000000000000000053 g.

**(c)** La masa de la Tierra es de unos 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg.

**83-88** ■ Use notación científica, las Leyes de Exponentes, y una calculadora para ejecutar las operaciones indicadas. Exprese su respuesta redondeada al número de dígitos significativos indicados por los datos dados.

**83.** $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

**84.** $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

**85.** $\dfrac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

**86.** $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

**87.** $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594{,}621{,}000)(0.0058)}$

**88.** $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

**89-92** ■ Racionalice el denominador.

**89.** **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

**90.** **(a)** $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{x}{6}}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{y}{2z}}$

**91.** **(a)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ **(b)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ **(c)** $\dfrac{x}{y^{2/5}}$

**92.** **(a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **(b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **(c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

**93.** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

**(a)** $b^5$ **(b)** $b^{10}$ **(c)** $ab^2c^3$

**(d)** $(b - a)^3$ **(e)** $(b - a)^4$ **(f)** $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

**94.** Demuestre las Leyes de Exponentes dadas para el caso en que $m$ y $n$ sean enteros positivos y $m > n$.

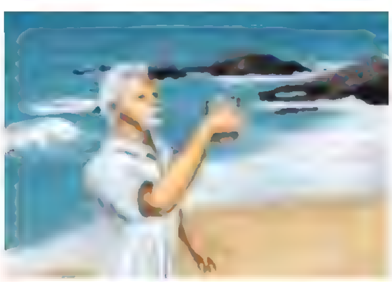
**(a)** Ley 2 **(b)** Ley 5 **(c)** Ley 6

## APLICACIONES

**95. Distancia a la estrella más cercana** Proxima Centauri, la estrella más cercana a nuestro sistema solar, está a 4.3 años luz de distancia. Use la información del Ejercicio 81(a) para expresar esta distancia en millas.

**96. Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de unas 186,000 mi/s. Use la información del Ejercicio 82(a) para hallar cuánto tarda un rayo de luz del Sol en llegar a la Tierra.

**97. Volumen de los océanos** El promedio de profundidad de los océanos es $3.7 \times 10^3$ m y el área de los océanos es $3.6 \times 10^{14}$ m$^2$. ¿Cuál es el volumen total del océano en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



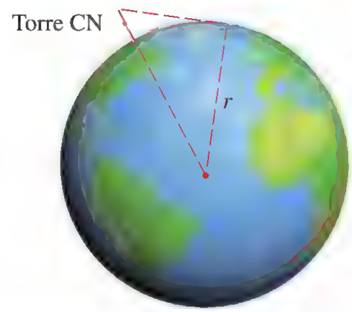
**98. Deuda nacional** Al mes de julio de 2010, la población de Estados Unidos era de $3.070 \times 10^8$, y la deuda nacional era de $1.320 \times 10^{13}$ dólares. ¿Cuánto era la parte que adeuda cada persona?

**99. Número de moléculas** Una sala sellada de un hospital, con medidas de 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto, está llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 L, y 22.4 L de cualquier gas contienen $6.02 \times 10^{23}$ moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en la sala?

**100. ¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima $D$ a la que se puede ver desde lo alto de un edificio de altura $h$ se calcula con la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y $D$ y $h$ también se miden en millas. ¿A qué distancia se puede ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, que está a 1135 pies sobre el suelo?




**101. Rapidez de un auto que patina** La policía usa la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para calcular la rapidez $s$ (en mi/h) a la que un auto se desplaza si patina $d$ pies después de aplicar repentinamente los frenos. El número $f$ es el coeficiente de fricción del pavimento, que es una medida de lo "resbaloso" de la carretera. La tabla siguiente da algunos cálculos comunes para $f$.

| | Asfalto | Concreto | Grava |
|---|---|---|---|
| **Seco** | 1.0 | 0.8 | 0.2 |
| **Mojado** | 0.5 | 0.4 | 0.1 |

**(a)** Si un auto patina 65 pies en concreto mojado, ¿cuál era su velocidad cuando se aplicaron los frenos?

**(b)** Si un auto corre a 50 mi/h, ¿cuánto patinará en asfalto mojado?

**102. Distancia de la Tierra al Sol** Se deduce de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento planetario, que el promedio de distancia de un planeta al Sol (en metros) es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² es la constante gravitacional, y $T$ es el período de la órbita del planeta (en segundos). Use el dato de que el período de la órbita de la Tierra es de alrededor de 365.25 días para hallar la distancia de la Tierra al Sol.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**103. ¿Cuánto es mil millones?** Si usted tuviera un millón ($10^6$) de dólares en una maleta, y gastara mil dólares ($10^3$) al día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Gastando al mismo paso, ¿cuántos años tardaría en vaciar la maleta llena con *mil millones* ($10^9$) de dólares?

**104. Potencias fáciles que se ven difíciles** Calcule mentalmente estas expresiones. Use la ley de exponentes como ayuda.

**(a)** $\dfrac{18^5}{9^5}$ **(b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

**105. Límite del comportamiento de potencias** Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre a la $n$ raíz de 2 cuando $n$ se hace grande? ¿Qué se puede decir acerca de la $n$ raíz de $\frac{1}{2}$?

| $n$ | $2^{1/n}$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 5 | |
| 10 | |
| 100 | |

| $n$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 5 | |
| 10 | |
| 100 | |

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué ocurre a la $n$ raíz de $n$ cuando $n$ se hace grande?

**106. Comparación de raíces** Sin usar calculadora, determine cuál número es más grande en cada par.

**(a)** $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

**(c)** $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **(d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

# 1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ▶ Multiplicación de expresiones algebraicas ▶ Fórmulas de productos notables ▶ Factorización de factores comunes ▶ Factorización de trinomios ▶ Fórmulas especiales de factorización ▶ Factorización por agrupación de términos

Una **variable** es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo $x$, $y$ y $z$, y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una **expresión algebraica.** Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma $ax^k$, donde $a$ es un número real y $k$ es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

### POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable $x$ es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y $n$ es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado *n***. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

| Polinomio | Tipo | Términos | Grado |
|---|---|---|---|
| $2x^2 - 3x + 4$ | trinomio | $2x^2,\ -3x,\ 4$ | 2 |
| $x^8 + 5x$ | binomio | $x^8,\ 5x$ | 8 |
| $3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$ | cuatro términos | $-\frac{1}{2}x^3,\ x^2,\ -x,\ 3$ | 3 |
| $5x + 1$ | binomio | $5x,\ 1$ | 1 |
| $9x^5$ | monomial | $9x^5$ | 5 |
| 6 | monomial | 6 | 0 |

## Suma y resta de polinomios

**Propiedad Distributiva**

$ac + bc = (a + b)c$

**Sumamos** y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales que vimos en la Sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

### EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

**(a)** Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

**(b)** Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ — Combine términos semejantes

**(b)** $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ — Propiedad Distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ — Agrupe términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ — Combine términos semejantes

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15** Y **17**

## Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = \underset{\text{F}}{ac} + \underset{\text{O}}{ad} + \underset{\text{I}}{bc} + \underset{\text{L}}{bd}$$

El acrónimo **FOIL** nos ayuda a recordar que el producto de dos binomios es la suma de los productos de los primeros (***F**irst*) términos, los términos externos (***O**uter*), los términos internos (***I**nner*) y los últimos (***L**ast*).

En general, podemos multiplicar dos expresiones algebraicas usando para ello la Propiedad Distributiva y las Leyes de Exponentes.

**EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando FOIL**

$$(2x + 1)(3x - 5) = \underset{\text{F}}{6x^2} - \underset{\text{O}}{10x} + \underset{\text{I}}{3x} - \underset{\text{L}}{5} \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= 6x^2 - 7x - 5 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

**EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios**

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

**SOLUCIÓN 1:** Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes}\\ &= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}\end{aligned}$$

**SOLUCIÓN 2:** Usando forma de tabla

$$\begin{array}{rrrrl} & x^2 & -\,5x & +\,4 & \\ & & 2x & +\,3 & \\ \hline & 3x^2 & -\,15x & +\,12 & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 3\\ 2x^3 & -\,10x^2 & +\,8x & & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x\\ \hline 2x^3 & -\,7x^2 & -\,7x & +\,12 & \text{Sume términos}\end{array}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

## Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

Vea en el *Proyecto de descubrimiento,* citado en la página 34, una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

**FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES**

Si $A$ y $B$ son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ — Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ — Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ — Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ — Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ — Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo $x^2$ por $A$ y $y^3$ por $B$, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

## EJEMPLO 4 | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

**(a)** $(3x + 5)^2$ **(b)** $(x^2 - 2)^3$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

**(b)** Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3\\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **41**

## EJEMPLO 5 | Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

**(a)** $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ **(b)** $(x + y - 1)(x + y + 1)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

**(b)** Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1]\\ &= (x + y)^2 - 1^2 && \text{Fórmula de Producto 1}\\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 && \text{Fórmula de Producto 2}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**

## Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

### EJEMPLO 6 | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

**(a)** $3x^2 - 6x$ **(b)** $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

**(c)** $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

La multiplicación da

$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$ ✔

**(b)** Observamos que

8, 6 y −2 tienen el máximo factor común 2

$x^4$, $y^3$ y $x$ tienen el máximo factor común $x$

$y^2$, $y^3$ y $y^4$ tienen el máximo factor común $y^2$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2$$
$$= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

La multiplicación da

$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$
$= 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$ ✔

**(c)** Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) = [(2x + 4) - 5](x - 3) \quad \text{Propiedad Distributiva}$$
$$= (2x - 1)(x - 3) \quad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63** Y **65**

## Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números $r$ y $s$ tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

### EJEMPLO 7 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

**SOLUCIÓN** Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

factores de 12

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por tanto, tratamos de hallar números $p$, $q$, $r$ y $s$ tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir $p$, $q$, $r$ y $s$.

factores de $a$

$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$

factores de $c$

### EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

**SOLUCIÓN** Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y $-5$ como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de $-5$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

### EJEMPLO 9 | Reconocer la forma de una expresión

Factorice lo siguiente.

**(a)** $x^2 - 2x - 3$ **(b)** $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

**(b)** Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\square$ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la expresión de la parte (a), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3 = [(5a + 1) - 3][(5a + 1) + 1]$$

$$= (5a - 2)(5a + 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

## Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

**FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN**

| Fórmula | Nombre |
|---|---|
| **1.** $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ | Diferencia de cuadrados |
| **2.** $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ | Cuadrado perfecto |
| **3.** $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ | Cuadrado perfecto |
| **4.** $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ | Diferencia de cubos |
| **5.** $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ | Suma de cubos |

### EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

**(a)** $4x^2 - 25$ **(b)** $(x + y)^2 - z^2$

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**Cambio de palabras, sonido e imágenes en números**

Imágenes, sonido y texto se transmiten rutinariamente de un lugar a otro por la Internet, aparatos de fax o módem. ¿Cómo pueden estas cosas transmitirse por cables telefónicos? La clave para hacer esto es cambiarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo cambiar texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101, y así sucesivamente. La palabra "BED" (CAMA) se convierte entonces en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho, es posible transformar este número de nuevo a la palabra "BED".

Cambiar sonidos a bits es más complicado. Una onda de sonido puede ser graficada en un osciloscopio o en computadora. La gráfica se descompone a continuación matemáticamente en componentes más sencillos correspondientes a las diferentes frecuencias del sonido original. (Aquí se usa una rama de las matemáticas de nombre Análisis de Fourier.) La intensidad de cada componente es un número, y el sonido original puede reconstruirse a partir de estos números. Por ejemplo, se almacena música en un CD como una sucesión de bits; puede verse como 101010001010010100101010 1000001011110101000101011.... (Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits). El reproductor de CD reconstruye la música a partir de los números presentes en el CD.

Cambiar imágenes a números comprende expresar el color y brillantez de cada punto (o píxel) en un número. Esto se hace en forma muy eficiente usando una rama de las matemáticas llamada teoría ondulatoria. El FBI emplea trenes de ondas como forma compacta de almacenar en archivo millones de huellas dactilares que necesitan.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

**(b)** Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **75** Y **109**

## EJEMPLO 11 | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

**(a)** $27x^3 - 1$ **(b)** $x^6 + 8$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]$$
$$= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$$

**(b)** Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79**

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

## EJEMPLO 12 | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

**(a)** $x^2 + 6x + 9$ **(b)** $4x^2 - 4xy + y^2$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

**(b)** Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **105** Y **107**

Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más. En general, *primero factorizamos factores comunes* y luego inspeccionamos el resultado para ver si puede ser factorizado por cualquiera de los otros métodos de esta sección. Repetimos este proceso hasta que hayamos factorizado completamente la expresión.

## EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

**(a)** $2x^4 - 8x^2$ **(b)** $x^5y^2 - xy^6$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero factorizamos la potencia de $x$ que tenga el exponente más pequeño.

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \quad \text{El factor común es } 2x^2$$
$$= 2x^2(x - 2)(x + 2) \quad \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

**(b)** Primero factorizamos las potencias de $x$ y de $y$ que tengan los exponentes más pequeños.

$$x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4) \quad \text{El factor común es } xy^2$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \quad \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \quad \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **115** Y **117**

---

En el siguiente ejemplo factorizamos variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se presenta en cálculo.

## EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

**(a)** $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ **(b)** $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Factorice la potencia de $x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} = 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) \quad \text{Factorice } 3x^{-1/2}$$
$$= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) \quad \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2$$

Para factorizar $x^{-1/2}$ de $x^{3/2}$, *restamos* exponentes:

$$x^{3/2} = x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)})$$
$$= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2})$$
$$= x^{-1/2}(x^2)$$

**(b)** Factorice la potencia de $2 + x$ que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $(2 + x)^{-2/3}$

$$(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} = (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] \quad \text{Factorice } (2 + x)^{-2/3}$$
$$= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) \quad \text{Simplifique}$$
$$= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) \quad \text{Factorice 2}$$

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

**(a)** $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$
$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✔

**(b)** $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$
$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **91** Y **93**

---

## Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

## EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

**(a)** $x^3 + x^2 + 4x + 4$ **(b)** $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ — Agrupe términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ — Factorice factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ — Factorice $x + 1$ de cada término

**(b)** $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ — Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ — Factorice factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ — Factorice $x - 2$ de cada término

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

## 1.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.

¿Cuántos términos tiene este polinomio? _____

Enliste los términos:______

¿Cuál factor es común a cada término?_____

Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ _____.

**2.** Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$, buscamos dos enteros cuyo producto sea____ y cuya suma sea____.

Estos enteros son ___ y ___, de modo que el trinomio se factoriza como_____.

**3.** La fórmula de productos notables para la "suma de un cuadrado" es $(A + B)^2 =$ ______.

Por tanto, $(2x + 3)^2 =$ ______.

**4.** La fórmula de productos notables para la "suma y diferencia de los mismos términos" es $(A + B)(A - B) =$ _________.

Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ __________.

**5.** La fórmula de factorización especial para "la diferencia de cuadrados" es $A^2 - B^2 =$ ______. Entonces, $4x^2 - 25$ se factoriza como _______.

**6.** La fórmula de factorización especial para un "cuadrado perfecto" es $A^2 + 2AB + B^2 =$ ______. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como _________.

### HABILIDADES

**7-12** ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

| Polinomio | Tipo | Términos | Grado |
|---|---|---|---|
| **7.** $x^2 - 3x + 7$ | | | |
| **8.** $2x^5 + 4x^2$ | | | |
| **9.** $-8$ | | | |
| **10.** $\frac{1}{2}x^7$ | | | |
| **11.** $x - x^2 + x^3 - x^4$ | | | |
| **12.** $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$ | | | |

**13-22** ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

**13.** $(12x - 7) - (5x - 12)$

**14.** $(5 - 3x) + (2x - 8)$

**15.** $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

**16.** $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

**17.** $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

**18.** $3(x - 1) + 4(x + 2)$

**19.** $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

**20.** $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

**21.** $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

**22.** $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

**23-28** ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando el método FOIL y simplifique.

**23.** $(3t - 2)(7t - 4)$

**24.** $(4s - 1)(2s + 5)$

**25.** $(3x + 5)(2x - 1)$

**26.** $(7y - 3)(2y - 1)$

**27.** $(x + 3y)(2x - y)$

**28.** $(4x - 5y)(3x - y)$

**29-44** ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

**29.** $(3x + 4)^2$

**30.** $(1 - 2y)^2$

**31.** $(2u + v)^2$

**32.** $(x - 3y)^2$

**33.** $(2x + 3y)^2$

**34.** $(r - 2s)^2$

**35.** $(x + 5)(x - 5)$

**36.** $(y - 3)(y + 3)$

**37.** $(3x - 4)(3x + 4)$

**38.** $(2y + 5)(2y - 5)$

**39.** $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

**40.** $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

**41.** $(y + 2)^3$ **42.** $(x - 3)^3$

**43.** $(1 - 2r)^3$ **44.** $(3 + 2y)^3$

**45-60** ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

**45.** $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ **46.** $(x + 1)(2x^2 - x + 1)$

**47.** $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ **48.** $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

**49.** $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ **50.** $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

**51.** $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$ **52.** $x^{1/4}(2x^{3/4} - x^{1/4})$

**53.** $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ **54.** $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

**55.** $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

**56.** $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

**57.** $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$

**58.** $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$

**59.** $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$ **60.** $(x + y + z)(x - y - z)$

**61-66** ■ Factorice el factor común.

**61.** $-2x^3 + 16x$ **62.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

**63.** $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **64.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

**65.** $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **66.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

**67-74** ■ Factorice el trinomio.

**67.** $x^2 + 2x - 3$ **68.** $x^2 - 6x + 5$

**69.** $8x^2 - 14x - 15$ **70.** $6y^2 + 11y - 21$

**71.** $3x^2 - 16x + 5$ **72.** $5x^2 - 7x - 6$

**73.** $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

**74.** $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

**75-82** ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

**75.** $9a^2 - 16$ **76.** $(x + 3)^2 - 4$

**77.** $27x^3 + y^3$ **78.** $a^3 - b^6$

**79.** $8s^3 - 125t^3$ **80.** $1 + 1000y^3$

**81.** $x^2 + 12x + 36$ **82.** $16z^2 - 24z + 9$

**83-88** ■ Factorice la expresión agrupando términos.

**83.** $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **84.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

**85.** $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **86.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

**87.** $x^3 + x^2 + x + 1$ **88.** $x^5 + x^4 + x + 1$

**89-94** ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

**89.** $x^{5/2} - x^{1/2}$ **90.** $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

**91.** $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$ **92.** $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

**93.** $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

**94.** $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

**95-124** ■ Factorice por completo la expresión.

**95.** $12x^3 + 18x$ **96.** $30x^3 + 15x^4$

**97.** $x^2 - 2x - 8$ **98.** $x^2 - 14x + 48$

**99.** $2x^2 + 5x + 3$ **100.** $2x^2 + 7x - 4$

**101.** $9x^2 - 36x - 45$ **102.** $8x^2 + 10x + 3$

**103.** $49 - 4y^2$ **104.** $4t^2 - 9s^2$

**105.** $t^2 - 6t + 9$ **106.** $x^2 + 10x + 25$

**107.** $4x^2 + 4xy + y^2$ **108.** $r^2 - 6rs + 9s^2$

**109.** $(a + b)^2 - (a - b)^2$ **110.** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

**111.** $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$ **112.** $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

**113.** $8x^3 - 125$ **114.** $x^6 + 64$

**115.** $x^3 + 2x^2 + x$ **116.** $3x^3 - 27x$

**117.** $x^4y^3 - x^2y^5$ **118.** $18y^3x^2 - 2xy^4$

**119.** $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ **120.** $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

**121.** $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

**122.** $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

**123.** $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

**124.** $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

**125-128** ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "Regla del Producto".)

**125.** $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

**126.** $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

**127.** $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

**128.** $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

**129.** **(a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

**(b)** Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

**(c)** Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

**(d)** Factorice por completo: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

**130.** Verifique las fórmulas especiales de factorización 4 y 5 al expandir sus lados derechos.

## APLICACIONES

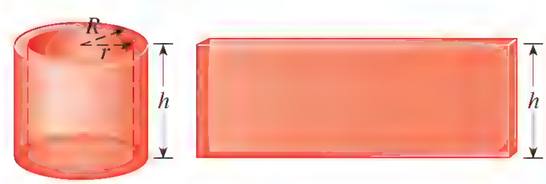
**131. Volumen de concreto** Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

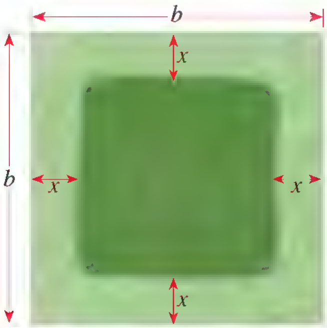
Use el diagrama "desenrollado" para explicar por qué esto tiene sentido geométricamente hablando.



**132. Podar un campo** Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide $b$ pies por $b$ pies, y la franja podada es de $x$ pies de ancho.

**(a)** Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

**(b)** Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**133. Grados de sumas y productos de polinomios** Forme varios pares de polinomios y, a continuación, calcule la suma y producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

**(a)** ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?

**(b)** ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?

**134. El poder de las fórmulas algebraicas** Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada pero no es tan fácil calcular la forma original en esta forma. Evalúe mentalmente cada expresión:

**(a)** $528^2 - 527^2$

**(b)** $122^2 - 120^2$

**(c)** $1020^2 - 1010^2$

A continuación, use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

**(d)** $79 \cdot 51$

**(e)** $998 \cdot 1002$

**135. Diferencias de potencias pares**

**(a)** Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.

**(b)** Verifique que $18{,}335 = 12^4 - 7^4$ y que $2{,}868{,}335 = 12^6 - 7^6$.

**(c)** Use los resultados de las partes (a) y (b) para factorizar los enteros 18,335 y 2,868,335. A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

**136. Factorización de $A^n - 1$** Verifique estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar $A^5 - 1$? Verifique su conjetura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde $n$ es un entero positivo.

**137. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$** A veces se puede factorizar con facilidad un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$. Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar así. En cambio, podemos usar el siguiente método.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \quad \text{Sume y reste } x^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - x^2 \quad \text{Factorice el cuadrado perfecto}$$
$$= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$
$$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$$

Factorice lo siguiente, usando cualquier método apropiado.

**(a)** $x^4 + x^2 - 2$

**(b)** $x^4 + 2x^2 + 9$

**(c)** $x^4 + 4x^2 + 16$

**(d)** $x^4 + 2x^2 + 1$

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Visualización de una fórmula**

En este proyecto descubrimos interpretaciones geométricas de algunas fórmulas de productos notables. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web del libro: **www.stewartmath.com**

# 1.4 EXPRESIONES RACIONALES

Dominio de una expresión algebraica ▶ Simplificación de expresiones racionales ▶ Multiplicación y división de expresiones racionales ▶ Suma y resta de expresiones racionales ▶ Fracciones compuestas ▶ Racionalización del denominador o el numerador ▶ Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria.** A continuación veamos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección aprendemos a ejecutar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

## ▼ Dominio de una expresión algebraica

| Expresión | Dominio |
|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\{x \mid x \neq 0\}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\{x \mid x \geq 0\}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $\{x \mid x > 0\}$ |

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

### EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

**(a)** $2x^2 + 3x - 1$ **(b)** $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Este polinomio está definido para toda $x$. Entonces, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de números reales.

**(b)** Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$

Como el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

**(c)** Para que el numerador esté definido, debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$ para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

## Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

**EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación**

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

**SOLUCIÓN**

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \quad \text{Factorice}$$

$$= \frac{x+1}{x+2} \quad \text{Cancele factores comunes}$$

No podemos cancelar las $x^2$ en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque $x^2$ no es un factor.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales,** usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

**EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales**

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

**SOLUCIÓN** Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2} \cdot \frac{3(x+4)}{x-1} \quad \text{Factorice}$$

$$= \frac{3(x-1)(x+3)(x+4)}{(x-1)(x+4)^2} \quad \text{Propiedad de fracciones}$$

$$= \frac{3(x+3)}{x+4} \quad \text{Cancele factores comunes}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Para **dividir expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto dice que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

### EJEMPLO 4 | División de expresiones racionales

Ejecute la división indicada y simplifique:

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$$

**SOLUCIÓN**

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4}$$ Invierta y multiplique

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}$$ Factorice

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$ Cancele factores comunes

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## Suma y resta de expresiones racionales

Evite hacer el siguiente error:

$$\frac{A}{B+C} \not= \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si hacemos $A = 2$, $B = 1$ y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{Error!}$$

Para **sumar o restar expresiones racionales,** primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD) como se explica en la Sección 1.1. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

### EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

**(a)** $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ **(b)** $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$ Escriba fracciones usando el MCD

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)}$$ Sume fracciones

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$$ Combine los términos del numerador

**(b)** El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} && \text{Factorice}\\ &= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine fracciones usando el MCD}\\ &= \frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Propiedad Distributiva}\\ &= \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2} && \text{Combine los términos del numerador}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **45**

## Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una fracción en la que el numerador, el denominador, o ambos, son expresiones fraccionarias.

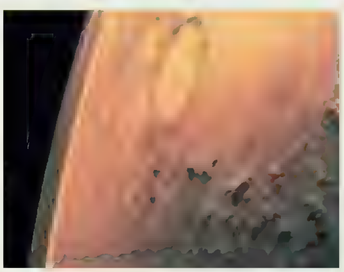
### EJEMPLO 6 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}}$

**SOLUCIÓN 1** Combinamos los términos del numerador en una sola fracción. Hacemos lo mismo con el denominador. A continuación invertimos y multiplicamos.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} &= \frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y}\cdot\frac{x}{x-y}\\ &= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}\end{aligned}$$

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**



Cortesía de NASA

**Códigos para corregir errores**

Las imágenes enviadas por la nave *Pathfinder (Explorador)* desde la superficie de Marte el 4 de julio de 1997, eran asombrosamente claras. Pero pocas personas que vieron estas imágenes estaban conscientes de las complejas matemáticas utilizadas para lograr esta hazaña. La distancia a Marte es enorme, y el ruido de fondo (o estática) es muchas veces más fuerte que la señal original emitida por la nave espacial. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, está llena de errores. Para obtener una imagen clara, los errores deben hallarse y corregirse. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria en la transmisión de registros bancarios cuando una persona usa un cajero automático o de voz cuando habla por teléfono.

Para entender la forma en que los errores se localizan y corrigen, primero debemos entender que para transmitir imágenes o texto los transformamos en bits (los dígitos 0 o 1; vea página 30). Para ayudar al receptor a reconocer errores, el mensaje se "codifica" al insertar bits adicionales. Por ejemplo, suponga que usted desea transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es como sigue: envía cada dígito un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si el primer bloque es principalmente de números 1, concluye que es probable que usted esté tratando de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es eficiente es un poco modesto; requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. Otro método inserta "dígitos de comprobación". Por ejemplo, cada bloque de ocho dígitos inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay un número par de números 1 en el bloque y 1 si hay un número impar. Por lo tanto, si un solo dígito está mal (un 0 cambiado a un 1, o viceversa), los dígitos de prueba nos permiten reconocer que ha ocurrido un error. Este método no nos dice dónde está el error, de modo que no podemos corregirlo. Los modernos códigos que corrigen errores usan interesantes algoritmos matemáticos que requieren insertar relativamente pocos dígitos pero permiten al receptor no sólo reconocer errores, sino también corregirlos. El primer código corrector de errores fue inventado en la década de 1940 por Richard Hamming en el MIT. Es interesante observar que el idioma inglés tiene un mecanismo corrector de errores ya integrado; para probarlo, trate de leer esta oración cargada de errores: Gve mo libty ox biv ne deth.

**SOLUCIÓN 2** Encontramos el MCD de todas las fracciones en la expresión y, a continuación, lo multiplicamos por el numerador y denominador. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es $xy$. Por lo tanto

$$\frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{x}{y}+1}{1-\frac{y}{x}}\cdot\frac{xy}{xy}$$ Multiplique numerador y denominador por $xy$

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2}$$ Simplifique

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$ Factorice

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **59** Y **61**

Los siguientes dos ejemplos muestran situaciones en cálculo que requieren la capacidad para trabajar con expresiones fraccionarias.

## EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$

**SOLUCIÓN** Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$ Combine fracciones del numerador

$$= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad 2 de fracciones (invierta divisor y multiplicar)

$$= \frac{a-a-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Propiedad Distributiva

$$= \frac{-h}{a(a+h)}\cdot\frac{1}{h}$$ Simplifique

$$= \frac{-1}{a(a+h)}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

## EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

**SOLUCIÓN 1** Factorice $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Factorice la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño*, en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2}-x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2)-x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

**SOLUCIÓN 2** Como $(1+x^2)^{-1/2} = 1/(1+x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos eliminar todas las fracciones al multiplicar numerador y denominador por $(1+x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

## Racionalización del denominador o el numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador al multiplicar numerador y denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto funciona bien, por la fórmula 1 de productos notables de la Sección 1.3, el producto del denominador y su radical conjugado no contienen radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

### EJEMPLO 9 | Racionalización del denominador

Racionalización del denominador: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado de $1+\sqrt{2}$, que es $1-\sqrt{2}$.

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 de productos notables

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

### EJEMPLO 10 | Racionalización del numerador

Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos numerador y denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h}+2$.

La Fórmula 1 de Productos Notables es $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$ Multiplique numerador y denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ Fórmula 1 de Productos Notables

$$= \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$ Propiedad 5 de fracciones (cancele factores comunes)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

## Evitar errores comunes

No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

| Propiedad correcta de multiplicación | Error común con la adición |
|---|---|
| $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ | $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ |
| $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$ | $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ |
| $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$ | $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ |
| $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$ | $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a + b}$ |
| $\frac{ab}{a} = b$ | $\frac{a + b}{a} \neq b$ |
| $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$ | $a^{-1} + b^{-1} \neq (a + b)^{-1}$ |

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números $a$ y $b$ y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

mientras que el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Como $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación indicada está en error. Del mismo modo, el lector debe convencerse del error en cada una de las otras ecuaciones. (Vea Ejercicio 105.)

## 1.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** De lo siguiente, ¿cuáles son expresiones racionales?

**(a)** $\frac{3x}{x^2 - 1}$ **(b)** $\frac{\sqrt{x + 1}}{2x + 3}$ **(c)** $\frac{x(x^2 - 1)}{x + 3}$

**2.** Para simplificar una expresión racional, cancelamos *factores* que son comunes al ______ y ______. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 2)}$$

se simplifica a ________.

**3.** Para multiplicar dos expresiones racionales, multiplicamos sus ________ y multiplicamos sus ________. Por tanto, $\frac{2}{x + 1} \cdot \frac{x}{x + 3}$ es lo mismo que ________.

**4.** Considere la expresión $\frac{1}{x} - \frac{2}{x + 1} - \frac{x}{(x + 1)^2}$.

**(a)** ¿Cuántos términos tiene esta expresión?

**(b)** Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.

**(c)** Ejecute la adición y simplifique.

### HABILIDADES

**5-12** ■ Encuentre el dominio de la expresión.

**5.** $4x^2 - 10x + 3$

**6.** $-x^4 + x^3 + 9x$

**7.** $\frac{2x + 1}{x - 4}$

**8.** $\frac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

**9.** $\sqrt{x + 3}$

**10.** $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$

**11.** $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

**12.** $\frac{\sqrt{2x}}{x + 1}$

**13-22** ■ Simplifique la expresión racional.

**13.** $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$ **14.** $\dfrac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$

**15.** $\dfrac{x-2}{x^2-4}$ **16.** $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

**17.** $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$ **18.** $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$

**19.** $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$ **20.** $\dfrac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$

**21.** $\dfrac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$ **22.** $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

**23-38** ■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

**23.** $\dfrac{4x}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{16x}$ **24.** $\dfrac{x^2-25}{x^2-16}\cdot\dfrac{x+4}{x+5}$

**25.** $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2-9}\cdot\dfrac{x+3}{x-5}$ **26.** $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}\cdot\dfrac{3-x}{3+x}$

**27.** $\dfrac{t-3}{t^2+9}\cdot\dfrac{t+3}{t^2-9}$ **28.** $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$

**29.** $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$

**30.** $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}\cdot\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$

**31.** $\dfrac{x+3}{4x^2-9}\div\dfrac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$

**32.** $\dfrac{2x+1}{2x^2+x-15}\div\dfrac{6x^2-x-2}{x+3}$

**33.** $\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15}\div\dfrac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$

**34.** $\dfrac{4y^2-9}{2y^2+9y-18}\div\dfrac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$

**35.** $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2+2x+1}}$ **36.** $\dfrac{\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{\dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x-2}}$

**37.** $\dfrac{x/y}{z}$ **38.** $\dfrac{x}{y/z}$

**39-58** ■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

**39.** $2+\dfrac{x}{x+3}$ **40.** $\dfrac{2x-1}{x+4}-1$

**41.** $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$ **42.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

**43.** $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ **44.** $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

**45.** $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$ **46.** $\dfrac{5}{2x-3}-\dfrac{3}{(2x-3)^2}$

**47.** $u+1+\dfrac{u}{u+1}$ **48.** $\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{3}{ab}+\dfrac{4}{b^2}$

**49.** $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$ **50.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

**51.** $\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{1}{x^2+7x+12}$ **52.** $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}$

**53.** $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$

**54.** $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-5x+4}$

**55.** $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-x}$

**56.** $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

**57.** $\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

**58.** $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{x^2-1}$

**59-68** ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

**59.** $\dfrac{x+\dfrac{1}{x+2}}{x-\dfrac{1}{x+2}}$ **60.** $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$

**61.** $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}}{x+2}$ **62.** $\dfrac{\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}}{x+3}$

**63.** $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$ **64.** $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

**65.** $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$ **66.** $\dfrac{x^{-1}+y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

**67.** $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ **68.** $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

**69-74** ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

**69.** $\dfrac{\dfrac{1}{1+x+h}-\dfrac{1}{1+x}}{h}$ **70.** $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}$

**71.** $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

**72.** $\dfrac{(x+h)^3-7(x+h)-(x^3-7x)}{h}$

**73.** $\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$ **74.** $\sqrt{1+\left(x^3-\dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

**75-80** ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "regla del cociente".)

**75.** $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2-(x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

**76.** $\dfrac{2x(x+6)^4-x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

**77.** $\dfrac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

**78.** $\dfrac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$

**79.** $\dfrac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

**80.** $\dfrac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$

**81-86** ■ Racionalice el denominador.

**81.** $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ **82.** $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

**83.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ **84.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

**85.** $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$ **86.** $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

**87-92** ■ Racionalice el numerador.

**87.** $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$ **88.** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

**89.** $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$ **90.** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

**91.** $\sqrt{x^2+1}-x$ **92.** $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

**93-100** ■ Diga si la ecuación dada es verdadera para todos los valores de las variables. (No considere ningún valor que haga que el denominador sea cero.)

**93.** $\dfrac{16+a}{16} = 1 + \dfrac{a}{16}$ **94.** $\dfrac{b}{b-c} = 1 - \dfrac{b}{c}$

**95.** $\dfrac{2}{4+x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{x}$ **96.** $\dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{x}{y}$

**97.** $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{1}{1+y}$ **98.** $2\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{2a}{2b}$

**99.** $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$ **100.** $\dfrac{1+x+x^2}{x} = \dfrac{1}{x} + 1 + x$

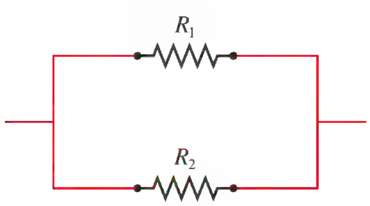
## APLICACIONES

**101. Resistencia eléctrica** Si dos resistores eléctricos con resistencias $R_1$ y $R_2$ se conectan en paralelo (vea la figura), entonces la resistencia total $R$ está dada por

$$R = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

**(a)** Simplifique $R$ de la expresión.

**(b)** Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia $R$ total?




**102. Costo promedio** Un fabricante de ropa encuentra que el costo de producir $x$ camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

**(a)** Explique por qué el costo promedio por camisa está dado por la expresión racional

$$A = \dfrac{500 + 6x + 0.01x^2}{x}$$

**(b)** Complete la tabla al calcular el costo promedio por camisa para los valores dados de $x$.

| $x$ | Costo promedio |
|---|---|
| 10 | |
| 20 | |
| 50 | |
| 100 | |
| 200 | |
| 500 | |
| 1000 | |

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

103. **Comportamiento límite de una expresión racional** La expresión racional

$$\dfrac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas y determine a cuál valor se aproxima la expresión cuando $x$ se acerca más y más a 3. ¿Por qué es esto razonable? Factorice el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

| $x$ | $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ |
|---|---|
| 2.80 | |
| 2.90 | |
| 2.95 | |
| 2.99 | |
| 2.999 | |

| $x$ | $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ |
|---|---|
| 3.20 | |
| 3.10 | |
| 3.05 | |
| 3.01 | |
| 3.001 | |

104. **¿Es esto racionalización?** En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Esto es lo mismo que racionalizar el denominador?

105. **Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, dé un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

| Error algebraico | Contraejemplo |
|---|---|
| $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$ | $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$ |
| $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$ | |
| $\sqrt{a^2+b^2} \neq a + b$ | |
| $\frac{a+b}{a} \neq b$ | |
| $(a^3+b^3)^{1/3} \neq a + b$ | |
| $a^m/a^n \neq a^{m/n}$ | |
| $a^{-1/n} \neq \frac{1}{a^n}$ | |

**106. La forma de una expresión algebraica** Una expresión algebraica puede parecer complicada, pero su "forma" siempre es fácil; debe ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1 + x^2)^2 + \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1 + x)\left(1 + \frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5 - x^3}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones apropiadas para $A$ y $B$, la primera tiene la forma $A + B$, la segunda $AB$, la tercera $A/B$ y la cuarta $A^{1/2}$. Reconociendo la forma de una expresión nos ayuda a expandirla, simplificarla o factorizarla correctamente. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

**(a)** $x + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ **(b)** $(1 + x^2)(1 + x)^3$

**(c)** $\sqrt[3]{x^4(4x^2 + 1)}$ **(d)** $\frac{1 - 2\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

# 1.5 Ecuaciones

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra $x$ es la variable. Consideramos $x$ como la "incógnita" de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de $x$ que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$$x = 3$$

$$4(3) + 7 = 19 \quad ✔$$

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones reciben el nombre de **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual". A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, $A$, $B$ y $C$ representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a".)

**PROPIEDADES DE LA IGUALDAD**

| Propiedad | Descripción |
|---|---|
| **1.** $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ | Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente. |
| **2.** $A = B \Leftrightarrow CA = CB \quad (C \neq 0)$ | Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente. |

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos "*sume* −7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* −7 a cada lado de la ecuación".

## ▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

### ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde $a$ y $b$ son números reales y $x$ es la variable.

A continuación veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

| Ecuaciones lineales | Ecuaciones no lineales | |
|---|---|---|
| $4x - 5 = 3$ | $x^2 + 2x = 8$ | No lineal; contiene el cuadrado de la variable |
| $2x = \frac{1}{2}x - 7$ | $\sqrt{x} - 6x = 0$ | No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable |
| $x - 6 = \dfrac{x}{3}$ | $\dfrac{3}{x} - 2x = 1$ | No lineal; contiene el recíproco de la variable |

### EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

**SOLUCIÓN** Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable $x$ en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4 \qquad \text{Sume 4}$$

$$7x = 3x + 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x \qquad \text{Reste } 3x$$

$$4x = 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot 4x = \tfrac{1}{4} \cdot 12 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{4}$$

$$x = 3 \qquad \text{Simplifique}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 3$:

$x = 3$: LI $= 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$: LD $= 3(3) + 8 = 17$

LI = LD ✔

Debido a que es importante VERIFICAR SU RESPUESTA, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir "lado izquierdo" y LD es "lado derecho" de la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional $F$ entre dos masas $m$ y $M$ que están a una distancia $r$ entre sí. La constante $G$ es la constante universal de gravitación.

## EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje $M$ de la ecuación siguiente.

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $M$ en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplifique}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

## EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial $A$ del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud $l$, el ancho $w$ y la altura $h$ de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Despeje $w$ en términos de las otras variables de esta ecuación.

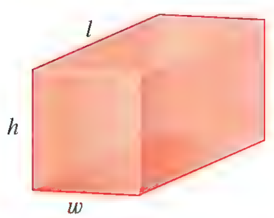



**FIGURA 1** Una caja rectangular cerrada

**SOLUCIÓN** Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar $w$ en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

**Ecuaciones cuadráticas**

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$3x + 10 = 4x^2$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6} = 0$$

### ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

> **PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO**
>
> $AB = 0$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

## EJEMPLO 4 | Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

**SOLUCIÓN** Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Reste 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Resuelva}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✔

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

¿Ve usted por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el Ejemplo 4? Factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no nos ayuda a encontrar soluciones, porque 24 se puede factorizar en un número infinito de formas, por ejemplo $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde $c$ es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

> **SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA**
>
> Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

## EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

**(a)** $x^2 = 5$ **(b)** $(x \quad 4)^2 = 5$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

**(b)** También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **51** Y **53**

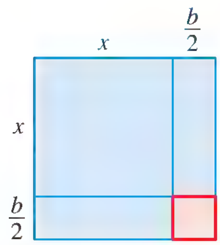
En la página 30 vea cómo reconocer cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

**Completar el cuadrado**

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.




Cuando complete el cuadrado, asegúrese que el coeficiente de $x^2$ sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan $x$:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

A continuación complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por $a$.

Como vimos en el Ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en $x$. Por lo tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado.** Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto, debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

### COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$. Esto da el cuadrado perfecto.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

## EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

**(a)** $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $3x^2 - 12x + 6 = 0$

### SOLUCIÓN

**(a)**

| | |
|---|---|
| $x^2 - 8x + 13 = 0$ | Ecuación dada |
| $x^2 - 8x = -13$ | Reste 13 |
| $x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ | Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ |
| $(x - 4)^2 = 3$ | Cuadrado perfecto |
| $x - 4 = \pm\sqrt{3}$ | Tome la raíz cuadrada |
| $x = 4 \pm \sqrt{3}$ | Sume 4 |

**(b)** Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de $x^2$ (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

| | |
|---|---|
| $3x^2 - 12x + 6 = 0$ | Ecuación dada |
| $3x^2 - 12x = -6$ | Reste 6 |
| $3(x^2 - 4x) = -6$ | Factorice 3 del lado izquierdo |

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

| | |
|---|---|
| $3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$ | Complete el cuadrado: sume 4 |
| $3(x - 2)^2 = 6$ | Cuadrado perfecto |
| $(x - 2)^2 = 2$ | Divida entre 3 |
| $x - 2 = \pm\sqrt{2}$ | Tome la raíz cuadrada |
| $x = 2 \pm \sqrt{2}$ | Sume 2 |

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**

Library of Congress

**FRANÇOIS VIÈTE** (1540-1603) tuvo una exitosa carrera política antes de dedicarse a las matemáticas en los últimos años de su vida. Fue uno de los más afamados matemáticos franceses del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra al usar letras para representar cantidades *conocidas* en una ecuación. Antes de la época de Viète, cada ecuación tenía que ser resuelta por sí misma. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

tenían que ser resueltas por separado completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas a la vez escribiendo

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ eran cantidades conocidas. De este modo, él hizo posible escribir una *fórmula* (en este caso, la fórmula cuadrática) con $a$, $b$ y $c$ que pueden usarse para resolver todas esas ecuaciones en un solo golpe.

El genio matemático de Viète resultó ser sumamente valioso durante una guerra entre Francia y España. Para comunicarse con sus tropas, los españoles utilizaban un complicado código que Viète se arregló para descifrarlo. Sin saber el logro de Viète, el rey español Felipe II protestó ante el Papa, diciendo que los franceses estaban usando brujería para leer los mensajes de los españoles.

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

**LA FÓRMULA CUADRÁTICA**

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**DEMOSTRACIÓN** Primero, dividimos entre $a$ cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Reste } \frac{b}{2a}$$

■

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El lector debe realizar los detalles de estos cálculos.

## EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

**(a)** $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$ **(c)** $x^2 + 2x + 2 = 0$

**SOLUCIÓN**

**(a)** En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$b = -5$

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$a = 3$ $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \quad \text{y} \quad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

**(b)** Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

**Otro método**

$$4x^2 + 12x + 9 = 0$$
$$(2x + 3)^2 = 0$$
$$2x + 3 = 0$$
$$x = -\tfrac{3}{2}$$

**(c)** Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **65, 69** Y **75**

En la Sección 3.5 estudiamos el sistema de números complejos, en el que existen las raíces cuadradas de números negativos. La ecuación del Ejemplo 7(c) tiene soluciones en el sistema de números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y está dada por el símbolo $D$. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definida y la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el Ejemplo 7(c). Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene sólo una solución real, como en el Ejemplo 7(b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el Ejemplo 7(a). El recuadro siguiente resume estas observaciones.

### EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

## EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

**(a)** $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

### SOLUCIÓN

**(a)** El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

**(b)** El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

**(c)** El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **79, 81** Y **83**

A continuación consideremos una situación real que puede ser modelada por una ecuación cuadrática.

## EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración debida a la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. Aquí despreciamos el efecto de la resistencia del aire.

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial $v_0$ pies/s alcanzará una altura de $h$ pies después de $t$ segundos, donde $h$ y $t$ están relacionadas por la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

**(a)** ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

**(b)** ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

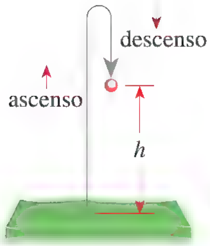



**FIGURA 2**

**(c)** ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

**(d)** ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?

**SOLUCIÓN** Como la velocidad inicial en este caso es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

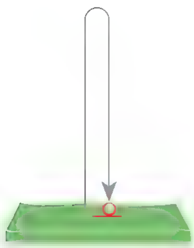
$$h = -16t^2 + 800t$$

**(a)** El nivel del suelo corresponde a $h = 0$, de modo que debemos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Haga } h = 0$$

$$0 = -16t(t - 50) \qquad \text{Factorice}$$

Por lo tanto, $t = 0$ o $t = 50$. Esto significa que la bala arranca ($t = 0$) al nivel del suelo y regresa a éste después de 50 segundos.



**(b)** Haciendo $h = 6400$ da la ecuación

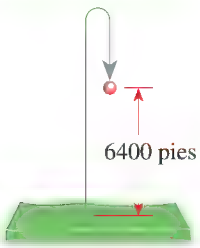
$$6400 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Haga } h = 6400$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \qquad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 400 = 0 \qquad \text{Divida entre 16}$$

$$(t - 10)(t - 40) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$t = 10 \quad \text{or} \quad t = 40 \qquad \text{Resuelva}$$



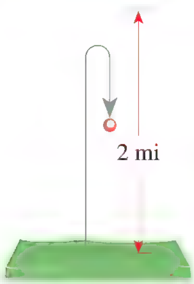

La bala llega a 6400 pies después de 10 s (en su ascenso) y otra vez después de 40 s (en su descenso a tierra).

**(c)** Dos millas es $2 \times 5280 = 10{,}560$ pies.

$$10{,}560 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Haga } h = 10{,}560$$

$$16t^2 - 800t + 10{,}560 = 0 \qquad \text{Todos los términos al lado izquierdo}$$

$$t^2 - 50t + 660 = 0 \qquad \text{Divida entre 16}$$

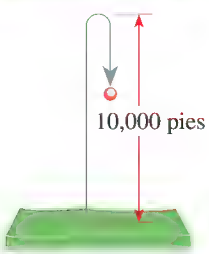



El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Entonces, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca llega a una altura de 2 millas.

**(d)** Cada altura a la que llega la bala es alcanzada dos veces, una vez en su ascenso y una vez en su descenso. La única excepción es el punto más alto de su trayectoria, que se alcanza una sola vez. Esto significa que para el valor más alto de $h$, la siguiente ecuación tiene sólo una solución para $t$:

$$h = -16t^2 + 800t$$

$$16t^2 - 800t + h = 0 \qquad \text{Alterne al lado izquierdo}$$




Esto a su vez significa que el discriminante $D$ de la ecuación es 0, de modo que

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0$$

$$640{,}000 - 64h = 0$$

$$h = 10{,}000$$

La máxima altura alcanzada es 10,000 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **111**

## Otros tipos de ecuaciones

Hasta aquí hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. A continuación estudiaremos otros tipos de ecuaciones, incluyendo las que contienen potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

## EJEMPLO 10 | Una ecuación que contiene expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

**SOLUCIÓN** Eliminamos los denominadores al multiplicar cada lado por el mínimo común denominador.

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) = 2x(x+2) \qquad \text{Multiplique por el MCD } x(x+2)$$

$$3(x+2) + 5x = 2x^2 + 4x \qquad \text{Expanda}$$

$$8x + 6 = 2x^2 + 4x \qquad \text{Expanda el lado izquierdo}$$

$$0 = 2x^2 - 4x - 6 \qquad \text{Reste } 8x + 6$$

$$0 = x^2 - 2x - 3 \qquad \text{Divida entre 2 ambos lados}$$

$$0 = (x-3)(x+1) \qquad \text{Factorice}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = 3 \qquad x = -1 \qquad \text{Resuelva}$$

Debemos verificar nuestras respuestas porque multiplicar por una expresión que contenga la variable puede introducir soluciones extrañas. De *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones son $x = 3$ y $-1$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 3$:

$$\text{LI} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} = 1 + 1 = 2$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad ✔$$

$x = -1$:

$$\text{LI} = \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} = -3 + 5 = 2$$

$$\text{LD} = 2$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

## EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

**SOLUCIÓN** Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$$2x - 1 = -\sqrt{2 - x} \qquad \text{Reste 1}$$

$$(2x - 1)^2 = 2 - x \qquad \text{Eleve al cuadrado cada lado}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \qquad \text{Expanda el lado izquierdo}$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad \text{Sume } -2 + x$$

$$(4x + 1)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \qquad x = 1 \qquad \text{Resuelva}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{LI} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)} = 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}} = 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad ✔$$

$x = 1$:

$$\text{LI} = 2(1) = 2$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - 1} = 1 - 1 = 0$$

$$\text{LI} \neq \text{LD} \quad ✗$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91**

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas,** es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más

valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde $W$ es una expresión algebraica, es una ecuación de **tipo cuadrático.** Resolvemos ecuaciones de tipo cuadrático al sustituir por la expresión algebraica, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

## EJEMPLO 12 | Una ecuación de cuarto grado de tipo cuadrático

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

**SOLUCIÓN** Si hacemos $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación cuadrática con la nueva variable $W$:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Escriba } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Usando una calculadora, obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$.

AHORA INTENTE HACER EL EJECICIO **95**

## EJEMPLO 13 | Una ecuación con potencias fraccionarias

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

**SOLUCIÓN** Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Sea } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Resuelva}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Tome la 6a. potencia}$$

De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = 1$ es una solución pero $x = 64$ no lo es. La solución es $x = 1$.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

| $x = 1$: | $x = 64$: |
|---|---|
| $\text{LI} = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$ | $\text{LI} = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$ |
| | $= 4 + 2 - 2 = 4$ |
| $\text{LD} = 0$ | $\text{LD} = 0$ |
| $\text{LI} = \text{LD}$ ✔ | $\text{LI} \neq \text{LD}$ ✗ |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Al resolver ecuaciones que contengan valores absolutos, por lo general tomamos casos.

### EJEMPLO 14 | Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

**SOLUCIÓN** Por la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ es equivalente a

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 \qquad \text{o} \qquad & 2x - 5 &= -3 \\ 2x &= 8 & 2x &= 2 \\ x &= 4 & x &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

## 1.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** *¿Verdadero o falso?*

**(a)** Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

**(b)** Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.

**(c)** Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

**2.** Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.

**(a)** Por factorización:_______

**(b)** Completando el cuadrado:______

**(c)** Usando la fórmula cuadrática:_____

**3. (a)** Las soluciones de la ecuación $x^2(x - 4) = 0$ son________.

**(b)** Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, ________el lado izquierdo.

**4.** Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.

**(a)** Aislar el radical:___________.

**(b)** Elevar al cuadrado ambos lados:___________.

**(c)** Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son_______.

**(d)** La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son)________.

**5.** La ecuación $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ es del tipo_________. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ ____. La ecuación cuadrática resultante es ________.

**6.** La ecuación $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ es del tipo_______.

Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____.

La ecuación cuadrática resultante es _________.

### HABILIDADES

**7-10** ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

**7.** $4x + 7 = 9x - 3$
**(a)** $x = -2$ **(b)** $x = 2$

**8.** $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
**(a)** $x = 2$ **(b)** $x = 4$

**9.** $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 4} = 1$
**(a)** $x = 2$ **(b)** $x = 4$

**10.** $\dfrac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$
**(a)** $x = 4$ **(b)** $x = 8$

**11-28** ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

**11.** $2x + 7 = 31$

**12.** $5x - 3 = 4$

**13.** $\frac{1}{2}x - 8 = 1$

**14.** $3 + \frac{1}{3}x = 5$

**15.** $-7w = 15 - 2w$

**16.** $5t - 13 = 12 - 5t$

**17.** $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

**18.** $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$

**19.** $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

**20.** $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$

**21.** $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

**22.** $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 1}{4} = 6x$

**23.** $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$

**24.** $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$

**25.** $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x + 3}$

**26.** $\dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$

**27.** $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

**28.** $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x + 5}{\sqrt{3}}$

**29-42** ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

**29.** $PV = nRT$; despeje $R$

**30.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje $m$

**31.** $P = 2l + 2w$; despeje $w$

**32.** $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; despeje $R_1$

**33.** $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; despeje $x$

**34.** $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje $x$

**35.** $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje $x$

**36.** $\dfrac{a + 1}{b} = \dfrac{a - 1}{b} + \dfrac{b + 1}{a}$; despeje $a$

**37.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje $r$

**38.** $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; despeje $r$

**39.** $a^2 + b^2 = c^2$; despeje $b$

**40.** $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; despeje $i$

**41.** $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; despeje $t$

**42.** $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$; despeje $n$

**43-54** ■ Resuelva la ecuación por factorización.

**43.** $x^2 + x - 12 = 0$

**44.** $x^2 + 3x - 4 = 0$

**45.** $x^2 - 7x + 12 = 0$

**46.** $x^2 + 8x + 12 = 0$

**47.** $4x^2 - 4x - 15 = 0$

**48.** $2y^2 + 7y + 3 = 0$

**49.** $3x^2 + 5x = 2$

**50.** $6x(x - 1) = 21 - x$

**51.** $2x^2 = 8$

**52.** $3x^2 - 27 = 0$

**53.** $(3x + 2)^2 = 10$

**54.** $(2x - 1)^2 = 8$

**55-62** ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

**55.** $x^2 + 2x - 5 = 0$

**56.** $x^2 - 4x + 2 = 0$

**57.** $x^2 - 6x - 11 = 0$

**58.** $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

**59.** $2x^2 + 8x + 1 = 0$

**60.** $3x^2 - 6x - 1 = 0$

**61.** $4x^2 - x = 0$

**62.** $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

**63-78** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

**63.** $x^2 - 2x - 15 = 0$

**64.** $x^2 + 5x - 6 = 0$

**65.** $x^2 - 7x + 10 = 0$

**66.** $x^2 + 30x + 200 = 0$

**67.** $2x^2 + x - 3 = 0$

**68.** $3x^2 + 7x + 4 = 0$

**69.** $3x^2 + 6x - 5 = 0$

**70.** $x^2 - 6x + 1 = 0$

**71.** $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

**72.** $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

**73.** $4x^2 + 16x - 9 = 0$

**74.** $0 = x^2 - 4x + 1$

**75.** $w^2 = 3(w - 1)$

**76.** $3 + 5z + z^2 = 0$

**77.** $10y^2 - 16y + 5 = 0$

**78.** $25x^2 + 70x + 49 = 0$

**79-84** ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

**79.** $x^2 - 6x + 1 = 0$

**80.** $3x^2 = 6x - 9$

**81.** $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

**82.** $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

**83.** $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

**84.** $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

**85-108** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

**85.** $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{5}{4}$

**86.** $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x - 3} + 4 = 0$

**87.** $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

**88.** $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

**89.** $\dfrac{x + 5}{x - 2} = \dfrac{5}{x + 2} + \dfrac{28}{x^2 - 4}$

**90.** $\dfrac{x}{2x + 7} - \dfrac{x + 1}{x + 3} = 1$

**91.** $\sqrt{2x + 1} + 1 = x$

**92.** $\sqrt{5 - x} + 1 = x - 2$

**93.** $2x + \sqrt{x + 1} = 8$

**94.** $\sqrt{\sqrt{x - 5} + x} = 5$

**95.** $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

**96.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

**97.** $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

**98.** $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

**99.** $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

**100.** $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

**101.** $4(x + 1)^{1/2} - 5(x + 1)^{3/2} + (x + 1)^{5/2} = 0$

**102.** $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

**103.** $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

**104.** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

**105.** $|3x + 5| = 1$

**106.** $|2x| = 3$

**107.** $|x - 4| = 0.01$

**108.** $|x - 6| = -1$

## APLICACIONES

**109-110** ■ **Problemas de cuerpos en caída** Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura $h_0$ sobre el suelo. Entonces su altura después de $t$ segundos está dada por $h = 16t^2 + h_0$, donde $h$ se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

**109.** Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

**110.** Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

**(a)** ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?

**(b)** ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

**111-112** ■ **Problemas de cuerpos en caída** Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0 t$ que se estudia en el Ejemplo 9.

**111.** Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

**(a)** ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

**(b)** ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

**(c)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

**(d)** ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

**(e)** ¿Cuándo cae al suelo?

**112.** ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0 t + h = 0$.]

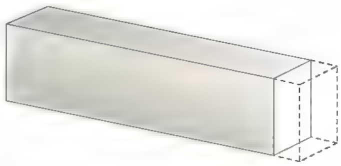
**113.** **Contracción en vigas de concreto** A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de $w$ kg/m³, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10{,}000}$$

donde $S$ es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

**(a)** Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m³ de agua. ¿Cuál es el factor de contracción $S$? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

**(b)** Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?



**114. La ecuación de lentes** Si $F$ es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia $x$ desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia $y$ del lente, donde $F$, $x$ y $y$ están relacionadas por la *ecuación de lentes*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

**115. Población de peces** La población de peces de cierto lago sube y baja de acuerdo con la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí $F$ es el número de peces en el tiempo $t$, donde $t$ se mide en años desde el 1 de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

**(a)** ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2002?

**(b)** ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

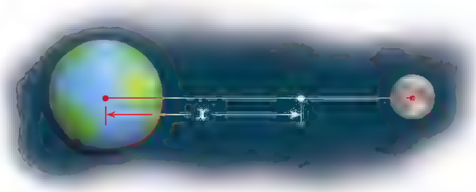
**116. Población de peces** Un gran estanque es abastecido de peces. La población $P$ de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde $t$ es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

**117. Utilidades** Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad $P$ (en dólares), generada por producir $x$ hornos de microondas por semana, está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de \$1250?

**118. Gravedad** Si un segmento imaginario de recta se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza $F$ gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

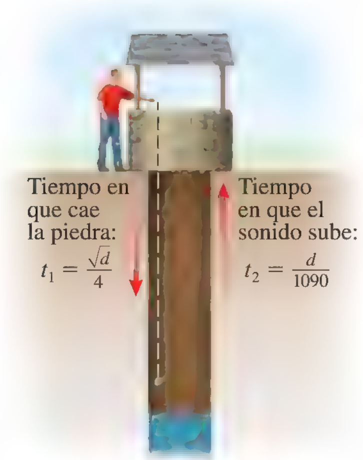
donde $K > 0$ es una constante y $x$ es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Exprese su respuesta a las mil millas más cercanas.)



**119. Profundidad de un pozo** Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra, y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si $d$ es la profundidad del pozo (en pies) y $t_1$ es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Ahora, si $t_2$ es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Por lo tanto, $t_2 = d/1090$. Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**120. Una familia de ecuaciones** La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones**, porque para cada valor de $k$ obtenemos una ecuación diferente con la incógnita $x$. La letra $k$ se llama **parámetro** para esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para $k$ para hacer que el valor determinado de $x$ sea una solución de la ecuación resultante?

**(a)** $x = 0$ **(b)** $x = 1$ **(c)** $x = 2$

**121. ¿Demostración de que 0 = 1?** Los siguientes pasos parecen dar ecuaciones equivalentes, que parecen demostrar que 1 = 0. Encuentre el error.

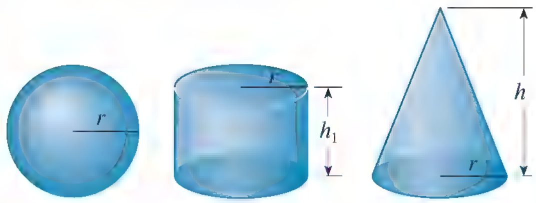
| | |
|---|---|
| $x = 1$ | Dada |
| $x^2 = x$ | Multiplique por $x$ |
| $x^2 - x = 0$ | Reste $x$ |
| $x(x - 1) = 0$ | Factorice |
| $\frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{0}{x-1}$ | Divida entre $x - 1$ |
| $x = 0$ | Simplifique |
| $1 = 0$ | Dada $x = 1$ |

**122. Volúmenes de sólidos** La esfera, el cilindro y el cono que se ven a continuación tienen todos ellos el mismo radio $r$ y el mismo volumen $V$.

**(a)** Use las fórmulas de volumen dadas al final de este libro, para demostrar que

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

**(b)** De estas ecuaciones despeje $h_1$ y $h_2$.




**123. Relación entre raíces y coeficientes** La fórmula cuadrática nos da las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También podemos obtener los coeficientes a partir de sus raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y la suma de las raíces es 9, el negativo del coeficiente de $x$. Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Use la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces $r_1$ y $r_2$, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

**124. Resolver una ecuación en formas diferentes** En esta sección hemos aprendido varias formas diferentes de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones pueden abordarse en más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático. Podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando. O bien, podríamos despejar $\sqrt{x}$, elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones usando ambos métodos indicados, y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

**(a)** $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje el radical y eleve al cuadrado

**(b)** $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplique por el MCD

# 1.6 MODELADO CON ECUACIONES

Construcción y uso de modelos ▶ Problemas acerca de interés ▶ Problemas de área o longitud ▶ Problemas de mezclas ▶ Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo ▶ Problemas de distancia, rapidez y tiempo

Numerosos problemas en ciencias, economía, finanzas, medicina y otros muchos campos se pueden convertir en problemas de álgebra; ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas reales.

## ▼ Construcción y uso de modelos

Usaremos las siguientes guías para ayudarnos a formular ecuaciones que modelen situaciones descritas en palabras. Para demostrar la forma en que estas guías pueden ayudar a formular ecuaciones, téngalas en cuenta al trabajar cada ejemplo de esta sección.

### GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

1. **Identifique la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide hallar. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea al final del problema. Después **introduzca notación** para la variable (llámela $x$ o alguna otra letra).
2. **Transforme palabras en álgebra.** De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el Paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información, a veces es útil **trazar un diagrama** o **hacer una tabla.**
3. **Formule el modelo.** Encuentre el dato de importancia decisiva en el problema, que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el Paso 2. **Formule una ecuación** (o **modelo**) que exprese esta relación.
4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta, y exprésela como una oración que conteste la pregunta planteada en el problema.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se usa esta guía para convertir un "problema de palabras" en lenguaje de álgebra.

### EJEMPLO 1 | Rentar un auto

Una compañía de renta de autos cobra \$30 al día y \$0.15 por milla para rentar un auto. Helen renta un auto durante dos días y su cuenta llega a \$108. ¿Cuántas millas recorrió?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** Nos piden hallar el número de millas que Helen ha recorrido. Por tanto, hacemos

$$x = \text{número de millas recorridas}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Ahora convertimos toda la información dada en el problema a un lenguaje de álgebra.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Número de millas recorridas | $x$ |
| Costo del recorrido (a \$0.15 por milla) | $0.15x$ |
| Costo diario (a \$30 por día) | $2(30)$ |

**Formule el modelo.** Ahora proponemos el modelo.

$$\text{costo del recorrido} + \text{costo diario} = \text{costo total}$$

$$0.15x + 2(30) = 108$$

**Resuelva.** Ahora despejamos $x$.

$$0.15x = 48 \qquad \text{Reste 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \qquad \text{Divida entre 0.15}$$

$$x = 320 \qquad \text{Con calculadora}$$

Helen manejó 320 millas su auto rentado.

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

costo total = costo del recorrido + costo diario

$= 0.15(320) + 2(30)$

$= 108$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

En los ejemplos y ejercicios que siguen, construimos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones reales diferentes.

## ▼ Problemas acerca de interés

Cuando usted pide un préstamo en un banco o cuando un banco le "pide prestado" a usted al mantener el dinero en una cuenta de ahorros, quien pide el préstamo en este caso debe pagar por el privilegio de usar el dinero. La cuota que se paga se llama **interés.** El tipo más básico de interés es el **interés simple,** que es precisamente un porcentaje anual de la cantidad total solicitada en préstamo o depositada. La cantidad de un préstamo o depósito se llama **principal** $P$. El porcentaje anual pagado por el uso de este dinero es la **tasa de interés** $r$. Usaremos la variable $t$ para representar el número de años que el dinero está en depósito y la variable $I$ para representar el interés total ganado. La siguiente **fórmula de interés simple** da la cantidad de interés $I$ ganado cuando un principal $P$ es depositado durante $t$ años a una tasa de interés $r$.

$$I = Prt$$

Cuando use esta fórmula, recuerde convertir el porcentaje $r$ a decimal. Por ejemplo, en forma decimal, 5% es 0.05. Entonces, a una tasa de interés de 5%, el interés pagado sobre un depósito de \$1000 en un período de 3 años es $I = Prt = 1000(0.05)(3) = \$150$.

## EJEMPLO 2 | Interés sobre una inversión

María hereda \$100,000 y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}\%$ de interés simple al año. Si el interés total de María es \$5025 al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** El problema pide la cantidad que ella ha invertido a cada una de las tasas. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad invertida al } 6\%$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Como la herencia total que recibió María es \$100,000, se deduce que ella invirtió $100{,}000 - x$ al $4\frac{1}{2}\%$. Convertimos toda la información dada en lenguaje de álgebra.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Cantidad invertida al 6% | $x$ |
| Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}\%$ | $100{,}000 - x$ |
| Cantidad ganada al 6% | $0.06x$ |
| Cantidad ganada al $4\frac{1}{2}\%$ | $0.045(100{,}000 - x)$ |

**Formule el modelo.** Usamos el dato de que el interés total de María es \$5025 para proponer el modelo.

$$\boxed{\text{interés al } 6\%} + \boxed{\text{interés al } 4\tfrac{1}{2}\%} = \boxed{\text{interés total}}$$

$$0.06x + 0.045(100{,}000 - x) = 5025$$

**Resuelva.** A continuación despeje la $x$.

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5025 \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.015x + 4500 = 5025 \qquad \text{Combine términos en } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Reste 4500}$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35{,}000 \qquad \text{Divida entre 0.015}$$

Entonces María ha invertido \$35,000 al 6% y los restantes \$65,000 al $4\frac{1}{2}\%$.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$$\begin{aligned} \text{interés total} &= 6\% \text{ de } \$35{,}000 + 4\tfrac{1}{2}\% \text{ de } \$65{,}000 \\ &= \$2100 + \$2925 = \$5025 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## Problemas de área o longitud

Cuando usamos álgebra para modelar una situación física, a veces debemos usar fórmulas básicas de geometría. Por ejemplo, es posible que necesitemos una fórmula para un área o un perímetro, o la fórmula que relaciona los lados de triángulos semejantes, o el Teorema de Pitágoras. Casi todas estas fórmulas aparecen al final de este libro. Los dos ejemplos que siguen usan estas fórmulas geométricas para resolver algunos problemas prácticos.

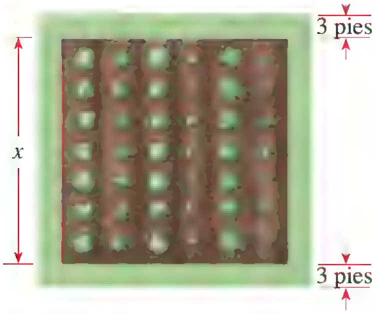



**FIGURA 1**

## EJEMPLO 3 | Dimensiones de un jardín

Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 pies de ancho alrededor de su borde exterior, como se ve en la Figura 1. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 18,000 pies$^2$, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** Nos piden hallar la longitud y ancho del área plantada. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{longitud del área plantada}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación, convierta la información de la Figura 1 en el lenguaje de álgebra.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Longitud del área plantada | $x$ |
| Longitud de todo el jardín | $x + 6$ |
| Área de todo el jardín | $(x + 6)^2$ |

**Formule el modelo.** A continuación proponemos el modelo.

$$\text{área de todo el jardín} = 18{,}000 \text{ pies}^2$$

$$(x + 6)^2 = 18{,}000$$

**Resuelva.** A continuación despejamos $x$.

$$x + 6 = \sqrt{18{,}000} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$x = \sqrt{18{,}000} - 6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$x \approx 128$$

El área plantada del jardín es de unos 128 pies por 128 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## EJEMPLO 4 | Dimensiones de un lote para construcción

Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más largo de lo que es de ancho y tiene un área de 2900 pies$^2$. Encuentre las dimensiones del lote.

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** Nos piden hallar el ancho y largo del lote. Entonces, hacemos

$$w = \text{ancho del lote}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación convertimos la información dada en el problema en el lenguaje de álgebra (vea Figura 2).

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Ancho del lote | $w$ |
| Longitud del lote | $w + 8$ |

**Formule el modelo.** Ahora formulamos el modelo

$$\text{ancho del lote} \cdot \text{longitud del lote} = \text{área del lote}$$

$$w(w + 8) = 2900$$

**Resuelva.** A continuación despejamos $w$.

$$w^2 + 8w = 2900 \quad \text{Expanda}$$

$$w^2 + 8w - 2900 = 0 \quad \text{Reste 2900}$$

$$(w - 50)(w + 58) = 0 \quad \text{Factorice}$$

$$w = 50 \quad \text{or} \quad w = -58 \quad \text{Propiedad de producto cero}$$

Como el ancho del lote debe ser un número positivo, concluimos que $w = 50$ pies. La longitud del lote es $w + 8 = 50 + 8 = 58$ pies.

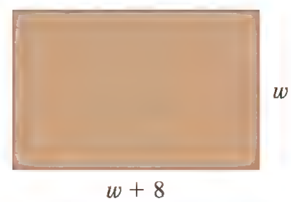



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

---

## EJEMPLO 5 | Determinar la altura de un edificio usando triángulos semejantes

Un hombre que mide 6 pies de alto desea hallar la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide su sombra y encuentra que es de 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** El problema pide la altura del edificio. Por lo tanto, hagamos

$$h = \text{la altura del edificio}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** Usamos el dato que los triángulos de la Figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones entre lados correspondientes son iguales. Ahora convierta estas observaciones en lenguaje de álgebra.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Altura del edificio | $h$ |
| Razón entre altura y base en el triángulo grande | $\frac{h}{28}$ |
| Razón entre altura y base en el triángulo pequeño | $\frac{6}{3.5}$ |

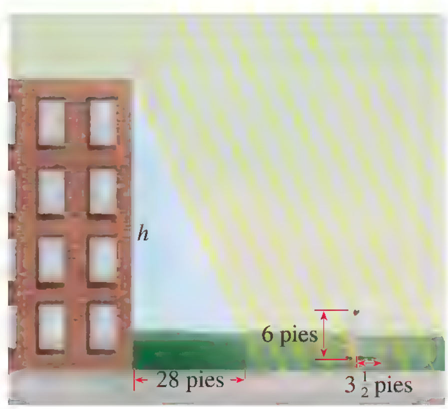



**FIGURA 3**

**Formule el modelo.** Como los triángulos grande y pequeño son semejantes, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\text{razón entre altura y base en triángulo grande}} = \boxed{\text{razón entre altura y base en triángulo pequeño}}$$

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

**Resuelva.** A continuación despeje $h$.

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48 \qquad \text{Multiplique por 28}$$

Entonces el edificio mide 48 pies de altura.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 51

## Problemas de mezclas

Numerosos problemas reales se refieren a la mezcla de diferentes tipos de sustancias. Por ejemplo, trabajadores de la construcción deben mezclar cemento, grava y arena; el jugo de fruta de un concentrado puede tener mezcla de diferentes tipos de jugos. Los problemas de mezclas y concentraciones hacen uso del hecho de que si una cantidad $x$ de una sustancia se disuelve en una solución con volumen $V$, entonces la concentración $C$ de la sustancia está dada por

$$C = \frac{x}{V}$$

Por lo tanto, si 10 g de azúcar se disuelven en 5 L de agua, entonces la concentración de azúcar es $C = 10/5 = 2$ g/L. Resolver un problema de mezclas por lo general nos pide analizar la cantidad $x$ de la sustancia que está en la solución. Cuando despejamos $x$ de esta ecuación, vemos que $x = CV$. Observe que en muchos problemas de mezcla la concentración $C$ se expresa como porcentaje, como en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 6 | Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como "con sabor natural", aun cuando contiene sólo 5% de jugo de naranja. Un nuevo reglamento federal estipula que para ser llamada "natural", una bebida debe contener al menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar este fabricante a 900 galones de refresco de naranja para apegarse al nuevo reglamento?

**SOLUCIÓN**

**Identifique la variable.** El problema pide la cantidad de jugo de naranja puro a ser agregado. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro a agregar}$$

**Convierta las palabras en álgebra.** En cualquier problema de este tipo, en el que dos sustancias diferentes han de mezclarse, trazar un diagrama nos ayuda a organizar la información dada (vea Figura 4).

La información de la figura puede convertirse en lenguaje de álgebra, como sigue:

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Cantidad de jugo de naranja a agregar | $x$ |
| Cantidad de la mezcla | $900 + x$ |
| Cantidad de jugo de naranja en la primera tina | $0.05(900) = 45$ |
| Cantidad de jugo de naranja en la segunda tina | $1 \cdot x = x$ |
| Cantidad de jugo de naranja en la mezcla | $0.10(900 + x)$ |

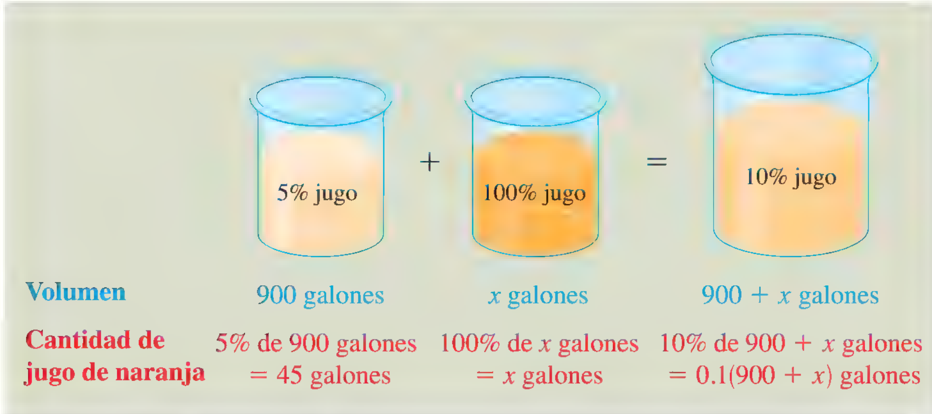



**FIGURA 4**

**Formule el modelo.** Para formular el modelo, usamos el dato de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja de las dos primeras tinas.

| cantidad de jugo de naranja en la primera tina | + | cantidad de jugo de naranja en la segunda tina | = | cantidad de jugo de naranja en la mezcla |
|---|---|---|---|---|

$$45 + x = 0.1(900 + x) \qquad \text{De la Figura 4}$$

**Resuelva.** A continuación despeje la $x$.

$$45 + x = 90 + 0.1x \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.9x = 45 \qquad \text{Reste } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \qquad \text{Divida entre } 0.9$$

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

cantidad de jugo antes de mezclar = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de mezclar = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## Problemas del tiempo necesario para realizar un trabajo

Cuando se resuelva un problema que trate de determinar el tiempo que tardan varios trabajadores en terminar un trabajo, usamos el dato de que si una persona o máquina tarda $H$ unidades de tiempo para terminar el trabajo, entonces en una unidad de tiempo la parte del trabajo que se ha terminado es $1/H$. Por ejemplo, si un trabajador tarda 5 horas para podar un césped, entonces en 1 hora el trabajador podará $1/5$ del césped.

### EJEMPLO 7 | Tiempo necesario para realizar un trabajo

Debido a una fuerte tormenta anticipada, el nivel de agua en un estanque debe bajarse 1 pie. Abrir el vertedero A baja el nivel en esta cantidad en 4 horas, mientras que abrir el más pequeño vertedero B hace el trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tardará en bajar el nivel de agua 1 pie con ambos vertederos abiertos?

**SOLUCIÓN** **Identifique la variable.** Nos piden hallar el tiempo necesario para bajar el nivel 1 pie si ambos vertederos están abiertos. Por lo tanto, hacemos

$x$ = tiempo (en horas) necesario para bajar el nivel de agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos

**Convierta las palabras en álgebra.** No es fácil hallar una ecuación que relacione $x$ a las otras cantidades de este problema. Ciertamente $x$ no es sólo $4 + 6$, porque eso significaría que los dos vertederos juntos necesitarían más tiempo para bajar el nivel del agua que cualquiera de ellos solo. En cambio, vemos la parte del trabajo que puede ejecutar en 1 hora cada uno de los vertederos.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Tiempo que tarda en bajar el nivel 1 pie con A y B juntos | $x$ h |
| Distancia que A baja el nivel en 1 h | $\frac{1}{4}$ pie |
| Distancia que B baja el nivel en 1 h | $\frac{1}{6}$ pie |
| Distancia que A y B juntas bajan niveles en 1 h | $\frac{1}{x}$ pie |

**Formule el modelo.** A continuación formulamos el modelo.

$$\text{fracción ejecutada por A} + \text{fracción ejecutada por B} = \text{fracción ejecutada por ambos}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

**Resuelva.** A continuación despejamos $x$.

$$3x + 2x = 12 \qquad \text{Multiplique por el MCD, } 12x$$

$$5x = 12 \qquad \text{Sume}$$

$$x = \frac{12}{5} \qquad \text{Divida entre 5}$$

Tardará $2\frac{2}{5}$ horas, o 2 h 24 min, para bajar el nivel del agua 1 pie si ambos vertederos están abiertos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

## Problemas de distancia, rapidez y tiempo

El siguiente ejemplo trata sobre distancia, tasa (rapidez) y tiempo. La fórmula a recordar en estos casos es

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

donde la rapidez es ya sea la rapidez constante o el promedio de rapidez de un cuerpo en movimiento. Por ejemplo, manejar en auto a 60 mi/h durante 4 horas lleva a una persona a una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

### EJEMPLO 8 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la rapidez en el vuelo de ida. Si el viaje total duró 13 horas, ¿cuál fue la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles?

**SOLUCIÓN** **Identifique la variable.** Nos piden la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles. Aquí hacemos

$s$ = rapidez de Nueva York a Los Ángeles

Entonces $s + 100$ = rapidez de Los Ángeles a Nueva York

**Convierta las palabras en álgebra.** A continuación organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia" porque sabemos que las ciudades están a 4200 km entre sí. A continuación llenamos la columna "Rapidez", porque hemos expresado ambas magnitudes de rapidez en términos de la variable $x$. Por último, calculamos las entradas para la columna "Tiempo", usando

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

| | Distancia (km) | Rapidez (km/h) | Tiempo (h) |
|---|---|---|---|
| **N.Y. a L.A.** | 4200 | $s$ | $\frac{4200}{s}$ |
| **L.A. a N.Y.** | 4200 | $s + 100$ | $\frac{4200}{s + 100}$ |

**Formule el modelo.** El viaje total tomó 13 horas, de modo que tenemos el modelo

$$\boxed{\begin{matrix}\text{tiempo de}\\ \text{N.Y. a L.A.}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{tiempo de}\\ \text{L.A. a N.Y.}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{tiempo}\\ \text{total}\end{matrix}}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

**Resuelva.** Multiplicando por el común denominador, $s(s + 100)$, tenemos

$$\begin{aligned} 4200(s + 100) + 4200s &= 13s(s + 100) \\ 8400s + 420{,}000 &= 13s^2 + 1300s \\ 0 &= 13s^2 - 7100s - 420{,}000 \end{aligned}$$

Aun cuando esta ecuación se factoriza, con números tan grandes es probable que sea más rápido usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora.

$$\begin{aligned} s &= \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420{,}000)}}{2(13)} \\ &= \frac{7100 \pm 8500}{26} \end{aligned}$$

$$s = 600 \qquad \text{o} \qquad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Como $s$ representa la rapidez, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 km/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

## EJEMPLO 9 | Energía consumida en el vuelo de un pájaro

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes cuerpos de agua durante horas del día, porque generalmente el aire se eleva sobre tierra y baja sobre el agua en el día, de modo que volar sobre el agua requiere de más energía. Un ave se suelta del punto $A$ en una isla, a 5 millas de $B$, que es el punto más cercano a la playa en línea recta. El ave vuela al punto $C$ en la playa y luego vuela a lo largo de la playa al lugar para anidar $D$, como se ve en la Figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Consume 10 kcal/milla volando sobre tierra y 14 kcal/milla volando sobre agua.

**(a)** ¿En dónde debe estar ubicado el punto $C$ para que el ave use exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

**(b)** ¿El ave tiene suficientes reservas de energía para volar directamente de $A$ a $D$?

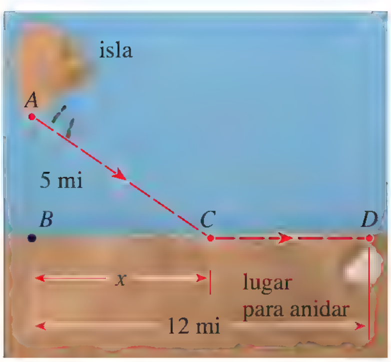



**FIGURA 5**

**BHASKARA** (nacido en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo de la India. Entre sus muchos logros estaba una ingeniosa demostración del Teorema de Pitágoras. (Vea *Enfoque en la solución de problemas*, en el sitio web **www.stewartmath.com**. compañero de este libro). Su importante libro matemático *Lilavati* (*La Hermosa*) contiene problemas de álgebra planteados en forma de cuentos para su hija Lilavati. Muchos de los problemas empiezan así: "Oh, bella doncella, suponte..." La historieta se relata usando astrología. Bhaskara había determinado que grandes desgracias ocurrirían a su hija si se casaba en cualquier momento que no fuera cierta hora de cierto día. El día de su boda, cuando ella estaba viendo con ansiedad un reloj de agua, una perla de su adorno de la cabeza cayó inadvertidamente y paró el flujo de agua del reloj, haciendo que ella perdiera el momento oportuno para su boda. El libro *Lilavati* de Bhaskara fue escrito para consolarla.

**(a)** Identifique la variable. Nos piden hallar la ubicación de $C$. Hacemos

$$x = \text{distancia de } B \text{ a } C$$

Convierta las palabras en álgebra. De la figura, y del dato

$$\text{energía consumida} = \text{energía por milla} \times \text{millas recorridas}$$

determinamos lo siguiente.

| En palabras | En álgebra | |
|---|---|---|
| Distancia de $B$ a $C$ | $x$ | |
| Distancia de vuelo sobre agua (de $A$ a $C$) | $\sqrt{x^2 + 25}$ | Teorema de Pitágoras |
| Distancia de vuelo sobre tierra (de $C$ a $D$) | $12 - x$ | |
| Energía consumida sobre agua | $14\sqrt{x^2 + 25}$ | |
| Energía consumida sobre tierra | $10(12 - x)$ | |

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\text{total de energía consumida} = \text{energía consumida sobre agua} + \text{energía consumida sobre tierra}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Resuelva. Para resolver esta ecuación, eliminamos la raíz cuadrada al llevar primero todos los otros términos a la izquierda del signo igual y luego elevar al cuadrado ambos lados.

$$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25} \quad \text{Aísle a la derecha el término de raíz cuadrada}$$

$$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25} \quad \text{Simplifique el lado izquierdo}$$

$$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25) \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$2500 + 1000x + 100x^2 = 196x^2 + 4900 \quad \text{Expanda}$$

$$0 = 96x^2 - 1000x + 2400 \quad \text{Todos los términos al lado derecho}$$

Esta ecuación podría factorizarse, pero como los números son tan grandes es más fácil usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \quad \text{o} \quad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto $C$ debe ser ya sea $6\frac{2}{3}$ o $3\frac{3}{4}$ millas desde $B$ para que el ave consuma exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

**(b)** Por el Teorema de Pitágoras (vea página 219), la longitud de la ruta directamente de $A$ a $D$ es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, de modo que la energía que el ave requiera para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más energía de la que dispone el ave, de modo que no puede seguir esa ruta.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

## 1.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Explique verbalmente qué significa que una ecuación modele una situación real y dé un ejemplo.

2. En la fórmula $I = Prt$ para interés simple, $P$ representa_____, $r$ es______ y $t$ es________.

3. Dé una fórmula para el área de la figura geométrica.

 (a) Un cuadrado de lado $x$: $A =$ _______.

 (b) Un rectángulo de longitud $l$ y ancho $w$: $A =$ _______.

 (c) Un círculo de radio $r$: $A =$ ______.

4. El vinagre balsámico contiene 5% de ácido acético, de modo que una botella de 32 onzas de vinagre balsámico contiene _____onzas de ácido acético.

5. Un pintor pinta una pared en $x$ horas, por lo que la fracción de la pared que pinta en 1 hora es ______.

6. La fórmula $d = rt$ modela la distancia $d$ recorrida por un objeto que se mueve a una rapidez $r$ constante en el tiempo $t$. Encuentre fórmulas para las siguientes cantidades.

 $r =$ _______ $t =$ _______

### HABILIDADES

**7-18** ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.

7. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ primer entero de los tres

8. La suma de tres enteros consecutivos; $n =$ entero intermedio de los tres

9. El promedio de tres calificaciones de examen si las dos primeras calificaciones son 78 y 82; $s =$ tercera calificación de examen

10. El promedio de cuatro calificaciones de preguntas de cada una de las tres primeras calificaciones es 8; $q =$ cuarta calificación de preguntas

11. El interés obtenido después de un año sobre una inversión es $2\frac{1}{2}\%$ de interés simple por año; $x =$ número de dólares invertidos

12. La renta total pagada por un apartamento si la renta es \$795 al mes; $n =$ número de meses

13. El área (en pies$^2$) de un rectángulo que mide tres veces más de largo que de ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en pies)

14. El perímetro (en cm) de un rectángulo que es 5 cm más largo que su ancho; $w =$ ancho del rectángulo (en cm)

15. La distancia (en millas) que un auto recorre en 45 minutos; $s =$ rapidez del auto (en mi/h)

16. El tiempo (en horas) que tarda en recorrer una distancia determinada a 55 mi/h; $d =$ distancia dada (en millas)

17. La concentración (en oz/gal) de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contiene 25 onzas de sal a la que se ha agregado agua pura; $x =$ volumen de agua pura agregada (en galones)

18. El valor (en centavos) del cambio en un monedero que contiene el doble de monedas de 5 centavos que de centavo, cuatro monedas de 10 centavos más que de 5 centavos, y tantas monedas de 25 centavos que de monedas de 5 combinadas; $p =$ número de monedas de un centavo.

### APLICACIONES

19. **Renta de un camión** Una compañía que renta vehículos cobra \$65 al día y 20 centavos por milla por rentar un camión. Miguel rentó un camión durante 3 días y su cuenta fue de \$275. ¿Cuántas millas recorrió?

20. **Costos de teléfono celular** Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de \$10 por los primeros 1000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de \$38.50. ¿Cuántos mensajes de texto envió ella ese mes?

21. **Inversiones** Felicia invirtió \$12,000, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ al año y el resto gana una tasa de 4% al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de \$525. ¿Cuánto dinero invirtió ella a cada una de las tasas?

22. **Inversiones** Si Benjamín invierte \$4000 al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al $5\frac{1}{2}\%$ de interés anual, para asegurar que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}\%$ de la cantidad total invertida?

23. **Inversiones** ¿Qué tasa anual de interés debe ganar una persona para ganar sobre una inversión de \$3500, para asegurar recibir \$262.50 de interés después de 1 año?

24. **Inversiones** Jaime invierte \$1000 a cierta tasa de interés anual, e invierte otros \$2000 a una tasa anual que es medio por ciento más alta. Si él recibe un total de \$190 de interés en 1 año, ¿a qué tasa se invierten los \$1000?

25. **Salarios** Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de \$8500. Si ella gana un total de \$97,300, ¿cuál es su salario mensual?

26. **Salarios** Una mujer gana 15% más que su esposo. Juntos ganan \$69,875 al año. ¿Cuál es el salario anual del esposo?

27. **Herencia** Camilo está ahorrando para comprarse una casa para vacacionar. Él hereda algún dinero de un tío rico, luego combina esto con los \$22,000 que ya había ahorrado y duplica el total en una inversión afortunada. Termina con \$134,000, que es justo lo suficiente para comprarse una cabaña junto a un lago. ¿Cuánto heredó?

28. **Paga de tiempo extra** Elena gana \$7.50 por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana le pagan $1\frac{1}{2}$ veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. En una semana ella gana un salario bruto de \$352.50. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó esa semana?

29. **Costos de mano de obra** Un plomero y su ayudante trabajan juntos para cambiar las tuberías de una casa vieja. El plomero cobra \$45 por hora por su propio trabajo y \$25 por hora por el trabajo del ayudante. El plomero trabaja el doble de tiempo que su ayudante en el trabajo, y el cobro por mano de obra en la factura final es de \$4025. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en este trabajo?

**30. Un acertijo** Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija; en 6 años, tendrá tres veces la edad que actualmente tiene su hija. ¿Cuál es la edad actual de la hija?

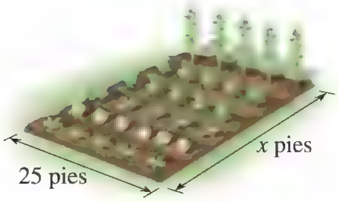
**31. Un acertijo** Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, planteó el siguiente acertijo a un columnista de chismes. "Hace siete años, yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad." ¿Cuál es la edad del actor?

**32. Cuadrangulares en su carrera** Durante su carrera en las Ligas Mayores, Hank Aaron conectó 41 cuadrangulares más de los que conectó Babe Ruth en su carrera. Juntos conectaron 1469 cuadrangulares. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?

**33. Valor de monedas** Un monedero contiene igual número de monedas de un centavo, de cinco centavos y de diez centavos. El valor total de las monedas es \$1.44. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?

**34. Valor de monedas** Mary tiene \$3.00 en monedas de 5, de 10 y de 25 centavos. Si ella tiene el doble de monedas de 10 que de 25 y cinco más de monedas de 5 que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene ella?

**35. Longitud de un jardín** Un jardín rectangular mide 25 pies de ancho. Si su área es de 1125 pies$^2$, ¿cuál es la longitud del jardín?




**36. Ancho de un pastizal** Un pastizal mide el doble de largo que su ancho. Su área es de 115,200 pies$^2$. ¿Cuál es el ancho del pastizal?

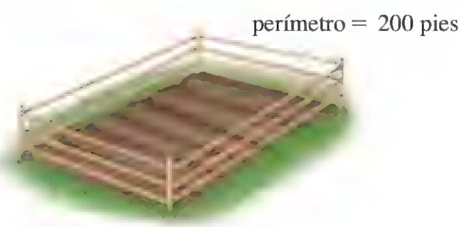
**37. Dimensiones de un lote** Un lote de terreno cuadrado tiene una construcción de 60 pies de largo y 40 pies de ancho en una esquina. El resto del terreno fuera del edificio forma un estacionamiento. Si éste tiene un área de 12,000 pies$^2$, ¿cuáles son las dimensiones de todo el lote de terreno?

**38. Dimensiones de un lote** Un lote para construcción, de medio acre, mide 5 veces más de largo que de ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones? [*Nota:* 1 acre = 43,560 pies$^2$.]

**39. Dimensiones de un jardín** Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que de ancho. Su área es 875 pies$^2$. ¿Cuáles son sus dimensiones?

**40. Dimensiones de un cuarto** Una habitación rectangular mide 7 pies más de largo que su ancho. Su área es de 228 pies$^2$. ¿Cuál es el ancho del cuarto?

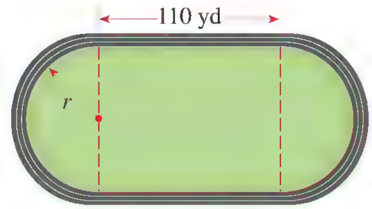
**41. Dimensiones de un jardín** Un agricultor tiene un lote rectangular de jardín rodeado por una cerca de 200 pies. Encuentre la longitud y ancho si su área es de 2400 pies$^2$.



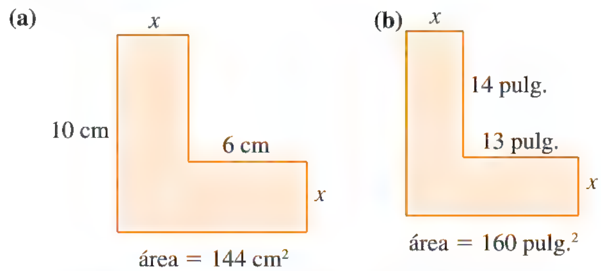

**42. Dimensiones de un lote** Una parcela de terreno mide 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal desde una esquina a la esquina opuesta es de 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

**43. Dimensiones de un lote** Una parcela rectangular de terreno mide 50 pies de ancho. La longitud de una diagonal entre esquinas opuestas es de 10 pies más que la longitud de la parcela. ¿Cuál es la longitud de la parcela?

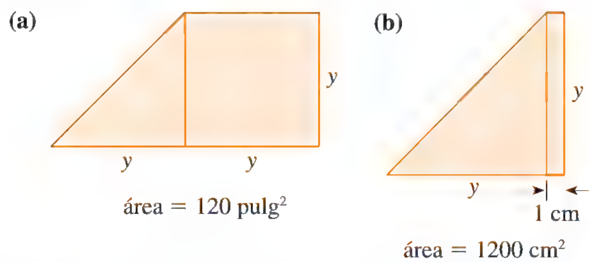
**44. Dimensiones de una pista** Una pista de carreras tiene la forma mostrada en la figura, con costados rectos y extremos semicirculares. Si la longitud de la pista es de 440 yardas y las dos partes rectas miden 110 yardas de largo cada una, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares (a la yarda más cercana)?



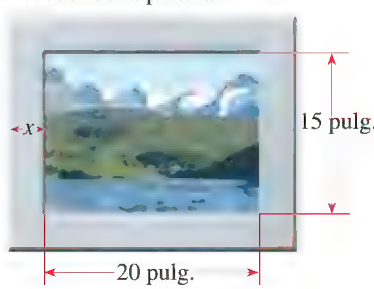

**45. Longitud y área** Encuentre la longitud $x$ de la figura. Se da el área de la región sombreada.



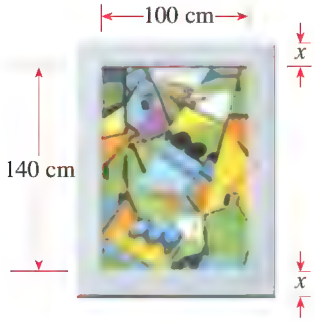

**46. Longitud y área** Encuentre la longitud $y$ de la figura. Se da el área de la región sombreada.



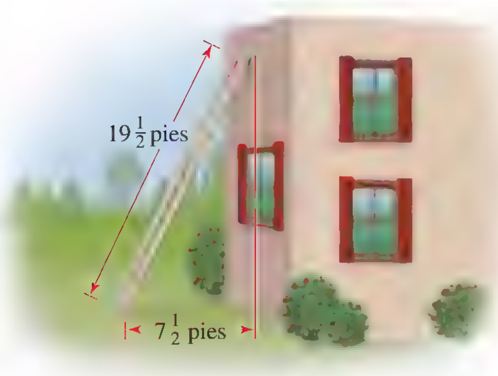

**47. Enmarcar una pintura** Ali pinta con acuarela en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. A continuación pone esta hoja en un marco de cartón de modo que una franja de ancho uniforme del marco de cartón se ve a todo alrededor de la pintura. El perímetro del marco de cartón es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la franja del marco de cartón que se ve alrededor de la pintura?



**48. Dimensiones de un cartel** Un cartel tiene una superficie rectangular impresa de 100 cm por 140 cm y una franja negra de ancho uniforme alrededor de los bordes. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro de la superficie impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja negra?

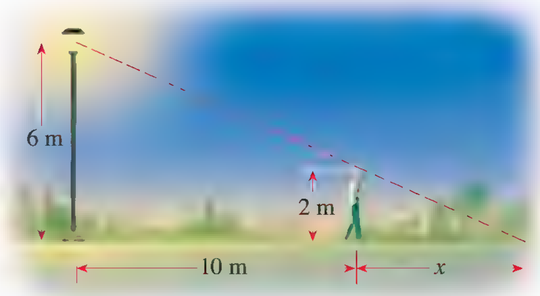



**49. Alcance de una escalera** Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies del edificio. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

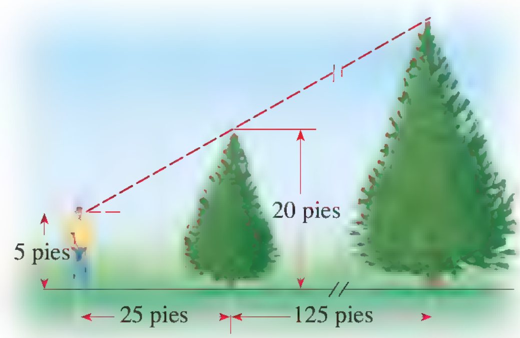



**50. Altura de un asta de bandera** Un asta de bandera está asegurada en lados opuestos por medio de dos alambres (llamados "vientos"), cada uno de los cuales mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde los alambres se fijan al suelo es igual a la longitud de un alambre "viento". ¿Cuál es la altura del asta de bandera (a la pulgada más cercana)?

**51. Longitud de una sombra** Un hombre está alejándose de un poste de alumbrado que tiene una fuente de luz a 6 m sobre el suelo. El hombre mide 2 m de alto. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre cuando éste está a 10 m del poste? [*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.]




**52. Altura de un árbol** Un maderero determina la altura de un árbol alto al medir uno más pequeño que está a 125 pies de distancia del primero, y luego moviéndose de manera que sus ojos estén en la línea de vista a lo largo de las cumbres de los árboles y midiendo la distancia a la que él está del árbol pequeño (vea la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de alto, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y el nivel de sus ojos está a 5 pies sobre el suelo. ¿Cuál es la altura del árbol más alto?




**53. Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% debe mezclarse con una solución 30% para producir 300 mL de una solución al 50%?

**54. Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de ácido puro debe agregarse a 300 mL de una solución al 50% para producir una solución ácida al 60%?

**55. Problema de mezclas** Una joyera tiene cinco anillos, cada uno de los cuales pesa 18 g, hechos de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Ella decide fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

**56. Problema de mezclas** Una olla tiene 6 L de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua debe hervirse para aumentar la concentración a 200 g/L?

**57. Problema de mezclas** El radiador de un auto está lleno de una solución al 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante sugiere que para operar el auto en verano, el enfriamiento óptimo del auto se obtiene con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es 3.6 L, ¿cuánto líquido de enfriamiento debe drenarse y sustituirse con agua para reducir la concentración de anticongelante al nivel recomendado?

**58. Problema de mezclas** Una clínica utiliza una solución de blanqueador para esterilizar cajas de Petri en las que crecen cultivos. El tanque de esterilización contiene 100 galones de solu-

ción de blanqueador doméstico común al 2%, mezclado con agua destilada pura. Nuevas investigaciones indican que la concentración de blanqueador debe ser al 5% para completar la esterilización. ¿Cuánto de la solución debe drenarse y sustituirse con blanqueador para aumentar el contenido de blanqueador al nivel recomendado?

**59. Problema de mezclas** Una botella contiene 750 mL de jugos de frutas con una concentración de 50% de jugo de frutas puro. Jill toma 100 mL del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual de una marca más barata del ponche. Si la concentración del jugo en la botella se reduce ahora al 48%, ¿cuál era la concentración del ponche que agregó Jill?

**60. Problema de mezclas** Un comerciante mezcla té que vende en $3.00 por libra con té que vende en $2.75 por libra para producir 80 lb de una mezcla que vende en $2.90 por libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en la mezcla?

**61. Compartir un trabajo** Candy y Tim comparten una ruta para vender periódicos. Candy tarda 70 minutos en entregar todos los periódicos; Tim tarda 80 minutos. ¿Cuánto tiempo les lleva a los dos cuando trabajan juntos?

**62. Compartir un trabajo** Stan e Hilda pueden podar el césped en 40 minutos si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto tiempo le lleva a Stan podar el césped él solo?

**63. Compartir un trabajo** Betty y Karen han sido contratados para pintar las casas en un nuevo fraccionamiento habitacional. Trabajando juntas, las mujeres pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que tarda Karen si trabaja sola. Betty tarda 6 horas en pintar una casa ella sola. ¿Cuánto tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?

**64. Compartir un trabajo** Los vecinos Bob y Jim, que viven en casas contiguas entre sí, usan mangueras de ambas casas para llenar la piscina de Bob. Saben que tardan 18 horas usando ambas mangueras. También saben que la manguera de Bob, si se usa sola, toma 20% menos tiempo que la manguera de Jim sola. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras sola?

**65. Compartir un trabajo** Irene y Henry, trabajando juntos, pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 h 48 minutos. Trabajando solo, Henry tarda 11 h más que Irene para hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada persona trabajando sola para lavar todas las ventanas?

**66. Compartir un trabajo** Jack, Kay y Lynn reparten volantes de publicidad en una pequeña población. Si cada persona trabaja sola, Jack tarda 4 h en repartir todos los volantes, y Lynn tarda 1 h más de lo que tarda Kay. Trabajando juntos, pueden repartir todos los volantes en 40% del tiempo que tarda Kay trabajando sola. ¿Cuánto le toma a Kay repartir todos los volantes ella sola?

**67. Distancia, rapidez y tiempo** Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. En parte, viajó en autobús que llegó a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomó 51 h. ¿Cuánto tardó Wendy en el tren?

**68. Distancia, rapidez y tiempo** Dos ciclistas están a 90 millas entre sí. Arrancan en sus bicicletas al mismo tiempo uno hacia el otro. Uno de ellos pedalea el doble de rápido que el otro. Si se encuentran 2 h más tarde, ¿a qué velocidad promedio está viajando cada uno de ellos?

**69. Distancia, rapidez y tiempo** Un piloto voló en jet de Montreal a Los Ángeles, una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso, el promedio de velocidad fue 20% más rápido que el de ida. El viaje redondo tardó 9 h 10 minutos. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

**70. Distancia, rapidez y tiempo** Una mujer que maneja un auto de 14 pies de largo está rebasando a un camión de 30 pies de largo. El camión está corriendo a 50 mi/h. ¿Con qué rapidez debe ir el auto de la mujer para que pueda pasar por completo al camión en 6 s, desde la posición mostrada en la figura (a) hasta la posición de la figura (b)? [*Sugerencia:* Use pies y segundos en lugar de millas y horas.]

(a)

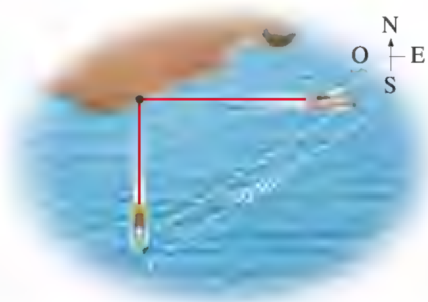
(b)

**71. Distancia, rapidez y tiempo** Un vendedor viaja en auto de Ajax a Barrington, una distancia de 120 millas a una velocidad constante. A continuación aumenta su velocidad en 10 mi/h para recorrer las 150 millas de Barrington a Collins. Si el segundo tramo de su viaje tomó 6 minutos más que el primer tramo, ¿con qué rapidez manejaba entre Ajax y Barrington?

**72. Distancia, rapidez y tiempo** Kiran viajó de Tortula a Cactus una distancia de 250 millas. Ella aumentó su velocidad en 10 mi/h para el viaje de 360 millas de Cactus a Dry Junction. Si el viaje total tomó 11 h, ¿cuál fue su velocidad de Tortula a Cactus?

**73. Distancia, rapidez y tiempo** A una tripulación les tomó 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la rapidez de la corriente era de 3 km/h, ¿cuál era la velocidad de remar de la tripulación en aguas tranquilas?

**74. Velocidad de un bote** Dos botes pesqueros salen de un puerto al mismo tiempo, uno de ellos dirigiéndose al este y el otro al sur. El bote con dirección al este viaja a 3 mi/h más rápido que el que va al sur. Después de dos horas, los botes están a 30 millas entre sí. Encuentre la rapidez del bote que se dirige al sur.

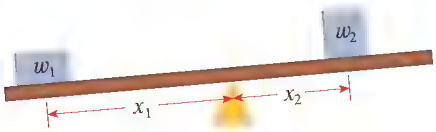


**75. Ley de la palanca** La figura muestra un sistema de palancas, semejante a un subibaja (balancín) que se puede hallar en un parque de recreo infantil. Para que el sistema esté en equilibrio, el producto del peso y su distancia desde el fulcro debe ser igual en cada lado; esto es,

$$w_1x_1 = w_2x_2$$

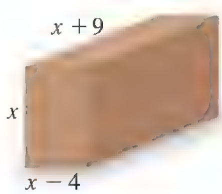
Esta ecuación recibe el nombre de **ley de la palanca** y fue descubierta por Arquímedes (vea página 729).

Una mujer y su hijo están jugando en un subibaja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del fulcro. Si el hijo pesa 100 lb y la madre pesa 125 lb, ¿dónde debe sentarse la mujer para que el subibaja esté balanceado?



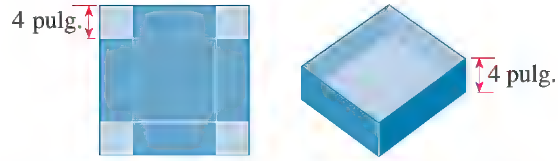

**76. Ley de la palanca** Una tabla de 30 pies de largo está apoyada en lo alto de un edificio de techo plano, con 5 pies de la tabla sobresaliendo del borde, como se ve en la figura. Un trabajador que pesa 240 lb se sienta en un extremo de la tabla. ¿Cuál es el peso máximo que puede ser colgado del extremo de la tabla que sobresale si debe estar en equilibrio? (Use la ley de la palanca expresada en el Ejercicio 75.)

**77. Dimensiones de una caja** Una caja grande de madera terciada tiene un volumen de 180 pies$^3$. Su longitud es 9 pies más que su peso, y su ancho es 4 pies menor que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

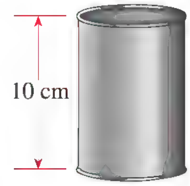



**78. Radio de una esfera** Un joyero tiene tres pequeñas esferas de oro macizo, de 2 mm de radio, 3 mm y 4 mm. Él decide fundirlas y hacer con ellas una sola esfera. ¿Cuál será el radio de esta esfera más grande?

**79. Dimensiones de una caja** Una caja con una base cuadrada y sin tapa ha de hacerse de una pieza cuadrada de cartón al cortarle cuadros de 4 pulgadas de cada esquina y doblar los lados, como se muestra en la figura. La caja ha de contener 100 pulg.$^3$. ¿De qué dimensión se necesita la pieza de cartón?



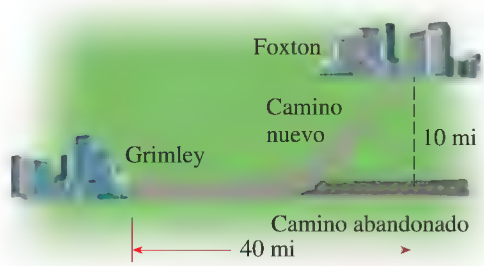

**80. Dimensiones de una lata** Una lata cilíndrica tiene un volumen de $40\pi$ cm$^3$ y mide 10 cm de alto. ¿Cuál es su diámetro? [*Sugerencia:* Use la fórmula de volumen que aparece al final del libro.]




**81. Radio de un tanque** Un tanque esférico tiene una capacidad de 750 galones. Usando el dato de que un galón es 0.1337 pies$^3$ aproximadamente, encuentre el radio del tanque (al centésimo de pie más cercano).

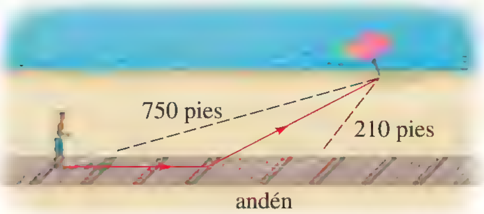
**82. Dimensiones de un lote** Un lote urbano tiene la forma de un triángulo recto cuya hipotenusa es 7 pies más larga que uno de los otros lados. El perímetro del lote es de 392 pies. ¿Cuál es la longitud de cada lado del lote?

**83. Costos de construcción** La ciudad de Foxton está a 10 millas al norte de un camino abandonado de dirección este-oeste que pasa por Grimley, como se ve en la figura. El punto del camino abandonado más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Oficiales del condado están por construir un nuevo camino que enlaza las dos ciudades. Han determinado que restaurar el camino antiguo costaría $100,000 por milla, mientras que construir un nuevo camino costaría $200,000 por milla. ¿Cuánto del camino abandonado debe usarse (como se indica en la figura) si los oficiales tienen intención de gastar exactamente $6.8 millones de dólares? ¿Costaría menos que esto la construcción de un nuevo camino que conecte las ciudades directamente?

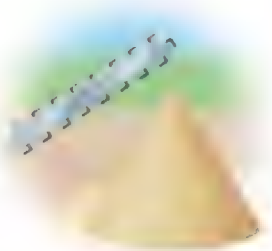



**84. Distancia, rapidez y tiempo** Un entablado o andén de madera está paralelo y a 210 pies tierra adentro del borde de una playa recta. Una playa arenosa está entre el andén y el borde de la playa. Un hombre está de pie en el andén, exactamente a 750 pies de su sombrilla para playa al otro lado de la arena, que está recta en el borde de la playa. El hombre camina a 4 pies/s en el andén y a 2 pies/s en la arena. ¿Qué distancia

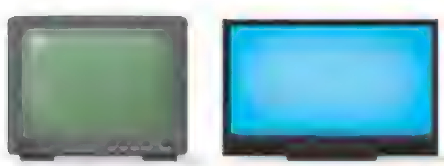
debe caminar en el andén antes de entrar a la arena si desea llegar a su sombrilla en exactamente 4 minutos 45 segundos?



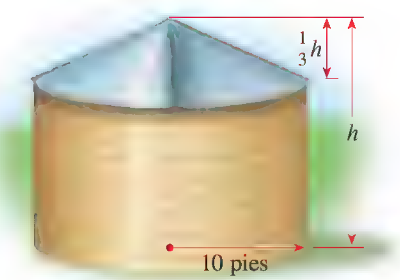

**85. Volumen de grano** Están cayendo granos de un canal al suelo, formando una pila cónica cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿De qué altura es la pila (al centésimo de pie más cercano) cuando contiene 1000 $\text{pies}^3$ de grano?



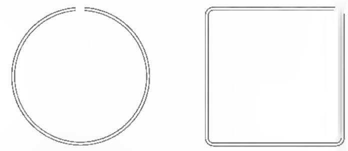
**86. Monitores de TV** Dos monitores de TV, colocados uno al lado del otro en un estante de una tienda de aparatos eléctricos, tienen la misma altura de pantalla. Uno de ellos tiene una pantalla convencional, que es 5 pulgadas más ancha que su altura; el otro tiene una pantalla más ancha, de alta definición, que es 1.8 veces más ancha que su altura. La medida diagonal de la pantalla más ancha es 14 pulgadas más que la medida diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura de las pantallas, correcta al 0.1 de pulgada más cercano?



**87. Dimensiones de una estructura** Un silo de almacenamiento para maíz está formado de una sección cilíndrica hecha de malla de alambre, rematada por un techo cónico de estaño, como se ve en la figura. La altura del techo es un tercio de la altura de toda la estructura. Si el volumen total de la estructura es $1400\pi$ $\text{pies}^3$ y su radio es 10 pies, ¿cuál es su altura? [*Sugerencia*: Use las fórmulas de volumen al final del libro.]



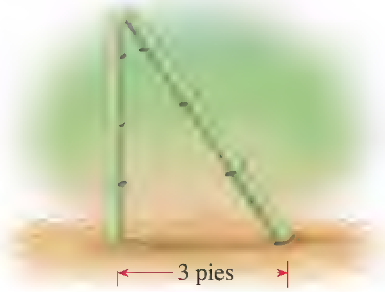

**88. Comparación de áreas** Un alambre de 360 pulgadas de largo se corta en dos piezas. A una de éstas se le da forma de cuadrado y de círculo a la otra. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuáles son las longitudes de las dos piezas de alambre (al décimo de pulgada más cercano)?



**89. Un antiguo problema chino** Este problema ha sido tomado de un libro de texto chino llamado *Chui-chang suan-shu*, o *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, que fue escrito hacia el año 250 a.C.

> Un tallo de bambú de 10 pies de largo se descompone en forma tal que su punta toca el suelo a 3 pies de la base del tallo, como se ve en la figura. ¿Cuál es la altura de la rotura?

[*Sugerencia*: Use el Teorema de Pitágoras.]




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**90. Investigación histórica** Lea las notas biográficas acerca de Pitágoras (página 219), Euclides (página 497) y Arquímedes (página 729). Escoja uno de estos matemáticos e investigue más sobre él en la biblioteca o en Internet. Escriba un breve ensayo de lo que haya encontrado. Incluya información biográfica y una descripción de la matemática por la cual él es famoso.

**91. Una ecuación cuadrática de Babilonia** Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. A continuación veamos un problema de una tablilla cuneiforme hallada en una escuela de Babilonia, que data del año 2000 a.C.

> Tengo un junco, sé su longitud. De él tomo un cúbito que cabe 60 veces a lo largo de mi campo. Lo devuelvo al junco que he dividido, y cabe 30 veces a lo ancho de mi campo. El área de mi campo es de 375 nindas (una medida) cuadradas. ¿Cuál era la longitud original del junco?

Resuelva este problema. Use el dato que 1 ninda = 12 cúbitos.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Ecuaciones a lo largo del tiempo**

En este proyecto estudiamos ecuaciones que fueron creadas y resueltas por los pueblos antiguos de Egipto, Babilonia, India y China. El lector puede hallar el proyecto en el sitio web compañero de este libro: **www.stewartmath.com**

# 1.7 Desigualdades

Resolución de desigualdades lineales ▶ Resolución de desigualdades no lineales ▶ Desigualdades con valor absoluto ▶ Modelado con desigualdades

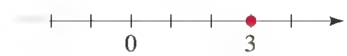
| $x$ | $4x + 7 \leq 19$ |
|---|---|
| 1 | $11 \leq 19$ ✔ |
| 2 | $15 \leq 19$ ✔ |
| 3 | $19 \leq 19$ ✔ |
| 4 | $23 \leq 19$ ✘ |
| 5 | $27 \leq 19$ ✘ |

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x = 7 \leq 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no la satisfacen.

**Resolver** una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

| | | **Solución** | **Gráfica** |
|---|---|---|---|
| Ecuación: | $4x + 7 = 19$ | $x = 3$ |  |
| Desigualdad | $4x + 7 \leq 19$ | $x \leq 3$ | |

Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a"). En estas reglas los símbolos $A$, $B$ y $C$ representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

### REGLAS PARA DESIGUALDADES

| Regla | Descripción |
|---|---|
| **1.** $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$ | **Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente. |
| **2.** $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$ | **Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente. |
| **3.** Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$ | **Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente. |
| **4.** Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$ | **Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad. |
| **5.** Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$ | **Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad. |
| **6.** Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$ | Las desigualdades se pueden sumar. |

Ponga especial atención a las Reglas 3 y 4. La Regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por $-2$, obtenemos

$$-6 > -10$$

## Solución de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o un múltiplo de la variable. Para resolver una desigualdad lineal, aislamos la variable en un lado del signo de desigualdad.

### EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} 3x &< 9x + 4 && \text{Desigualdad dada} \\ 3x - 9x &< 9x + 4 - 9x && \text{Reste } 9x \\ -6x &< 4 && \text{Simplifique} \\ \left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) &> \left(-\tfrac{1}{6}\right)(4) && \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{6} \text{ e invierta la desigualdad} \\ x &> -\tfrac{2}{3} && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

Multiplicar por el número negativo $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto solución está formado por todos los números mayores a $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. Está graficada en la Figura 1.

**FIGURA 1**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

### EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \le 3x - 2 < 13$.

**SOLUCIÓN** El conjunto solución está formado por todos los valores de $x$ que satisfacen las desigualdades $4 \le 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Usando las Reglas 1 y 3, vemos que las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$\begin{aligned} 4 \le 3x - 2 &< 13 && \text{Desigualdad dada} \\ 6 \le 3x &< 15 && \text{Sume 2} \\ 2 \le x &< 5 && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de solución es $[2, 5)$, como se ve en la Figura 2.

**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

> **EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE**
>
> Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.
>
> Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 5x \leq -6$, primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto $(x - 2)(x - 3)$ debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el Ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

### GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.

La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

## EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

**SOLUCIÓN** Seguiremos la guía dada líneas antes.

**Pase todos los términos a un lado.** Pasamos todos los términos al lado izquierdo.

$$x^2 \leq 5x - 6 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \qquad \text{Reste } 5x\text{, sume } 6$$

**Factorice.** Factorizando el lado izquierdo de la desigualdad, obtenemos

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0 \qquad \text{Factorice}$$

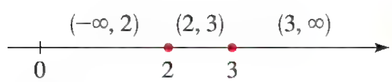



FIGURA 3

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son $x - 2$ y $x - 3$. Estos factores son cero cuando $x$ es 2 y 3, respectivamente. Como se ve en la Figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta real en los tres intervalos

$$(-\infty, 2), (2, 3), (3, \infty)$$

Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y 3, respectivamente. Por lo tanto, estos factores mantienen su signo en cada uno de estos tres intervalos.

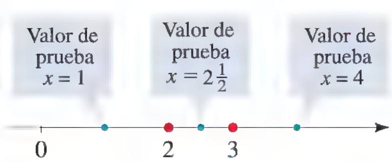



FIGURA 4

**Haga una tabla o diagrama.** Para determinar el signo de cada factor en cada uno de los intervalos que encontramos, usamos **valores de prueba.** Escogemos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el número que escojamos. Para el intervalo $(-\infty, 2)$, escojamos el valor de prueba 1 (vea Figura 4). Sustituyendo 1 por $x$ en los factores $x - 2$ y $x - 3$, obtenemos

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

Por lo tanto ambos factores son negativos en este intervalo. Nótese que necesitamos verificar sólo un valor de prueba por cada intervalo porque los factores $x - 2$ y $x - 3$ no cambian signo en ninguno de los tres intervalos que encontramos.

Usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (vea Figura 4), respectivamente, construimos la siguiente tabla de signos. El renglón final de la tabla se obtiene del dato que la expresión del último renglón es el producto de los dos factores.

| **Intervalo** | $(-\infty, 2)$ | $(2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| **Signo de $x - 2$** | $-$ | $+$ | $+$ |
| **Signo de $x - 3$** | $-$ | $-$ | $+$ |
| **Signo de $(x - 2)(x - 3)$** | $+$ | $-$ | $+$ |

Si el lector así lo prefiere, puede representar esta información en una recta real, como en el siguiente diagrama de signos. Las rectas verticales indican los puntos en los que la recta real está dividida en intervalos:

| | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Signo de $x - 2$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| Signo de $x - 3$ | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| Signo de $(x - 2)(x - 3)$ | $+$ | | $-$ | | $+$ |

**Resuelva.** Leemos de la tabla o el diagrama que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Entonces, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

**FIGURA 5**

Hemos incluido los puntos extremos 2 y 3 porque buscamos valores de $x$ tales que el producto es menor o *igual a* cero. La solución está ilustrada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## EJEMPLO 4 | Resolver una desigualdad con factores repetidos

Resuelva la desigualdad $x(x - 1)^2(x - 3) < 0$.

**SOLUCIÓN** Todos los términos diferentes de cero ya están en un lado de la desigualdad, y el lado diferente de cero de la desigualdad ya está factorizado. Por lo tanto, empezamos por hallar los intervalos para esta desigualdad.

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son $x$, $(x - 1)^2$ y $x - 3$. Éstos son cero cuando $x = 0, 1, 3$. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, 3), (3, \infty)$$

**Haga un diagrama.** Hacemos el siguiente diagrama, usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

| | | 0 | | 1 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signo de $x$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| Signo de $(x - 1)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| Signo de $(x - 3)$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| Signo de $x(x - 1)^2(x - 3)$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |

**Resuelva.** Del diagrama vemos que $x(x-1)^2(x-3) < 0$ para $x$ en el intervalo $(0, 1)$ o para $x$ en $(1, 3)$. Por lo tanto, el conjunto solución es la unión de estos dos intervalos:

$$(0, 1) \cup (1, 3)$$

**FIGURA 6**

El conjunto solución está graficado en la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

### SOLUCIÓN

**Pase todos los términos a un lado.** Movemos los términos al lado izquierdo y simplificamos usando un denominador común.

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1 \qquad \text{Desigualdad dada}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Reste 1}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1-x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combine las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplifique}$$

Es tentador simplemente multiplicar ambos lados de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si fuera una *ecuación*.) Pero esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Vea Ejercicio 123.)

**Encuentre los intervalos.** Los factores del lado izquierdo son $2x$ y $1 - x$. Éstos son cero cuando $x$ es 0 y 1. Estos números dividen la recta real en los intervalos

$$(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$$

**Haga un diagrama.** Hacemos el siguiente diagrama usando puntos de prueba para determinar el signo de cada factor en cada intervalo.

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo de $2x$ | − | + | + |
| Signo de $1 - x$ | + | + | − |
| Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$ | − | + | − |

**Resuelva.** Del diagrama vemos que $\dfrac{2x}{1-x} \geq 0$ para $x$ en el intervalo $[0, 1)$. Incluimos el punto extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor *o igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro punto extremo 1 porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo

$$[0, 1)$$

**FIGURA 7**

El conjunto solución está graficado en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

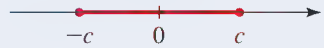
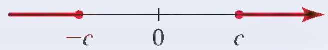
El Ejemplo 5 muestra que siempre debemos comprobar los puntos extremos del conjunto solución para ver si satisfacen la desigualdad original.

## Desigualdades con valor absoluto

Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

Estas propiedades se cumplen cuando $x$ es sustituida por cualquier expresión algebraica. (En la figura supusimos que $c > 0$.)

**PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO**

| Desigualdad | Forma equivalente | Gráfica |
|---|---|---|
| **1.** $\|x\| < c$ | $-c < x < c$ | |
| **2.** $\|x\| \leq c$ | $-c \leq x \leq c$ |  |
| **3.** $\|x\| > c$ | $x < -c$ o $c < x$ | |
| **4.** $\|x\| \geq c$ | $x \leq -c$ o $c \leq x$ |  |

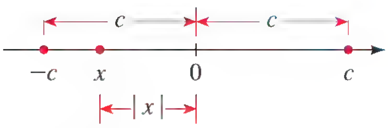


**FIGURA 8**

Estas propiedades se pueden demostrar con el uso de la definición de valor absoluto. Para demostrar la Propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $|x| < c$ dice que la distancia de $x$ a 0 es menor que $c$, y de la Figura 8 vemos que esto es verdadero si y sólo si $x$ está entre $-c$ y $c$.

### EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|x - 5| < 2$.

**SOLUCIÓN 1** La desigualdad $|x - 5| < 2$ es equivalente a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Sume 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto (3, 7).

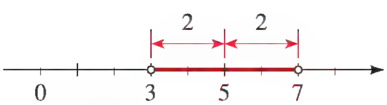


**FIGURA 9**

**SOLUCIÓN 2** Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números $x$ cuya distancia desde 5 es menor a 2. De la Figura 9 vemos que éste es el intervalo (3, 7).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

### EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

**SOLUCIÓN** Por la Propiedad 4, la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ es equivalente a

$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{o} \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \qquad 3x \leq -6 \qquad \text{Reste 2}$$

$$x \geq \tfrac{2}{3} \qquad x \leq -2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Entonces el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto está graficado en la Figura 10.

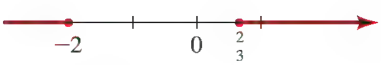


**FIGURA 10**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

## Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos lleva a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

## EJEMPLO 8 | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

**SOLUCIÓN** Identifique la variable. Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

$x$ = número de viajes en juego mecánico

Convierta las palabras en álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Número de viajes | $x$ |
| Costo con Plan A | $5 + 0.25x$ |
| Costo con plan B | $2 + 0.50x$ |

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

costo con Plan A < costo con Plan B

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

Resuelva. A continuación despejamos $x$.

$3 + 0.25x < 0.50x$ Reste 2

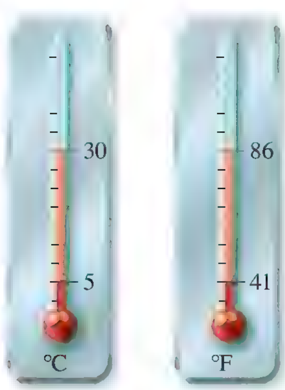
$3 < 0.25x$ Reste $0.25x$

$12 < x$ Divida entre 0.25

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **107**

## EJEMPLO 9 | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius




Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

**SOLUCIÓN** La relación entre grados Celsius ($C$) y grados Fahrenheit ($F$) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

$5 < \frac{5}{9}(F - 32) < 30$ Sustituya $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

$\frac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \frac{9}{5} \cdot 30$ Multiplique por $\frac{9}{5}$

$9 < F - 32 < 54$ Simplifique

$9 + 32 < F < 54 + 32$ Sume 32

$41 < F < 86$ Simplifique

La medicina debe conservarse a una temperatura entre 41°F y 86°F.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

# 1.7 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Llene el espacio en blanco con un signo de desigualdad apropiado.
   (a) Si $x < 5$, entonces $x - 3$ ____ 2.
   (b) Si $x \le 5$, entonces $3x$ ____ 15.
   (c) Si $x \ge 2$, entonces $-3x$ ____ $-6$.
   (d) Si $x < -2$, entonces $-x$ ____ 2.
2. *¿Verdadero o falso?*
   (a) Si $x(x + 1) > 0$, entonces $x$ y $x + 1$ son ambos positivos o ambos negativos.
   (b) Si $x(x + 1) > 5$, entonces $x$ y $x + 1$ son cada uno mayores a 5.
3. (a) La solución de la desigualdad $|x| \le 3$ es el intervalo _______.
   (b) La solución de la desigualdad $|x| \ge 3$ es una unión de dos intervalos ____ $\cup$ _____.
4. (a) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es menor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ _______.
   (b) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es mayor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ _______.

## HABILIDADES

**5–10** ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de $S$ satisfacen la desigualdad.

5. $3 - 2x \le \frac{1}{2}$
6. $2x - 1 \ge x$
7. $1 < 2x - 4 \le 7$
8. $-2 \le 3 - x < 2$
9. $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}$
10. $x^2 + 2 < 4$

**11–34** ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

11. $2x \le 7$
12. $-4x \ge 10$
13. $2x - 5 > 3$
14. $3x + 11 < 5$
15. $7 - x \ge 5$
16. $5 - 3x \le -16$
17. $2x + 1 < 0$
18. $0 < 5 - 2x$
19. $3x + 11 \le 6x + 8$
20. $6 - x \ge 2x + 9$
21. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$
22. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$
23. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$
24. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$
25. $4 - 3x \le -(1 + 8x)$
26. $2(7x - 3) \le 12x + 16$
27. $2 \le x + 5 < 4$
28. $5 \le 3x - 4 \le 14$
29. $-1 < 2x - 5 < 7$
30. $1 < 3x + 4 \le 16$
31. $-2 < 8 - 2x \le -1$
32. $-3 \le 3x + 7 \le \frac{1}{2}$
33. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \le \dfrac{2}{3}$
34. $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{4 - 3x}{5} \le \dfrac{1}{4}$

**35–72** ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

35. $(x + 2)(x - 3) < 0$
36. $(x - 5)(x + 4) \ge 0$
37. $x(2x + 7) \ge 0$
38. $x(2 - 3x) \le 0$
39. $x^2 - 3x - 18 \le 0$
40. $x^2 + 5x + 6 > 0$
41. $2x^2 + x \ge 1$
42. $x^2 < x + 2$
43. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$
44. $5x^2 + 3x \ge 3x^2 + 2$
45. $x^2 > 3(x + 6)$
46. $x^2 + 2x > 3$
47. $x^2 < 4$
48. $x^2 \ge 9$
49. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \le 0$
50. $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$
51. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$
52. $(x + 3)^2(x + 1) > 0$
53. $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \le 0$
54. $x^2(x^2 - 1) \ge 0$
55. $x^3 - 4x > 0$
56. $16x \le x^3$
57. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \ge 0$
58. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$
59. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$
60. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$
61. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \le 3$
62. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \ge 1$
63. $\dfrac{4}{x} < x$
64. $\dfrac{x}{x + 1} > 3x$
65. $1 + \dfrac{2}{x + 1} \le \dfrac{2}{x}$
66. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{4}{x} \ge 1$
67. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{6}{x} \ge 1$
68. $\dfrac{x}{2} \ge \dfrac{5}{x + 1} + 4$
69. $\dfrac{x + 2}{x + 3} < \dfrac{x - 1}{x - 2}$
70. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} \le 0$
71. $x^4 > x^2$
72. $x^5 > x^2$

**73–88** ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

73. $|x| \le 4$
74. $|3x| < 15$
75. $|2x| > 7$
76. $\frac{1}{2}|x| \ge 1$
77. $|x - 5| \le 3$
78. $|x + 1| \ge 1$
79. $|2x - 3| \le 0.4$
80. $|5x - 2| < 6$
81. $|3x - 2| \ge 5$
82. $|8x + 3| > 12$
83. $\left|\dfrac{x - 2}{3}\right| < 2$
84. $\left|\dfrac{x + 1}{2}\right| \ge 4$
85. $|x + 6| < 0.001$
86. $3 - |2x + 4| \le 1$
87. $8 - |2x - 1| \ge 6$
88. $7|x + 2| + 5 > 4$

**88–92** ■ Se da una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contenga un valor absoluto.

89. Todos los números reales $x$ menos 3 unidades desde 0

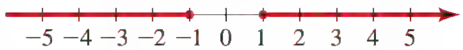
**90.** Todos los números reales $x$ más 2 unidades desde 0

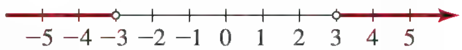
**91.** Todos los números reales $x$ menos 5 unidades desde 7

**92.** Todos los números reales $x$ como máximo 4 desde 2

**93–98** ■ Se grafica un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

**93.**


**94.** 


**95.** 


**96.**


**97.**


**98.**


**99–102** ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como número real.

**99.** $\sqrt{16 - 9x^2}$  **100.** $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

**101.** $\left(\dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$  **102.** $\sqrt[4]{\dfrac{1 - x}{2 + x}}$

**103.** De la desigualdad despeje $x$, suponiendo que $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas.

**(a)** $a(bx - c) \geq bc$  **(b)** $a \leq bx + c < 2a$

**104.** Suponga que $a$, $b$, $c$ y $d$ son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a + c}{b + d} < \dfrac{c}{d}$.

## APLICACIONES

**105. Escalas de temperatura** Use la relación entre $C$ y $F$ dada en el Ejemplo 9 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

**106. Escalas de temperatura** ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leq F \leq 95$?

**107. Costo de renta de un auto** Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para renta de un auto.

Plan A: $30 por día y $0.10 por milla

Plan B: $50 por día con kilometraje ilimitado

**108. Costo de llamadas de larga distancia** Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.

Plan A: $25 por mes y $0.05 por minuto

Plan B: $5 por mes y $0.12 por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?

**109. Costo de manejar un auto** Se estima que el costo anual de manejar cierto auto nuevo está dado por la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde $m$ representa el número de millas recorridas por año y $C$ es el costo en dólares. Juana compró ese auto y decide presupuestar entre $6400 y $7100 para costos de manejo del año siguiente. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que ella puede manejar su nuevo auto?

**110. Temperatura del aire** Cuando el aire asciende, se dilata y, al dilatarse, se enfría a razón de alrededor de 1°C por cada 100 metros de ascenso hasta unos 12 km.

**(a)** Si la temperatura del suelo es de 20°C, escriba una fórmula para la temperatura a una altura $h$.

**(b)** ¿Qué intervalo de temperaturas se puede esperar si un avión despega y alcanza una altitud máxima de 5 km?

**111. Precio de boleto en una aerolínea** Una aerolínea que hace vuelos especiales encuentra que, en sus vuelos de sábados de Filadelfia a Londres, los 120 asientos se venderán si el precio es de $200. No obstante, por cada aumento de $3 en el precio del boleto, el número de asientos disminuye en uno.

**(a)** Encuentre una fórmula para el número de asientos vendidos si el precio del boleto es de $P$ dólares.

**(b)** Durante cierto período, el número de asientos vendidos para este vuelo variaban entre 90 y 115. ¿Cuál era la variación correspondiente de precios de boletos?

**112. Precisión de una báscula** Un comerciante de café vende a un cliente 3 lb de café Hawaiian Kona a $6.50 por libra. La báscula del comerciante es precisa con variación no mayor de ±0.03 lb. ¿Cuánto podría habérsele cobrado de más o de menos al cliente por la posible imprecisión de la báscula?

**113. Gravedad** La fuerza gravitacional $F$ ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que tiene una masa de 100 kg está dada por la ecuación

$$F = \frac{4{,}000{,}000}{d^2}$$

donde $d$ es la distancia (en km) del objeto desde el centro de la Tierra, y la fuerza $F$ se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias será entre 0.0004 N y 0.01 N la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre este cuerpo?

**114. Temperatura de una fogata** En la cercanía de una fogata, la temperatura $T$ en °C a una distancia de $x$ metros del centro de la fogata está dada por

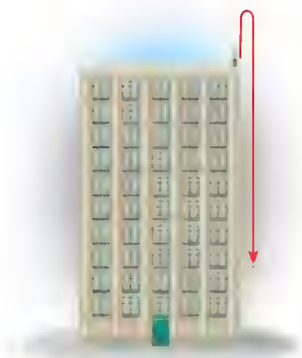
$$T = \frac{600{,}000}{x^2 + 300}$$

¿A qué intervalo de distancias desde el centro de la fogata era la temperatura menor a 500°C?

**115. Una pelota en caída** Usando cálculo, se puede demostrar que si una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 16 pies/s desde lo alto de un edificio de 128 pies de alto, entonces su altura $h$ sobre el suelo $t$ segundos después será

$$h = 128 + 16t - 16t^2$$

¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota al menos a 32 pies sobre el suelo?

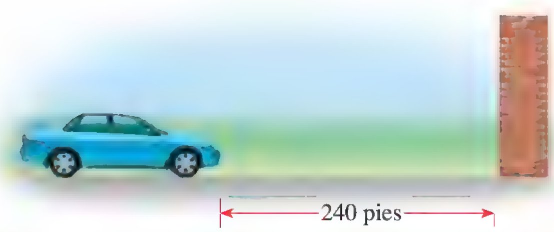


**116. Rendimiento de gasolina** El rendimiento de gasolina $g$ (medido en millas/gal) para un auto en particular, manejado a $v$ mi/h, está dado por la fórmula $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, mientras $v$ esté entre 10 mi/h y 75 mi/h. ¿Para qué intervalo de velocidades el rendimiento del vehículo será de 30 mi/gal o mejor?

**117. Distancia de parada** Para cierto modelo de auto, la distancia $d$ requerida para parar el vehículo si está corriendo a $v$ mi/h está dada por la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde $d$ se mide en pies. Kerry desea que su distancia de parada no rebase los 240 pies. ¿A qué intervalo de velocidades puede manejar ella?




**118. Utilidades de un fabricante** Si un fabricante vende $x$ unidades de cierto producto, el ingreso $R$ y el costo $C$ (en dólares) están dados por

$$R = 20x$$

$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Utilice el hecho de que

$$\text{utilidad} = \text{ingreso} - \text{costo}$$

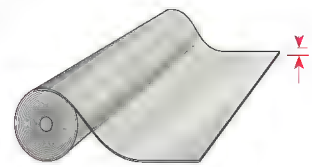
para determinar cuántas unidades debe vender el fabricante para disfrutar de una utilidad de al menos $2400.

**119. Cercar un jardín** Una jardinera tiene 120 pies de cerca resistente a venados. Ella desea encerrar un jardín rectangular de verduras en su patio trasero, y que el área encerrada sea al menos de 800 pies$^2$. ¿Qué intervalo de valores es posible para la longitud de su jardín?

**120. Grueso de un laminado** Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor, con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

**(a)** Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grueso para el laminado.

**(b)** Resuelva la desigualdad que haya encontrado en la parte (a).




**121. Intervalo de estatura** El promedio de estatura de hombres adultos es de 68.2 pulgadas y 95% de ellos tiene una estatura $h$ que satisface la siguiente desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \le 2$$

Resuelva la desigualdad para hallar el intervalo de estaturas.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**122. ¿Las potencias preservan el orden?** Si $a < b$, ¿$a^2 < b^2$? (Verifique valores positivos y negativos para $a$ y $b$.) Si $a < b$, ¿$a^3 < b^3$? Con base en sus observaciones, exprese una regla general acerca de la relación entre $a^n$ y $b^n$ cuando $a < b$ y $n$ es un entero positivo.

**123. ¿Qué está mal aquí?** Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver $1 < 3/x$ multiplicando ambos lados por $x$, para obtener $x < 3$, de modo que la solución sería $(-\infty, 3)$. Pero eso está mal; por ejemplo, $x = -1$ está en el intervalo pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense en el *signo* de $x$). A continuación resuelva correctamente la desigualdad.

**124. Uso de distancias para resolver desigualdades de valor absoluto** Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre $a$ y $b$ en la recta numérica. Para cualquier número $x$, ¿qué representan $|x - 1| < |x - 3|$? Use esta interpretación para resolver la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$ geométricamente. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

# 1.8 GEOMETRÍA DE COORDENADAS

El plano coordenado ▶ Las fórmulas para distancia y punto medio ▶ Gráficas de ecuaciones con dos variables ▶ Puntos de intersección ▶ Círculos ▶ Simetría

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación entre las variables de la ecuación. En esta sección estudiamos el plano coordenado.

## ▼ El plano coordenado

El plano cartesiano recibe ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596–1650), aun cuando otro francés, Pierre Fermat (1601–1665), inventó los principios de geometría de coordenadas al mismo tiempo. (Vea sus biografías en las páginas 181 y 99.)

En la misma forma en que puntos sobre una recta pueden ser identificados con números reales para formar la recta coordenada, los puntos en un plano se pueden identificar con pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacer esto, trazamos dos rectas reales perpendiculares que se cruzan en 0 en cada recta. Por lo general, una recta es horizontal con dirección positiva a la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical con dirección positiva hacia arriba y se denomina **eje *y***. El punto de intersección del eje $x$ y el eje $y$ es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, marcados I, II, III y IV en la Figura 1. (Los puntos *sobre* los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

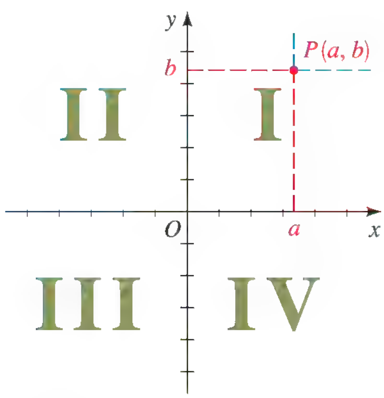



FIGURA 1

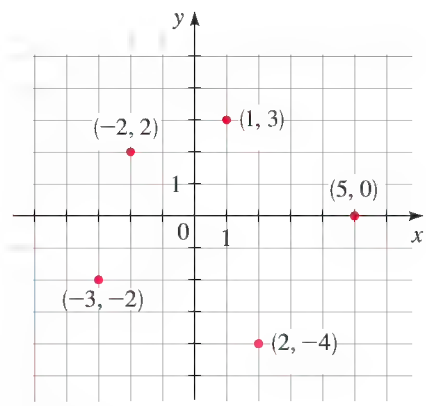



FIGURA 2

Aun cuando la notación para un punto $(a, b)$ es la misma que la notación para un intervalo abierto $(a, b)$, el contexto debe dejar claro cuál significado se persigue.

Cualquier punto $P$ del plano coordenado puede ser localizado por un **par ordenado** de números $(a, b)$, como se muestra en la Figura 1. El primer número $a$ se llama **coordenada *x*** de $P$; el segundo número $b$ se llama **coordenada *y*** de $P$. Podemos considerar las coordenadas de $P$ como su "dirección", porque especifican su ubicación en el plano. Varios puntos están marcados en la Figura 2.

### EJEMPLO 1 | Graficar regiones en el plano coordenado

Describa y trace las regiones dadas por cada conjunto.

**(a)** $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$ **(b)** $\{(x, y) \mid y = 1\}$ **(c)** $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Los puntos cuyas coordenadas $x$ son 0 o positivos se encuentran sobre el eje $y$ o a la derecha del mismo, como se ve en la Figura 3(a).

**(b)** El conjunto de todos los puntos con coordenada $y = 1$ es una recta horizontal que está una unidad arriba del eje $x$, como se ve en la Figura 3(b).

**Coordenadas como direcciones**
Las coordenadas de un punto en el plano *xy* determinan de manera única su ubicación. Podemos considerar las coordenadas como la "dirección" del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de casi todos los edificios están de hecho expresadas como coordenadas. La ciudad está dividida en cuadrantes con la Calle Principal como eje vertical (Norte–Sur) y la Calle del Templo S. como eje horizontal (Oriente–Poniente). Una dirección como

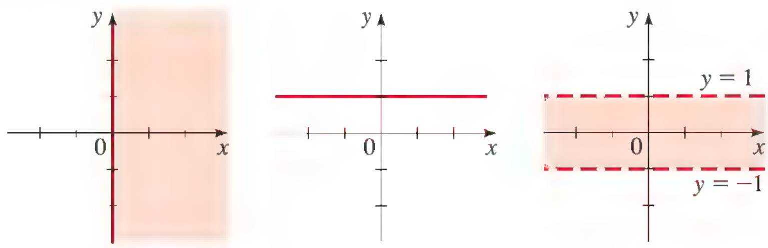
1760 W    2100 S

indica una ubicación a 17.6 manzanas al poniente de la Calle Principal y 21 manzanas al sur de la Calle del Templo S. (Ésta es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible que alguien no familiarizado con la ciudad pueda localizar de inmediato cualquier dirección, tan fácil como uno localiza un punto en el plano coordenado.

**(c)** Recuerde, de la Sección 1.7, que

$$|y| < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad -1 < y < 1$$

Entonces la región dada está formada por los puntos del plano cuyos ejes coordenados $y$ están entre $-1$ y 1. Por lo tanto, la región dada consta de todos los puntos que están entre (pero no sobre) las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$. Estas rectas se muestran como líneas interrumpidas en la Figura 3(c) para indicar que los puntos sobre estas rectas no están en el conjunto.




(a) $x \geq 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23, 25** Y **29**

## Las fórmulas para distancia y punto medio

A continuación encontramos una fórmula para la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ del plano. Recuerde de la Sección 1.1 que la distancia entre los puntos $a$ y $b$ en una recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. Entonces, de la Figura 4, vemos que la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta vertical debe ser $|y_2 - y_1|$.

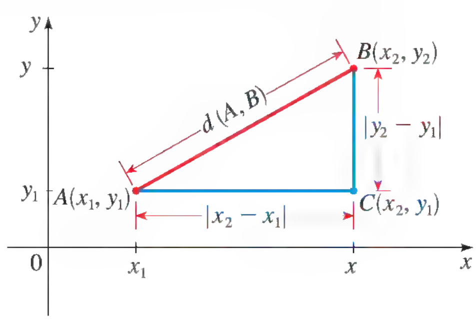



**FIGURA 4**

Como el triángulo $ABC$ es un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras da

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**FÓRMULA PARA DISTANCIAS**

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### EJEMPLO 2 | Aplicar la fórmula para distancias

¿Cuál de los puntos $P(1, -2)$ o $Q(8, 9)$ está más cercano al punto $A(5, 3)$?

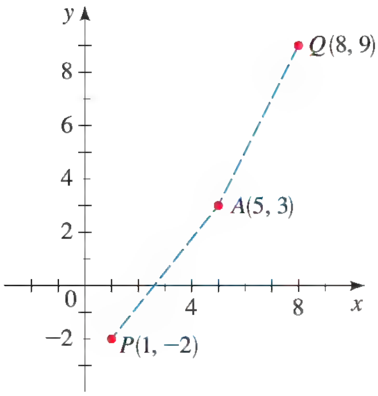



FIGURA 5

**SOLUCIÓN** Por la Fórmula para distancias tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$
$$d(Q, A) = \sqrt{(5-8)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, de modo que $P$ está más cercano a $A$ (vea Figura 5).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

Ahora encontremos las coordenadas $(x, y)$ del punto medio $M$ del segmento de recta que une al punto $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$. En la Figura 6 observe que los triángulos $APM$ y $MQB$ son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales.

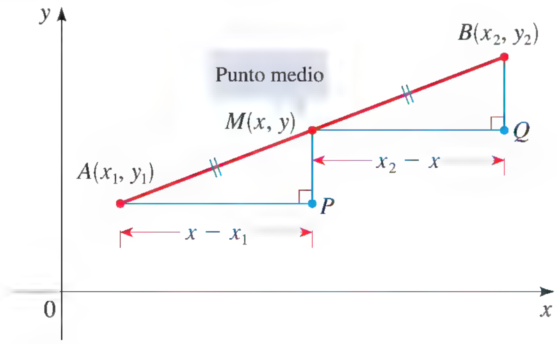



FIGURA 6

Se deduce que $d(A, P) = d(M, Q)$, por lo que

$$x \quad x_1 = x_2 \quad x$$

Despejando $x$ de esta ecuación obtendremos $2x = x_1 + x_2$, por lo que $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Del mismo modo, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

> **FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO**
>
> El punto medio del segmento de recta de $A(x_1, y_1)$ al punto $B(x_2, y_2)$ es
>
> $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

## EJEMPLO 3 | Aplicar la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo al probar que sus diagonales se bisecan entre sí.

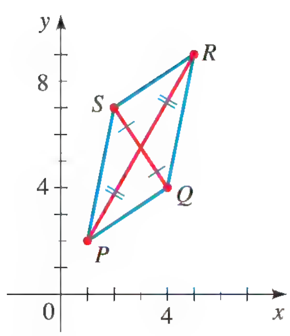



FIGURA 7

**SOLUCIÓN** Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse entre sí. El punto medio de la diagonal $PR$ es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

y el punto medio de la diagonal $QS$ es

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{4+7}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

de modo que cada diagonal biseca a la otra, como se ve en la Figura 7. (Un teorema de geometría elemental dice que el cuadrilátero es por lo tanto un paralelogramo.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

## Gráficas de ecuaciones con dos variables

**Principio fundamental de la Geometría Analítica**
Un punto $(x, y)$ está sobre la gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Una **ecuación con dos variables**, por ejemplo $y = x^2 + 1$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto $(x, y)$ **satisface** la ecuación si hace verdadera a la ecuación cuando los valores para $x$ y $y$ son sustituidos en la ecuación. Por ejemplo, el punto $(3, 10)$ satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto $(1, 3)$ no la satisface porque $3 \neq 1^2 + 1$.

> **LA GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN**
>
> La **gráfica** de una ecuación en $x$ y $y$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ del plano de coordenadas que satisface la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de manera que para graficar una ecuación localizamos tantos puntos como podamos y a continuación los enlazamos con una curva sin cambios bruscos de dirección.

### EJEMPLO 4 | Trazar una gráfica localizando puntos

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

**SOLUCIÓN** Primero despejamos $y$ de la ecuación dada para obtener

$$y = 2x - 3$$

Esto nos ayuda a calcular las coordenadas $y$ en la tabla siguiente.

| $x$ | $y = 2x - 3$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| −1 | −5 | (−1, −5) |
| 0 | −3 | (0, −3) |
| 1 | −1 | (1, −1) |
| 2 | 1 | (2, 1) |
| 3 | 3 | (3, 3) |
| 4 | 5 | (4, 5) |

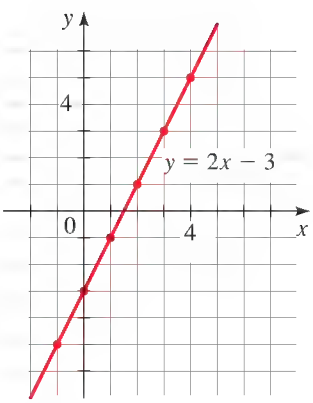



**FIGURA 8**

Desde luego que hay un infinito de puntos y es imposible localizarlos todos, pero, cuantos más puntos localicemos, mejor podemos imaginar el aspecto de la gráfica representada por la ecuación. Localizamos los puntos hallados en la Figura 8; parecen encontrarse sobre una recta, por lo cual completamos la gráfica al unir los puntos con una recta. (En la Sección 1.10 verificamos que la gráfica de esta ecuación es en verdad una recta.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

En el Capítulo 10 se presenta una discusión detallada de parábolas y sus propiedades geométricas.

### EJEMPLO 5 | Trazar una gráfica al localizar puntos

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

**SOLUCIÓN** En la tabla siguiente encontramos algunos de los puntos que satisfacen la ecuación. En la Figura 9 localizamos estos puntos y luego los conectamos por medio de una curva sin cambios bruscos de dirección. Una curva con esta forma recibe el nombre de *parábola*.

| $x$ | $y = x^2 - 2$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| −3 | 7 | (−3, 7) |
| −2 | 2 | (−2, 2) |
| −1 | −1 | (−1, −1) |
| 0 | −2 | (0, −2) |
| 1 | −1 | (1, −1) |
| 2 | 2 | (2, 2) |
| 3 | 7 | (3, 7) |

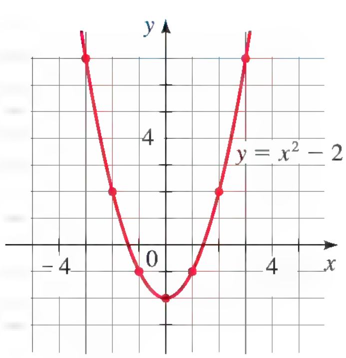



**FIGURA 9**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

### EJEMPLO 6 | Gráfica de una ecuación con valor absoluto

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

**SOLUCIÓN** Hacemos una tabla de valores:

| $x$ | $y = \|x\|$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| $-3$ | 3 | $(-3, 3)$ |
| $-2$ | 2 | $(-2, 2)$ |
| $-1$ | 1 | $(-1, 1)$ |
| 0 | 0 | $(0, 0)$ |
| 1 | 1 | $(1, 1)$ |
| 2 | 2 | $(2, 2)$ |
| 3 | 3 | $(3, 3)$ |

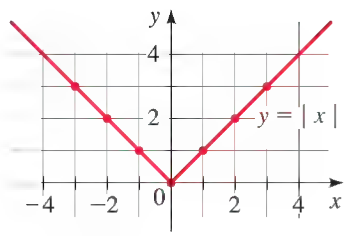



**FIGURA 10**

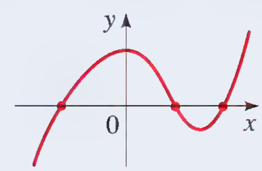
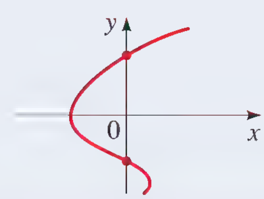
En la Figura 10 localizamos estos puntos y los usamos para trazar la gráfica de la ecuación.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

## Puntos de intersección

Las coordenadas $x$ de los puntos donde una gráfica interseca al eje $x$ reciben el nombre de **puntos de intersección $x$** de la gráfica y se obtienen al hacer $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas $y$ de los puntos donde una gráfica interseca al eje $y$ se denominan **puntos de intersección $y$** de la gráfica y se obtienen al hacer $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

### DEFINICIÓN DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN

| Puntos de intersección | Cómo hallarlos | En dónde están sobre la gráfica |
|---|---|---|
| **Puntos de intersección $x$:** Las coordenadas $x$ de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje $x$ | Haga $y = 0$ y despeje $x$ |  |
| **Puntos de intersección $y$:** Las coordenadas $y$ de los puntos donde la gráfica de una ecuación interseca al eje $y$ | Haga $x = 0$ y despeje $y$ |  |

### EJEMPLO 7 | Hallar puntos de intersección

Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ de la ecuación $y = x^2 - 2$.

**SOLUCIÓN** Para hallar los puntos de intersección $x$, hacemos $y = 0$ y despejamos $x$. Así,

$$0 = x^2 - 2 \qquad \text{Haga } y = 0$$

$$x^2 = 2 \qquad \text{Sume 2 a cada lado}$$

$$x = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Los puntos de intersección $x$ son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para hallar los puntos de intersección $y$, hacemos $x = 0$ y despejamos $y$. Así,

$$y = 0^2 - 2 \qquad \text{Haga } x = 0$$

$$y = -2$$

El punto de intersección $y$ es $-2$.

La gráfica de esta ecuación se trazó en el Ejemplo 5. Se repite en la Figura 11 con los puntos de intersección $x$ y $y$ marcados.

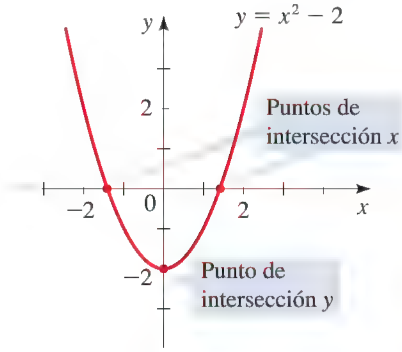



**FIGURA 11**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

## Circunferencias

Hasta este punto, hemos estudiado cómo hallar la gráfica de una ecuación en $x$ y $y$. El problema inverso es hallar una ecuación de una gráfica, es decir, una ecuación que represente una curva determinada en el plano $xy$. Esa ecuación queda satisfecha por las coordenadas de los puntos sobre la curva y por ningún otro punto. Esto es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica formulado por Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada por una ecuación algebraica, entonces las reglas de álgebra se pueden usar para analizar la curva.

Como ejemplo de este tipo de problema, encontremos la ecuación de una circunferencia con radio $r$ y centro $(h, k)$. Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es $r$ (vea Figura 12). Por lo tanto, $P$ está sobre la circunferencia si y sólo si $d(P, C)= r$. De la fórmula para distancias tenemos

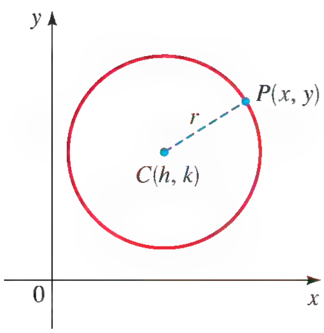



**FIGURA 12**

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada lado}$$

Ésta es la ecuación deseada.

> **ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA**
>
> Una ecuación de la circunferencia con centro $(h, k)$ y radio $r$ es
>
> $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
>
> Ésta se llama **forma ordinaria** para la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación es
>
> $$x^2 + y^2 = r^2$$

### EJEMPLO 8 | Gráfica de una circunferencia

Grafique cada ecuación.

**(a)** $x^2 + y^2 = 25$ **(b)** $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Reescribiendo la ecuación como $x^2 + y^2 = 5^2$, vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Su gráfica se ilustra en la Figura 13.

**(b)** Reescribiendo la ecuación como $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$, vemos que ésta es una ecuación de la circunferencia de radio 5 con centro en $(2, -1)$. Su gráfica se ilustra en la Figura 14.

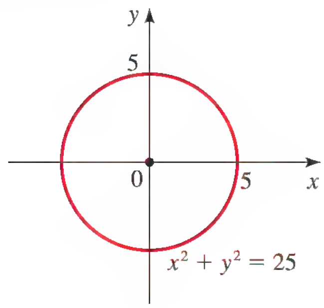



**FIGURA 13**

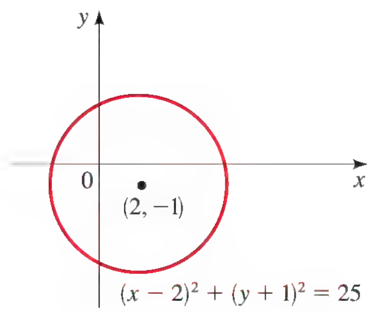



**FIGURA 14**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **87** Y **89**

## EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una circunferencia

**(a)** Encuentre la ecuación de la circunferencia con radio 3 y centro $(2, -5)$.

**(b)** Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene los puntos $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$ como los puntos extremos de un diámetro.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usando la ecuación de la circunferencia con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$$

La gráfica se muestra en la Figura 15.

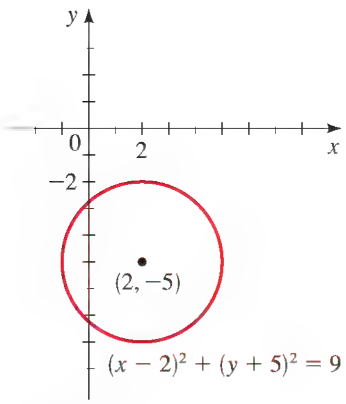



**FIGURA 15**

**(b)** Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro $PQ$, de modo que, por la Fórmula del Punto Medio, el centro es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2}\right) = (3, 1)$$

El radio $r$ es la distancia de $P$ al centro, y por la Fórmula para Distancias,

$$r^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53$$

La gráfica se muestra en la Figura 16.

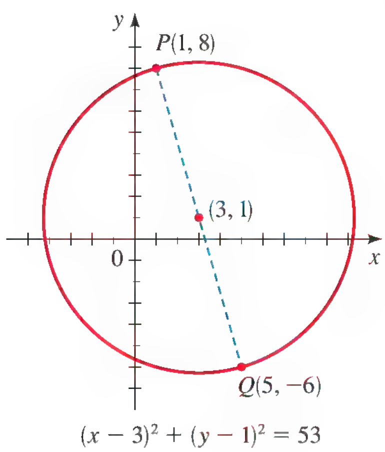



**FIGURA 16**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **93** Y **97**

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo precedente.

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 53 \qquad \text{Forma ordinaria}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 53 \qquad \text{Desarrolle los cuadrados}$$
$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 43 \qquad \text{Reste 10 para obtener forma desarrollada}$$

Suponga que nos dan la ecuación de una circunferencia en forma desarrollada. Entonces, para hallar su centro y radio, debemos regresar la ecuación a su forma ordinaria. Eso significa que debemos invertir los pasos del cálculo precedente y, para hacerlo, necesitamos saber qué sumar a una expresión como $x^2 - 6x$ para hacerla un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado, como en el ejemplo siguiente.

Completar el cuadrado se usa en muchos contextos en álgebra. En la Sección 1.5 usamos completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas.

## EJEMPLO 10 | Identificar una ecuación de un círculo

Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ representa una circunferencia, y encuentre el centro y el radio.

**SOLUCIÓN** Primero agrupamos los términos en $x$ y en $y$. A continuación completamos el cuadrado para $x^2 + 2y$ al sumar $\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)^2 = 1$, y completamos el cuadrado para $y^2 - 6y$ al sumar $\left[\frac{1}{2} \cdot (-6)\right]^2 = 9$.

$$(x^2 + 2x \qquad) + (y^2 - 6y \qquad) = -7 \qquad \text{Agrupe términos}$$

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9 \qquad \text{Complete el cuadrado al sumar 1 y 9 a cada lado}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3 \qquad \text{Factorice y simplifique}$$

Debemos agregar los mismos números a *cada lado* para mantener la igualdad.

Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, vemos que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada representa una circunferencia con centro $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **103**

## Simetría

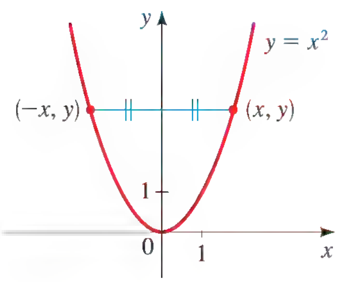
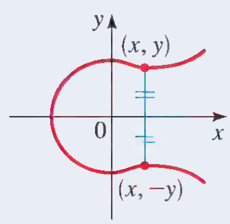
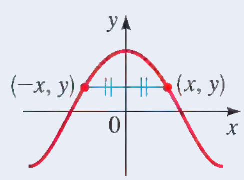
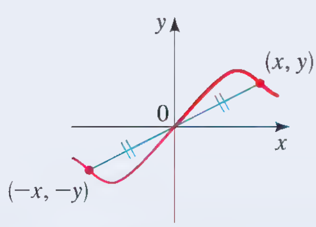



**FIGURA 17**

La Figura 17 muestra la gráfica de $y = x^2$. Nótese que la parte de la gráfica a la izquierda del eje $y$ es la imagen espejo de la parte a la derecha del eje $y$. La razón es que si el punto $(x, y)$ está en la gráfica, entonces también está $(-x, y)$, y estos puntos son reflexiones uno del otro respecto del eje $y$. En esta situación decimos que la gráfica es **simétrica con res-**

### DEFINICIÓN DE SIMETRÍA

| Tipo de simetría | Cómo probar si hay simetría | Qué aspecto tiene la gráfica (figuras en esta sección) | Significado geométrico |
|---|---|---|---|
| **Simetría con respecto al eje $x$** | La ecuación no cambia cuando $y$ es sustituida por $-y$ |   (Figuras 13, 18) | La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje $x$ |
| **Simetría con respecto al eje $y$** | La ecuación no cambia cuando $x$ es sustituida por $-x$ |   (Figuras 9, 10, 11, 13, 17) | La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje $y$ |
| **Simetría con respecto al origen** | La ecuación no cambia cuando $x$ es sustituida por $-x$ y $y$ por $-y$ |   (Figuras 13, 19) | La gráfica no cambia cuando gira 180° alrededor del origen |

**pecto al eje *y***. Del mismo modo, decimos que una gráfica es **simétrica con respecto al eje *x*** si siempre que el punto $(x, y)$ esté en la gráfica, entonces también lo estará $(x, -y)$. Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si siempre que $(x, y)$ esté en la gráfica, también lo estará $(-x, -y)$.

Los ejemplos restantes de esta sección muestran cómo la simetría nos ayuda a trazar las gráficas de ecuaciones.

## EJEMPLO 11 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $x = y^2$ y trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Si $y$ es sustituida por $-y$ en la ecuación $x = y^2$, obtenemos

$$x = (-y)^2 \qquad \text{Sustituya } y \text{ por } -y$$

$$x = y^2 \qquad \text{Simplifique}$$

y por lo tanto la ecuación no cambió. En consecuencia, la gráfica es simétrica respecto al eje $x$. Pero cambiar $x$ por $-x$ da la ecuación $-x = y^2$, que no es la misma que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica alrededor del eje $y$.

Usamos la simetría respecto al eje $x$ para trazar la gráfica al localizar primeramente los puntos justo para $y > 0$ y a continuación reflejar la gráfica en el eje $x$, como se ve en la Figura 18.

| $y$ | $x = y^2$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | 1 | (1, 1) |
| 2 | 4 | (4, 2) |
| 3 | 9 | (9, 3) |

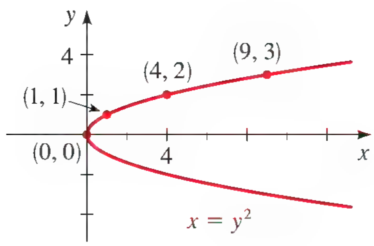



**FIGURA 18**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

## EJEMPLO 12 | Usar simetría para trazar una gráfica

Pruebe la simetría de la ecuación $y = x^3 - 9x$ y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Si sustituimos $x$ por $-x$ y $y$ por $-y$ en la ecuación, obtenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \qquad \text{Sustituya } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$

$$-y = -x^3 + 9x \qquad \text{Simplifique}$$

$$y = x^3 - 9x \qquad \text{Multiplique por } -1$$

y así la ecuación no cambia. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La trazamos al localizar primero puntos para $x > 0$ y luego usando simetría alrededor del origen (vea Figura 19).

| $x$ | $y = x^3 - 9x$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | (0, 0) |
| 1 | −8 | (1, −8) |
| 1.5 | −10.125 | (1.5, −10.125) |
| 2 | −10 | (2, −10) |
| 2.5 | −6.875 | (2.5, −6.875) |
| 3 | 0 | (3, 0) |
| 4 | 28 | (4, 28) |

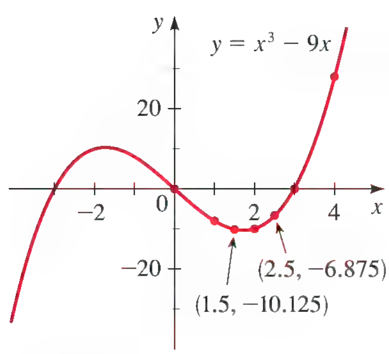



**FIGURA 19**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

## 1.8 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. El punto que está 3 unidades a la derecha del eje $y$ y 5 unidades abajo del eje $x$ tiene coordenadas (___, ___)

2. La distancia entre los puntos $(a, b)$ y $(c, d)$ es ________.
   Por lo tanto, la distancia entre (1, 2) y (7, 10) es _______.

3. El punto medio entre $(a, b)$ y $(c, d)$ es _________.
   Asi que el punto medio entre (1, 2) y (7, 10) es _________.

4. Si el punto (2, 3) está sobre la gráfica de una ecuación con $x$ y $y$, entonces la ecuación se satisface cuando sustituimos $x$ por _____ y $y$ por _____. ¿El punto (2, 3) está sobre la gráfica de la ecuación $2y = x + 1$?

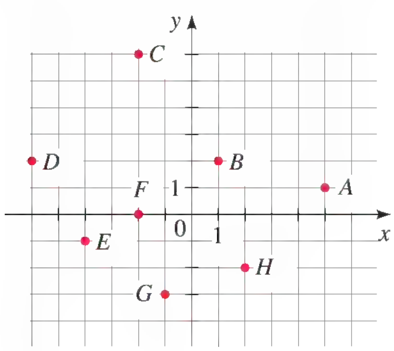
5. **(a)** Para hallar el (los) punto(s) de intersección $x$ de la gráfica de una ecuación, igualamos ____a 0 y despejamos ______.
   Entonces, el punto de intersección $x$ de $2y = x + 1$ es______.
   **(b)** Para hallar el (los) punto(s) de intersección $y$ de la gráfica de una ecuación, igualamos ____a 0 y despejamos ____.
   Entonces, el punto de intersección $y$ de $2y = x + 1$ es____.

6. La gráfica de la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ es una circunferencia con centro (___, ___) y radio _____.

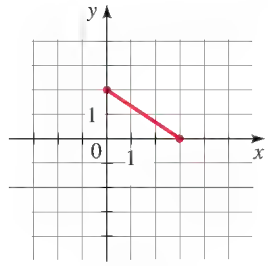
### HABILIDADES

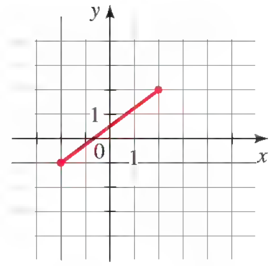
7. Localice los puntos dados en un plano de coordenadas.
   $(2, 3), (-2, 3), (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$

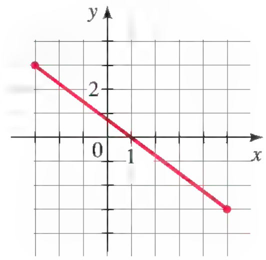
8. Encuentre las coordenadas de los puntos mostrados en la figura.

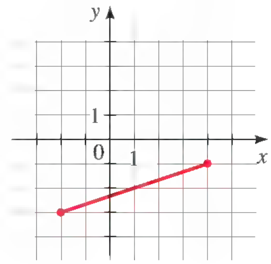



**9-12** ■ Se grafica un par de puntos.
**(a)** Encuentre la distancia entre ellos.
**(b)** Encuentre el punto medio del segmento que los une.

9.


10.


11.


12.


**13-18** ■ Se grafica un par de puntos.
**(a)** Localice los puntos en un plano de coordenadas.
**(b)** Encuentre la distancia entre ellos.
**(c)** Encuentre el punto medio del segmento que los une.

13. (0, 8), (6, 16)
14. $(-2, 5)$, (10, 0)
15. $(-3, -6)$, (4, 18)
16. $(-1, -1)$, (9, 9)
17. $(6, -2)$, $(-6, 2)$
18. $(0, -6)$, (5, 0)

19. Trace el rectángulo con vértices $A(1, 3)$, $B(5, 3)$, $C(1, -3)$ y $D(5, -3)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del rectángulo.

20. Trace el paralelogramo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$ y $D(7, 6)$ en un plano de coordenadas. Encuentre el área del paralelogramo.

21. Encuentre los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos $AB$, $BC$, $CD$ y $DA$. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$ y cuál es su área?

22. Determine los puntos $P(5, 1)$, $Q(0, 6)$ y $R(-5, 1)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto $S$ para que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Encuentre el área de este cuadrado.

**23–32** ■ Trace la región dada por el conjunto.

23. $\{(x, y) \mid x \geq 3\}$
24. $\{(x, y) \mid y < 3\}$
25. $\{(x, y) \mid y = 2\}$
26. $\{(x, y) \mid x = -1\}$
27. $\{(x, y) \mid 1 < x < 2\}$
28. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$
29. $\{(x, y) \mid |x| > 4\}$
30. $\{(x, y) \mid |y| \leq 2\}$
31. $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$
32. $\{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } |y| \leq 3\}$

**33.** ¿Cuál de los puntos $A(6, 7)$ o $B(-5, 8)$ está más cercano al origen?

**34.** ¿Cuál de los puntos $C(-6, 3)$ o $D(3, 0)$ está más cercano al punto $E(-2, 1)$?

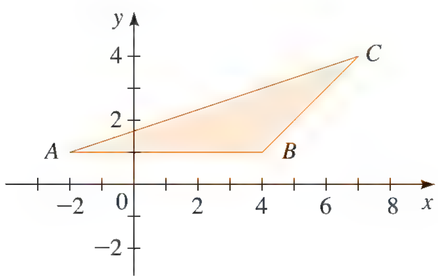
**35.** ¿Cuál de los puntos $P(3, 1)$ o $Q(-1, 3)$ está más cercano al punto $R(-1, -1)$?

**36.** **(a)** Demuestre que los puntos $(7, 3)$ y $(3, 7)$ están a la misma distancia del origen.

**(b)** Demuestre que los puntos $(a, b)$ y $(b, a)$ están a la misma distancia del origen.

**37.** Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

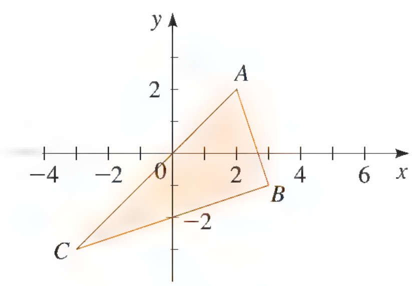
**38.** Encuentre el área del triángulo que se ve en la figura.




**39.** Consulte el triángulo $ABC$ de la figura siguiente.

**(a)** Demuestre que el triángulo $ABC$ es rectángulo, usando para ello el inverso del Teorema de Pitágoras (vea página 219).

**(b)** Encuentre el área del triángulo $ABC$.




**40.** Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es rectángulo, usando el inverso del Teorema de Pitágoras. Encuentre el área del triángulo.

**41.** Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

**42.** Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales, demostrando para ello que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

**43.** Encuentre el punto sobre el eje $y$ que es equidistante de los puntos $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

**44.** Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una *mediana* es un segmento de recta que va del vértice al punto medio del lado opuesto.)

**45.** Localice los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar situado el punto $S$ de modo que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo?

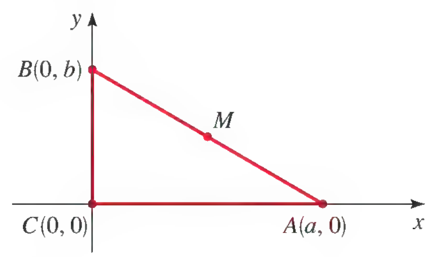
**46.** Si $M(6, 8)$ es el punto medio del segmento de recta $AB$ y si $A$ tiene coordenadas $(2, 3)$, encuentre las coordenadas de $B$.

**47.** **(a)** Trace el paralelogramo con vértices $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(1, 4)$.

**(b)** Encuentre los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

**(c)** De la parte (b) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

**48.** El punto $M$ en la figura siguiente es el punto medio del segmento de recta $AB$. Demuestre que $M$ es equidistante de los vértices del triángulo $ABC$.




**49-52** ■ Determine si los puntos dados están sobre la gráfica de la ecuación.

**49.** $x - 2y - 1 = 0$; $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

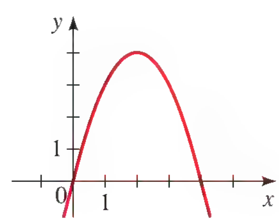
**50.** $y(x^2 + 1) = 1$; $(1, 1), (1, \frac{1}{2}), (-1, \frac{1}{2})$

**51.** $x^2 + xy + y^2 = 4$; $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

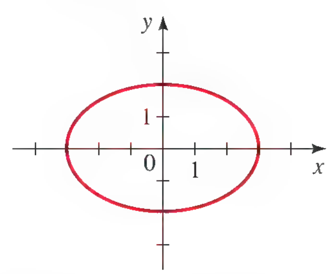
**52.** $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**53-56** ■ Se da una ecuación y su gráfica. Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$.

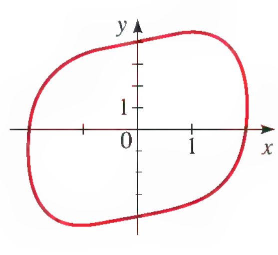
**53.** $y = 4x \quad x^2$



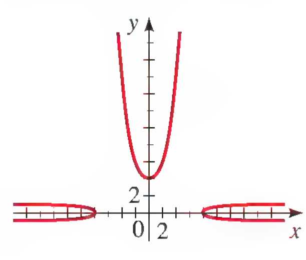

**54.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$




**55.** $x^4 + y^2 - xy = 16$




**56.** $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$



**57-76** ■ Haga una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ y pruebe si hay simetría.

**57.** $y = -x + 4$

**58.** $y = 3x + 3$

**59.** $2x - y = 6$

**60.** $x + y = 3$

**61.** $y = 1 - x^2$

**62.** $y = x^2 + 2$

**63.** $4y = x^2$

**64.** $8y = x^3$

**65.** $y = x^2 - 9$

**66.** $y = 9 - x^2$

**67.** $xy = 2$

**68.** $y = \sqrt{x + 4}$

**69.** $y = \sqrt{4 - x^2}$

**70.** $y = -\sqrt{4 - x^2}$

**71.** $x + y^2 = 4$

**72.** $x = y^3$

**73.** $y = 16 - x^4$

**74.** $x = |y|$

**75.** $y = 4 - |x|$

**76.** $y = |4 - x|$

**77-82** ■ Pruebe si hay simetría en cada ecuación.

**77.** $y = x^4 + x^2$

**78.** $x = y^4 - y^2$

**79.** $x^2y^2 + xy = 1$

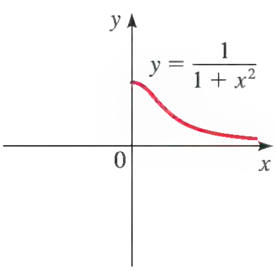
**80.** $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

**81.** $y = x^3 + 10x$

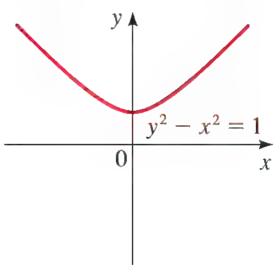
**82.** $y = x^2 + |x|$

**83-86** ■ Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

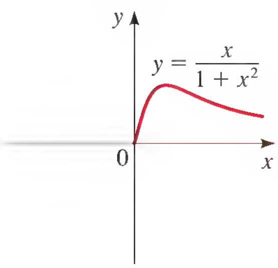
**83.** Simétrica con respecto al eje $y$.



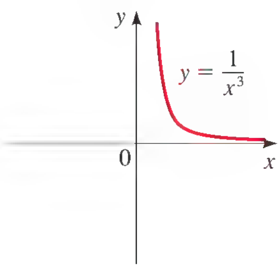

**84.** Simétrica con respecto al eje $x$.




**85.** Simétrica con respecto al origen.




**86.** Simétrica con respecto al origen.




**87-92** ■ Encuentre el centro y radio de la circunferencia y trace su gráfica.

**87.** $x^2 + y^2 = 9$

**88.** $x^2 + y^2 = 5$

**89.** $(x - 3)^2 + y^2 = 16$

**90.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

**91.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

**92.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$

**93-100** ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.

**93.** Centro $(2, -1)$; radio 3

**94.** Centro $(-1, -4)$; radio 8

**95.** Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

**96.** Centro $(-1, 5)$; pasa por $(-4, -6)$

**97.** Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 1)$ y $Q(5, 9)$

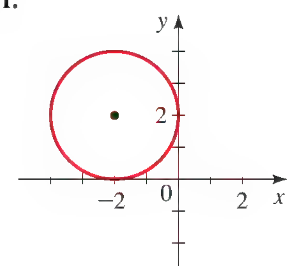
**98.** Los puntos extremos de un diámetro son $P(-1, 3)$ y $Q(7, -5)$

**99.** Centro $(7, -3)$; tangente al eje $x$

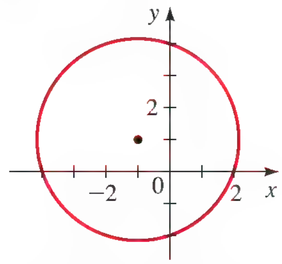
**100.** La circunferencia está en el primer cuadrante, tangente a los ejes $x$ y $y$; radio 5

**101-102** ■ Encuentre la ecuación de la circunferencia de la figura.

**101.**




**102.**




**103-108** ■ Demuestre que la ecuación representa una circunferencia, y encuentre el centro y radio.

**103.** $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

**104.** $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

**105.** $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

**106.** $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

**107.** $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

**108.** $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

**109-110** ■ Trace la región dada por el conjunto.

**109.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

**110.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

**111.** Encuentre el área de la región que está fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

**112.** Trace la región del plano coordenado que satisface las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 9$ y $y \geq |x|$. ¿Cuál es el área de esta región?

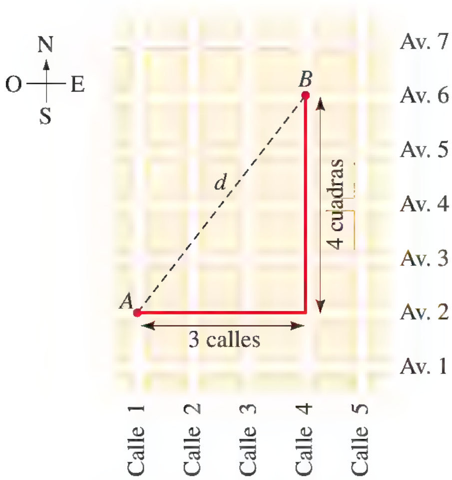
## APLICACIONES

**113. Distancias en una ciudad** Una ciudad tiene calles que corren de norte a sur y avenidas que corren de oriente a poniente, todas igualmente espaciadas. Calles y avenidas están numeradas en forma secuencial, como se ve en la figura siguiente. La distancia *a pie* entre los puntos $A$ y $B$ es de 7 manzanas, es decir, 3 manzanas al oriente y 4 manzanas al norte. Para hallar la distancia $d$ *en línea recta*, debemos usar la Fórmula para Distancias.

**(a)** Encuentre la distancia en línea recta (en manzanas) entre $A$ y $B$.

**(b)** Encuentre la distancia a pie y la distancia en línea recta entre la esquina de la Calle 4 y la Avenida 2, y la esquina de la Calle 11 y la Avenida 26.

**(c)** ¿Qué debe ser cierto en relación con los puntos $P$ y $Q$ si la distancia a pie entre $P$ y $Q$ es igual a la distancia en línea recta entre $P$ y $Q$?




**114. Punto medio** Dos amigos viven en la ciudad descrita en el Ejercicio 113, uno en la esquina de la Calle 3 y la Avenida 7, el otro en la esquina de la Calle 27 y la Avenida 17. Con frecuencia se ven en una cafetería que está a la mitad de distancia entre sus casas.

**(a)** ¿En cuál crucero está ubicada la cafetería?

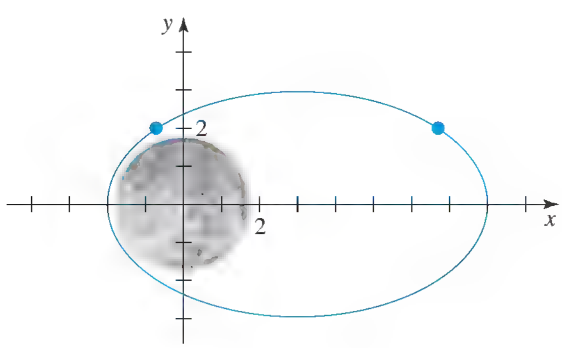
**(b)** ¿Cuánto debe caminar cada uno para llegar a la cafetería?

**115. Órbita de un satélite** Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Se elabora un plano de coordenadas que contiene la órbita, con el centro de la Luna en el origen como se muestra en la gráfica, con distancias medidas en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**(a)** De la gráfica, determine el punto más cercano y el más lejano que el satélite llega al centro de la Luna.

**(b)** Hay dos puntos en la órbita con coordenadas $y$ 2. Encuentre las coordenadas $x$ de estos puntos y determine sus distancias al centro de la Luna.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

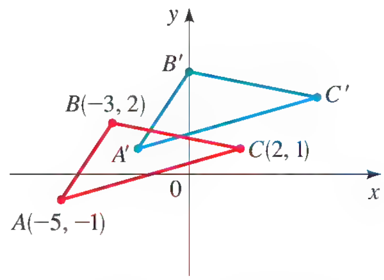
**116. Desplazar el plano de coordenadas** Suponga que cada uno de los puntos del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

**(a)** ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto (5, 3)?

**(b)** ¿A qué nuevo punto se desplaza el punto $(a, b)$?

**(c)** ¿Cuál punto se desplaza a (3, 4)?

**(d)** El triángulo $ABC$ de la figura ha sido desplazado al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos $A'$, $B'$ y $C'$.



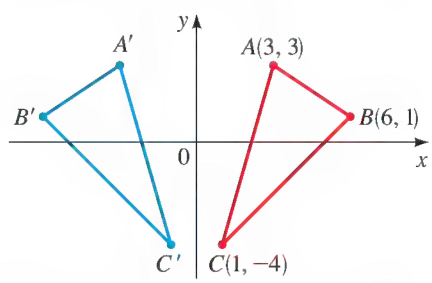

**117. Reflejo en el plano de coordenadas** Suponga que el eje $y$ actúa como espejo que refleja cada punto a la derecha del mismo hacia un punto a su izquierda.

**(a)** ¿A qué punto se refleja el punto (3, 7)?

**(b)** ¿A qué punto se refleja el punto $(a, b)$?

**(c)** ¿Cuál punto se refleja al $(-4, -1)$?

**(d)** El triángulo $ABC$ de la figura se refleja al triángulo $A'B'C'$. Encuentre las coordenadas de los puntos $A'$, $B'$ y $C'$.




**118. Completar el segmento de recta** Localice los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$ en un plano de coordenadas. Si $M$ es el punto medio del segmento de recta $AB$, encuentre las coordenadas de $B$. Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar $B$, así como sus razones para tomarlos.

**119. Completar un paralelogramo** Localice los puntos $P(0, 3)$, $Q(2, 2)$ y $R(5, 3)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto $S$ para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo? Escriba una breve descripción de los pasos que tomó para hallar $B$, así como sus razones para tomarlos.

**120. ¿Circunferencia, punto o conjunto vacío?** Complete los cuadrados en la ecuación general $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ y simplifique el resultado cuanto sea posible. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación representa una circunferencia en los coeficientes $a$, $b$ y $c$? ¿Un solo punto? ¿El conjunto vacío? En el caso en que la ecuación represente una circunferencia, encuentre su centro y radio.

**121. ¿Las circunferencias se intersecan?**

**(a)** Encuentre el radio de cada circunferencia del par y la distancia entre sus centros; a continuación use esta información para determinar si las circunferencias se intersecan.

(i) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9;$
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4;$
$(x - 5)^2 + (y - 14)^2 = 9$

(iii) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1;$
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$

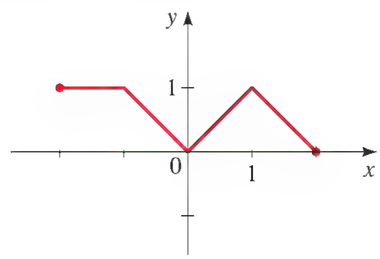
**(b)** ¿Cómo se puede averiguar, con sólo saber los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, si las circunferencias se intersectan? Escriba un breve párrafo que describa cómo se determina esto y trace gráficas para ilustrar su respuesta.

**122. Hacer una gráfica simétrica** La gráfica que se muestra en la figura no es simétrica alrededor del eje $x$, el eje $y$ o el origen. Agregue más segmentos de recta a la gráfica para que muestre la simetría indicada. En cada caso, agregue tan poco como sea posible.

**(a)** Simetría alrededor del eje $x$

**(b)** Simetría alrededor del eje $y$

**(c)** Simetría alrededor del origen




# 1.9 CALCULADORAS GRAFICADORAS; RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Uso de una calculadora graficadora ▶ Resolver ecuaciones gráficamente ▶ Resolver desigualdades gráficamente

En las Secciones 1.5 y 1.7 resolvimos ecuaciones y desigualdades algebraicamente. En la Sección 1.8 aprendimos a trazar la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas. En esta sección usamos gráficas para resolver ecuaciones y desigualdades. Para hacer esto, debemos primero trazar una gráfica usando una calculadora graficadora. Por lo tanto empezamos por dar unas pocas guías para ayudarnos a usar con eficiencia una calculadora graficadora.

## ▼ Uso de una calculadora graficadora

Una calculadora graficadora o computadora exhibe una parte rectangular de la gráfica en una pantalla que llamamos **rectángulo de vista**. Es frecuente que la pantalla predeterminada dé una imagen incompleta o confusa, de modo que es importante escoger cuidadosamente un rectángulo de vista. Si escogemos que los valores $x$ varíen de un valor mínimo de `Xmin` $= a$ a un valor máximo de `Xmax` $= b$ y los valores $y$ varían de un valor mínimo de `Ymin` $= c$ a un valor máximo de `Ymax` $= d$, entonces la parte exhibida de la gráfica está en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

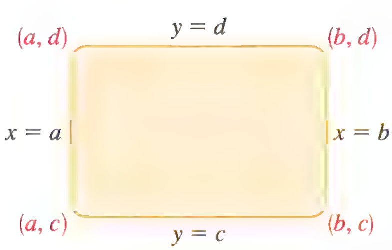



**FIGURA 1** Rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$

como se muestra en la Figura 1. Nos referimos a éste como el rectángulo de vista $[a, b]$ por $[c, d]$.

La calculadora graficadora traza la gráfica de una ecuación en una forma muy semejante a como lo haríamos nosotros. Determina los puntos de la forma $(x, y)$ para cierto número de valores de $x$, espaciados igualmente entre $a$ y $b$. Si la ecuación no está definida para un valor $x$ o si el valor $y$ correspondiente está fuera del rectángulo de vista, la calculadora ignora este valor y continúa con el siguiente valor $x$. La máquina conecta cada punto al punto localizado precedente para formar una representación de la gráfica de la ecuación.

### EJEMPLO 1 | Escoger un rectángulo de vista apropiado

Grafique la ecuación $y = x^2 + 3$ en un rectángulo de vista apropiado.

**SOLUCIÓN** Experimentemos con diferentes rectángulos de vista. Empezamos con el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[2, 2]$, de modo que hacemos

$$\texttt{Xmin} = -2 \qquad \texttt{Ymin} = -2$$
$$\texttt{Xmax} = 2 \qquad \texttt{Ymax} = 2$$

La gráfica resultante de la Figura 2(a) estaría en blanco, porque $x^2 \geq 0$, de modo que $x^2 + 3 \geq 3$ para toda $x$. Entonces, la gráfica está enteramente por arriba del rectángulo de vista y por ello no es apropiado. Si aumentamos el rectángulo de vista a $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$, como se ve en la Figura 2(b), empezamos a ver parte de la gráfica.

Probemos ahora con el rectángulo de vista $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$. La gráfica de la Figura 2(c) parece dar una vista más completa de la gráfica. Si agrandamos aún más el rectángulo de vista, como en la Figura 2(d), la gráfica no muestra con claridad que el punto de intersección $y$ es 3.

Entonces el rectángulo de vista $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ da una representación apropiada de la gráfica.

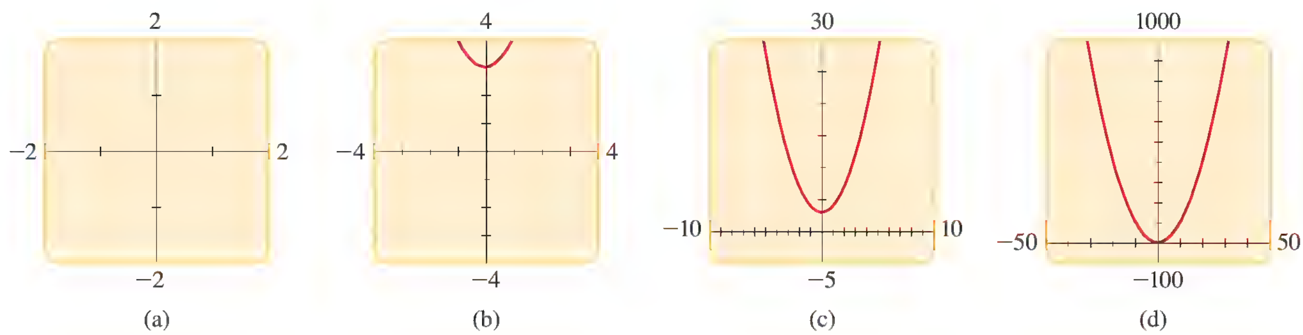



**FIGURA 2** Gráficas de $y = x^2 + 3$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## EJEMPLO 2 | Dos gráficas en la misma pantalla

Grafique las ecuaciones $y = 3x^2 - 6x + 1$ y $y = 0.23x - 2.25$ juntas en el rectángulo de vista $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$. ¿Las gráficas se intersecan en el rectángulo de vista?

**SOLUCIÓN** La Figura 3(a) muestra las características esenciales de ambas gráficas. Una de ellas es una parábola y la otra es una recta. Se ve como si las gráficas se cruzaran cerca del punto $(1, -2)$ pero, si hacemos acercamientos con el zoom en el área alrededor de este punto, como se muestra en la Figura 3(b), vemos que, aunque las gráficas casi se tocan, en realidad no se cruzan.

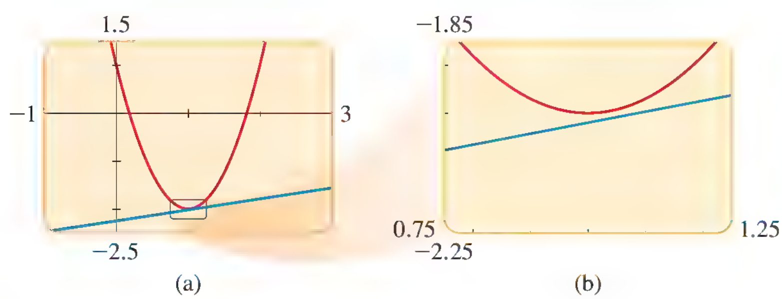



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

De los Ejemplos 1 y 2 se puede ver que la selección de un rectángulo de vista hace la gran diferencia en el aspecto de una gráfica. Si se desea una vista general de las características esenciales de una gráfica, se debe escoger un rectángulo de vista relativamente grande para obtener una vista global de la gráfica; si se desea investigar los detalles de una gráfica, se debe activar el zoom en un rectángulo de vista pequeño que muestre sólo la característica de interés.

Casi todas las calculadoras graficadoras sólo pueden graficar ecuaciones en las que $y$ está aislada en un lado del signo igual. El siguiente ejemplo muestra cómo graficar ecuaciones que no tienen esta propiedad.

## EJEMPLO 3 | Graficar una circunferencia

Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

**SOLUCIÓN** Primero debemos despejar $y$ para aislarla en un lado del signo igual.

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La gráfica de la Figura 4(c) se ve un poco aplanada. Casi todas las calculadoras graficadoras permiten ajustar las escalas de los ejes de manera que las circunferencias realmente se vean como circunferencias. En las TI−82 y TI−83, del menú `ZOOM`, escoja `ZSquare` para establecer las escalas en forma apropiada. (En la TI−86 el comando es `Zsq`.)

Por lo tanto, la circunferencia está descrita por las gráficas de *dos* ecuaciones:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera ecuación representa la mitad superior de la circunferencia (porque $y \geq 0$), y la segunda representa la mitad inferior de la circunferencia (porque $y \leq 0$). Si graficamos la primera ecuación en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$, obtenemos la semicircunferencia de la Figura 4(a). La gráfica de la segunda ecuación es la semicircunferencia de la Figura 4(b). Graficando estas semicircunferencias juntas en la misma pantalla de vista, obtenemos la circunferencia completa de la Figura 4(c).

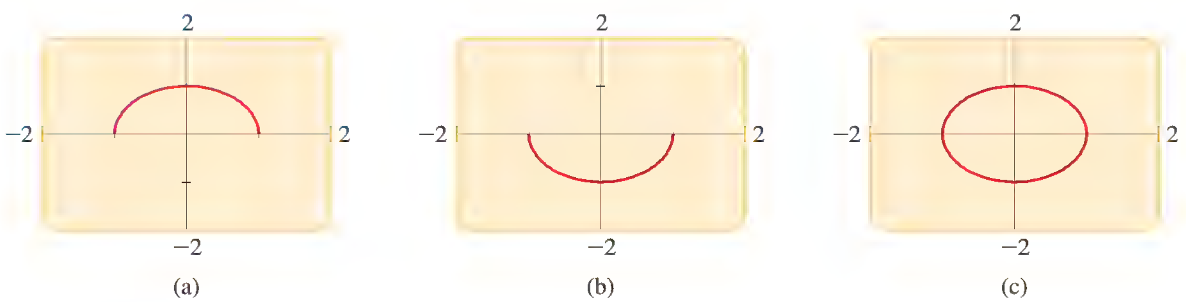



**FIGURA 4** Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## Resolver ecuaciones gráficamente

En la Sección 1.5 aprendimos a resolver ecuaciones. Para resolver una ecuación como

$$3x - 5 = 0$$

usamos el **método algebraico**. Esto significa que empleamos las reglas de álgebra para aislar $x$ en un lado de la ecuación. Vemos $x$ como una *incógnita* y usamos las reglas de álgebra para acorralarla. A continuación veamos los pasos en la solución:

$$3x - 5 = 0$$

$$3x = 5 \qquad \text{Sume 5}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, la solución es $x = \frac{5}{3}$.

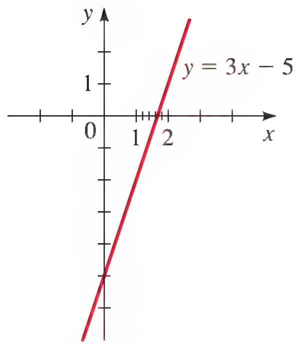



**FIGURA 5**

También podemos resolver esta ecuación por el **método gráfico**. En este método vemos $x$ como una *variable* y trazamos la gráfica de la ecuación

$$y = 3x - 5$$

Diferentes valores de $x$ dan diferentes valores de $y$. Nuestro objetivo es hallar el valor de $x$ para el cual $y = 0$. De la gráfica de la Figura 5 vemos que $y = 0$ cuando $x \approx 1.7$. Entonces, la solución es $x \approx 1.7$. Observe que de la gráfica obtenemos una solución apropiada. En el cuadro siguiente resumimos estos métodos.

## RESOLVER UNA ECUACIÓN

**Método algebraico**

Use las reglas del álgebra para aislar la incógnita $x$ en un lado de la ecuación.

**Ejemplo:** $2x = 6 \qquad x$

$3x = 6$ Sume $x$

$x = 2$ Divida entre 3

La solución es $x = 2$.

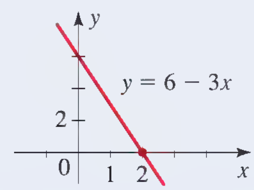
**Método gráfico**

Pase todos los términos a un lado y haga $y = 0$. Trace la gráfica para hallar el valor de $x$ donde $y = 0$.

**Ejemplo:** $2x = 6 \qquad x$

$0 = 6 - 3x$

Haga $y = 6 - 3x$ y grafique.

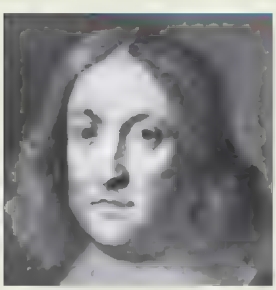



De la gráfica, la solución es $x \approx 2$.

La ventaja del método algebraico es que da respuestas exactas. También, el proceso de desenmarañar la ecuación para llegar a la respuesta nos ayuda a entender la estructura algebraica de la ecuación. Por otra parte, para muchas ecuaciones es difícil o imposible aislar $x$.

El método gráfico da una aproximación numérica a la respuesta. Ésta es una ventaja cuando se desea una respuesta numérica. (Por ejemplo, un ingeniero podría hallar una respuesta expresada como $x \approx 2.6$ más útil inmediatamente que $x = \sqrt{7}$.) Del mismo modo, graficar una ecuación nos ayuda a visualizar la forma en que la solución está relacionada a otros valores de la variable.

El *Proyecto de descubrimiento* de la página 263 describe un método numérico para resolver ecuaciones.



© Bettman/CORBIS

**PIERRE DE FERMAT** (1601–1665) fue un matemático francés que se interesó en matemáticas a la edad de 30 años. Debido a su trabajo como magistrado, Fermat tenía poco tiempo para escribir demostraciones completas de sus descubrimientos y con frecuencia los escribía en el margen de cualquier libro que estuviera leyendo. Después de su muerte, se encontró que su ejemplar del libro *Arithmetica* de Diofanto (vea página 20) contenía un comentario particularmente tentador. Donde Diofanto discute las soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$ (por ejemplo, $x = 3, y = 4$ y $z = 5$), Fermat dice en el margen que para $n \geq 3$ no hay soluciones numéricas naturales a la ecuación $x^n + y^n = z^n$. En otras palabras, es imposible que un cubo sea igual a la suma de dos cubos, que una cuarta potencia sea igual a la suma de dos potencias a la cuarta, y así sucesivamente. Fermat escribe, "he descubierto una demostración en verdad maravillosa para esto pero el margen es demasiado pequeño para contenerla". Todos los otros comentarios del margen del ejemplar de *Arithmetica* de Fermat han sido demostrados. Éste, sin embargo, quedó sin demostración y pasó a conocerse como "Último Teorema de Fermat".

En 1994, Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton, anunció una demostración del Último Teorema de Fermat, asombroso lapso de 350 años después de su conjetura. Su demostración es uno de los resultados matemáticos más ampliamente reportados en la prensa popular.

## EJEMPLO 4 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación cuadrática

Resuelva algebraica y gráficamente las ecuaciones cuadráticas.

**(a)** $x^2 - 4x + 2 = 0$ **(b)** $x^2 - 4x + 4 = 0$ **(c)** $x^2 - 4x + 6 = 0$

**SOLUCIÓN 1:** Algebraica

Usamos la Fórmula Cuadrática para resolver cada ecuación.

La Fórmula Cuadrática se estudia en la página 49.

**(a)** $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Hay dos soluciones, $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$

**(b)** $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

Hay una sola solución, $x = 2$.

**(c)** $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No hay solución real.

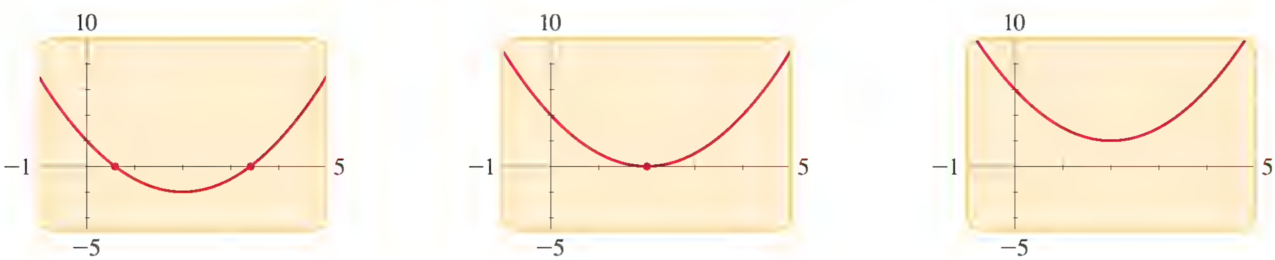
**SOLUCIÓN 2:** Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 - 4x + 4$ y $y = x^2 - 4x + 6$ en la Figura 6. Al determinar los puntos de intersección $x$ de las gráficas, encontramos las siguientes soluciones.

**(a)** $x \approx 0.6$ y $x \approx 3.4$

**(b)** $x = 2$

**(c)** No hay intersección con $x$, de modo que la ecuación no tiene solución.




(a) $y = x^2 - 4x + 2$ (b) $y = x^2 - 4x + 4$ (c) $y = x^2 - 4x + 6$

**FIGURA 6**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

**ALAN TURING** (1912–1954) estuvo en el centro de dos eventos cruciales: la Segunda Guerra Mundial y la invención de computadoras. A la edad de 23 años, Turing hizo su hazaña en matemáticas al resolver un importante problema en los cimientos de matemáticas que habían sido planteados por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1928 (vea página 683). En esta investigación inventó una máquina teórica, ahora llamada máquina de Turing, que fue la inspiración para las modernas computadoras digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial, Turing estuvo a cargo del trabajo inglés de descifrar códigos secretos alemanes. Su éxito completo en ese esfuerzo desempeñó una función decisiva en la victoria de los Aliados. Para realizar los numerosos pasos lógicos que se requieren para descifrar un mensaje codificado, Turing ideó procedimientos de decisión semejantes a los modernos programas de computadora. Después de la guerra ayudó a perfeccionar las primeras computadoras electrónicas en Gran Bretaña. También ejecutó trabajos pioneros sobre inteligencia artificial y modelos de computadora para procesos biológicos. A la edad de 42 años, Turing murió envenenado por comer una manzana que misteriosamente había sido rociada con cianuro.

Las gráficas de la Figura 6 muestran visualmente por qué una ecuación cuadrática puede tener dos soluciones, una solución o ninguna solución real. Demostramos este hecho algebraicamente en la Sección 1.5 cuando estudiamos el discriminante.

## EJEMPLO 5 | Otro método gráfico

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación: $5 - 3x = 8x - 20$

**SOLUCIÓN 1:** Algebraica

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= 8x - 20 \\ -3x &= 8x - 25 && \text{Reste 15} \\ -11x &= -25 && \text{Reste } 8x \\ x &= \frac{-25}{-11} = 2\tfrac{3}{11} && \text{Divida entre } -11 \text{ y simplifique} \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN 2:** Gráfica

Podríamos pasar todos los términos a un lado del signo igual, igualar a $y$ el resultado y graficar la ecuación resultante. Pero, para evitar toda esta álgebra, graficamos dos ecuaciones:

$$y_1 = 5 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = 8x - 20$$

La solución de la ecuación original será el valor de $x$ que hace $y_1$, es decir, la solución es la coordenada $x$ del punto de intersección de las dos gráficas. Usando la función TRACE o el comando `intersect` en una calculadora graficadora, vemos de la Figura 7 que la solución es $x \approx 2.27$.

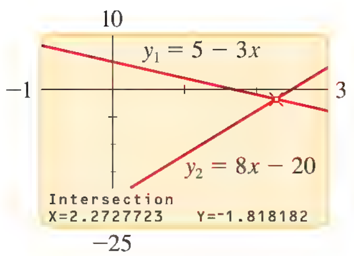



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

En el siguiente ejemplo usamos el método gráfico para resolver una ecuación que es extremadamente difícil de resolver con álgebra.

## EJEMPLO 6 | Resolver una ecuación en un intervalo

Resuelva la ecuación

$$x^3 \quad 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

en el intervalo $[1, 6]$.

**SOLUCIÓN** Nos piden hallar todas las soluciones $x$ que satisfagan $1 \le x \le 6$, por lo cual graficaremos la ecuación en un rectángulo de vista para el cual los valores $x$ están restringidos a este intervalo.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= \sqrt{x} \\ x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x} &= 0 && \text{Reste } \sqrt{x} \end{aligned}$$

También podemos usar el comando `zero` para hallar las soluciones, como se ve en las Figuras 8(a) y 8(b).

La Figura 8 muestra la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x}$ en el rectángulo de vista $[1, 6]$ por $[5, 5]$. Hay dos puntos de intersección $x$ en este rectángulo de vista; haciendo acercamiento, vemos que las soluciones son $x \approx 2.18$ y $x \approx 3.72$.

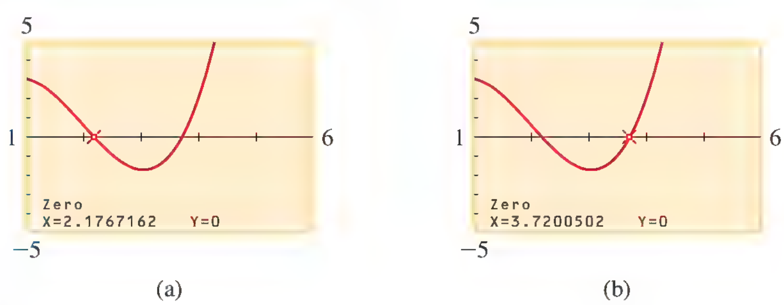



**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

La ecuación del Ejemplo 6 en realidad tiene cuatro soluciones. Nos piden hallar las otras dos en el Ejercicio 71.

## EJEMPLO 7 | Intensidad de luz

Dos fuentes luminosas están a 10 m entre sí. Una de ellas es tres veces más intensa que la otra. La intensidad luminosa $L$ (en lux) en un punto a $x$ metros de la fuente más débil está dada por

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

(Vea Figura 9.) Encuentre los puntos en los que la intensidad de luz es de 4 lux.

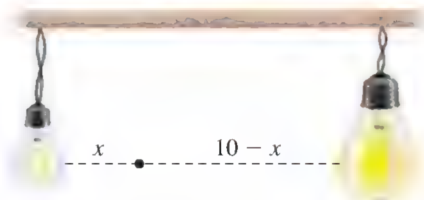



**FIGURA 9**

**SOLUCIÓN** Necesitamos resolver la ecuación

$$4 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

Las gráficas de

$$y_1 = 4 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

se muestran en la Figura 10. Si activamos el zoom (o el comando `intersect`), encontramos dos soluciones, $x \approx 1.67431$ y $x \approx 7.1927193$. Por lo tanto, la intensidad es de 4 lux en los puntos que están a 1.67 m y 7.19 m de la fuente más débil.

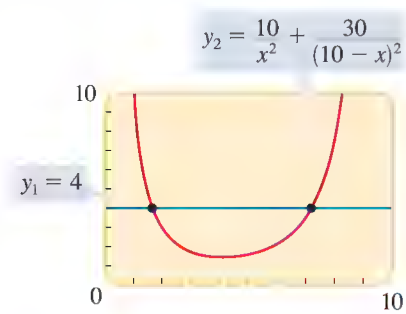



**FIGURA 10**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73**

## Resolver desigualdades gráficamente

Las desigualdades se pueden resolver gráficamente. Para describir el método, resolvemos

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Esta desigualdad fue resuelta algebraicamente en el Ejemplo 3 de la Sección 1.7. Para resolver la desigualdad gráficamente, trazamos la gráfica de

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Nuestro objetivo es hallar los valores de $x$ para los cuales $y \leq 0$. Éstos son simplemente los valores de $x$ para los que la gráfica se encuentra abajo del eje $x$. De la Figura 11 vemos que la solución de la desigualdad es el intervalo $[2, 3]$.

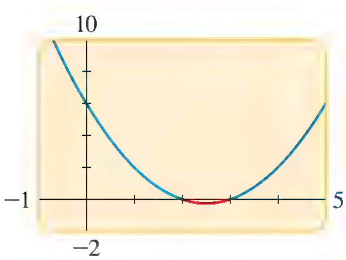



**FIGURA 11** $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

## EJEMPLO 8 | Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \le 2.0 - 1.4x$.

**SOLUCIÓN** Graficamos las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2.0 - 1.4x$$

en el mismo rectángulo de vista de la Figura 12. Estamos interesados en aquellos valores de $x$ para los que $y_1 \le y_2$; éstos son puntos para los que la gráfica de $y_2$ está sobre o arriba de la gráfica de $y_1$. Para determinar el intervalo apropiado, buscamos las coordenadas $x$ de puntos donde se cruzan las gráficas. Concluimos que la solución es (aproximadamente) el intervalo $[-1.45, 0.72]$.

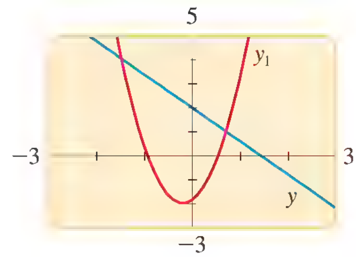



**FIGURA 12**
$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$
$y_2 = 2.0 - 1.4x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

## EJEMPLO 9 | Resolver una desigualdad gráficamente

Resuelva la desigualdad $x^3 - 5x^2 \ge -8$.

**SOLUCIÓN** Escribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x + 8 \ge 0$$

y luego graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$

en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-15, 15]$, como se ve en la Figura 13. La solución de la desigualdad está formada por estos intervalos en los que la gráfica está sobre o arriba del eje $x$. Moviendo el cursor a los puntos de intersección $x$, encontramos que, redondeada a un lugar decimal, la solución es $[-1.1, 1.5] \cup [4.6, \infty)$.

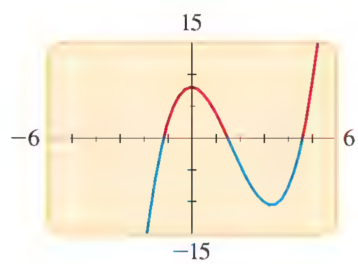



**FIGURA 13** $x^3 - 5x^2 + 8 \ge 0$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

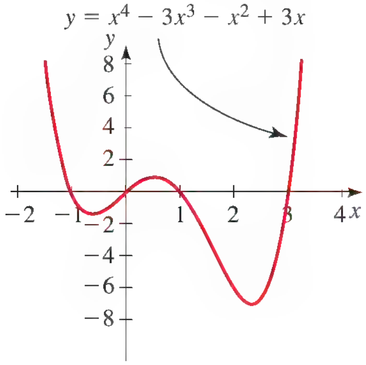
# 1.9 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

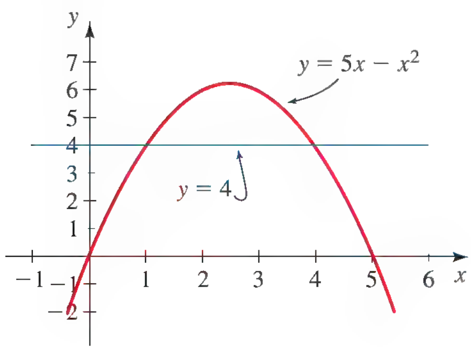
1. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son los puntos de intersección ___ de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$.

2. Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 > 0$ son las coordenadas $x$ de los puntos sobre la gráfica de $y = x^2 - 2x - 3$ que están ___ del eje $x$.

3. La figura muestra una gráfica de $y = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$. Use la gráfica para hacer lo siguiente.
   **(a)** Hallar las soluciones de la ecuación $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x = 0$.
   **(b)** Hallar las soluciones de la desigualdad $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x \le 0$.




4. La figura siguiente muestra las gráficas de $y = 5x - x^2$ y $y = 4$. Use las gráficas para hacer lo siguiente.
   **(a)** Hallar las soluciones de la ecuación $5x - x^2 = 4$.
   **(b)** Hallar las soluciones de la desigualdad $5x - x^2 > 4$.




## HABILIDADES

**5-10** ■ Use calculadora graficadora o computadora para determinar cuál rectángulo de vista (a)–(d) produce la gráfica más apropiada de la ecuación.

5. $y = x^4 + 2$
   **(a)** $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
   **(b)** $[0, 4]$ por $[0, 4]$
   **(c)** $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$
   **(d)** $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

6. $y = x^2 + 7x + 6$
   **(a)** $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
   **(b)** $[0, 10]$ por $[-20, 100]$
   **(c)** $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$
   **(d)** $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

7. $y = 100 - x^2$
   **(a)** $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   **(b)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   **(c)** $[-15, 15]$ por $[-30, 110]$
   **(d)** $[-4, 4]$ por $[-30, 110]$

8. $y = 2x^2 - 1000$
   **(a)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   **(b)** $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$
   **(c)** $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$
   **(d)** $[-25, 25]$ por $[-1200, 200]$

9. $y = 10 + 25x - x^3$
   **(a)** $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   **(b)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   **(c)** $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$
   **(d)** $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

10. $y = \sqrt{8x - x^2}$
   **(a)** $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
   **(b)** $[-5, 5]$ por $[0, 100]$
   **(c)** $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
   **(d)** $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

**11-22** ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para la ecuación, y úselo para trazar la gráfica.

11. $y = 100x^2$
12. $y = -100x^2$
13. $y = 4 + 6x - x^2$
14. $y = 0.3x^2 + 1.7x - 3$
15. $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$
16. $y = \sqrt{12x - 17}$
17. $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$
18. $y = x(x + 6)(x - 9)$
19. $y = x^4 - 4x^3$
20. $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$
21. $y = 1 + |x - 1|$
22. $y = 2x - |x^2 - 5|$

**23-26** ■ ¿Las gráficas se cruzan en el rectángulo de vista dado? Si se cruzan, ¿cuántos puntos de intersección hay ahí?

23. $y = -3x^2 + 6x - \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{7 - \frac{7}{12}x^2}$; $[-4, 4]$ por $[-1, 3]$
24. $y = \sqrt{49 - x^2}$, $y = \frac{1}{5}(41 - 3x)$; $[-8, 8]$ por $[-1, 8]$
25. $y = 6 \quad 4x \quad x^2$, $y = 3x + 18$; [ 6, 2] por [ 5, 20]
26. $y = x^3 - 4x$, $y = x + 5$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

27. Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ despejando $y$ y graficando dos ecuaciones como en el Ejemplo 3.

28. Grafique la circunferencia $(y - 1)^2 + x^2 = 1$ despejando $y$ y graficando dos ecuaciones como en el Ejemplo 3.

29. Grafique la ecuación $4x^2 + 2y^2 = 1$ despejando $y$ y graficando dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas negativa y positiva. (Esta gráfica se llama *elipse*.)

**30.** Grafique la ecuación $y^2 - 9x = 1$ despejando $y$ y graficando las dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas positiva y negativa. (Esta gráfica se llama *hipérbola*.)

**31-42** ■ Resuelva la ecuación tanto algebraica como gráficamente.

**31.** $x - 4 = 5x + 12$ **32.** $\frac{1}{2}x - 3 = 6 + 2x$

**33.** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x} = 7$ **34.** $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{6}{2x} = \dfrac{5}{2x+4}$

**35.** $x^2 - 32 = 0$ **36.** $x^3 + 16 = 0$

**37.** $x^2 + 9 = 0$ **38.** $x^2 + 3 = 2x$

**39.** $16x^4 = 625$ **40.** $2x^5 - 243 = 0$

**41.** $(x - 5)^4 - 80 = 0$ **42.** $6(x + 2)^5 = 64$

**43-50** ■ Resuelva la ecuación gráficamente en el intervalo dado. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

**43.** $x^2 - 7x + 12 = 0; \quad [0, 6]$

**44.** $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0; \quad [-2, 2]$

**45.** $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0; \quad [-1, 4]$

**46.** $16x^3 + 16x^2 = x + 1; \quad [-2, 2]$

**47.** $x - \sqrt{x + 1} = 0; \quad [-1, 5]$

**48.** $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 + x^2}; \quad [-1, 5]$

**49.** $x^{1/3} - x = 0; \quad [-3, 3]$

**50.** $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0; \quad [-1, 5]$

**51-54** ■ Use el método gráfico para resolver la ecuación en el ejercicio indicado de la Sección 1.5.

**51.** Ejercicio 91 **52.** Ejercicio 92

**53.** Ejercicio 97 **54.** Ejercicio 98

**55-58** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

**55.** $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$ **56.** $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

**57.** $x(x - 1)(x + 2) = \frac{1}{6}x$ **58.** $x^4 = 16 - x^3$

**59-66** ■ Encuentre las soluciones de la desigualdad al trazar gráficas apropiadas. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

**59.** $x^2 \le 3x + 10$ **60.** $0.5x^2 + 0.875x \le 0.25$

**61.** $x^3 + 11x \le 6x^2 + 6$ **62.** $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

**63.** $x^{1/3} < x$ **64.** $\sqrt{0.5x^2 + 1} \le 2|x|$

**65.** $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$ **66.** $(x + 1)^2 \le x^3$

**67-70** ■ Use el método gráfico para resolver la desigualdad en el ejercicio indicado de la Sección 1.7.

**67.** Ejercicio 43 **68.** Ejercicio 44

**69.** Ejercicio 53 **70.** Ejercicio 54

**71.** En el Ejemplo 6 encontramos dos soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$, las soluciones que están entre 1 y 6. Encuentre dos soluciones más, correctas a dos lugares decimales.

## APLICACIONES

**72. Estimación de utilidades** Un fabricante de aparatos electrodomésticos estima que las utilidades $y$ (en dólares) generadas al producir $x$ ollas al mes están dadas por la ecuación

$$y = 10x + 0.5x^2 - 0.001x^3 - 5000$$

donde $0 \le x \le 450$.

**(a)** Grafique la ecuación.

**(b)** ¿Cuántas ollas se tienen que fabricar para empezar a tener ganancias?

**(c)** ¿Para qué valores de $x$ la ganancia de la compañia es mayor que 15,000 dolares?

**73. ¿A qué distancia puede usted ver?** Si una persona está de pie en un barco en un mar en calma, entonces su estatura $x$ (en pies) sobre el nivel del mar está relacionada con la distancia más lejana $y$ (en millas) que puede ver, con la ecuación

$$y = \sqrt{1.5x + \left(\frac{x}{5280}\right)^2}$$

**(a)** Grafique la ecuación para $0 \le x \le 100$.

**(b)** ¿A qué altura debe estar para poder ver a 100 millas?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**74. Gráficas engañosas** Escriba un breve ensayo que describa las diferentes formas en las que una calculadora graficadora pudiera dar una gráfica engañosa de una ecuación.

**75. Métodos de solución algebraicos y gráficos** Escriba un breve ensayo que compare los métodos algebraico y gráfico para resolver ecuaciones. Forme sus propios ejemplos para ilustrar las ventajas y desventajas de cada método.

**76. Notación de ecuaciones en calculadoras graficadoras** Cuando ingresamos las siguientes ecuaciones en una calculadora, ¿lo que se ve en la pantalla cómo difiere de la forma usual de escribir las ecuaciones? (Verifique su manual del usuario si no está seguro.)

**(a)** $y = |x|$ **(b)** $y = \sqrt[5]{x}$

**(c)** $y = \dfrac{x}{x - 1}$ **(d)** $y = x^3 + \sqrt[3]{x + 2}$

**77. Ingrese ecuaciones con cuidado** Un estudiante desea graficar

$$y = x^{1/3} \quad \text{y} \quad y = \frac{x}{x + 4}$$

en la misma pantalla, de modo que ingresa la siguiente información en su calculadora:

```
Y1 = X^1/3        Y2 = X/X+4
```

La calculadora graficadora dos rectas en lugar de las ecuaciones que el estudiante deseaba. ¿Qué estuvo mal?

# 1.10 Rectas

**Pendiente de una recta ▶ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ▶ Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta ▶ Rectas verticales y horizontales ▶ Ecuación general de una recta ▶ Rectas paralelas y perpendiculares ▶ Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio**

En esta sección encontramos ecuaciones para rectas que se encuentren en un plano de coordenadas. Las ecuaciones dependerán de cómo esté inclinada la recta, por lo que empezamos por estudiar el concepto de pendiente.

## ▼ Pendiente de una recta

Primero necesitamos una forma de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la rapidez con la que sube (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Definimos el *corrimiento* como la distancia que nos movemos a la derecha y la *elevación* como la distancia correspondiente que la recta sube (o baja). La *pendiente* de una recta es la relación entre la elevación y el corrimiento:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}}$$

La Figura 1 muestra situaciones en las que la pendiente es importante. Los carpinteros usan el término *inclinación* para la pendiente de un techo o una escalera; el término *pendiente* se usa para la pendiente de una carretera.

Pendiente de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$

Inclinación de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$

Pendiente de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

**FIGURA 1**

Si una recta está en un plano de coordenadas, entonces el **corrimiento** es el cambio en la coordenada $x$ y la **elevación** es el cambio correspondiente en la coordenada $y$ entre cualesquier dos puntos sobre la recta (vea Figura 2). Esto nos da la siguiente definición de pendiente.

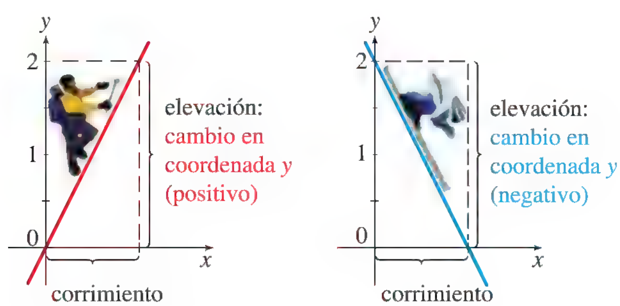



**FIGURA 2**

**PENDIENTE DE UNA RECTA**

La **pendiente** $m$ de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{corrimiento}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

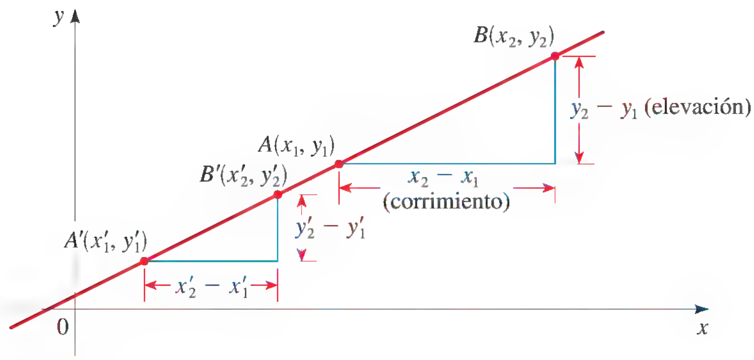



**FIGURA 3**

La Figura 4 muestra varias rectas marcadas con sus pendientes. Observe que las rectas con pendiente positiva se inclinan hacia arriba a la derecha, mientras que las rectas con pendiente negativa se inclinan hacia abajo a la derecha. Las rectas más inclinadas son aquellas para las que el valor absoluto de la pendiente es muy grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

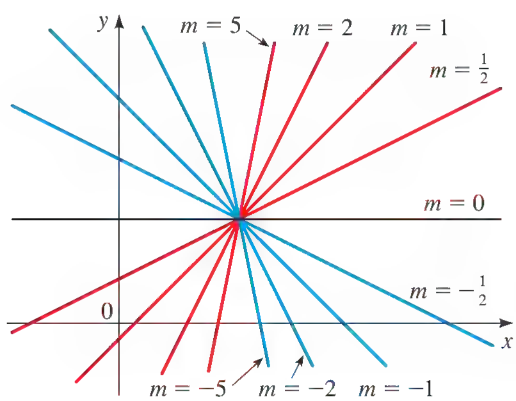



**FIGURA 4** Rectas con varias pendientes

**EJEMPLO 1** | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

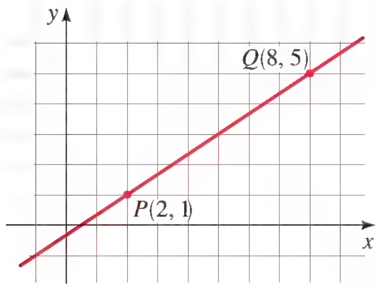



FIGURA 5

**SOLUCIÓN** Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

Encontremos ahora la ecuación de la recta que pasa por un punto determinado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente $m$. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ está sobre esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por $P_1$ y $P$ es igual a $m$ (vea Figura 6), es decir,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

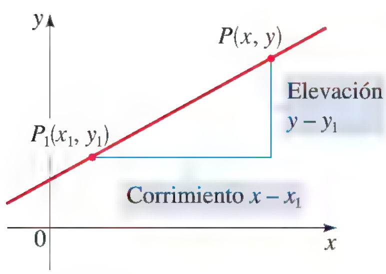



FIGURA 6

Esta ecuación se puede reescribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; nótese que la ecuación también se satisface cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

### FORMA PUNTO-PENDIENTE DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_1, y_1)$ y tiene pendiente $m$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

### EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

**(a)** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

**(b)** Trace la recta.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}, \text{ punto } (1,\ \ 3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

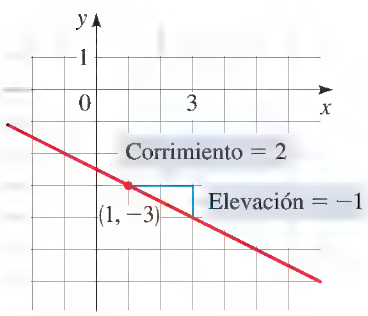



FIGURA 7

**(b)** El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

### EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

**SOLUCIÓN** La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos usar *ya sea* el punto $(-1, 2)$ *o* el punto $(3, -4)$, en la ecuación punto-pendiente. Terminaremos con la misma respuesta final.

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

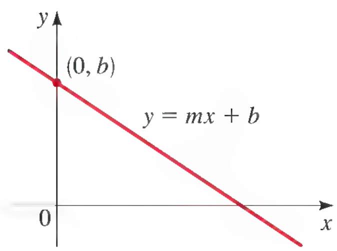



**FIGURA 8**

## Forma pendiente e intersección de la ecuación de una recta

Suponga que una recta no vertical tiene pendiente $m$ y a $b$ como punto de intersección con el eje $y$ (vea Figura 8). Esto significa que la recta cruza el eje $y$ en el punto $(0, b)$, de modo que la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = 0$, se convierte en

$$y - b = m(x - 0)$$

Esto se simplifica a $y = mx + b$, que se denomina **forma pendiente-punto de intersección** de la ecuación de una recta.

> **FORMA PENDIENTE-PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA**
>
> Una ecuación de la recta que tiene pendiente $m$ y punto de intersección $b$ en el eje $y$ es
>
> $$y = mx + b$$

### EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

**(a)** Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección $y$ de $-2$.

**(b)** Encuentre la pendiente e intersección $y$ de la recta $3y - 2x = 1$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

**(b)** Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Pendiente — Intersección en eje $y$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \tfrac{2}{3}$ y la intersección en el eje $y$ es $b = \tfrac{1}{3}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **47**

## Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde $b$ es el punto de intersección con el eje $y$ (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde $a$ es el punto de intersección con el eje $x$, porque la coordenada $x$ de todo punto en la recta es $a$.

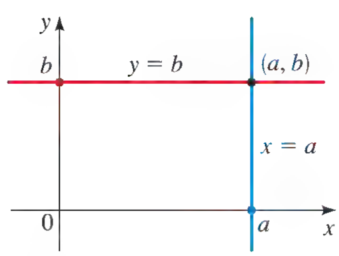



**FIGURA 9**

**RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES**

Una ecuación de la recta vertical que pasa por $(a, b)$ es $x = a$.
Una ecuación de la recta horizontal que pasa por $(a, b)$ es $y = b$.

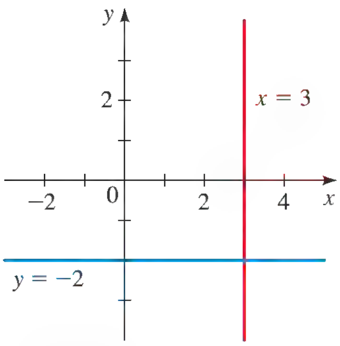



**FIGURA 10**

**EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales**

**(a)** Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.
**(b)** La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje $x$.
**(c)** Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.
**(d)** La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección $-2$ en el eje $y$.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **33**

## Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde $A$, $B$ y $C$ son constantes y $A$ y $B$ no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

  A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

  y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

$$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

  o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

**EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA**

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

### EJEMPLO 6 | Graficar una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

**SOLUCIÓN 1** Como la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para trazar la gráfica, es suficiente hallar dos puntos cualesquiera en la recta. Los puntos de intersección son los más fáciles de hallar.

Punto de intersección con $x$: Sustituya $y = 0$, para obtener $2x - 12 = 0$, por lo que $x = 6$

Punto de intersección con $y$: Sustituya $x = 0$, para obtener $-3y - 12 = 0$, por lo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica de la Figura 11.

**SOLUCIÓN 2** Escribimos la ecuación en forma pendiente-intersección:

$$2x - 3y - 12 = 0$$

$$2x - 3y = 12 \qquad \text{Sume 12}$$

$$-3y = -2x + 12 \qquad \text{Reste } 2x$$

$$y = \tfrac{2}{3}x - 4 \qquad \text{Divida entre } -3$$

Esta ecuación está en la forma $y = mx + b$, por lo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección $y$ es $b = -4$. Para trazar la gráfica, localizamos el punto de intersección con el eje $y$ y nos movemos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba, como se muestra en la Figura 12.

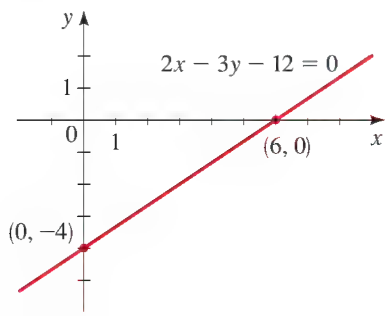



FIGURA 11

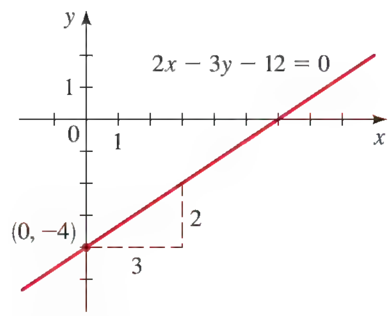



FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

## Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

> **RECTAS PARALELAS**
>
> Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

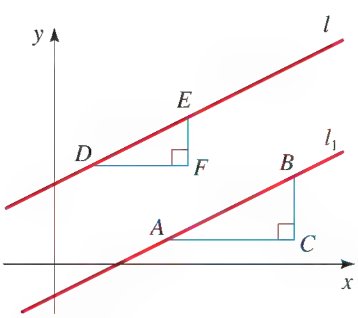



FIGURA 13

**DEMOSTRACIÓN** Consideremos que las rectas l1 y l2 de la Figura 13 tienen pendientes $m_1$ y $m_2$. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectos ABC y DEF son semejantes, por lo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

A la inversa, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos serán semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas.

## EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \qquad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} \qquad \text{Divida entre 6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como la de las rectas paralelas.

### RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$ son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

**DEMOSTRACIÓN** En la Figura 14 mostramos dos rectas que se cruzan en el origen. (Si las rectas se cruzan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cruzan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.

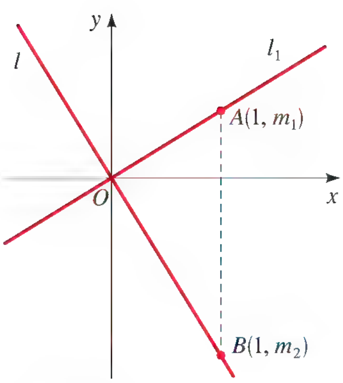


FIGURA 14

Si las rectas $l_1$ y $l_2$ tienen pendientes $m_1$ y $m_2$, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Observe que $A(1, m_1)$ está sobre $l_1$ y $B(1, m_2)$ está sobre $l_2$. Por el Teorema de Pitágoras y su inverso (vea página 219) $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

Por la Fórmula de la Distancia, esto se convierte en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

## EJEMPLO 8 | Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

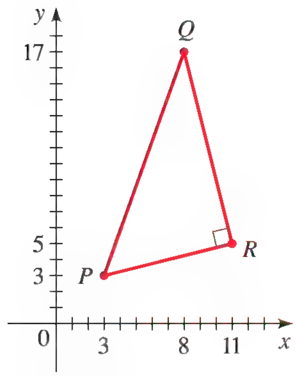



**FIGURA 15**

**SOLUCIÓN** Las pendientes de las rectas que contienen a $PR$ y $QR$ son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5-3}{11-3} = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{5-17}{11-8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que $PQR$ es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

## EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

**SOLUCIÓN** En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por (0, 0), la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}, \text{ punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

## EJEMPLO 10 | Graficar una familia de rectas

Use una calculadora graficadora para graficar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

**SOLUCIÓN** Las rectas están graficadas en la Figura 16 en el rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Las rectas tienen todas ellas la misma pendiente, por lo que son paralelas.

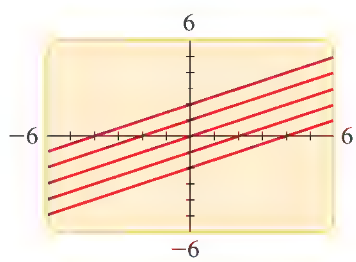



**FIGURA 16** $y = 0.5x + b$

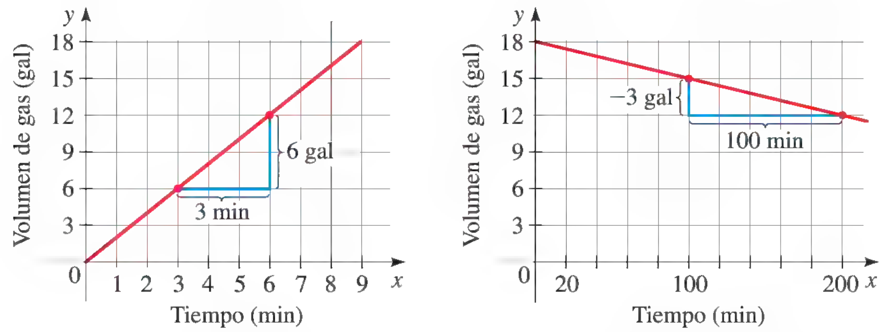
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es $-0.03$.




(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es $-0.03$

**FIGURA 17**

Los siguientes dos ejemplos dan otras situaciones en las que la pendiente de una recta es una rapidez de cambio.

## EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua $w$ del estanque está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde $t$ es el número de años desde que se construyó la presa y $w$ se mide en pies.

**(a)** Trace la gráfica de esta ecuación.

**(b)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $w$ de esta gráfica?

### SOLUCIÓN

**(a)** Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

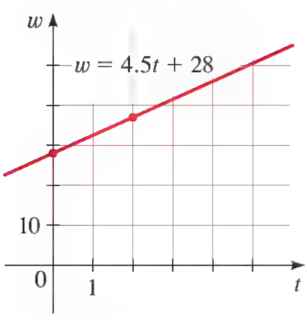



**FIGURA 18**

**(b)** La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección $w$ es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

## EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

**(a)** A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura $T$ (en °C) en términos de la altitud $h$ (en km). (Suponga que la relación entre $T$ y $H$ es lineal.)

**(b)** Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?

**(c)** ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como estamos suponiendo una relación lineal entre $T$ y $h$, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde $m$ y $b$ son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

**(b)** La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10°\mathrm{C/km}$, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10°C por kilómetro de altitud.

**(c)** A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5\,°\mathrm{C}$$

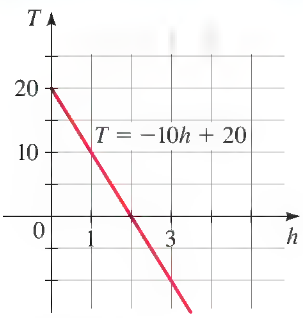



**FIGURA 19**

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **73**

# 1.10 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Encontramos la "inclinación", o pendiente, de una recta que pasa por dos puntos al dividir la diferencia en las coordenadas ____ de estos puntos entre la diferencia en las coordenadas ____. Entonces, la recta que pasa por los puntos (0, 1) y (2, 5) tiene pendiente ________.

**2.** Una recta tiene la ecuación $y = 3x + 2$.

**(a)** Esta recta tiene pendiente _____.

**(b)** Cualquier recta paralela a esta recta tiene pendiente____.

**(c)** Cualquier recta perpendicular a esta recta tiene pendiente ___.

**3.** La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto (1, 2) es_____.

**4. (a)** La pendiente de una recta horizontal es____. La ecuación de la recta horizontal que pasa por (2, 3) es______.

**(b)** La pendiente de una recta vertical es_____. La ecuación de la recta vertical que pasa por (2, 3) es_____.

## HABILIDADES

**5-12** ■ Encuentre la pendiente de la recta que pasa por $P$ y $Q$.

**5.** $P(0, 0), Q(4, 2)$

**6.** $P(0, 0), Q(2, -6)$

**7.** $P(2, 2), Q(-10, 0)$

**8.** $P(1, 2), Q(3, 3)$

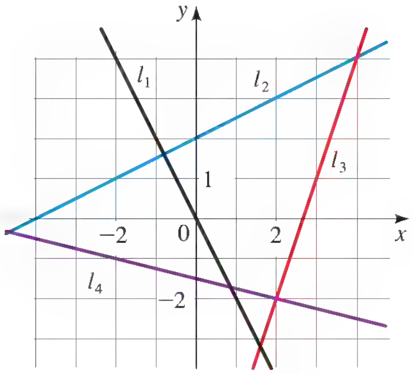
**9.** $P(2, 4), Q(4, 3)$

**10.** $P(2, -5), Q(-4, 3)$

**11.** $P(1, \quad 3), Q( \quad 1, 6)$

**12.** $P( \quad 1, \quad 4), Q(6, 0)$

**13.** Encuentre las pendientes de las rectas $l_1$, $l_2$, $l_3$ y $l_4$ en la figura siguiente.

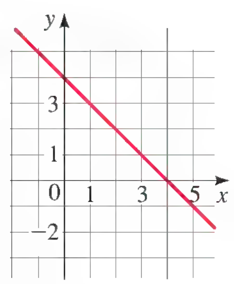



**14.** **(a)** Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes 1, 0, $\frac{1}{2}$, 2 y −1.

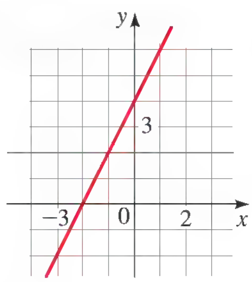
**(b)** Trace rectas que pasen por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$ y 3.

**15-18** ■ Encuentre la ecuación para la recta cuya gráfica está trazada.

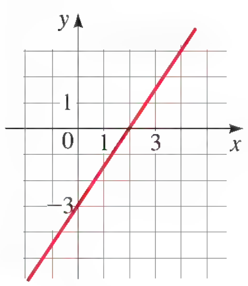
**15.**



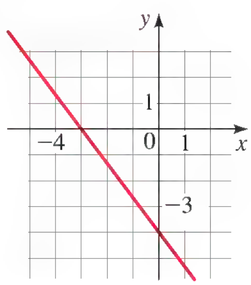

**16.**




**17.**




**18.**




**19-38** ■ Encuentre la ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas.

**19.** Pasa por (2, 3), pendiente 5

**20.** Pasa por (−2, 4), pendiente −1

**21.** Pasa por (1, 7), pendiente $\frac{2}{3}$

**22.** Pasa por (−3, −5), pendiente $-\frac{7}{2}$

**23.** Pasa por (2, 1) y (1, 6)

**24.** Pasa por (−1, −2) y (4, 3)

**25.** Pendiente 3; intersección en $y$ es −2

**26.** Pendiente $\frac{2}{5}$; intersección en $y$ es 4

**27.** Intersección en $x$ es 1; intersección en $y$ es −3

**28.** Intersección en $x$ es −8; intersección en $y$ es 6

**29.** Pasa por (4, 5); paralela al eje $x$

**30.** Pasa por (4, 5); paralela al eje $y$

**31.** Pasa por (1, −6); paralela a la recta $x + 2y = 6$

**32.** Intersección en $y$ es 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

**33.** Pasa por (−1, 2); paralela a la recta $x = 5$

**34.** Pasa por (2, 6); perpendicular a la recta $y = 1$

**35.** Pasa por (−1, −2); perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

**36.** Pasa por $\left(\frac{1}{2}, \ \frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

**37.** Pasa por (1, 7); paralela a la recta que pasa por (2, 5) y (−2, 1)

**38.** Pasa por (−2, −11); perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (5, −1)

**39.** **(a)** Trace la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto (−2, 1)

**(b)** Encuentre la ecuación para esta recta.

**40.** **(a)** Trace la recta con pendiente −2 que pasa por el punto (4, −1)

**(b)** Encuentre la ecuación para esta recta.

**41-44** ■ Use calculadora graficadora para graficar la familia de rectas dada en el mismo rectángulo de vista. ¿Qué tienen en común las rectas?

**41.** $y = -2x + b$ para $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

**42.** $y = mx \quad 3$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

**43.** $y = m(x - 3)$ para $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

**44.** $y = 2 + m(x + 3)$ para $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm$

**45-56** ■ Encuentre la pendiente y el punto de intersección $y$ de la recta y trace su gráfica.

**45.** $x + y = 3$

**46.** $3x - 2y = 12$

**47.** $x + 3y = 0$

**48.** $2x \quad 5y = 0$

**49.** $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

**50.** $-3x - 5y + 30 = 0$

**51.** $y = 4$

**52.** $x = -5$

**53.** $3x - 4y = 12$

**54.** $4y + 8 = 0$

**55.** $3x + 4y - 1 = 0$

**56.** $4x + 5y = 10$

**57.** Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

**58.** Use pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

**59.** Use pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

**60.** Use pendientes para determinar si los puntos dados son colineales (están sobre una recta).

**(a)** (1, 1), (3, 9), (6, 21)
**(b)** (−1, 3), (1, 7), (4, 15)

**61.** Encuentre una ecuación del bisector perpendicular del segmento de recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$

**62.** Encuentre el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

**63. (a)** Demuestre que si los puntos de intersección $x$ y $y$ de una recta son números diferentes de cero $a$ y $b$, entonces la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

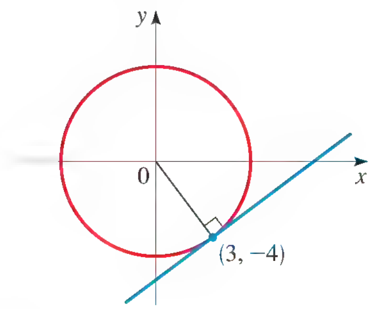
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ésta se llama **forma dos puntos de intersección** de la ecuación de una recta.

**(b)** Use la parte (a) para hallar la ecuación de la recta cuyo punto de intersección $x$ es 6 y cuyo punto de intersección $y$ es $-8$.

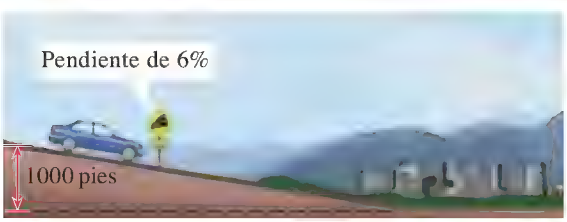
**64. (a)** Encuentre la ecuación para la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Vea la figura.)

**(b)** ¿En qué otro punto sobre la circcunferencia es que una recta tangente será paralela a la recta tangente de la parte (a)?




## APLICACIONES

**65. Pendiente de una carretera** Al poniente de Albuquerque, Nuevo México, la Ruta 40 que se dirige al oriente es recta y con un agudo descenso hacia la ciudad. La carretera tiene una pendiente del 6%, lo cual significa que su pendiente es $\frac{6}{100}$. Manejando en esta carretera, observa por señales de elevación que usted ha descendido una distancia de 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en su distancia horizontal?




**66. Calentamiento global** Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde $T$ es la temperatura en ºC y $t$ es años desde 1950.

**(a)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $T$?

**(b)** Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

**67. Dosis de medicamentos** Si la dosis recomendada a un adulto para un medicamento es $D$ (en mg), entonces, para determinar la dosis apropiada $c$ para un niño de edad $a$, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es 200 mg.

**(a)** Encuentre la pendiente. ¿Qué representa ésta?

**(b)** ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

**68. Mercado de segunda mano** La gerente de un mercado de segunda mano en fin de semana sabe, por experiencia del pasado, que si ella cobra $x$ dólares por la renta de espacio en el mercado de segunda mano, entonces el número $y$ de espacios que ella renta está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

**(a)** Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el cargo por renta de espacio, así como el número de espacios rentados, deben ser cantidades no negativas ambas.)

**(b)** ¿Qué representan la pendiente, el punto de intersección $y$ y el punto de intersección $x$ de la gráfica?

**69. Costo de producción** Un pequeño fabricante de enseres electrodomésticos encuentra que si produce $x$ hornos tostadores por mes, su costo de producción está dado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

(donde $y$ se mide en dólares).

**(a)** Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

**(b)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $y$ de la gráfica?

**70. Escalas de temperatura** La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit ($F$) y Celsius ($C$) está dada por la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

**(a)** Complete la tabla para comparar las dos escalas a los valores dados.

**(b)** Encuentre la temperatura a la que las escalas son iguales. [*Sugerencia:* Suponga que $a$ es la temperatura a la que las escalas son iguales. Haga $F = a$ y $C = a$ y a continuación despeje $a$.]

| *C* | *F* |
|---|---|
| −30° | |
| −20° | |
| −10° | |
| 0° | |
| | 50° |
| | 68° |
| | 86° |

**71. Grillos y temperatura** Los biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70ºF y 168 chirridos por minuto a 80ºF.

**(a)** Encuentre la ecuación lineal que relacione la temperatura $t$ y el número de chirridos por minuto $n$.

**(b)** Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

**72. Depreciación** Un pequeño negocio compra una computadora en \$4000. Después de 4 años el valor de la computadora se espera que sea de \$200. Para fines de contabilidad, el negocio usa *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo determinado.

Esto significa que si $V$ es el valor de la computadora en el tiempo $t$, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar $V$ y $t$.

**(a)** Encuentre una ecuación lineal que relacione $V$ y $t$.

**(b)** Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

**(c)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $V$ de la gráfica?

**(d)** Encuentre el valor depreciado de la computadora 3 años a partir de la fecha de compra.

**73. Presión y profundidad** En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.$^2$. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.$^2$ por cada 10 pies de descenso.

**(a)** Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.

**(b)** Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

**(c)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $y$ de la gráfica?

**(d)** ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.$^2$ la presión?

**74. Distancia, rapidez y tiempo** Jason y Debbie salen de Detroit a las 2:00 p.m. y manejan a una rapidez constante, viajando hacia al poniente en la carretera I−90. Pasan Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 p.m.

**(a)** Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

**(b)** Trace la gráfica de la ecuación de la parte (a).

**(c)** ¿Cuál es la pendiente de esta recta? ¿Qué representa?

**75. Costo de conducir un auto** El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual $C$ de conducir un auto y la distancia recorrida $d$.

**(a)** Encuentre una ecuación lineal que relacione $C$ y $d$.

**(b)** Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.

**(c)** Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

**(d)** ¿Qué representa el punto de intersección $y$ de la gráfica?

**(e)** ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

**76. Costo de manufactura** El gerente de una fábrica de muebles encuentra que cuesta \$2200 manufacturar 100 sillas en un día y \$4800 producir 300 sillas en un día.

**(a)** Suponiendo que la relación entre el costo y el número de sillas producidas sea lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. A continuación, grafique la ecuación.

**(b)** ¿Cuál es la pendiente de la recta de la parte (a), y qué representa?

**(c)** ¿Cuál es el punto de intersección $y$ de esta recta, y qué representa?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**77. ¿Qué significa la pendiente?** Suponga que la gráfica de la temperatura exterior en cierto tiempo es una recta. ¿Cómo está cambiando el clima si la pendiente de la recta es positiva? ¿Si es negativa? ¿Y si es cero?

**78. Puntos colineales** Suponga que nos dan las coordenadas de tres puntos en el plano y se desea ver si están en la misma recta. ¿Cómo se puede hacer esto usando pendientes? ¿Usando la Fórmula de la Distancia? ¿Puede usted considerar otro método?

# 1.11 Modelos con el uso de variaciones

Variación directa ▶ Variación inversa ▶ Variación conjunta

Cuando los científicos hablan de un modelo matemático para un fenómeno real, con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir la forma en que la población de una especie animal varía con el tiempo, o el modo en que la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección estudiamos una clase de modelado llamado *variación.*

## Variación directa

Dos tipos de modelos matemáticos se presentan con tanta frecuencia que se les dan nombres especiales. El primero de ellos se llama *variación directa* y ocurre cuando una cantidad es un múltiplo constante de la otra, de modo que usamos una ecuación de la forma $y = kx$ para modelar esta dependencia.

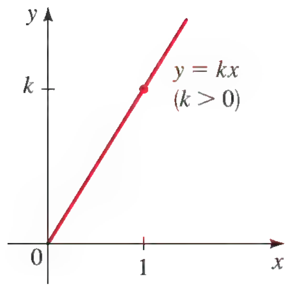



**FIGURA 1**

### VARIACIÓN DIRECTA

Si las cantidades $x$ y $y$ están relacionadas por una ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que $y$ **varía directamente con** $x$, o que $y$ es **directamente proporcional a** $x$, o simplemente $y$ es proporcional a $x$. La constante $k$ se denomina **constante de proporcionalidad**.

Recuerde que la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta con pendiente $m$ y punto de intersección $b$ en el eje $y$. Entonces, la gráfica de una ecuación $y = kx$ que describe variación directa es una recta con pendiente $k$ y punto de intersección 0 en el eje $y$ (vea Figura 1).

### EJEMPLO 1 | Variación directa

Durante una tormenta se ve el rayo antes de escuchar el trueno porque la luz viaja mucho más rápido que el sonido. La distancia entre una persona y la tormenta varía directamente con el tiempo entre el relámpago y el trueno.

**(a)** Suponga que el trueno de una tormenta que está a 5400 pies de distancia tarda 5 s en llegar a usted. Determine la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación para la variación.

**(b)** Trace la gráfica de esta ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

**(c)** Si el tiempo entre el relámpago y el trueno es ahora de 8 s, ¿a qué distancia está la tormenta?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sea $d$ la distancia entre usted y la tormenta y sea $t$ el tiempo. Nos indican que $d$ varía directamente con $t$, por lo que

$$d = kt$$

donde $k$ es una constante. Para hallar $k$, usamos el hecho de que $t = 5$ cuando $d = 5400$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$5400 = k(5) \qquad \text{Sustituya}$$

$$k = \frac{5400}{5} = 1080 \qquad \text{Despeje } k$$

Sustituyendo este valor de $k$ de la ecuación por $d$, obtenemos

$$d = 1080t$$

porque la ecuación por $d$ es una función de $t$.

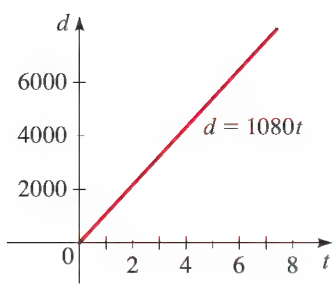



**FIGURA 2**

**(b)** La gráfica de la ecuación $d = 1080t$ es una recta que pasa por el origen con pendiente 1080 y se muestra en la Figura 2. La constante $k = 1080$ es la rapidez aproximada del sonido (en pies/s).

**(c)** Cuando $t = 8$, tenemos

$$d = 1080 \cdot 8 = 8640$$

Por lo tanto, la tormenta está a 8640 pies $\approx$ 1.6 millas de distancia.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **29**

## Variación inversa

Otra ecuación que se usa con frecuencia en modelado matemático es $y = k/x$, donde $k$ es una constante.

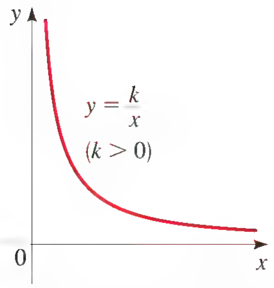



**FIGURA 3** Variación inversa

> **VARIACIÓN INVERSA**
>
> Si las cantidades $x$ y $y$ están relacionadas por la ecuación
>
> $$y = \frac{k}{x}$$
>
> para alguna constante $k \neq 0$ decimos que $y$ **es inversamente proporcional a** $x$ o que $y$ **varía inversamente con** $x$. La constante $k$ se denomina **constante de proporcionalidad**.

La gráfica de $y = k/x$ para $x > 0$ se muestra en la Figura 3 para el caso $k > 0$. Da una imagen de lo que ocurre cuando $y$ es inversamente proporcional a $x$.

### EJEMPLO 2 | Variación inversa

La Ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

**(a)** Suponga que la presión de una muestra de aire que ocupa 0.106 $m^3$ a 25°C es 50 kPa. Encuentre la constante de proporcionalidad y escriba la ecuación que expresa la proporcionalidad inversa.

**(b)** Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 $m^3$, encuentre la nueva presión.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sea $P$ la presión de la muestra de gas y sea $V$ su volumen. Entonces, por la definición de proporcionalidad inversa, tenemos

$$P = \frac{k}{V}$$

donde $k$ es una constante. Para hallar $k$, usamos el hecho de que $P = 50$ cuando $V = 0.106$. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos

$$50 = \frac{k}{0.106} \qquad \text{Sustituya}$$

$$k = (50)(0.106) = 5.3 \qquad \text{Despeje } k$$

Poniendo este valor de $k$ en la ecuación por $P$, tenemos

$$P = \frac{5.3}{V}$$

**(b)** Cuando $V = 0.3$, tenemos

$$P = \frac{5.3}{0.3} \approx 17.7$$

Entonces la nueva presión es aproximadamente 17.7 kPa.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **35**

## Variación conjunta

Una cantidad física depende con frecuencia de más de una cantidad. Si una cantidad es proporcional a dos o más cantidades diferentes, a dicha relación se le denomina *variación conjunta*.

**VARIACIÓN CONJUNTA**

Si las cantidades $x$, $y$ y $z$ están relacionadas por la ecuación

$$z = kxy$$

donde $k$ es una constante diferente de cero, decimos que $z$ **varía conjuntamente con** $x$ y $y$ o $z$ **es conjuntamente proporcional** a $x$ y $y$.

En ciencias, las relaciones entre tres o más variables son comunes, y es posible cualquier combinación de los tipos diferentes de proporcionalidad que hemos estudiado. Por ejemplo, si

$$z = k\frac{x}{y}$$

Decimos que $z$ **es proporcional a** $x$ e **inversamente proporcional a** $y$.

## EJEMPLO 3 | Ley de Newton de la Gravitación

La Ley de Newton de la Gravitación dice que dos cuerpos con masas $m_1$ y $m_2$ se atraen entre sí, con una fuerza $F$ que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $r$ entre los cuerpos. Exprese la Ley de Newton de la Gravitación como ecuación.

**SOLUCIÓN** Usando las definiciones de variación conjunta e inversa y la tradicional notación G para la constante de proporcionalidad gravitacional, tenemos

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **41**

Si $m_1$ y $m_2$ son masas fijas, entonces la fuerza gravitacional entre ellas es $F = C/r^2$ (donde $C = Gm_1m_2$ es una constante). La Figura 4 muestra la gráfica de esta ecuación para $r > 0$ con $C = 1$. Observe cómo decrece la atracción gravitacional con una distancia creciente.

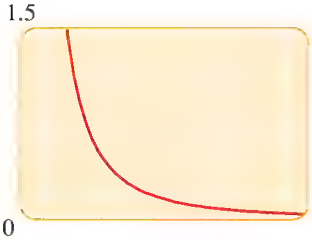



**FIGURA 4** Gráfica de $F = \frac{1}{r^2}$

# 1.11 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Si las cantidades $x$ y $y$ están relacionadas por la ecuación $y = 3x$, entonces decimos que $y$ es _______ _______ a $x$ y la constante de _________ es 3.

2. Si las cantidades $x$ y $y$ están relacionadas por la ecuación $y = \frac{3}{x}$, entonces decimos que $y$ es _______ _______ a $x$ y la constante de _________ es 3.

3. Si las cantidades $x$, $y$ y $z$ están relacionadas por la ecuación $z = 3\frac{x}{y}$, entonces decimos que $z$ es _______ _______ a $x$ e _________ a $y$.

4. Si $z$ es conjuntamente proporcional a $x$ y a $y$ y si $z$ es 10 cuando $x$ es 4 y $y$ es 5, entonces $x$, $y$ y $z$ están relacionadas por la ecuación $z =$ _______.

## HABILIDADES

**5-16** ■ Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

5. $T$ varía directamente con $x$.
6. $P$ es directamente proporcional a $w$.
7. $v$ es inversamente proporcional a $z$.
8. $w$ es conjuntamente proporcional a $m$ y $n$.
9. $y$ es proporcional a $s$ e inversamente proporcional a $t$.

**10.** $P$ varía inversamente con $T$.

**11.** $z$ es proporcional a la raíz cuadrada de $y$.

**12.** $A$ es proporcional al cuadrado de $t$ e inversamente proporcional al cubo de $x$.

**13.** $V$ es conjuntamente proporcional a $l$, $w$ y $h$.

**14.** $S$ es conjuntamente proporcional a los cuadrados de $r$ y $\theta$.

**15.** $R$ es proporcional a $i$ e inversamente proporcional a $P$ y $t$.

**16.** $A$ es conjuntamente proporcional a las raíces cuadradas de $x$ y $y$.

**17-28** ■ Exprese el enunciado como una ecuación. Use la información dada para hallar la constante de proporcionalidad.

**17.** $y$ es directamente proporcional a $x$. Si $x = 6$, entonces $y = 42$.

**18.** $z$ varía inversamente con $t$. Si $t = 3$, entonces $z = 5$.

**19.** $R$ es inversamente proporcional a $s$. Si $s = 4$, entonces $R = 3$.

**20.** $P$ es directamente proporcional a $T$. Si $T = 300$, entonces $P = 20$.

**21.** $M$ varía directamente con $x$ e inversamente con $y$. Si $x = 2$ y $y = 6$, entonces $M = 5$.

**22.** $S$ varía conjuntamente con $p$ y $q$. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$.

**23.** $W$ es inversamente proporcional al cuadrado de $r$. Si $r = 6$, entonces $W = 10$.

**24.** $t$ es conjuntamente proporcional a $x$ y $y$, e inversamente proporcional a $t$. Si $x = 2$, $y = 3$ y $r = 12$, entonces $t = 25$.

**25.** $C$ es conjuntamente proporcional a $l$, $w$ y $h$. Si $l = w = h = 2$, entonces $C = 128$.

**26.** $H$ es conjuntamente proporcional a los cuadrados de $l$ y $w$. Si $l = 2$ y $w = \frac{1}{3}$, entonces $H = 36$.

**27.** $s$ es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de $t$. Si $s = 100$, entonces $t = 25$.

**28.** $M$ es conjuntamente proporcional a $a$, $b$ y $c$ e inversamente proporcional a $d$. Si $a$ y $d$ tienen el mismo valor y si $b$ y $c$ son ambas 2, entonces $M = 128$.

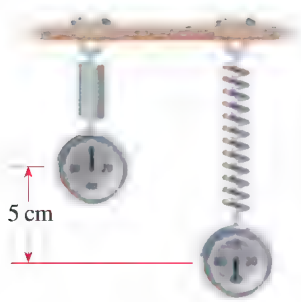
## APLICACIONES

**29. Ley de Hooke** La Ley de Hooke dice que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado $x$ unidades más que su longitud natural es directamente proporcional a $x$. Aquí la constante de proporcionalidad se denomina **constante de resorte.**

**(a)** Escriba la Ley de Hooke como una ecuación.

**(b)** Si un resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se requiere una fuerza de 40 N para mantener estirado el resorte a una longitud de 15 cm, encuentre la constante de resorte.

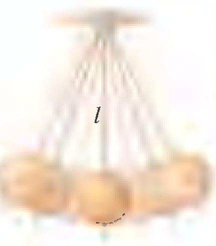
**(c)** ¿Qué fuerza es necesaria para mantener estirado el resorte a una longitud de 14 cm?




**30. Ley del Péndulo** El período de un péndulo (tiempo transcurrido durante una oscilación completa del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del péndulo.

**(a)** Exprese esta relación escribiendo una ecuación.

**(b)** Para duplicar el período, ¿cómo tendríamos que cambiar la longitud $l$?




**31. Costos de impresión** El costo $C$ de imprimir una revista es conjuntamente proporcional al número de páginas $p$ de la revista y el número $m$ de revistas impresas.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.

**(b)** Encuentre la constante de proporcionalidad si el costo de impresión es $60,000 para 4000 ejemplares de una revista de 120 páginas.

**(c)** ¿Cuál sería el costo de impresión de 5000 ejemplares de una revista de 92 páginas?

**32. Ley de Boyle** La presión $P$ de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura $T$ e inversamente proporcional al volumen $V$.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese la variación.

**(b)** Encentre la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala Kelvin).

**(c)** Si la temperatura se aumenta a 500 K y el volumen se disminuye a 80 L, ¿cuál es la presión del gas?

**33. Potencia de un molino de viento** La potencia $P$ que se puede obtener de un molino de viento es directamente proporcional con el cubo de la velocidad del viento $s$.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese la variación.

**(b)** Encuentre la constante de proporcionalidad para un molino de viento que produce 96 watts de potencia cuando el viento está soplando a 10 mi/h.

**(c)** ¿Cuánta potencia producirá el molino de viento si la velocidad del viento aumenta a 30 mi/h?

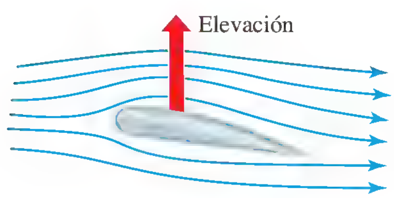
**34. Potencia necesaria para impulsar un bote** La potencia $P$ (medida en caballos de fuerza, hp) necesaria para impulsar un bote es directamente proporcional al cubo de la velocidad $s$. Es necesario un motor de 80 hp para impulsar cierto bote a 10 nudos. Encuentre la potencia necesaria para mover el bote a 15 nudos.

**35. Intensidad del sonido** La intensidad $L$ de un sonido (medida en decibeles, dB) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $d$ desde la fuente del sonido. Una persona que se encuentre a 10 pies de una podadora de césped capta un nivel de sonido de 70 dB. ¿Cuál es la intensidad del sonido de la podadora cuando la persona esté a 100 pies de distancia?

**36. Distancia de parada** La distancia de frenado $D$ de un auto después de habérsele aplicado los frenos varía directamente con el cuadrado de su velocidad $s$. Cierto auto que corre a 50 mi/h puede detenerse en 240 pies. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que puede correr si necesita detenerse en 160 pies?

**37. Un chorro de agua** La potencia $P$ de un chorro de agua es conjuntamente proporcional al área de sección transversal $A$ del chorro y el cubo de la velocidad $v$. Si $v$ se duplica y el área de sección transversal se reduce a la mitad, ¿en qué factor aumenta la potencia?

**38. Fuerza ascensional aerodinámica** La fuerza ascensional $L$ del ala de un avión en el despegue varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad $s$ del avión y el área $A$ de sus alas. Un avión con un área de alas de 500 pies$^2$ que corre a 50 mi/h experimenta una fuerza ascensional de 1700 lb. ¿Cuánta fuerza ascensional experimentará un avión con área de alas de 600 pies$^2$ que corre a 40 mi/h?




**39. Fuerza de resistencia al avance de un bote** La fuerza $F$ de resistencia al avance en un bote es conjuntamente proporcional al área $A$ de superficie húmeda en el casco y el cuadrado de la velocidad $s$ del bote. Un bote experimenta una fuerza de resistencia al avance de 220 lb cuando navega a 5 mi/h con un área de superficie húmeda de 40 pies$^2$. ¿Con qué rapidez debe estar navegando un bote si tiene 28 pies$^2$ de área de superficie húmeda y está experimentando una fuerza de resistencia al avance de 175 lb?

**40. Patinar en una curva** Un auto se desplaza en una curva que forma un arco circular. La fuerza $F$ necesaria para evitar que el auto patine es conjuntamente proporcional al peso $w$ del auto y el cuadrado de la velocidad $s$, y es inversamente proporcional al radio $r$ de la curva.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese esta variación.

**(b)** Un auto que pesa 1600 lb se desplaza en una curva a 60 mi/h. El siguiente auto en transitar por esta curva pesa 2500 lb y requiere la misma fuerza que el primer auto para evitar que patine. ¿Cuál es la velocidad a la que circula?

**41. Resistencia eléctrica** La resistencia $R$ de un alambre varía directamente con su longitud $L$ e inversamente con el cuadrado de su diámetro $d$.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese esta variación conjunta.

**(b)** Encuentre la constante de proporcionalidad si un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms.

**(c)** Encuentre la resistencia de un alambre hecho del mismo material que mide 3 m de largo y tiene un diámetro de 0.008 m.

**42. Tercera Ley de Kepler** La Tercera Ley de Kepler de movimiento planetario dice que el cuadrado del período $T$ de un planeta (el tiempo que tarda en hacer una revolución completa alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su promedio de distancia $d$ desde el Sol.

**(a)** Exprese la Tercera Ley de Kepler como ecuación.

**(b)** Encuentre la constante de proporcionalidad usando el hecho que, para nuestro planeta, el período es alrededor de 365 días y la distancia promedio es de unos 93 millones de millas.

**(c)** El planeta Neptuno está a unos $2.79 \times 10^9$ millas del Sol. Encuentre el período de Neptuno.

**43. Energía de radiación** El total de energía de radiación $E$ emitida por una superficie calentada, por unidad de área, varía con la cuarta potencia de su temperatura absoluta $T$. La temperatura es 6000 K en la superficie del Sol y 300 K en la superficie de la Tierra.

**(a)** ¿Cuántas veces más energía de radiación por unidad de área es producida por el Sol que por la Tierra?

**(b)** El radio de la Tierra es de 3960 millas y el radio del Sol es de 435,000 millas. ¿Cuántas veces más de radiación total emite el Sol que la Tierra?

**44. Valor de un lote** El valor de un lote para construcción en la isla de Galiano es conjuntamente proporcional a su área y a la cantidad de agua producida por un pozo que está en la propiedad. Un lote de 200 pies por 300 pies tiene un pozo que produce 10 galones de agua por minuto, y está valuado en 48,000 dólares. ¿Cuál es el valor de un lote de 400 pies por 400 pies si el pozo del lote produce 4 galones de agua por minuto?

**45. Producción de coles** En una corta temporada de producción del territorio ártico canadiense de Nunavut, algunos jardineros encuentran posible producir coles gigantes en el sol de medianoche. Suponga que el tamaño final de una col es pro-

porcional a la cantidad de nutriente que recibe e inversamente proporcional al número de otras coles que la rodean. Una col que recibe 20 onzas de nutrientes y tenía otras 12 coles a su alrededor creció a un peso de 30 libras. ¿De qué tamaño crecería si recibe 10 onzas de nutrientes y tiene sólo 5 coles "vecinas"?

**46. Calor de una fogata** El calor que percibe un excursionista por una fogata es proporcional a la cantidad de madera en la fogata e inversamente proporcional al cubo de su distancia desde la misma. Si el excursionista está a 20 pies de la fogata y alguien duplica la cantidad de madera que está ardiendo, ¿a qué distancia de la fogata tendría que estar para captar el mismo calor que antes?

**47. Frecuencia de vibración** La frecuencia $f$ de vibraciones de una cuerda de violín es inversamente proporcional a su longitud $L$. La constante de proporcionalidad $k$ es positiva y depende de la tensión y densidad de la cuerda.

**(a)** Escriba una ecuación que represente esta variación.

**(b)** ¿Qué efecto tendrá duplicar la longitud de la cuerda en la frecuencia de su vibración?

**48. Propagación de una enfermedad** La rapidez $r$ con la que se propaga una enfermedad en una población de tamaño $P$ es conjuntamente proporcional al número $x$ de personas infectadas y del número $P - x$ que no estén infectadas. Una infección brota en una pequeña ciudad que tiene una población $P = 5000$.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese $r$ como función de $x$.

**(b)** Compare la rapidez de propagación de esta infección cuando 1000 personas están infectadas. ¿Cuál rapidez es más grande? ¿En qué factor?

**(c)** Calcule la rapidez de dispersión cuando toda la población está infectada. ¿Por qué tiene sentido intuitivo esta respuesta?

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**49. ¿La proporcionalidad lo es todo?** Numerosas leyes de física y química se pueden expresar como proporcionalidades. Dé al menos un ejemplo de una función que ocurre en las ciencias y que *no sea* una proporcionalidad.

# CAPÍTULO 1 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1.** Defina verbalmente cada término. (Compruebe consultando la definición del texto.)

**(a)** Un número entero **(b)** Un número racional

**(c)** Un número irracional **(d)** Un número real

**2.** Exprese cada una de estas propiedades de números reales.

**(a)** Propiedad Conmutativa

**(b)** Propiedad Asociativa

**(c)** Propiedad Distributiva

**3.** ¿Qué es un intervalo abierto? ¿Qué es un intervalo cerrado? ¿Qué notación se usa para estos intervalos?

**4.** ¿Cuál es el valor absoluto de un número?

**5. (a)** En la expresión $a^x$, ¿cuál es la base y cuál es el exponente?

**(b)** ¿Qué significa $a^x$ si $x = n$, un entero positivo?

**(c)** ¿Qué pasa si $x = 0$?

**(d)** ¿Qué pasa si $x$ es un entero negativo: $x = -n$, donde $n$ es un entero positivo?

**(e)** ¿Qué pasa si $s = m/n$, un número racional?

**(f)** Exprese las Leyes de Exponentes.

**6. (a)** ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$?

**(b)** ¿Por qué es $\sqrt{a^2} = |a|$?

**(c)** ¿Cuántas raíces $n$ reales tiene un número positivo real si $n$ es impar? ¿Y si es par?

**7.** Explique cómo funciona el procedimiento de racionalizar el denominador.

**8.** Exprese las Fórmulas de Productos Notables para $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

**9.** Exprese cada una de las Fórmulas de Factorización Notable.

**(a)** Diferencia de cuadrados **(b)** Diferencia de cubos

**(c)** Suma de cubos

**10.** ¿Qué es la solución de una ecuación?

**11.** ¿Cómo se resuelve una ecuación que contenga radicales? ¿Por qué es importante comprobar las respuestas al resolver ecuaciones de este tipo?

**12.** ¿Cómo se resuelve una ecuación

**(a)** algebraicamente? **(b)** gráficamente?

**13.** Escriba la forma general de cada tipo de ecuación.

**(a)** Una ecuación lineal **(b)** Una ecuación cuadrática

**14.** ¿Cuáles son las tres formas de resolver una ecuación cuadrática?

**15.** Exprese la Propiedad del Producto Cero.

**16.** Describa el proceso de completar el cuadrado.

**17.** Exprese la fórmula cuadrática.

**18.** ¿Cuál es el discriminante de una ecuación cuadrática?

**19.** Exprese las reglas para trabajar con desigualdades.

**20.** ¿Cómo se resuelve
(a) una desigualdad lineal?
(b) una desigualdad no lineal?

**21.** (a) ¿Cómo se resuelve una ecuación con un valor absoluto?
(b) ¿Cómo se resuelve una desigualdad con un valor absoluto?

**22.** (a) Describa el plano de coordenadas.
(b) ¿Cómo se localizan puntos en el plano de coordenadas?

**23.** Exprese cada fórmula.
(a) La Fórmula de la Distancia
(b) La Fórmula del Punto Medio

**24.** Dada una ecuación, ¿cuál es su gráfica?

**25.** ¿Cómo se encuentran los puntos de intersección de $x$ y de $y$ de una gráfica?

**26.** Escriba la ecuación de la circunferencia con centro $(h, k)$ y radio $r$.

**27.** Explique el significado de cada tipo de simetría. ¿Cómo se prueba?
(a) Simetría con respecto al eje $x$
(b) Simetría con respecto al eje $y$
(c) Simetría con respecto al origen

**28.** Defina la pendiente de una recta.

**29.** Escriba cada forma de la ecuación de una recta.
(a) La forma punto-pendiente
(b) La forma pendiente-intersección

**30.** (a) ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?
(b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal?

**31.** ¿Cuál es la ecuación general de una recta?

**32.** Dadas unas rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$, explique cómo se puede saber si las rectas son
(a) paralelas (b) perpendiculares

**33.** Escriba una ecuación que exprese cada relación.
(a) $y$ es directamente proporcional a $x$.
(b) $y$ es inversamente proporcional a $x$.
(c) $z$ es conjuntamente proporcional a $x$ y a $y$.

## EJERCICIOS

**1-4** ■ Exprese la propiedad de números reales que se use.

**1.** $3x + 2y = 2y + 3x$

**2.** $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$

**3.** $4(a + b) = 4a + 4b$

**4.** $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

**5-6** ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

**5.** $[-2, 6)$ **6.** $(-\infty, 4]$

**7-8** ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

**7.** $x \geq 5$ **8.** $-1 < x \leq 5$

**9-18** ■ Evalúe la expresión.

**9.** $|3 - |-9||$ **10.** $1 - |1 - |-1||$

**11.** $2^{-3} - 3^{-2}$ **12.** $\sqrt[3]{-125}$

**13.** $216^{-1/3}$ **14.** $64^{2/3}$

**15.** $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$ **16.** $\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{324}$

**17.** $2^{1/2}8^{1/2}$ **18.** $\sqrt{2}\sqrt{50}$

**19-28** ■ Simplifique la expresión.

**19.** $\dfrac{x^2(2x)^4}{x^3}$ **20.** $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$

**21.** $(3xy^2)^3(\tfrac{2}{3}x^{-1}y)^2$ **22.** $\left(\dfrac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$

**23.** $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$ **24.** $\sqrt{x^2y^4}$

**25.** $\left(\dfrac{9x^3y}{y^{-3}}\right)^{1/2}$ **26.** $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{1/2}\left(\dfrac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$

**27.** $\dfrac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4}$ **28.** $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

**29.** Escriba el número 78,250,000,000 en notación científica.

**30.** Escriba el número $2.08 \times 10^{-8}$ en notación decimal ordinaria.

**31.** Si $a \approx 0.00000293$, $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$ y $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$, use una calculadora para aproximar el número $ab/c$.

**32.** Si su corazón late 80 veces por minuto y usted vive hasta los 90 años de edad, estime el número de veces que su corazón pulsa durante su vida. Exprese su respuesta en notación científica.

**33-48** ■ Factorice la expresión completamente.

**33.** $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$ **34.** $x^2 - 9x + 18$

**35.** $x^2 + 3x - 10$ **36.** $6x^2 + x - 12$

**37.** $4t^2 - 13t - 12$ **38.** $x^4 - 2x^2 + 1$

**39.** $25 - 16t^2$ **40.** $2y^6 - 32y^2$

**41.** $x^6 - 1$ **42.** $y^3 - 2y^2 - y + 2$

**43.** $x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}$ **44.** $a^4b^2 + ab^5$

**45.** $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ **46.** $8x^3 + y^6$

**47.** $(x^2 + 2)^{5/2} + 2x(x^2 + 2)^{3/2} + x^2\sqrt{x^2 + 2}$

**48.** $3x^3 - 2x^2 + 18x - 12$

**49-64** ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

**49.** $(2x + 1)(3x - 2) - 5(4x - 1)$

**50.** $(2y - 7)(2y + 7)$

**51.** $(1 + x)(2 - x) - (3 - x)(3 + x)$

**52.** $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$

**53.** $x^2(x - 2) + x(x - 2)^2$ **54.** $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3}$

**55.** $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$ **56.** $\dfrac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$

**57.** $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \div \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 1}$

**58.** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{3}{(x - 2)^2}$ **59.** $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

**60.** $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$

**61.** $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x - 2}$ **62.** $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}}$

**63.** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (racionalice el denominador)

**64.** $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$ (racionalice el numerador)

**65-80** ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

**65.** $7x - 6 = 4x + 9$ **66.** $8 - 2x = 14 + x$

**67.** $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{3x}{3x - 6}$ **68.** $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$

**69.** $x^2 - 9x + 14 = 0$ **70.** $x^2 + 24x + 144 = 0$

**71.** $2x^2 + x = 1$ **72.** $3x^2 + 5x - 2 = 0$

**73.** $4x^3 - 25x = 0$ **74.** $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$

**75.** $3x^2 + 4x - 1 = 0$ **76.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 1} = 3$

**77.** $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

**78.** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

**79.** $|x - 7| = 4$ **80.** $|2x - 5| = 9$

**81.** El propietario de una tienda vende pasitas en \$3.20 por libra y nueces en \$2.40 por libra. Él decide mezclar las pasitas y nueces y vende 50 lb de la mezcla en \$2.72 por libra. ¿Qué cantidades de pasitas y nueces debe usar?

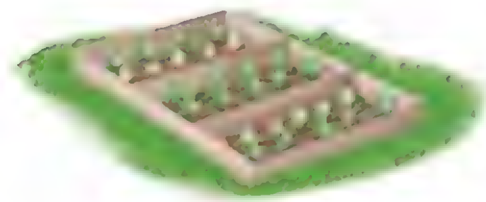
**82.** Antonio sale de Kingston a las 2:00 p.m. y viaja en auto a Queensville, a 160 millas de distancia, a 45 mi/h. A las 2:15 p.m. Helen sale de Queensville y va en auto a Kingston a 40 mi/h. ¿A qué hora se encuentran entre sí en la carretera?

**83.** Una mujer va en bicicleta a 8 mi/h más rápido de lo que corre. Todas las mañanas anda en bicicleta 4 millas y corre $2\frac{1}{2}$ millas, en un total de 1 hora de ejercicio. ¿Cuál es la velocidad a la que corre?

**84.** La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 20 cm de longitud. La suma de las longitudes de los otros dos lados es 28 cm. Encuentre las longitudes de los otros lados del triángulo.

**85.** Abbie pinta el doble de rápido que Beth y el triple de rápido que Cathie. Si les toma 60 minutos pintar una sala con las tres trabajadoras juntas, ¿cuánto tiempo tardaría Abbie si ella trabajara sola?

**86.** La propietaria de una casa desea poner una cerca en tres terrenos de jardín adyacentes, uno para cada uno de sus hijos, como se muestra en la figura. Si cada lote ha de ser de 80 pies$^2$ de área y ella tiene a la mano 88 pies de material para la cerca, ¿qué dimensiones debe tener cada lote?



**87-94** ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto de solución en la recta numérica real.

**87.** $3x - 2 > -11$ **88.** $-1 < 2x + 5 \le 3$

**89.** $x^2 + 4x - 12 > 0$ **90.** $x^2 \le 1$

**91.** $\dfrac{x - 4}{x^2 - 4} \le 0$ **92.** $\dfrac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} < 0$

**93.** $|x - 5| \le 3$ **94.** $|x - 4| < 0.02$

**95-98** ■ Resuelva gráficamente la ecuación o desigualdad.

**95.** $x^2 - 4x = 2x + 7$ **96.** $\sqrt{x + 4} = x^2 - 5$

**97.** $4x - 3 \ge x^2$ **98.** $x^3 - 4x^2 - 5x > 2$

**99-100** ■ Nos dan dos puntos $P$ y $Q$.

**(a)** Determine $P$ y $Q$ en un plano de coordenadas.
**(b)** Encuentre la distancia de $P$ a $Q$.
**(c)** Encuentre el punto medio del segmento $PQ$.
**(d)** Trace la recta determinada por $P$ y $Q$, y encuentre su ecuación en forma de pendiente e intersección.
**(e)** Trace la circunferencia que pasa por $Q$ y tiene centro $P$, y encuentre la ecuación de esta circunferencia.

**99.** $P(2, 0)$, $Q(-5, 12)$ **100.** $P(7, -1)$, $Q(2, -11)$

**101-102** ■ Trace la región dada por el conjunto.

**101.** $\{(x, y) \mid -4 < x < 4 \quad \text{y} \quad -2 < y < 2\}$

**102.** $\{(x, y) \mid x \ge 4 \quad \text{or} \quad y \ge 2\}$

**103.** ¿Cuál de los puntos $A(4, 4)$ o $B(5, 3)$ es más cercano al punto $C(-1, -3)$?

**104.** Encuentre una ecuación del círculo que tenga centro $(2, -5)$ y radio $\sqrt{2}$.

**105.** Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene centro $(-5, -1)$ y pasa por el origen.

**106.** Encuentre la ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-1, 8)$ y tiene el punto medio del segmento $PQ$ como su centro.

**107-110** ■ Determine si la ecuación representa una circunferencia, representa un punto o no tiene gráfica. Si la ecuación es la de una circunferencia, encuentre su centro y radio.

**107.** $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$

**108.** $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$

**109.** $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

**110.** $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

**111-118** ■ Pruebe la simetría de la ecuación y trace su gráfica.

**111.** $y = 2 - 3x$

**112.** $2x - y + 1 = 0$

**113.** $x + 3y = 21$

**114.** $x = 2y + 12$

**115.** $y = 16 - x^2$

**116.** $8x + y^2 = 0$

**117.** $x = \sqrt{y}$

**118.** $y = -\sqrt{1 - x^2}$

**119-122** ■ Use calculadora graficadora para graficar la ecuación en un rectángulo de vista apropiado.

**119.** $y = x^2 - 6x$

**120.** $y = \sqrt{5 - x}$

**121.** $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

**122.** $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

**123.** Encuentre la ecuación para la recta que pasa por los puntos $(-1, -6)$ y $(2, -4)$

**124.** Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto $(6, -3)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

**125.** Encuentre la ecuación para la recta que tiene punto de intersección $x$ de 4 y punto de intersección $y$ de 12.

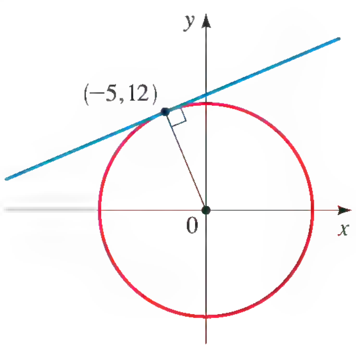
**126.** Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto $(1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 3y + 16 = 0$.

**127.** Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $3x + 15y = 22$.

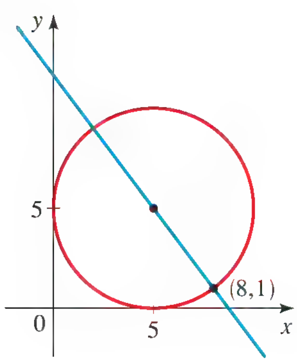
**128.** Encuentre la ecuación para la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-1, -3)$ y $(3, 2)$.

**129-130** ■ Encuentre ecuaciones para la circunferencia y la recta de la figura.

**129.**




**130.**




**131.** La Ley de Hooke dice que si un peso $w$ se fija a un resorte colgante, entonces la longitud alargada $s$ del resorte está linealmente relacionada a $w$. Para un resorte particular tenemos

$$s = 0.3w + 2.5$$

donde $s$ se mide en pulgadas y $w$ en libras.

**(a)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $s$ en esta ecuación?

**(b)** ¿Cuál es la longitud del resorte cuando se le fija un peso de 5 libras?

**132.** Margarita es contratada por una empresa de contadores con un salario de $60,000 por año. Tres años después, su salario anual ha aumentado a $70,500. Suponga que su salario aumenta linealmente.

**(a)** Encuentre una ecuación que relacione el salario anual $S$ de ella con el número de años $t$ que ella ha trabajado para la empresa.

**(b)** ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección $S$ de la ecuación del salario de Margarita?

**(c)** ¿Cuál será su salario después de 12 años con la empresa?

**133.** Suponga que $M$ varía directamente con $z$, y $M = 120$ cuando $z = 15$. Escriba una ecuación que exprese esta variación.

**134.** Suponga que $z$ es inversamente proporcional a $y$, y que $z = 12$ cuando $y = 16$. Escriba una ecuación que exprese $z$ en términos de $y$.

**135.** La intensidad de iluminación $I$ de una luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia $d$ desde la luz.

**(a)** Escriba este enunciado como una ecuación.

**(b)** Determine la constante de proporcionalidad si se sabe que una lámpara tiene una intensidad de 1000 candelas a una distancia de 8 metros.

**(c)** ¿Cuál es la intensidad de esta lámpara a una distancia de 20 metros?

**136.** La frecuencia de una cuerda en vibración bajo constante tensión es inversamente proporcional a su longitud. Si una cuerda de violín de 12 pulgadas de largo vibra 440 veces por segundo, ¿a qué longitud debe acortarse para que vibre 660 veces por segundo?

**137.** La velocidad terminal de un paracaidista es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Un paracaidista de 160 lb de peso alcanza una velocidad terminal de 9 mi/h. ¿Cuál es la velocidad terminal para un paracaidista que pesa 240 libras?

**138.** El alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 60 mi/h, con un alcance máximo de 242 pies. ¿Cuál es este máximo alcance si él lanza la pelota a 70 mi/h?

## CAPÍTULO 1 EXAMEN

1. (a) Grafique los intervalos $(-5, 3]$ y $(2, \infty)$ sobre la recta de números reales.
   (b) Exprese las desigualdades $x \leq 3$ y $-1 \leq x < 4$ en notación de intervalos.
   (c) Encuentre la distancia entre $-7$ y $9$ sobre la recta de números reales.

2. Evalúe cada una de las expresiones siguientes.
   (a) $(-3)^4$ (b) $-3^4$ (c) $3^{-4}$ (d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ (e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ (f) $16^{-3/4}$

3. Escriba cada uno de estos números en notación científica.
   (a) 186,000,000,000 (b) 0.0000003965

4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos.
   (a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ (b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ (c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$
   (d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ (e) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ (f) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

5. Racionalice el denominador y simplifique: $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$

6. Realice las operaciones indicadas y simplifique.
   (a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ (b) $(x + 3)(4x - 5)$ (c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
   (d) $(2x + 3)^2$ (e) $(x + 2)^3$

7. Factorice por completo cada expresión.
   (a) $4x^2 - 25$ (b) $2x^2 + 5x - 12$ (c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
   (d) $x^4 + 27x$ (e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ (f) $x^3y - 4xy$

8. Encuentre todas las soluciones reales.
   (a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ (b) $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$ (c) $x^2 - x - 12 = 0$
   (d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$ (e) $\sqrt{3 - \sqrt{x + 5}} = 2$ (f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
   (g) $3|x - 4| = 10$

9. Mary viajó en auto de Amity a Belleville a una velocidad de 50 mi/h. En el viaje de regreso, manejó a 60 mi/h. El total del viaje duró $4\frac{2}{5}$ h de tiempo de manejo. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades.

10. Una parcela rectangular de tierras mide 70 pies más larga que su ancho. Cada diagonal entre esquinas opuestas mide 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

11. Resuelva estas desigualdades. Escriba la respuesta usando notación de intervalos y trace la solución en la recta de números reales.
    (a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ (b) $x(x - 1)(x + 2) > 0$
    (c) $|x - 4| < 3$ (d) $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

12. Se ha de almacenar una botella de medicina a una temperatura entre 5ºC y 10ºC. ¿A qué intervalo corresponde esto en la escala Fahrenheit? [*Nota:* Las temperaturas Fahrenheit ($F$) y Celsius ($C$) satisfacen la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.]

13. ¿Para qué valores de $x$ está definida la expresión $\sqrt{6x - x^2}$ como un número real?

14. Resuelva gráficamente la ecuación y la desigualdad.
    (a) $x^3 - 9x - 1 = 0$ (b) $x^2 - 1 \leq |x + 1|$

15. (a) Localice los puntos $P(0, 3)$, $Q(3, 0)$ y $R(6, 3)$ en el plano de coordenadas. ¿Dónde debe estar ubicado el punto $S$ para que $PQRS$ sea un cuadrado?
    (b) Encuentre el área de $PQRS$.

16. (a) Trace la gráfica de $y = x^2 - 4$.
    (b) Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ de la gráfica.
    (c) ¿La gráfica es simétrica alrededor del eje $x$, del eje $y$ o del origen?

**17.** Sean $P(-3, 1)$ y $Q(5, 6)$ dos puntos en el plano de coordenadas.

**(a)** Localice $P$ y $Q$ en el plano de coordenadas.

**(b)** Encuentre la distancia entre $P$ y $Q$.

**(c)** Encuentre el punto medio del segmento $PQ$.

**(d)** Encuentre la pendiente de la recta que contenga a $P$ y $Q$.

**(e)** Encuentre el bisector perpendicular de la recta que contenga a $P$ y $Q$.

**(f)** Encuentre la ecuación para la circunferencia para el que el segmento $PQ$ es un diámetro.

**18.** Encuentre el centro y radio de cada circunferencia y trace su gráfica.

**(a)** $x^2 + y^2 = 25$ **(b)** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ **(c)** $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$

**19.** Escriba una ecuación lineal $2x - 3y = 15$ en forma de pendiente e intersección, y trace su gráfica. ¿Cuáles son la pendiente y el punto de intersección $y$?

**20.** Encuentre una ecuación para la recta con la propiedad dada.

**(a)** Pasa por el punto $(3, -6)$ y es paralela a la recta $3x + y - 10 = 0$.

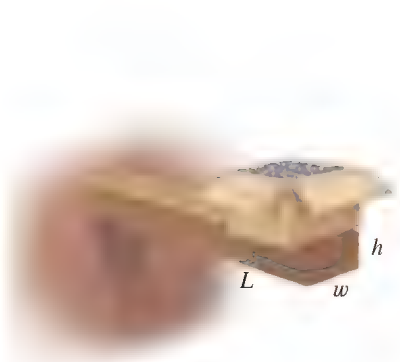
**(b)** Tiene punto de intersección $x$ en 6 y punto de intersección $y$ en 4.

**21.** Un geólogo usa una sonda para medir la temperatura $T$ (en ºC) del suelo, a varias profundidades debajo de la superficie, y encuentra que a una profundidad de $x$ centímetros la temperatura está dada por la ecuación lineal $T = 0.08x - 4$.

**(a)** ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 1 metro (100 cm)?

**(b)** Trace una gráfica de la ecuación lineal.

**(c)** ¿Qué representan la pendiente, la intersección en $x$ y la intersección $T$ de la gráfica de esta ecuación?




**22.** El peso máximo $M$ que puede ser soportado por una viga es conjuntamente proporcional a su ancho $w$ y el cuadrado de su altura $h$, e inversamente proporcional a su longitud $L$.

**(a)** Escriba una ecuación que exprese esta proporcionalidad.

**(b)** Determine la constante de proporcionalidad si una viga de 4 pulg. de ancho, 6 pulg. de alto y 12 pies de largo puede soportar un peso de 4800 libras.

**(c)** Si una viga de 10 pies hecha del mismo material mide 3 pulg. de ancho y 10 pulg. de alto, ¿cuál es el peso máximo que puede soportar?

*Si usted tuvo dificultad con cualquiera de estos problemas, puede repasar la sección de este capítulo que se indica a continuación.*

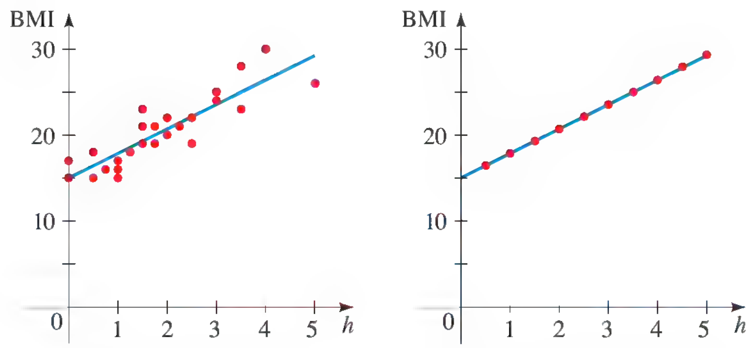
| Si usted tuvo dificultad con este problema de examen | Repase esta sección |
|---|---|
| 1 | Sección 1.1 |
| 2, 3, 4(a), 4(b), 4(c) | Sección 1.2 |
| 4(d), 4(e), 4(f), 5 | Sección 1.4 |
| 6, 7 | Sección 1.3 |
| 8 | Sección 1.5 |
| 9, 10 | Sección 1.6 |
| 11, 12, 13 | Sección 1.7 |
| 14 | Sección 1.9 |
| 15, 16, 17(a), 17(b) | Sección 1.8 |
| 17(c), 17(d) | Sección 1.10 |
| 17(e), 17(f), 18 | Sección 1.8 |
| 19, 20, 21 | Sección 1.10 |
| 22 | Sección 1.11 |

# Ajuste lineal de datos

Un modelo es una representación de un objeto o un proceso. Por ejemplo, un Ferrari de juguete es un modelo del auto real; un mapa de caminos es un modelo de las calles en una ciudad. Un **modelo matemático** es una representación matemática (por lo general una ecuación) de un objeto o proceso. Una vez hecho un modelo matemático, éste se puede usar para obtener información útil o hacer predicciones acerca de lo que esté siendo modelado. En estas secciones de *Enfoque sobre modelado* exploramos diferentes formas en las que se pueden usar matemáticas para modelar fenómenos reales.

## ▼ La recta que mejor se ajusta a los datos

En la Sección 1.10 usamos ecuaciones lineales para modelar relaciones entre cantidades variables. En la práctica estas relaciones se descubren al recolectar datos, pero los datos reales raras veces caen en una recta precisa. La **gráfica de dispersión** de la Figura 1(a) muestra el resultado de un estudio acerca de la obesidad infantil. La gráfica determina el índice de masa corporal (BMI) contra el número de horas al día de ver televisión para 25 adolescentes. Desde luego que no esperaríamos que los datos fueran exactamente lineales como en la Figura 1(b), pero hay una *tendencia* lineal indicada por la recta azul de la Figura 1(a): a más horas que un adolescente ve televisión, más alto es el BMI. En esta sección aprenderemos a hallar la recta que mejor se ajusta a los datos.




(a) Recta de mejor ajuste

(b) La recta se ajusta exactamente a los datos

**FIGURA 1**

La Tabla 1 da la tasa de mortalidad infantil en todo el país para el período de 1950 a 2000. La *tasa* es el número de infantes que mueren antes de llegar a su primer año de vida, contado por cada 1000 niños nacidos vivos.

**TABLA 1**
Mortalidad infantil en Estados Unidos

| Año | Tasa |
|---|---|
| 1950 | 29.2 |
| 1960 | 26.0 |
| 1970 | 20.0 |
| 1980 | 12.6 |
| 1990 | 9.2 |
| 2000 | 6.9 |

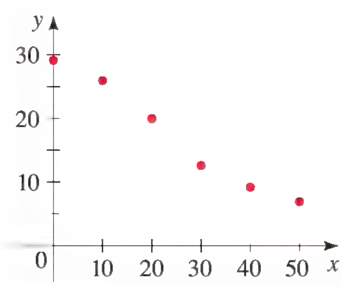



**FIGURA 2** Tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos

La gráfica de dispersión de la Figura 2 muestra que los datos están aproximadamente en una línea recta. Podemos tratar de ajustar una recta visualmente para aproximar los puntos de datos, pero como los datos no son *exactamente* lineales, hay muchas rectas que podría

parecer que funcionan. La Figura 3 presenta dos aspectos de “visualizar” una recta para ajustarse a los datos.

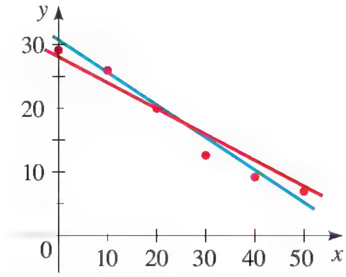



**FIGURA 3** Intentos visuales para ajustar la recta a los datos

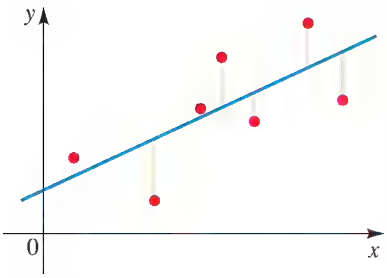



**FIGURA 4** Distancia de los puntos de datos a la recta

De todas las rectas que pasan por estos puntos de datos hay una que “mejor” se ajusta a los datos, en el sentido de que da el modelo lineal más preciso para los datos. A continuación describimos cómo hallar esta recta.

Parece razonable que la recta de mejor ajuste es aquella tan cercana como sea posible a todos los puntos de datos. Ésta es la recta para la cual la suma de las distancias verticales de los puntos de datos a la recta es tan pequeña como sea posible (vea Figura 4). Por razones técnicas es mejor usar la recta donde la suma de los cuadrados de estas distancias sea la más pequeña. Ésta se denomina **recta de regresión.** La fórmula para la recta de regresión se encuentra por medio de cálculo, pero afortunadamente la fórmula está programada en casi todas las calculadoras graficadoras. En el Ejemplo 1 vemos cómo usar una calculadora TI-83 para hallar la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil descritos líneas antes. (El proceso para otras calculadoras es similar.)

## EJEMPLO 1 | Recta de regresión para tasas de mortalidad infantil en Estados Unidos

**(a)** Encuentre la recta de regresión para los datos de mortalidad infantil de la Tabla 1.

**(b)** Grafique la recta de regresión en una gráfica de dispersión de los datos.

**(c)** Use la recta de regresión para estimar las tasas de mortalidad infantil en 1995 y 2006.

### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar la recta de regresión usando una calculadora TI-83, primero debemos ingresar los datos en las listas $L_1$ y $L_2$ a las que se tiene acceso presionando la tecla STAT y seleccionando `Edit`. La Figura 5 muestra la pantalla de la calculadora después de ingresar los datos. (Observe que estamos haciendo $x = 0$ correspondiente al año 1950, de modo que $x = 50$ corresponde a 2000. Esto hace que las ecuaciones sean más fáciles de trabajar.) A continuación presionamos la tecla STAT otra vez para seleccionar `Calc`, en seguida `4:LinReg(ax+b)`, que da la salida visualizada en la Figura 6(a). Esto nos dice que la recta de regresión es

$$y = -0.48x + 29.4$$

Aquí $x$ representa el número de años desde 1950, y $y$ representa la tasa de mortalidad infantil correspondiente.

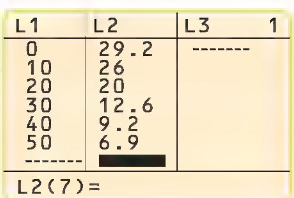



**FIGURA 5** Ingreso de los datos

**(b)** La gráfica de dispersión y la recta de regresión han sido determinadas en la pantalla de una calculadora graficadora en la Figura 6(b).

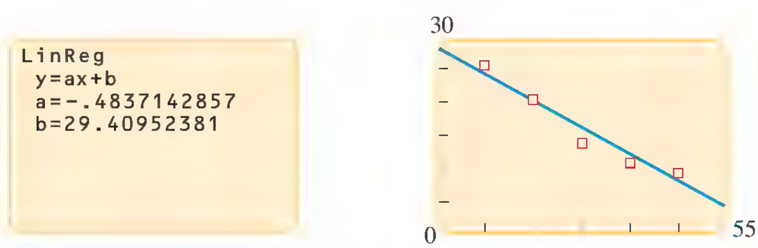
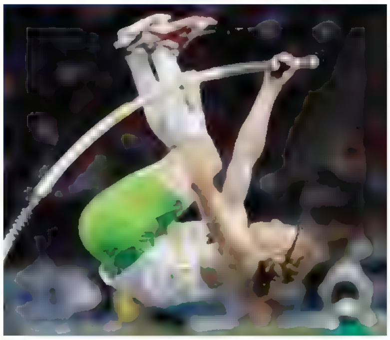



**FIGURA 6** (a) Salida del comando `LinReg` (b) Gráfica de dispersión y recta de regresión

**(c)** El año 1995 es 45 años después de 1950, de manera que sustituyendo por $x$ encontramos que $y = -0.48(45) + 29.4 = 7.8$. Por lo tanto, la tasa de mortalidad infantil en 1995 fue alrededor de 7.8. Análogamente, sustituyendo 56 por $x$, encontramos que la tasa de mortalidad infantil pronosticada para 2006 fue de aproximadamente $-0.48(56) + 29.4 \approx 2.5$. ■

Una búsqueda en Internet muestra que la verdadera tasa de mortalidad infantil fue de 7.6 en 1995 y 6.4 en 2006. Entonces, la recta de regresión es suficientemente precisa para 1995 (la tasa real fue un poco menor que la tasa pronosticada), pero está muy alejada para 2006 (la tasa real fue más del doble de la tasa pronosticada). La razón es que la tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos dejó de bajar y en realidad empezó a subir en 2002, por primera vez en más de un siglo. Esto muestra que debemos ser cuidadosos al extrapolar modelos lineales fuera del dominio sobre el cual están dispersos los datos.





Steven Hooker, ganador de la medalla de oro olímpica de 2008, en salto con pértiga para hombres

## ▼ Ejemplos de análisis de regresión

Desde que comenzaron los Juegos Olímpicos en 1896, los avances en eventos de pista y campo han estado mejorando constantemente. Un ejemplo en el que los récords ganadores han presentado una tendencia lineal ascendente es el salto con pértiga. El salto con pértiga empezó en Holanda como actividad práctica: al viajar de una población a otra, las personas saltaban los muchos canales que cruzaban la zona para evitar tener que salirse de su camino y hallar un puente. Las familias tenían a la mano un buen abasto de maderos de longitudes apropiadas para cada miembro de la familia. El salto de altura con pértiga, en lugar de distancia, se convirtió en un evento universitario de pista y campo hacia mediados del siglo XIX y fue uno de los eventos de los primeros Juegos Olímpicos modernos. En el siguiente ejemplo vemos un modelo lineal para récords ganadores de medalla de oro en Juegos Olímpicos, en el salto de altura con pértiga para hombres.

### EJEMPLO 2 | Recta de regresión para récords olímpicos de salto de altura con pértiga

La Tabla 2 da los récords olímpicos de salto de altura con pértiga para hombres, hasta 2004.

**(a)** Encuentre la recta de regresión para los datos.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser apropiada para modelar los datos?

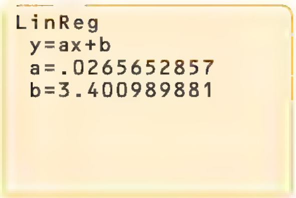
**(c)** ¿Qué representa la pendiente de la recta de regresión?

**(d)** Use el modelo para predecir la altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008.

**TABLA 2**

Récords olímpicos de salto con pértiga para hombres

| Año | $x$ | Medallista de oro | Altura (m) | Año | $x$ | Medallista de oro | Altura (m) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1896 | $-4$ | William Hoyt, USA | 3.30 | 1956 | 56 | Robert Richards, USA | 4.56 |
| 1900 | 0 | Irving Baxter, USA | 3.30 | 1960 | 60 | Don Bragg, USA | 4.70 |
| 1904 | 4 | Charles Dvorak, USA | 3.50 | 1964 | 64 | Fred Hansen, USA | 5.10 |
| 1906 | 6 | Fernand Gonder, France | 3.50 | 1968 | 68 | Bob Seagren, USA | 5.40 |
| 1908 | 8 | A. Gilbert, E. Cook, USA | 3.71 | 1972 | 72 | W. Nordwig, E. Germany | 5.64 |
| 1912 | 12 | Harry Babcock, USA | 3.95 | 1976 | 76 | Tadeusz Slusarski, Poland | 5.64 |
| 1920 | 20 | Frank Foss, USA | 4.09 | 1980 | 80 | W. Kozakiewicz, Poland | 5.78 |
| 1924 | 24 | Lee Barnes, USA | 3.95 | 1984 | 84 | Pierre Quinon, France | 5.75 |
| 1928 | 28 | Sabin Can, USA | 4.20 | 1988 | 88 | Sergei Bubka, USSR | 5.90 |
| 1932 | 32 | William Miller, USA | 4.31 | 1992 | 92 | M. Tarassob, Unified Team | 5.87 |
| 1936 | 36 | Earle Meadows, USA | 4.35 | 1996 | 96 | Jean Jaffione, France | 5.92 |
| 1948 | 48 | Guinn Smith, USA | 4.30 | 2000 | 100 | Nick Hysong, USA | 5.90 |
| 1952 | 52 | Robert Richards, USA | 4.55 | 2004 | 104 | Timothy Mack, USA | 5.95 |




Salida en la función `LinReg` en la TI-83

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sea $x =$ año $- 1900$, de modo que 1896 corresponde a $x = -4$, 1900 a $x = 0$ y así sucesivamente. Usando calculadora, encontramos la siguiente recta de regresión:

$$y = 0.0266x + 3.40$$

**(b)** La gráfica de dispersión y la recta de regresión se ilustran en la Figura 7. La recta de regresión parece ser un buen modelo para los datos.

**(c)** La pendiente es el promedio de porcentaje de aumento en el récord de salto con pértiga por año. Entonces, en promedio, el récord de salto con pértiga aumentó en 0.0266 m/año.

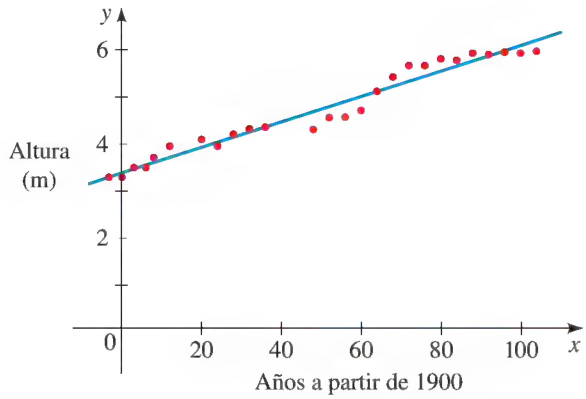



**FIGURA 7** Gráfica de dispersión y recta de regresión para los datos de salto con pértiga

**(d)** El año 2008 corresponde a $x = 108$ en nuestro modelo. El modelo da

$$\begin{aligned} y &= 0.0266(108) + 3.40 \\ &\approx 6.27 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo predice que en 2008 el salto con pértiga ganador será de 6.27 m. ■

---

En los Juegos Olímpicos de 2008 en Beijing, China, la medalla de oro olímpica en el salto con pértiga fue ganada por Steven Hooker de Australia, con un salto de 5.96 metros. Aun cuando esta altura estableció un récord olímpico, fue considerablemente más bajo que los 6.27 m pronosticados por el modelo del Ejemplo 2. En el Problema 10 vemos una recta de regresión para los datos de salto con pértiga de 1972 a 2004. Haga usted el problema para ver si este conjunto restringido de datos más recientes da un mejor pronóstico para el récord de 2008.

¿Un modelo lineal es realmente apropiado para los datos del Ejemplo 2? En subsiguientes secciones de *Enfoque sobre modelado* estudiamos modelos de regresión que usan otros tipos de funciones, y aprendemos a escoger el mejor modelo para un conjunto determinado de datos.

En el siguiente ejemplo vemos cómo se usa regresión lineal en investigación médica para investigar potenciales causas de enfermedades como el cáncer.

**TABLA 3**
Datos de tumores causados por asbesto

| Exposición al asbesto (fibras/mL) | Porcentaje que presentaba tumores pulmonares |
|---|---|
| 50 | 2 |
| 400 | 6 |
| 500 | 5 |
| 900 | 10 |
| 1100 | 26 |
| 1600 | 42 |
| 1800 | 37 |
| 2000 | 28 |
| 3000 | 50 |

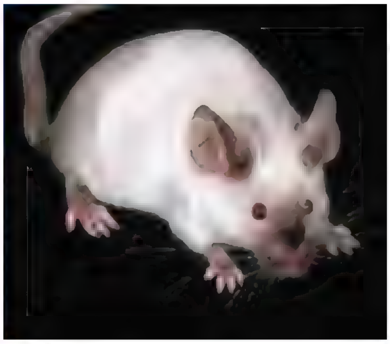
## EJEMPLO 3 | Recta de regresión para enlace entre asbesto y cáncer

Cuando ratas de laboratorio son expuestas a fibras de asbesto, algunas ratas presentan tumores pulmonares. La Tabla 3 es una lista de los resultados de varios experimentos realizados por diferentes científicos.

**(a)** Encuentre la recta de regresión para los datos.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos?

**(c)** ¿Qué representa el punto de intersección $y$ de la recta de regresión?





**SOLUCIÓN**

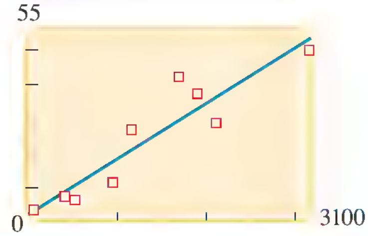
**(a)** Usando calculadora, encontramos la siguiente recta de regresión (vea Figura 8(a)):

$$y = 0.0177x + 0.5405$$

**(b)** La gráfica de dispersión y recta de regresión están graficadas en la Figura 8(b). La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos.

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.0177212141
 b=.5404689256
```

(a) Salida del comando `LinReg`




(b) Gráfica de dispersión y recta de regresión

**FIGURA 8** Regresión lineal para los datos de asbesto-tumores

**(c)** El punto de intersección $y$ es el porcentaje de ratas a las que se les formaron tumores cuando no había fibras de asbesto presentes. En otras palabras, éste es el porcentaje que normalmente presentan tumores pulmonares (por razones diferentes al asbesto).

## ¿Qué tan bueno es el ajuste? El coeficiente de correlación

Para cualquier conjunto determinado de datos con dos variables siempre es posible hallar una recta de regresión, incluso si los puntos de datos no tienden a estar en una recta y si las variables parecen no estar relacionadas en absoluto. Veamos las tres gráficas de dispersión de la Figura 9. En la primera gráfica de dispersión, los puntos de datos están cercanos a una recta. En la segunda gráfica, todavía se observa una tendencia lineal pero los puntos están más dispersos. En la tercera gráfica no parece haber ninguna tendencia en absoluto, lineal o de otro tipo.

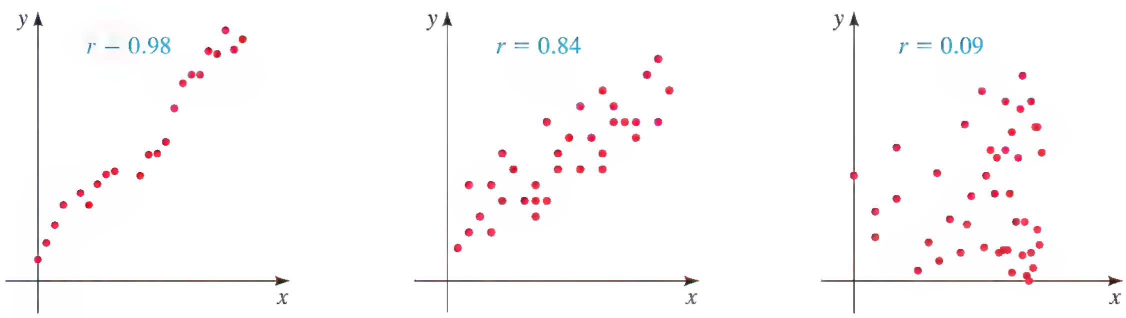



**FIGURA 9**

Una calculadora graficadora puede darnos una recta de regresión por cada una de estas gráficas de dispersión, pero, ¿qué tan bien representan o "se ajustan" estas líneas a los datos? Para contestar esta pregunta, los expertos en estadística han inventado el **coeficiente de correlación,** por lo general denotado por $r$. El coeficiente de correlación es un número entre $-1$ y 1 que mide qué tan cercanamente los datos siguen a la recta de regresión, o bien, en otras palabras, qué tan fuertemente están **correlacionadas** las variables. Numerosas calculadoras dan el valor de $r$ cuando calculan la recta de regresión. Si $r$ es cercana a $-1$ o a 1, entonces las variables están fuertemente correlacionadas, es decir, la gráfica de dispersión sigue muy de cerca a la recta de regresión. Si $r$ es cercana a 0, entonces las variables están

débilmente correlacionadas o no están correlacionadas para nada. (El signo de $r$ depende de la pendiente de la recta de regresión.) Los coeficientes de correlación de las gráficas de dispersión de la Figura 9 están indicados en las gráficas. Para la primera gráfica, $r$ es cercana a 1 porque los datos están muy cercanos a ser lineales. La segunda gráfica también tiene una $r$ relativamente grande, pero no tan grande como la primera, porque los datos, si bien son bastante lineales, están más difusos. La tercera gráfica tiene una $r$ cercana a 0, ya que prácticamente no hay tendencia lineal en los datos.

No hay reglas rígidas y rápidas para determinar qué valores de $r$ son suficientes para decidir que una correlación lineal es "significativa". El coeficiente de correlación es sólo una guía aproximada para ayudarnos a decidir cuánta fe poner en una determinada recta de regresión. En el Ejemplo 1 el coeficiente de correlación es $-0.99$, indicando un muy alto nivel de correlación, por lo cual podemos con seguridad decir que la baja en tasas de mortalidad infantil de 1950 a 2000 fue fuertemente lineal. (El valor de $r$ es negativo, puesto que la mortalidad infantil tuvo una tendencia *a la baja* en este período.) En el Ejemplo 3 el coeficiente de correlación es 0.92, que también indica una fuerte correlación entre las variables. Entonces, la exposición al asbesto está claramente asociada con el crecimiento de tumores pulmonares en ratas. ¿Significa esto que el asbesto *causa* cáncer pulmonar?

Si dos variables están correlacionadas, esto no necesariamente significa que un cambio en una variable *causa* un cambio en la otra. Por ejemplo, el matemático John Allen Paulos afirma que la medida en calzado está fuertemente correlacionada con las calificaciones en matemáticas entre niños escolares. ¿Esto significa que los pies grandes causan altas calificaciones en matemáticas? Ciertamente que no, pero la medida en calzado y la facilidad para las matemáticas aumentan independientemente a medida que los niños crecen. Por lo tanto, es importante no saltar a las conclusiones: la correlación y la causa no son lo mismo. La correlación es una útil herramienta para descubrir importantes relaciones de causa y efecto; pero para demostrar una causa debemos explicar el mecanismo por medio del cual una variable afecta a la otra. Por ejemplo, el enlace entre fumar y el cáncer pulmonar fue observado como correlación mucho antes que la ciencia encontrara el mecanismo por el que fumar causa cáncer pulmonar.

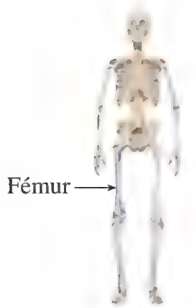
## PROBLEMAS

1. **Longitud del fémur y estatura** Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur con la estatura. El modelo permite a un antropólogo determinar la estatura de una persona cuando sólo se encuentra un esqueleto parcial (incluyendo el fémur). En este problema encontramos el modelo al analizar los datos acerca de la longitud del fémur y la estatura para los ocho hombres dados en la tabla.

   **(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   **(b)** Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

   **(c)** Un antropólogo encuentra un fémur de 58 cm de longitud. ¿Cuál era la estatura de la persona?




| Longitud del fémur (cm) | Estatura (cm) |
|---|---|
| 50.1 | 178.5 |
| 48.3 | 173.6 |
| 45.2 | 164.8 |
| 44.7 | 163.7 |
| 44.5 | 168.3 |
| 42.7 | 165.0 |
| 39.5 | 155.4 |
| 38.0 | 155.8 |

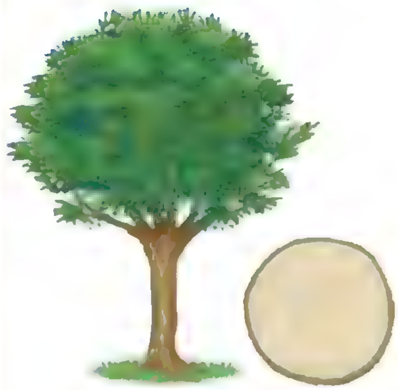
2. **Demanda de bebidas gaseosas** El gerente de una tienda de conveniencia observa que las ventas de bebidas gaseosas son más altas en días calurosos, de modo que reúne los datos de la tabla.

   **(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

   **(b)** Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

**(c)** Use el modelo para predecir las ventas de gaseosas si la temperatura es de 95°F.

| Temperatura alta (°F) | Número de latas vendidas |
|---|---|
| 55 | 340 |
| 58 | 335 |
| 64 | 410 |
| 68 | 460 |
| 70 | 450 |
| 75 | 610 |
| 80 | 735 |
| 84 | 780 |



**3. Diámetro de un árbol y su edad** Para estimar las edades de árboles, los guardabosques usan un modelo lineal que relaciona el diámetro de un árbol con la edad del mismo. El modelo es útil porque el diámetro de un árbol es mucho más fácil de medir que la edad (que requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para hallar el modelo, use los datos de la tabla, que fueron recolectados para una cierta variedad de robles.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique una función que modele los datos.

**(c)** Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 18 pulgadas.

| Diámetro (pulg.) | Edad (años) |
|---|---|
| 2.5 | 15 |
| 4.0 | 24 |
| 6.0 | 32 |
| 8.0 | 56 |
| 9.0 | 49 |
| 9.5 | 76 |
| 12.5 | 90 |
| 15.5 | 89 |

**4. Niveles de dióxido de carbono** El Observatorio de Mauna Loa, ubicado en la isla de Hawaii, ha estado observando niveles de dióxido de carbono ($CO_2$) en la atmósfera desde 1958. La tabla es una lista del promedio anual de niveles de $CO_2$ medidos en partes por millón (ppm) de 1984 a 2006.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar el nivel de $CO_2$ en la atmósfera en 2005. Compare su respuesta con el nivel real de $CO_2$ de 379.7 que fue medido en 2005.

| Año | Nivel de $CO_2$ (ppm) |
|---|---|
| 1984 | 344.3 |
| 1986 | 347.0 |
| 1988 | 351.3 |
| 1990 | 354.0 |
| 1992 | 356.3 |
| 1994 | 358.9 |
| 1996 | 362.7 |
| 1998 | 366.5 |
| 2000 | 369.4 |
| 2002 | 372.0 |
| 2004 | 377.5 |
| 2006 | 380.9 |

| Temperatura (°F) | Frecuencia de chirridos (chirridos/minuto) |
|---|---|
| 50 | 20 |
| 55 | 46 |
| 60 | 79 |
| 65 | 91 |
| 70 | 113 |
| 75 | 140 |
| 80 | 173 |
| 85 | 198 |
| 90 | 211 |

**5. Temperatura y grillos que chirrían** Unos biólogos han observado que la frecuencia de chirridos de grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla siguiente muestra las frecuencias de chirridos para varias temperaturas.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la frecuencia de chirridos a 100ºF.

**6. Extensión del hielo del Océano Ártico** El Centro Nacional de Información de Nieve y Hielo monitorea la cantidad de hielo del Ártico todo el año. La tabla siguiente da valores aproximados para la extensión del hielo marino en millones de kilómetros cuadrados de 1980 a 2006, en intervalos de dos años.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la extensión del hielo en el año 2010.

| Año | Extensión del hielo (millones de $km^2$) | Año | Extensión del hielo (millones de $km^2$) |
|---|---|---|---|
| 1980 | 7.9 | 1994 | 7.1 |
| 1982 | 7.4 | 1996 | 7.9 |
| 1984 | 7.2 | 1998 | 6.6 |
| 1986 | 7.6 | 2000 | 6.3 |
| 1988 | 7.5 | 2002 | 6.0 |
| 1990 | 6.2 | 2004 | 6.1 |
| 1992 | 7.6 | 2006 | 5.7 |

| Porcentaje de flujo (%) | Porcentaje positivo de mosquitos (%) |
|---|---|
| 0 | 22 |
| 10 | 16 |
| 40 | 12 |
| 60 | 11 |
| 90 | 6 |
| 100 | 2 |

**7. Prevalencia de mosquitos** La tabla siguiente es una lista de la abundancia relativa de mosquitos (medida por el porcentaje positivo de mosquitos) contra la rapidez de flujo (medida como porcentaje del flujo máximo) de redes de canales en la ciudad de Saga, Japón.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar el porcentaje positivo de mosquitos si el flujo del canal es 70% del máximo.

**8. Ruido e inteligencia** Expertos en audiología estudian la inteligibilidad de oraciones habladas bajo diferentes niveles de ruido. La inteligibilidad, calificación de una MRT (imagen de resonancia magnética), se mide como porcentaje de una oración pronunciada y que el escucha puede descifrar a cierto nivel de ruido en decibeles (dB). La tabla muestra los resultados de uno de dichos exámenes.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Encuentre el coeficiente de correlación. ¿Es apropiado un modelo lineal?

**(d)** Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la inteligibilidad de una oración a un nivel de ruido de 94 dB.

| Nivel de ruido (dB) | Calificación en MRT (%) |
|---|---|
| 80 | 99 |
| 84 | 91 |
| 88 | 84 |
| 92 | 70 |
| 96 | 47 |
| 100 | 23 |
| 104 | 11 |

**9. Esperanza de vida** El promedio de esperanza de vida en Estados Unidos ha estado aumentando constantemente en las últimas décadas, como se ve en la tabla siguiente.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre y grafique la recta de regresión.

**(c)** Use el modelo lineal que encontró en la parte (b) para predecir la esperanza de vida en el año 2006.

**(d)** Busque en la Internet o en la biblioteca de su plantel para hallar el promedio real de esperanza de vida en 2006. Compare con su respuesta de la parte (c).

| Año | Esperanza de vida |
|---|---|
| 1920 | 54.1 |
| 1930 | 59.7 |
| 1940 | 62.9 |
| 1950 | 68.2 |
| 1960 | 69.7 |
| 1970 | 70.8 |
| 1980 | 73.7 |
| 1990 | 75.4 |
| 2000 | 76.9 |

**10. Salto con pértiga en Juegos Olímpicos** La gráfica de la Figura 7 indica que en años recientes la altura ganadora de salto con pértiga para hombres, en Juegos Olímpicos, ha caído por debajo del valor pronosticado por la recta de regresión del Ejemplo 2. Esto podría haber ocurrido porque cuando el salto con pértiga era un evento nuevo, había mucho más espacio para mejorar en la actuación de los deportistas de esta especialidad, mientras que ahora hasta el mejor entrenamiento puede dar avances apenas incrementales. Veamos si al concentrarnos en resultados más recientes resulta un mejor pronóstico de futuros récords.

**(a)** Use los datos de la Tabla 2 para completar la tabla de alturas ganadoras de salto con pértiga. (Observe que estamos usando $x = 0$ para que corresponda al año 1972, donde empieza este conjunto restringido de datos.)

**(b)** Encuentre la recta de regresión para los datos de la parte (a).

**(c)** Localice los datos y la recta de regresión en los mismos ejes. ¿La recta de regresión parece dar un buen modelo para los datos?

**(d)** ¿Cuál predice la recta de regresión como altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008? Compare este valor pronosticado con la altura ganadora real de 2008 de 5.96 metros, como se describe en la página 133. ¿Esta nueva recta de regresión ha dado un mejor pronóstico que la recta del Ejemplo 2?

| Año | $x$ | Altura (m) |
|---|---|---|
| 1972 | 0 | 5.64 |
| 1976 | 4 | |
| 1980 | 8 | |
| 1984 | | |
| 1988 | | |
| 1992 | | |
| 1996 | | |
| 2000 | | |
| 2004 | | |

**11. Récords olímpicos de natación** Las tablas siguientes dan los tiempos de medalla de oro en el evento de natación de 100 metros estilo libre, en Juegos Olímpicos, para hombres y mujeres.

**(a)** Encuentre las rectas de regresión para los datos de hombres y de mujeres.

**(b)** Trace ambas rectas de regresión en la misma gráfica. ¿Cuándo predicen estas rectas que las mujeres superarán a los hombres en el evento? ¿Esta conclusión parece razonable?

**HOMBRES**

| Año | Medallista de oro | Tiempo (s) |
|---|---|---|
| 1908 | C. Daniels, USA | 65.6 |
| 1912 | D. Kahanamoku, USA | 63.4 |
| 1920 | D. Kahanamoku, USA | 61.4 |
| 1924 | J. Weissmuller, USA | 59.0 |
| 1928 | J. Weissmuller, USA | 58.6 |
| 1932 | Y. Miyazaki, Japan | 58.2 |
| 1936 | F. Csik, Hungary | 57.6 |
| 1948 | W. Ris, USA | 57.3 |
| 1952 | C. Scholes, USA | 57.4 |
| 1956 | J. Henricks, Australia | 55.4 |
| 1960 | J. Devitt, Australia | 55.2 |
| 1964 | D. Schollander, USA | 53.4 |
| 1968 | M. Wenden, Australia | 52.2 |
| 1972 | M. Spitz, USA | 51.22 |
| 1976 | J. Montgomery, USA | 49.99 |
| 1980 | J. Woithe, E. Germany | 50.40 |
| 1984 | R. Gaines, USA | 49.80 |
| 1988 | M. Biondi, USA | 48.63 |
| 1992 | A. Popov, Russia | 49.02 |
| 1996 | A. Popov, Russia | 48.74 |
| 2000 | P. van den Hoogenband, Netherlands | 48.30 |
| 2004 | P. van den Hoogenband, Netherlands | 48.17 |
| 2008 | A. Bernard, France | 47.21 |

**MUJERES**

| Año | Medallista de oro | Tiempo (s) |
|---|---|---|
| 1912 | F. Durack, Australia | 82.2 |
| 1920 | E. Bleibtrey, USA | 73.6 |
| 1924 | E. Lackie, USA | 72.4 |
| 1928 | A. Osipowich, USA | 71.0 |
| 1932 | H. Madison, USA | 66.8 |
| 1936 | H. Mastenbroek, Holland | 65.9 |
| 1948 | G. Andersen, Denmark | 66.3 |
| 1952 | K. Szoke, Hungary | 66.8 |
| 1956 | D. Fraser, Australia | 62.0 |
| 1960 | D. Fraser, Australia | 61.2 |
| 1964 | D. Fraser, Australia | 59.5 |
| 1968 | J. Henne, USA | 60.0 |
| 1972 | S. Nielson, USA | 58.59 |
| 1976 | K. Ender, E. Germany | 55.65 |
| 1980 | B. Krause, E. Germany | 54.79 |
| 1984 | (Tie) C. Steinseifer, USA | 55.92 |
|  | N. Hogshead, USA | 55.92 |
| 1988 | K. Otto, E. Germany | 54.93 |
| 1992 | Z. Yong, China | 54.64 |
| 1996 | L. Jingyi, China | 54.50 |
| 2000 | I. DeBruijn, Netherlands | 53.83 |
| 2004 | J. Henry, Australia | 53.84 |
| 2008 | B. Steffen, Germany | 53.12 |

**12. Medida de calzado y estatura** ¿Piensa usted que la medida del calzado y la estatura están correlacionadas? Investigue al estudiar las medidas de calzado y estaturas de personas de su grupo en la universidad. (Desde luego, los datos para hombres y mujeres deben ser separados.) Encuentre el coeficiente de correlación.

**13. Demanda de barras de dulces** En este problema, usted determinará una ecuación de demanda lineal que describe la demanda de barras de dulces en su grupo en la universidad. Investigue a sus compañeros para determinar qué precio estarían dispuestos a pagar por una barra de dulce. La forma de su estudio podría verse como la muestra de la izquierda.

*¿Compraría usted una barra de dulce de la máquina expendedora del pasillo, si el precio es como el indicado?*

| *Precio* | *Sí o no* |
|---|---|
| *30¢* | |
| *40¢* | |
| *50¢* | |
| *60¢* | |
| *70¢* | |
| *80¢* | |
| *90¢* | |
| *$1.00* | |
| *$1.10* | |
| *$1.20* | |

**(a)** Haga una tabla del número de quienes respondieron "sí" a cada nivel de precios.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de sus datos.

**(c)** Encuentre y grafique la recta de regresión $y = mp + b$, que da el número $y$ de quienes respondieron y que comprarían una barra de dulce si el precio fuera de $p$ centavos. Ésta es la *ecuación de demanda.* ¿Por qué la pendiente $m$ es negativa?

**(d)** ¿Cuál es el punto de intersección $p$ de la ecuación de demanda? ¿Qué le dice este punto de intersección acerca de los precios de barras de dulce?

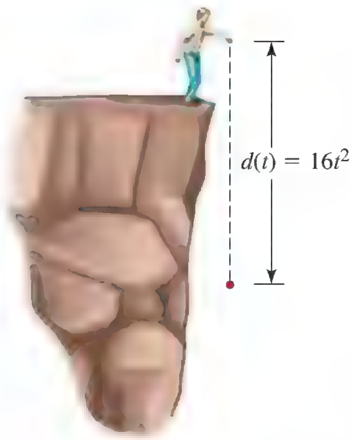
CAPÍTULO 2

# FUNCIONES



Quizá la idea más útil para modelar el mundo real sea el concepto de *función*. Veamos un ejemplo. Si un escalador deja caer una piedra desde un alto risco, sabemos que la piedra caerá. Pero esta descripción general no nos ayuda a saber cuándo llegará la piedra al suelo. Para averiguarlo, necesitamos una *regla* que relacione la distancia $d$ que cae la piedra y el tiempo que haya estado en caída. Galileo fue el primero en descubrir la regla: en $t$ segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Esta "regla" se denomina *función*; escribimos esta función como $d(t) = 16t^2$. Con el uso de este modelo de función, podemos *predecir* cuándo caerá la piedra al suelo. En este capítulo estudiamos propiedades de funciones y la forma en que los modelos funcionales pueden ayudarnos a obtener información precisa acerca de la cosa o proceso que se esté modelando.

**Descripción general:** La piedra cae.




**Función:** En $t$ segundos, la piedra cae $16t^2$ pies.

# 2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

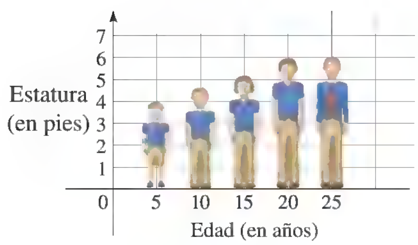
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

## ▼ Funciones a nuestro alrededor

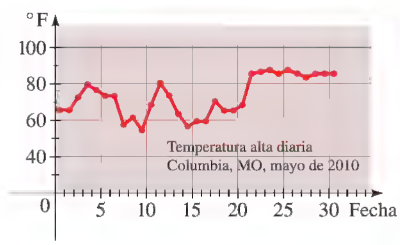
En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.




La estatura es función de la edad.




La temperatura es función de la fecha.

| $w$ (onzas) | Porte (dólares) |
|---|---|
| $0 < w \leq 1$ | 1.22 |
| $1 < w \leq 2$ | 1.39 |
| $2 < w \leq 3$ | 1.56 |
| $3 < w \leq 4$ | 1.73 |
| $4 < w \leq 5$ | 1.90 |
| $5 < w \leq 6$ | 2.07 |

El porte es función del peso.

**FIGURA 1**

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área $A$ de un círculo depende de su radio $r$ está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura $T$ del agua como función del tiempo $t$ que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura $T$ del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, $T$ es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, $T$ disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

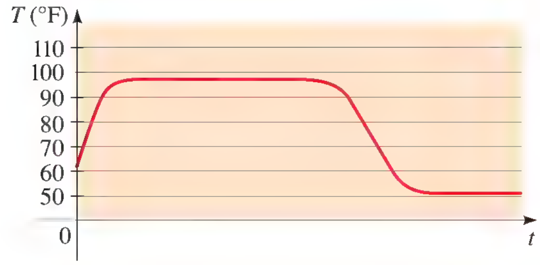



**FIGURA 2** Gráfica de la temperatura $T$ del agua como función del tiempo $t$

## Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra $f$ para representar una regla como sigue:

"$f$" es la regla "elevar al cuadrado el número"

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla $f$ al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

**DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN**

Una **función** $f$ es una regla que asigna a cada elemento $x$ de un conjunto $A$ exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto $B$.

Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos $A$ y $B$ son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "$f$ de $x$" o "$f$ en $x$" y se denomina **valor de $f$ en $x$**, o la **imagen de $x$ bajo $f$**. El conjunto $A$ recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de $f$ es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando $x$ varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función $f$ se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de $f$ se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces $x$ es la variable independiente y $y$ es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si $x$ está en el dominio de la función $f$, entonces cuando $x$ entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa $x$ en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces $x$ no está en el dominio de esta función; esto es, $x$ no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta $f$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

**FIGURA 3** Diagrama de máquina de $f$

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de $A$ con un elemento de $B$. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con $x$, $f(a)$ está asociada con $a$, y así sucesivamente.

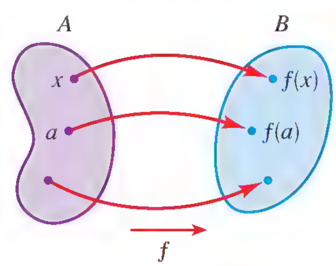



**FIGURA 4** Diagrama de flecha de $f$

## EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función $f$ está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

**(a)** Exprese verbalmente cómo actúa $f$ sobre la entrada $x$ para producir la salida $f(x)$.

**(b)** Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

**(c)** Encuentre el dominio y rango de $f$.

**(d)** Trace un diagrama de máquina para $f$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La fórmula nos dice que $f$ primero eleva al cuadrado la entrada $x$ y luego suma 4 al resultado. Por tanto, $f$ es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

**(b)** Los valores de $f$ se encuentran al sustituir por $x$ en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$f(3) = 3^2 + 4 = 13$ Sustituir $x$ por 3

$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$ Sustituir $x$ por $-2$

$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$ Sustituir $x$ por $\sqrt{5}$

**(c)** El dominio de $f$ está formado por todas las posibles entradas para $x$. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real $x$, el dominio de $f$ es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de $f$ está formado por todas las posibles salidas de $f$. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales $x$, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de $f$ tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de $f$ es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

**(d)** Un diagrama de máquina para $f$ se ilustra en la Figura 5.

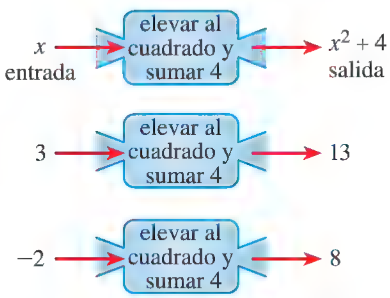



**FIGURA 5** Diagrama de máquina

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43**

## Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente $x$ desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar $f$ en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

## EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

**(a)** $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f(\frac{1}{2})$

**SOLUCIÓN** Para evaluar $f$ en un número, sustituimos el número por $x$ en la definición de $f$.

**(a)** $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

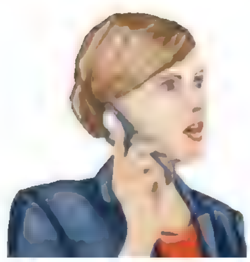
**(b)** $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

**(c)** $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

**(d)** $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos



Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función $C$ del Ejemplo 3 está definida por tramos.

**SOLUCIÓN** Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada $x$. Si $0 \leq x \leq 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Como $100 \leq 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \leq 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27** ■

## EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

**(a)** $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

**(c)** $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de $f$ entre $x = a$ y $x = a + h$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

**(b)** $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

**(c)**
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

**(d)** Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35** ■

## EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a $h$ millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

**(a)** ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?

El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

**(b)** Construya una tabla de valores para la función $w$ que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Buscamos el valor de la función $w$ cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

**(b)** La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

| $h$ | $w(h)$ |
|---|---|
| 0 | 130 |
| 100 | 124 |
| 200 | 118 |
| 300 | 112 |
| 400 | 107 |
| 500 | 102 |

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

## Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales $x$ para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función $f$ no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función $g$ no está definida para $x$ negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

### EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de $f$ es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

**(b)** No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de $g$ es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

**(c)** No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de $h$ es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51** ■

## Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

"Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso $w$". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

## CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

### Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

### Algebraica

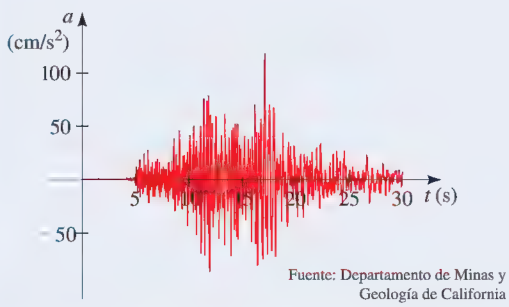
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

### Visual

Usando una gráfica:




Aceleración vertical durante un terremoto

### Numérica

Usando una tabla de valores:

| $w$ (onzas) | $C(w)$ (dólares) |
|---|---|
| $0 < w \leq 1$ | 1.22 |
| $1 < w \leq 2$ | 1.39 |
| $2 < w \leq 3$ | 1.56 |
| $3 < w \leq 4$ | 1.73 |
| $4 < w \leq 5$ | 1.90 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

## EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius $C$. (Así, $F$ es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

**(a)** Algebraicamente (usando una fórmula)

**(b)** Numéricamente (usando una tabla de valores)

**(c)** Visualmente (usando una gráfica)

**SOLUCIÓN**

**(a)** La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada $C$ por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

**(b)** Usamos la fórmula algebraica para $F$ que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

| $C$ (Celsius) | $F$ (Fahrenheit) |
|---|---|
| 10 | 14 |
| 0 | 32 |
| 10 | 50 |
| 20 | 68 |
| 30 | 86 |
| 40 | 104 |

**(c)** Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

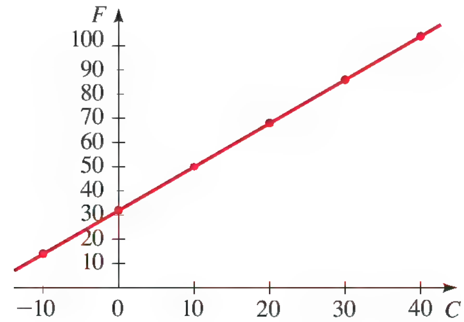



**FIGURA 6** Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

## 2.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Si una función $f$ está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de $f$ en $x = a$.

**2.** Para una función $f$, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina ______de $f$, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de $f$.

**3.** **(a)** ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

**(b)** Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

**4.** Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a $f$:

**(a)** *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.

**(b)** *Numérica:*

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 19 |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |

### HABILIDADES

**5-8** ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

**5.** Sumar 3, luego multiplicar por 2

**6.** Dividir entre 7, luego restar 4

**7.** Restar 5, luego elevar al cuadrado

**8.** Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

**9-12** ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

**9.** $h(x) = x^2 + 2$

**10.** $k(x) = \sqrt{x} + 2$

**11.** $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$

**12.** $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

**13-14** ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

**13.** $f(x) = \sqrt{x-1}$

**14.** $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

**15-16** ■ Complete la tabla.

**15.** $f(x) = 2(x-1)^2$

**16.** $g(x) = |2x + 3|$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| −3 | |
| −2 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 3 | |

**17-26** ■ Evalúe la función en los valores indicados.

**17.** $f(x) = x^2 - 6;\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$

**18.** $f(x) = x^3 + 2x;\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$

**19.** $f(x) = 2x + 1;$

$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

**20.** $f(x) = x^2 + 2x;$

$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

**21.** $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x};$

$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

**22.** $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;

$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**23.** $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;

$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x + 1), f(-x)$

**24.** $f(x) = x^3 - 4x^2$;

$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

**25.** $f(x) = 2|x - 1|$;

$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x + 1), f(x^2 + 2)$

**26.** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**27-30** ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

**27.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

**28.** $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

**29.** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

**30.** $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

**31-34** ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

**31.** $f(x) = x^2 + 1$; $f(x + 2), f(x) + f(2)$

**32.** $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$

**33.** $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$

**34.** $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

**35-42** ■ Encuentre $f(a), f(a + h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

**35.** $f(x) = 3x + 2$

**36.** $f(x) = x^2 + 1$

**37.** $f(x) = 5$

**38.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

**39.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

**40.** $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

**41.** $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

**42.** $f(x) = x^3$

**43-64** ■ Encuentre el dominio de la función.

**43.** $f(x) = 2x$

**44.** $f(x) = x^2 + 1$

**45.** $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

**46.** $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

**47.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

**48.** $f(x) = \dfrac{1}{3x - 6}$

**49.** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

**50.** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + x - 6}$

**51.** $f(x) = \sqrt{x - 5}$

**52.** $f(x) = \sqrt[4]{x + 9}$

**53.** $f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

**54.** $g(x) = \sqrt{7 - 3x}$

**55.** $h(x) = \sqrt{2x - 5}$

**56.** $G(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

**57.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{2 + x}}{3 - x}$

**58.** $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$

**59.** $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

**60.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

**61.** $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x - 4}}$

**62.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6 - x}}$

**63.** $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{\sqrt{2x - 1}}$

**64.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9 - x^2}}$

**65-68** ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

**65.** Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

**66.** Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

**67.** Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de $x$ dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

**68.** Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro $d$. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por $\pi$ y divida entre 6.

## APLICACIONES

**69. Costo de producción** El costo $C$ en dólares por producir $x$ yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

**(a)** Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
**(b)** ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
**(c)** Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

**70. Área de una esfera** El área superficial $S$ de una esfera es una función de su radio $r$ dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

**(a)** Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
**(b)** ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

**71. Ley de Torricelli** Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de $t$ minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

**(a)** Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
**(b)** ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
**(c)** Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

**72. ¿A qué distancia puede usted ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia $D$ máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud $h$ está dada por la función

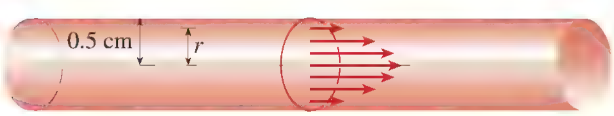
$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y $D$ y $h$ se miden en millas.
**(a)** Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
**(b)** ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
**(c)** Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

**73. Circulación sanguínea** Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad $v$ es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia $r$ desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da $v$ como función de $r$ se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre $v$ (en cm/s) y $r$ (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

**(a)** Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
**(b)** ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
**(c)** Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.




**74. Tamaño de la pupila** Cuando aumenta la brillantez $x$ de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio $R$ de la pupila. La dependencia de $R$ en $x$ está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde $R$ se mide en milímetros y $x$ se mide en unidades de brillantez apropiadas.
**(a)** Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
**(b)** Haga una tabla de valores de $R(x)$.

**75. Relatividad** Según la Teoría de la Relatividad, la longitud $L$ de un cuerpo es una función de su velocidad $v$ con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde $c$ es la velocidad de la luz (300,000 km/s).
**(a)** Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
**(b)** ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

**76. Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre la renta $T$ se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso $x$:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

**(a)** Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
**(b)** ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

**77. Compras por Internet** Una librería de ventas por Internet cobra \$15 por envío de pedidos de menos de \$100 pero no cobra nada por pedidos de \$100 o más. El costo $C$ de un pedido es una función del precio total $x$ del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

**(a)** Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
**(b)** ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

**78. Costo de una estancia en hotel** Una cadena hotelera cobra \$75 por noche por las primeras dos noches y \$50 por cada noche adicional de estancia. El costo total $T$ es una función del número de noches $x$ que permanezca un huésped.

**(a)** Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**(b)** Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

**(c)** ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

**79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad** En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa $F$ por violar estos límites es de $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

**(a)** Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde $x$ es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \square & \text{si } 0 < x < 40 \\ \square & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \square & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

**(b)** Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

**(c)** ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

**80. Altura de césped** El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

**81. Cambio de temperatura** Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

**82. Cambio diario de temperatura** Las lecturas de temperatura $T$ (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo $t$ se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de $T$ como función de $t$.

| $t$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 58 | 57 | 53 | 50 | 51 | 57 | 61 |

**83. Crecimiento poblacional** La población $P$ (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de $P$ como función de $t$.

| $t$ | 1988 | 1990 | 1992 | 1994 | 1996 | 1998 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 733 | 782 | 800 | 817 | 838 | 861 | 895 |

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**84. Ejemplos de funciones** Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

**85. Cuatro formas de representar una función** En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

# 2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

## ▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función $f$, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos $(x, y)$ cuya coordenada $x$ es una entrada y cuya coordenada $y$ es la correspondiente salida de la función.

### LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si $f$ es una función con dominio $A$, entonces la **gráfica** de $f$ es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de $f$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de $f$ es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

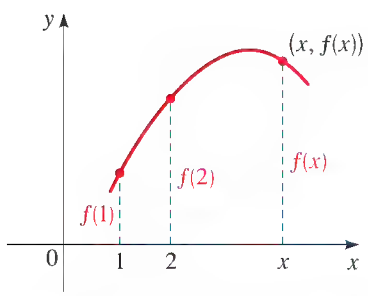
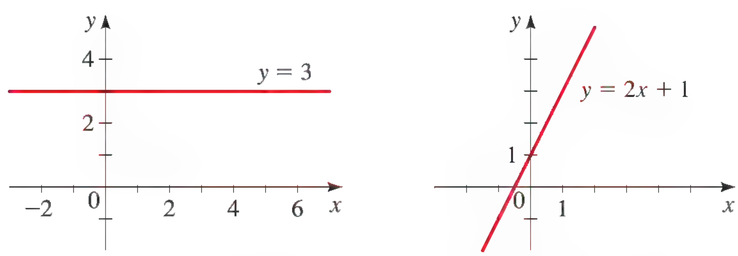



**FIGURA 1** La altura de la gráfica sobre el punto $x$ es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función $f$ da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto $x$ (vea Figura 1).

Una función $f$ de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente $m$ y punto de intersección $b$ en $y$. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde $b$ es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, $b$. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.




La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

**FIGURA 2**

## EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

**SOLUCIÓN** Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

| $x$ | $f(x) = x^2$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\pm\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $\pm 1$ | 1 |
| $\pm 2$ | 4 |
| $\pm 3$ | 9 |

| $x$ | $g(x) = x^3$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | 1 |
| 2 | 8 |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{8}$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $-2$ | $-8$ |

| $x$ | $h(x) = \sqrt{x}$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | $\sqrt{2}$ |
| 3 | $\sqrt{3}$ |
| 4 | 2 |
| 5 | $\sqrt{5}$ |

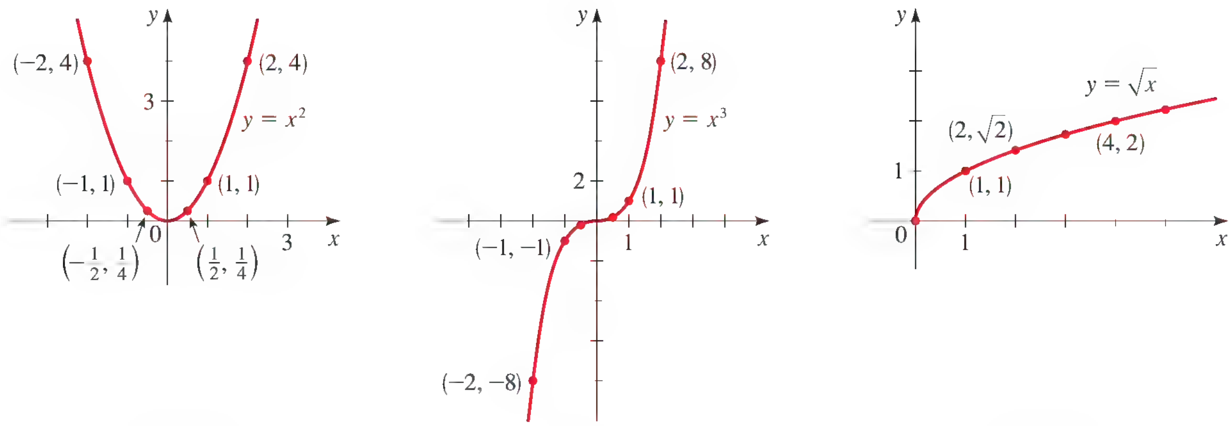



**FIGURA 3** (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sqrt{x}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11, 15** Y **19**

## Graficar funciones con calculadora graficadora

Una forma cómoda de graficar una función es usar una calculadora graficadora. Como la gráfica de una función $f$ es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, podemos usar los métodos de la Sección 1.9 para graficar funciones en una calculadora graficadora.

### EJEMPLO 2 | Graficar una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ en un rectángulo de vista apropiado.

**SOLUCIÓN** Para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$, debemos graficar la ecuación $y = x^3 - 8x^2$. En la calculadora graficadora TI-83, el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la Figura 4(a). Pero esta gráfica parece rebasar la parte superior y la inferior de la pantalla. Necesitamos expandir el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista $[-4, 10]$ por $[-100, 100]$ da un retrato más completo de la gráfica, como se ve en la Figura 4(b).

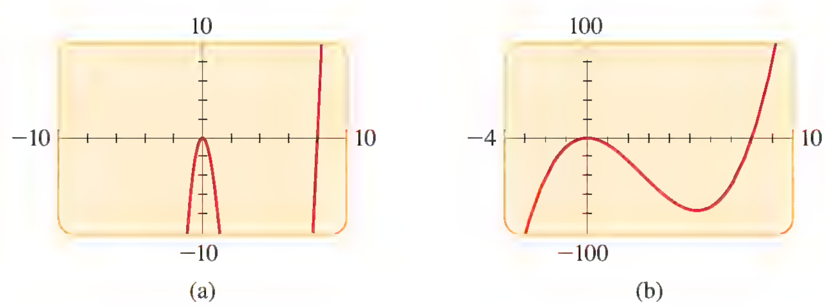



**FIGURA 4** Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

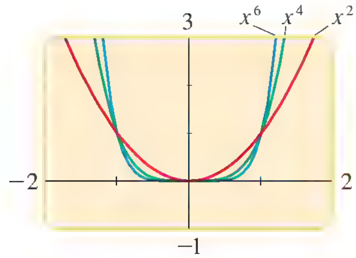
### EJEMPLO 3 | Una familia de funciones potencia

**(a)** Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2, 4$ y $6$ en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

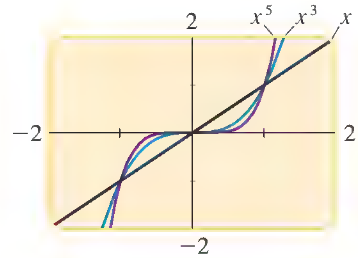
**(b)** Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1, 3$ y $5$ en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

**(c)** ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

**SOLUCIÓN** Para graficar la función $f(x) = x^n$, graficamos la ecuación $y = x^n$. Las gráficas para las partes (a) y (b) se muestran en la Figura 5.




(a) Potencias pares de $x$




(b) Potencias impares de $x$

**FIGURA 5** Una familia de funciones de potencia $f(x) = x^n$

**(c)** Vemos que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si $n$ es par o impar.

Si $n$ es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.
Si $n$ es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

Observe de la Figura 5 que cuando $n$ crece, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más pronunciado cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias inferiores de $x$ son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias superiores de $x$ son las funciones dominantes.

## Graficar funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como es de esperarse, la gráfica de tal función está formada por tramos separados.

### EJEMPLO 4 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

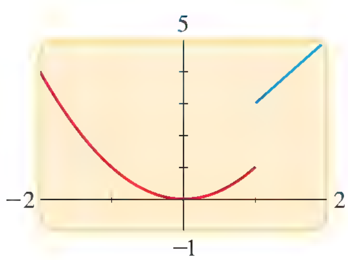
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Si $x \le 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la Figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

En varias calculadoras graficadoras, la gráfica de la Figura 6 puede ser producida al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

```
Y1=(X≤1)X²+(X>1)(2X+1)
```




(Para evitar la recta vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot`.)

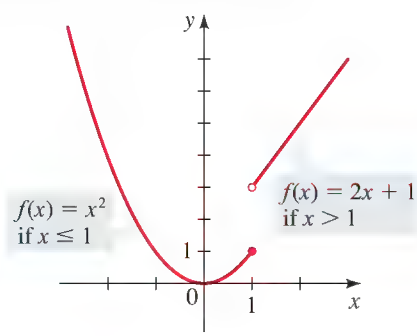



**FIGURA 6**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

## EJEMPLO 5 | Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

**SOLUCIÓN** Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el Ejemplo 4, observamos que la gráfica de $f$ coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje $y$ y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje $y$ (vea Figura 7).

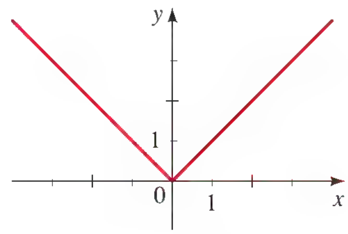



**FIGURA 7** Gráfica de $f(x) = |x|$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

La **función entero** mayor está definida por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, y $[\![-0.5]\!] = -1$.

## EJEMPLO 6 | Gráfica de la función entero mayor

Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$

**SOLUCIÓN** La tabla muestra los valores de $f$ para algunos valores de $x$. Observe que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal, como se ve en la Figura 8.

| $x$ | $[\![x]\!]$ |
|---|---|
| ⋮ | ⋮ |
| $-2 \leq x < -1$ | $-2$ |
| $-1 \leq x < 0$ | $-1$ |
| $0 \leq x < 1$ | $0$ |
| $1 \leq x < 2$ | $1$ |
| $2 \leq x < 3$ | $2$ |
| ⋮ | ⋮ |

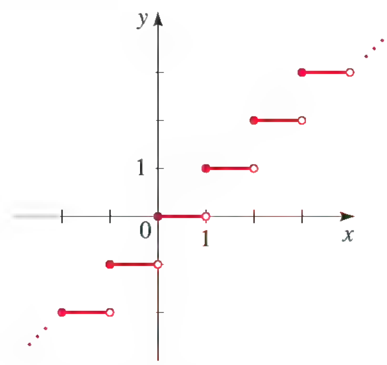



**FIGURA 8** La función entero mayor, $y = [\![x]\!]$

La función entero mayor es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

## EJEMPLO 7 | La función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica de larga distancia diurna de Toronto, Canadá, a Mumbai, India, es de 69 centavos por el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Trace la gráfica del costo $C$ (en dólares) de la llamada telefónica como función del tiempo $t$ (en minutos).

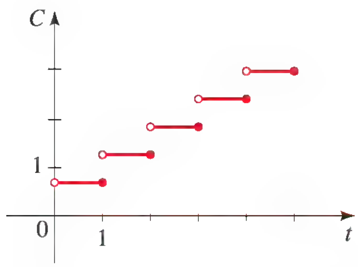



**FIGURA 9** Costo de una llamada de larga distancia

**SOLUCIÓN** Sea $C(t)$ el costo por $t$ minutos. Como $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información dada tenemos

$$\begin{aligned} C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \leq 1 \\ C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \leq 2 \\ C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \leq 3 \\ C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \leq 4 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la Figura 9.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

Las funciones continuas están definidas en forma más precisa en la Sección 13.2, en la página 851.

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos". Las funciones de los Ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los Ejemplos 4, 6 y 7 no son continuas.

## La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano $xy$. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano $xy$ son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

**LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL**

Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en $(a, b)$, entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en $(a, b)$ y en $(a, c)$, entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a $a$.

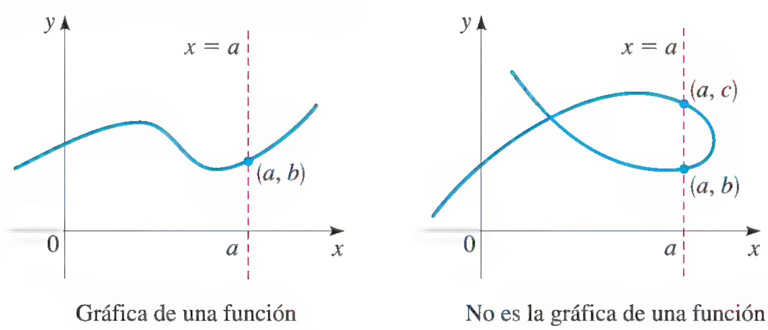



**FIGURA 10** Prueba de la Recta Vertical

## EJEMPLO 8 | Uso de la Prueba de la Recta Vertical

Usando la Prueba de la Recta Vertical, vemos que las curvas en las partes (b) y (c) de la Figura 11 representan funciones, mientras que las de las partes (a) y (d) no la representan.

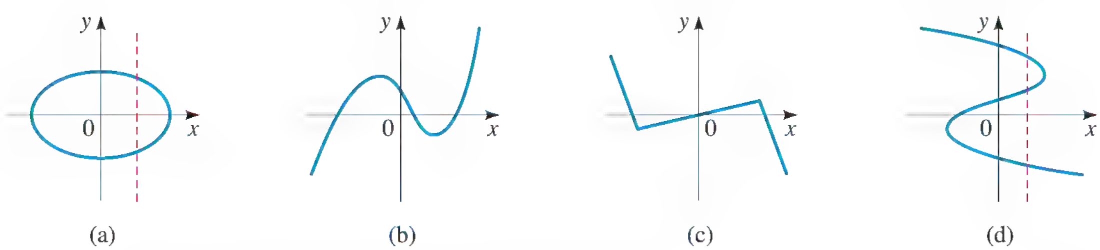



**FIGURA 11**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

## Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación con las variables $x$ y $y$ define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre $y$ y $x$. ¿Esta ecuación define a $y$ como *función* de $x$? Para saberlo, despejamos $y$ y obtenemos

$$y = x^2$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de $y$ por cada valor de $x$. Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x)= x^2$$

Pero no toda ecuación define a $y$ como función de $x$, como lo muestra el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a $y$ como función de $x$?

**(a)** $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Despejando $y$ en términos de $x$ tendremos

$$y - x^2 = 2$$
$$y = x^2 + 2 \quad \text{Sume } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de $y$ por cada valor de $x$, de modo que define a $y$ como función de $x$. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

**(b)** Intentamos despejar $y$ en términos de $x$:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y^2 = 4 - x^2 \quad \text{Reste } x^2$$
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \quad \text{Tome raíces cuadradas}$$

La última ecuación da dos valores de $y$ por un valor dado de $x$. Entonces, la ecuación no define a $y$ como una función de $x$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **61**

Las gráficas de las ecuaciones del Ejemplo 9 se ilustran en la Figura 12. La Prueba de la Recta Vertical muestra gráficamente que la ecuación del Ejemplo 9(a) define una función, pero la ecuación del Ejemplo 9(b) no la define.

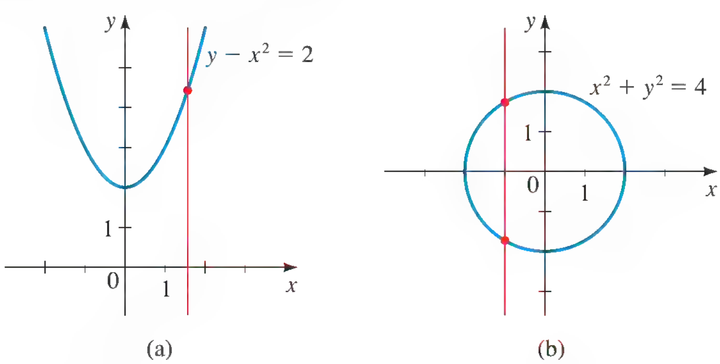
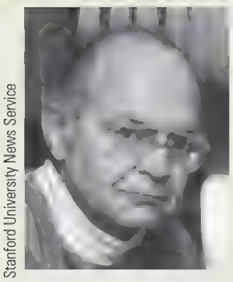



**FIGURA 12**




**DONALD KNUTH** nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Hoy en día, desde luego, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando todavía era estudiante graduado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming*.

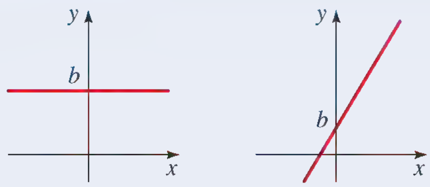
Knuth es famoso por su invento del ENTRA, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como Profesor Adjunto de la Academia de Ciencias de Francia, y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias en 1979.

La tabla siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

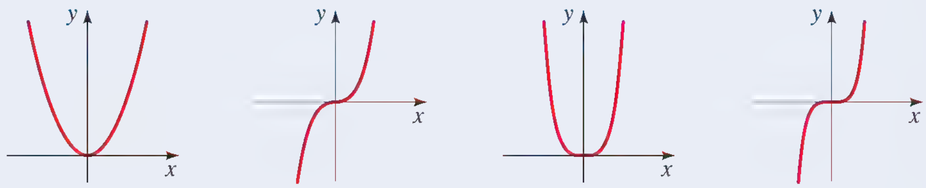
## ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

**Funciones lineales**
$f(x) = mx + b$



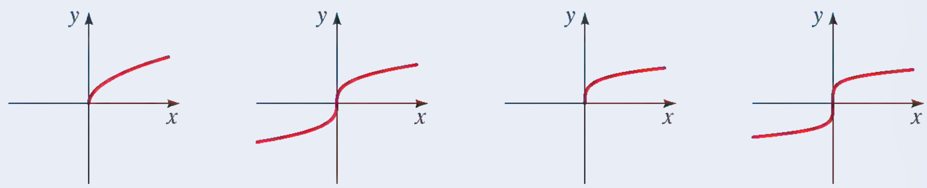
$f(x) = b$ $\quad$ $f(x) = mx + b$

**Funciones potencia**
$f(x) = x^n$



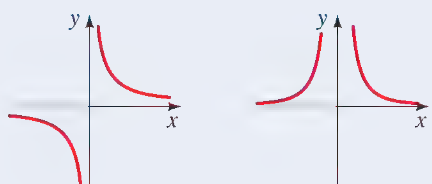
$f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^4$ $\quad$ $f(x) = x^5$

**Funciones raíz**
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



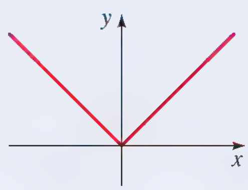
$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $\quad$ $f(x) = \sqrt[5]{x}$

**Funciones recíprocas**
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$



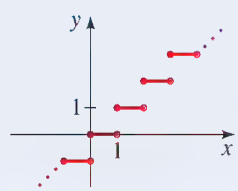
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

**Función valor absoluto**
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

**Función entero mayor**
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

## 2.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

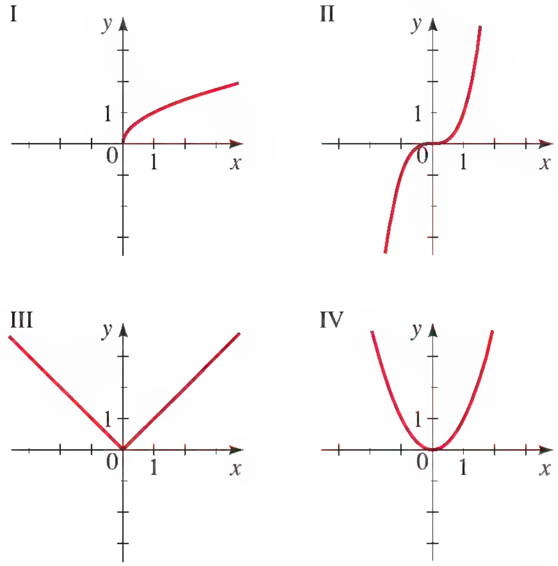
**1.** Para graficar la función *f*, localizamos los puntos (*x*,_) en un plano de coordenadas. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos (*x*,_). Por lo tanto, el punto (2,___) está sobre la gráfica de *f*. La altura de la gráfica de *f* arriba del eje *x* cuando $x = 2$ es ____.

**2.** Si $f(2) = 3$, entonces el punto (2,___) está sobre la gráfica de *f*.

**3.** Si el punto (2, 3) está sobre la gráfica de $f$, entonces $f(2) =$ ____.

**4.** Relacione la función con su gráfica.

**(a)** $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = x^3$
**(c)** $f(x) = \sqrt{x}$ **(d)** $f(x) = |x|$



**30.** $g(x) = x^2 - x - 20$
**(a)** $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
**(b)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
**(c)** $[-7, 7]$ por $[-25, 20]$
**(d)** $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

**31.** $h(x) = x^3 - 5x - 4$
**(a)** $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
**(b)** $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
**(c)** $[-3, 3]$ por $[-10, 5]$
**(d)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

**32.** $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$
**(a)** $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$
**(b)** $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
**(c)** $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
**(d)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

**33-46** ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

**33.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**34.** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**35.** $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**36.** $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

**37.** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**38.** $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

**39.** $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**40.** $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**41.** $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

**42.** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**43.** $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

**44.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

**45.** $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**46.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

## HABILIDADES

**5-28** ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

**5.** $f(x) = 2$ **6.** $f(x) = -3$

**7.** $f(x) = 2x - 4$ **8.** $f(x) = 6 - 3x$

**9.** $f(x) = -x + 3, \quad -3 \leq x \leq 3$

**10.** $f(x) = \dfrac{x - 3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 5$

**11.** $f(x) = -x^2$ **12.** $f(x) = x^2 - 4$

**13.** $h(x) = 16 - x^2$ **14.** $g(x) = (x - 3)^2$

**15.** $g(x) = x^3 - 8$ **16.** $g(x) = (x + 2)^3$

**17.** $g(x) = x^2 - 2x$ **18.** $h(x) = 4x^2 - x^4$

**19.** $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ **20.** $f(x) = \sqrt{x + 4}$

**21.** $g(x) = -\sqrt{x}$ **22.** $g(x) = \sqrt{-x}$

**23.** $H(x) = |2x|$ **24.** $H(x) = |x + 1|$

**25.** $G(x) = |x| + x$ **26.** $G(x) = |x| - x$

**27.** $f(x) = |2x - 2|$ **28.** $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

**29-32** ■ Grafique la función en cada uno de los rectángulos de vista dados, y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

**29.** $f(x) = 8x - x^2$
**(a)** $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
**(b)** $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
**(c)** $[-2, 10]$ por $[-5, 20]$
**(d)** $[-10, 10]$ por $[-100, 100$

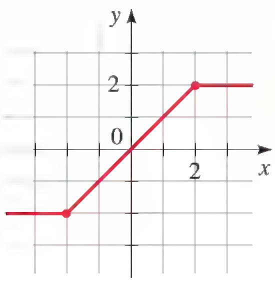
**47-48** ■ Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, pág. 155.)

**47.** $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

**48.** $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

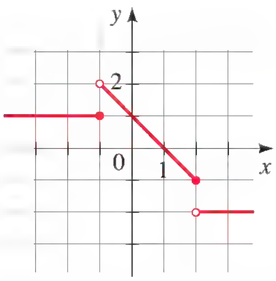
**49-50** ■ Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

**49.**



$f(x) = \begin{cases} ___ & \text{si } x < -2 \\ ___ & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ ___ & \text{si } x > 2 \end{cases}$

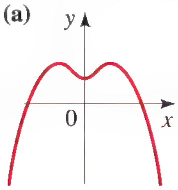
**50.**



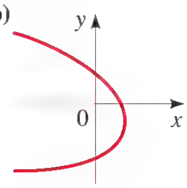
$f(x) = \begin{cases} ___ & \text{si } x \le -1 \\ ___ & \text{si } -1 < x \le 2 \\ ___ & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**51-52** ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de $x$.

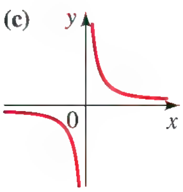
**51.** **(a)**



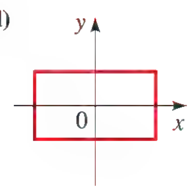
**(b)**



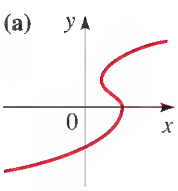
**(c)**



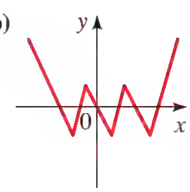
**(d)**



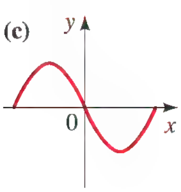
**52.** **(a)**



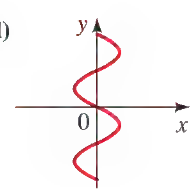
**(b)**



**(c)**

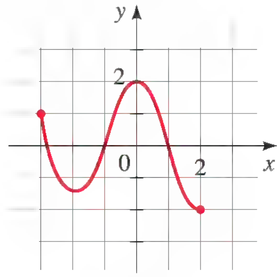


**(d)**

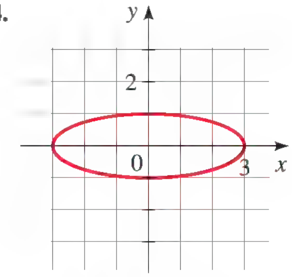


**53-56** ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de $x$. Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

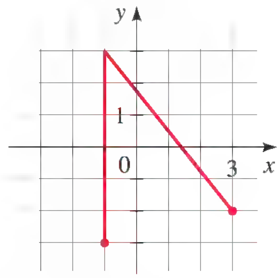
**53.**



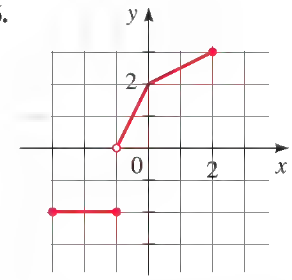
**54.**



**55.**



**56.**



**57-68** ■ Determine si la ecuación define $y$ como función de $x$. (Vea Ejemplo 9.)

**57.** $x^2 + 2y = 4$

**58.** $3x + 7y = 21$

**59.** $x = y^2$

**60.** $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

**61.** $x + y^2 = 9$

**62.** $x^2 + y = 9$

**63.** $x^2y + y = 1$

**64.** $\sqrt{x} + y = 12$

**65.** $2|x| + y = 0$

**66.** $2x + |y| = 0$

**67.** $x = y^3$

**68.** $x = y^4$

**69-74** ■ Nos dan una familia de funciones. En las partes (a) y (b) grafique en el rectángulo de vista indicado todos los miembros de la familia dados. En la parte (c) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.

**69.** $f(x) = x^2 + c$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $c$?

**70.** $f(x) = (x - c)^2$
- **(a)** $c = 0, 1, 2, 3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -1, -2, -3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $c$?

**71.** $f(x) = (x - c)^3$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $c$?

**72.** $f(x) = cx^2$
- **(a)** $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $c$?

**73.** $f(x) = x^c$
- **(a)** $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$
- **(b)** $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $c$?

**74.** $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

**(a)** $n = 1, 3$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$
**(b)** $n = 2, 4$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$
**(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de $n$?

**75-78** ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

**75.** El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

**76.** El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

**77.** La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

**78.** La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

## APLICACIONES

**79. Globo de meteorología** Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso $T$ de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde $T$ y $r$ se miden en centímetros. Grafique la función $T$ para valores de $r$ entre 10 y 100.

**80. Potencia generada por una turbina de viento** La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia $P$ producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde $P$ se mide en watts (W) y $v$ se mide en metros por segundo (m/s). Grafique la función $P$ para velocidades de viento entre 1 m/s y 10 m/s.

**81. Tarifas de una empresa generadora de energía eléctrica** Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de \$6.00 por mes, más \$0.10 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y \$0.06 por kWh por todo lo consumido de más de 300 kWh. Suponga que un cliente usa $x$ kWh de electricidad en un mes.

**(a)** Exprese el costo mensual $E$ como una función de $x$ definida por tramos.
**(b)** Grafique la función $E$ para $0 \le x \le 600$.

**82. Función de un taxi** Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo $C$ (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia $x$ recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

**83. Tarifas postales** La tarifa nacional de portes por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 44 centavos por la primera onza (o menos), más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el porte $P$ como una función definida por partes del peso $x$ de una carta, con $0 < x \le 3.5$, y trace la gráfica de esta función.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**84. ¿Cuándo una gráfica representa a una función?** Para todo entero $n$, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, es decir, $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no es* la gráfica de una función de $x$. ¿La gráfica de $x = y^3$ es una gráfica de la función de $x$? Si es así, ¿de qué función de $x$ es la gráfica? Determine para qué enteros $n$ la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de $x$.

**85. Funciones escalón** En el Ejemplo 7 y los Ejercicios 82 y 83 nos dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que tales funciones reciban el nombre de *funciones escalón*, porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

**86. Funciones escalón alargadas** Trace gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si $n$ es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

**87. Gráfica del valor absoluto de una función**

**(a)** Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de $f$ y $g$?

**(b)** Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de $f$ y $g$?

**(c)** En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo están relacionadas las gráficas de $f$ y $g$? Trace gráficas para ilustrar su respuesta.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Relaciones y funciones**

En este proyecto exploramos el concepto de función al compararlo con el concepto de una relación. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 2.3 INFORMACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Valores de una función: dominio y rango ▶ Funciones crecientes y decrecientes ▶ Valores máximo y mínimo locales de una función

Numerosas propiedades de una función se obtienen más fácilmente de una gráfica que de la regla que describe la función. Veremos en esta sección cómo una gráfica nos dice si los valores de una función son crecientes o decrecientes, así como también dónde están los valores máximo y mínimo de una función.

## ▼ Valores de una función: dominio y rango

Una gráfica completa de una función contiene toda la información acerca de una función, porque la gráfica nos dice cuáles valores de entrada corresponden a cuáles valores de salida. Para analizar la gráfica de una función, debemos recordar que *la altura de la gráfica es el valor de la función*. Entonces, podemos leer los valores de una función a partir de su gráfica.

### EJEMPLO 1 | Hallar los valores de una función a partir de una gráfica

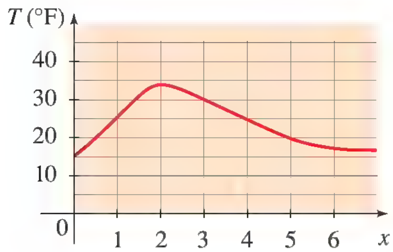



**FIGURA 1** Función temperatura

La función $T$ graficada en la Figura 1 da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.

**(a)** Encuentre $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

**(b)** ¿Cuál es mayor, $T(2)$ o $T(4)$?

**(c)** Encuentre el (los) valor(es) de $x$ para los que $T(x) = 25$.

**(d)** Encuentre el (los) valor(es) de $x$ para los que $T(x) \geq 25$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $T(1)$ es la temperatura a la 1:00 p.m. Está representada por la altura de la gráfica arriba del eje $x$ en $x = 1$. Entonces, $T(1) = 25$. Análogamente, $T(3) = 30$ y $T(5) = 20$.

**(b)** Como la gráfica es más alta en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es mayor que $T(4)$.

**(c)** La altura de la gráfica es 25 cuando $x$ es 1 y cuando $x$ es 4. En otras palabras, la temperatura es 25 a la 1:00 p.m. y a las 4:00 p.m.

**(d)** La gráfica es más alta de 25 para $x$ entre 1 y 4. En otras palabras, la temperatura era 25 o mayor entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

La gráfica de una función nos ayuda a representar el dominio y rango de la función en el eje $x$ y eje $y$, como se ve en la figura 2.

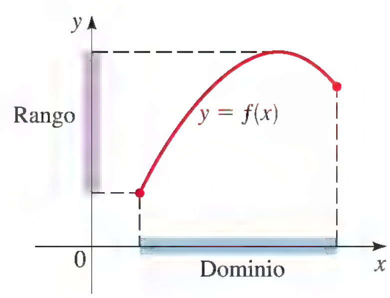



**FIGURA 2** Dominio y rango de $f$

**EJEMPLO 2 | Hallar el dominio y rango a partir de una gráfica**

**(a)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

**(b)** Encuentre el dominio y rango de $f$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica se muestra en la Figura 3.

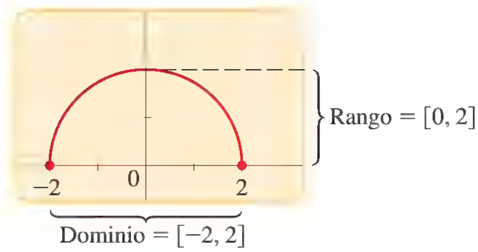



**FIGURA 3** Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

**(b)** De la gráfica de la Figura 3 vemos que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

## Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la Figura 4 sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de $A$ a $B$, baja de $B$ a $C$ y sube otra vez de $C$ a $D$. Se dice que la función $f$ es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

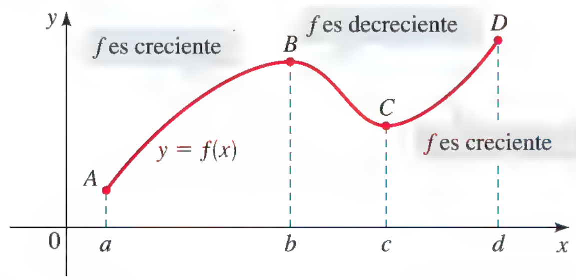


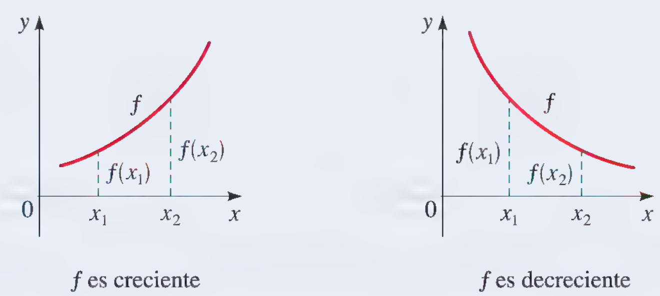

**FIGURA 4** $f$ es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$. $f$ es decreciente en $[b, c]$.

Tenemos la siguiente definición.

**DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES**

$f$ es **creciente** en un intervalo $I$ si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $I$.

$f$ es **decreciente** en un intervalo $I$ si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en $I$.



## EJEMPLO 3 | Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la Figura 5 da el peso $W$ de una persona a la edad $x$. Determine los intervalos en los que la función $W$ es creciente y en los que es decreciente.

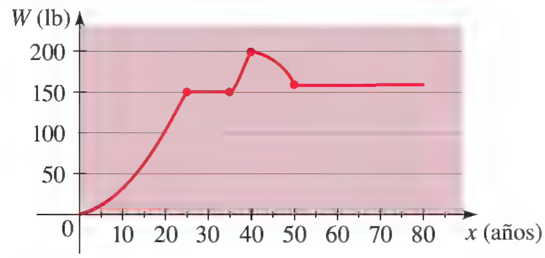



**FIGURA 5** El peso como función de la edad

**SOLUCIÓN** La función $W$ es creciente en $[0, 25]$ y $[35, 40]$. Es decreciente en $[40, 50]$. La función $W$ es constante (ni creciente ni decreciente) en $[25, 30]$ y $[50, 80]$. Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

## EJEMPLO 4 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

**(a)** Trace la gráfica de la función $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$.

**(b)** Encuentre el dominio y rango de $f$.

**(c)** Encuentre los intervalos en los que $f$ crece y decrece.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la Figura 6.

**(b)** El dominio de $f$ es $\mathbb{R}$ porque $f$ está definida para todos los números reales. Usando la función TRACE de la calculadora, encontramos que el valor más alto de $f(2) = 32$. Por lo tanto, el rango de $f$ es $(-\infty, 32]$.

**(c)** De la gráfica vemos que $f$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, 2]$ y es creciente en $[-1, 0]$ y $[2, \infty)$.

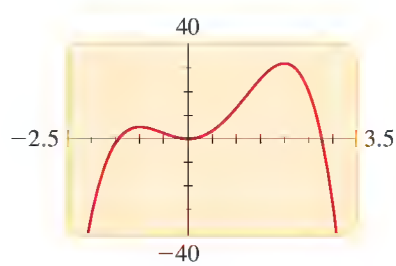



**FIGURA 6** Gráfica de $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23** ■

**EJEMPLO 5 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece**

**(a)** Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

**(b)** Encuentre el dominio y rango de la función.

**(c)** Encuentre los intervalos en los que $f$ crece y decrece.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos una calculadora graficadoras para trazar la gráfica en la Figura 7.

**(b)** De la gráfica observamos que el dominio de $f$ es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.

**(c)** De la gráfica vemos que $f$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

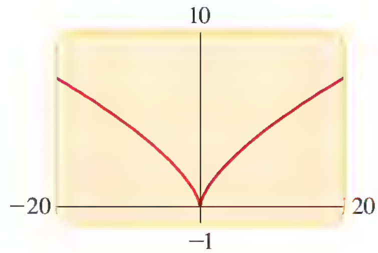



**FIGURA 7** Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

## Valores máximo y mínimo locales de una función

Hallar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desearíamos hallar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre el modelado*: *Modelado con funciones* en las páginas 213-222 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.

### MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN

**1.** El valor de una función $f(a)$ es un **valor máximo local** de $f$ si

$$f(a) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contenga a $a$.)

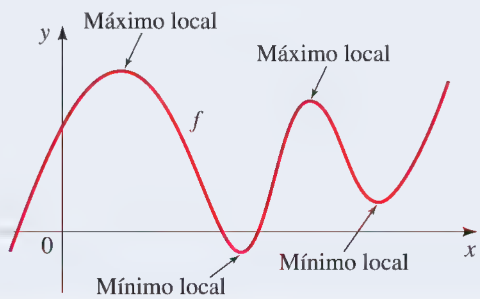
En este caso decimos que $f$ tiene un **máximo local** en $x = a$.

**2.** El valor de la función $f(a)$ es un **mínimo local** de $f$ si

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contenga a $a$.)

En este caso decimos que $f$ tiene un **mínimo local** en $x = a$.



Podemos hallar los valores máximo y mínimo locales de una función usando una calculadora graficadora.

Si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de $f$ *dentro del* rectángulo de vista (no en el borde), entonces el número $f(a)$ es un valor máximo local de $f$ (vea Figura 8). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números $x$ que sean cercanos a $a$.

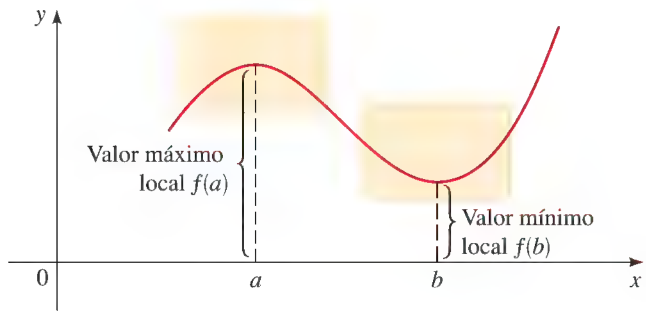



**FIGURA 8**

Análogamente, si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de $f$ dentro del rectángulo de vista, entonces el número $f(b)$ es un valor mínimo local de $f$. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para todos los números $x$ que sean cercanos a $b$.

## EJEMPLO 6 | Hallar máximos y mínimos locales para una gráfica

Encuentre los valores máximo y mínimo local de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, correctos a tres lugares decimales.

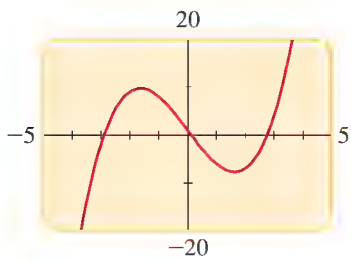



**FIGURA 9** Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

**SOLUCIÓN** La gráfica de $f$ se muestra en la Figura 9. Parece haber un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

Primero busquemos las coordenadas del punto máximo local. Hacemos acercamiento (zoom) para ampliar el área cerca de este punto, como se ve en la Figura 10. Con el uso de la función TRACE de la calculadora graficadora, movemos el cursor a lo largo de la curva y observamos cómo cambian las coordenadas $y$. El valor máximo local de $y$ es 9.709 y este valor ocurre cuando $x$ es $-1.633$ correcto a tres lugares decimales.

Localizamos el valor mínimo en una forma similar. Al hacer acercamiento en el rectángulo de vista como se ve en la Figura 11, encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente $-7.709$, y este valor se presenta cuando $x \approx 1.633$.

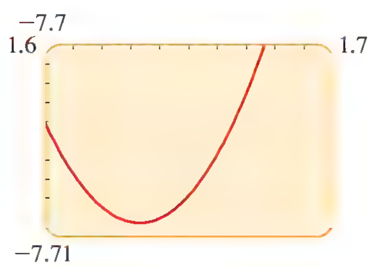



**FIGURA 10**

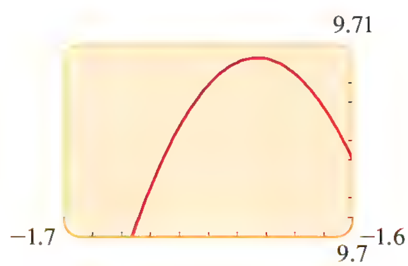



**FIGURA 11**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Los comandos `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-83 o TI-84 son otro método para hallar valores extremos de funciones. Usamos este método en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 7 | Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde $t$ se mide en años desde la mitad del año 1990, de modo que $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ está a escala para que $I(3) = 100$. Estime el tiempo cuando el alimento fue más costoso durante el período 1990-2000.

**SOLUCIÓN** La gráfica de $I$ como función de $t$ se muestra en la Figura 12(a). Parece haber un máximo entre $t = 4$ y $t = 7$. Usando el comando **maximum**, como se ve en la Figura 12(b), observamos que el valor máximo de $I$ es alrededor de 100.38 y se presenta cuando $t \approx 5.15$, que corresponde a agosto de 1995.

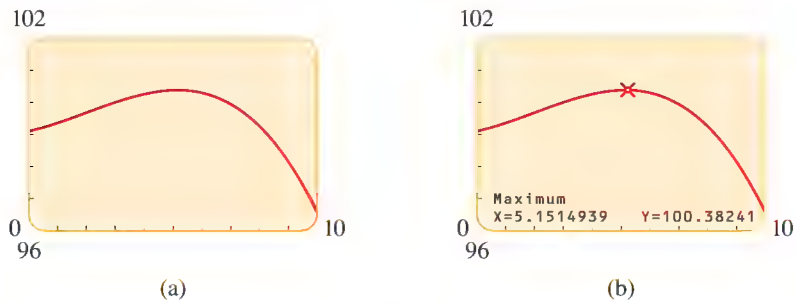


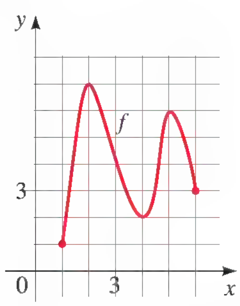

**FIGURA 12**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## 2.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-4** ■ Estos ejercicios se refieren a la gráfica de la función $f$ que se muestra a continuación.




**1.** Para hallar el valor de una función $f(x)$ a partir de la gráfica de $f$, encontramos la altura de la gráfica arriba del eje $x$ en $x =$ ______. De la gráfica de $f$ vemos que $f(3) =$ ______.

**2.** El dominio de la función $f$ es todos los valores de ___ de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores ____ correspondientes. De la gráfica de $f$ vemos que el dominio de $f$ es el intervalo _____ y el rango de $f$ es el intervalo _____.

**3. (a)** Si $f$ es creciente en un intervalo, entonces los valores $y$ de los puntos en la gráfica ____ cuando aumentan los valores $x$. De la gráfica de $f$ vemos que $f$ es creciente en los intervalos _____ y ______.

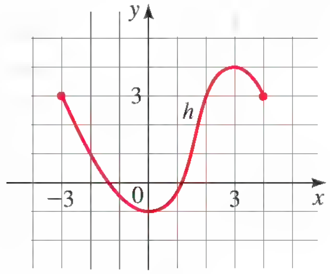
**(b)** Si $f$ es decreciente en un intervalo, entonces los valores $y$ de los puntos sobre la gráfica _____cuando aumentan los valores $x$. De la gráfica de $f$ vemos que $f$ es decreciente en los intervalos _____ y _____.

**4. (a)** El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de $f$ si $f(a)$ es el ______valor de $f$ en algún intervalo que contenga a $a$. De la gráfica de $f$ vemos que un valor máximo local de $f$ es ____ y que este valor se presenta cuando $x$ es _____.

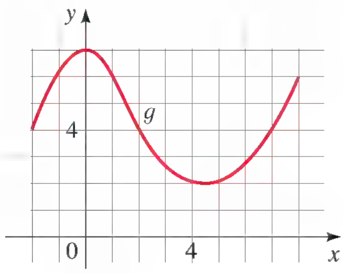
**(b)** El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de $f$ si $f(a)$ es el ______valor de $f$ en algún intervalo que contenga a $a$. De la gráfica de $f$ vemos que un valor mínimo local de $f$ es ____ y que este valor se presenta cuando $x$ es _____.

## HABILIDADES

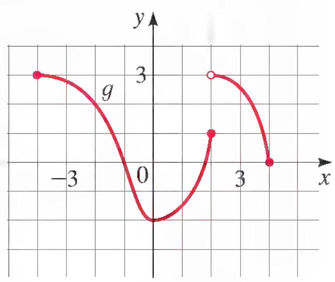
**5.** Se da la gráfica de una función $h$.
**(a)** Encuentre $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.
**(b)** Encuentre el dominio y rango de $h$.
**(c)** Encuentre los valores de $x$ para los cuales $h(x) = 3$.
**(d)** Encuentre los valores de $x$ para los cuales $h(x) \leq 3$.



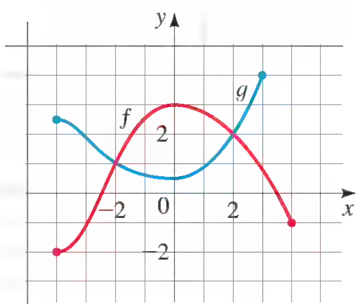

**6.** Se da la gráfica de una función $h$.
**(a)** Encuentre $g(-2)$, $g(0)$ y $g(7)$.
**(b)** Encuentre el dominio y rango de $g$.
**(c)** Encuentre los valores de $x$ para los cuales $g(x) = 4$.
**(d)** Encuentre los valores de $x$ para los cuales $g(x) > 4$.




**7.** Se da la gráfica de una función $g$.
**(a)** Encuentre $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.
**(b)** Encuentre el dominio y rango de $g$.




**8.** Se dan las gráficas de las funciones $f$ y $g$.
**(a)** ¿Cuál es mayor, $f(0)$ o $g(0)$?
**(b)** ¿Cuál es mayor, $f(-3)$ o $g(-3)$?
**(c)** ¿Para cuáles valores de $x$ es $f(x) = g(x)$?




**9-18** ■ Se da una función $f$. **(a)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f$. **(b)** Encuentre el dominio y rango de $f$ a partir de la gráfica.

**9.** $f(x) = x - 1$ **10.** $f(x) = 2(x + 1)$

**11.** $f(x) = 4, \quad 1 \leq x \leq 3$ **12.** $f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 5$

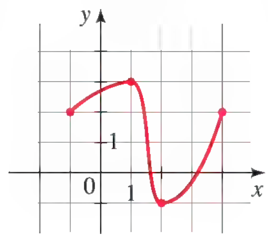
**13.** $f(x) = 4 - x^2$ **14.** $f(x) = x^2 + 4$

**15.** $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ **16.** $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

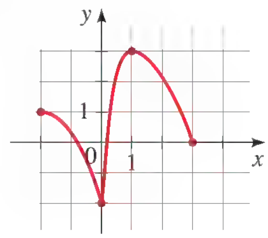
**17.** $f(x) = \sqrt{x - 1}$ **18.** $f(x) = \sqrt{x + 2}$

**19-22** ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es **(a)** creciente y **(b)** decreciente.

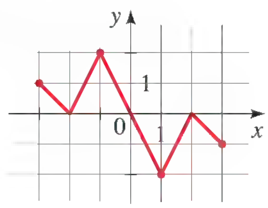
**19.**



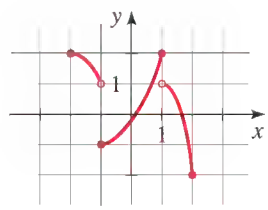

**20.**




**21.**




**22.**




**23-30** ■ Se da una función $f$. **(a)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f$. **(b)** Exprese aproximadamente los intervalos en los que $f$ es creciente y en los que $f$ es decreciente.

**23.** $f(x) = x^2 - 5x$ **24.** $f(x) = x^3 - 4x$

**25.** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **26.** $f(x) = x^4 - 16x^2$

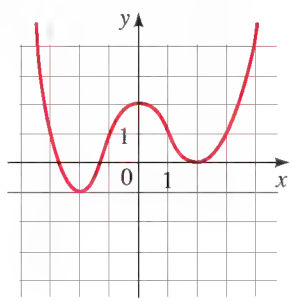
**27.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

**28.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

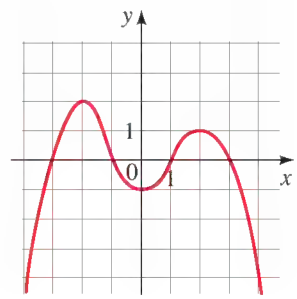
**29.** $f(x) = x^{2/5}$ **30.** $f(x) = 4 - x^{2/3}$

**31-34** ■ Se da la gráfica de una función. **(a)** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de $x$ en el que ocurre cada uno. **(b)** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente.

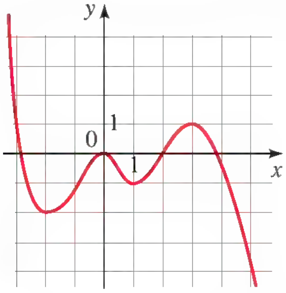
**31.**



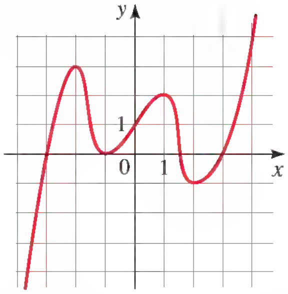

**32.**



33.



34.



**35-42** ■ Se da una función. **(a)** Encuentre todos los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de $x$ en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.
**(b)** Encuentre los intervalos en los que la función es creciente y en los que la función es decreciente. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

**35.** $f(x) = x^3 - x$

**36.** $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

**37.** $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

**38.** $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

**39.** $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

**40.** $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

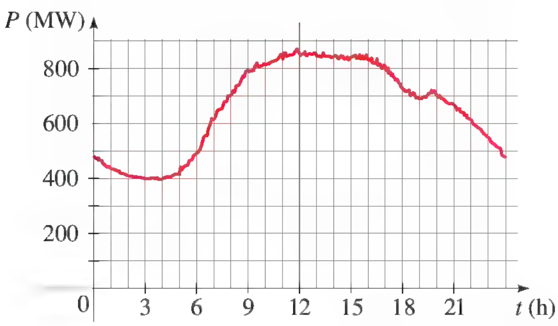
**41.** $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

**42.** $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

## APLICACIONES

**43. Consumo de energía eléctrica** La figura muestra el consumo de energía eléctrica en San Francisco para el 19 de septiembre de 1996 ($P$ se mide en megawatts; $t$ se mide en horas empezando a la medianoche).

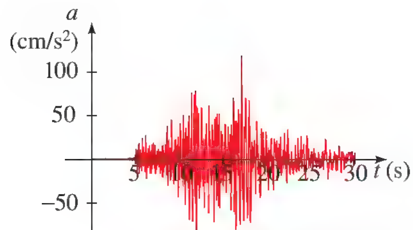
**(a)** ¿Cuál fue el consumo de energía eléctrica a las 6:00 a.m.? ¿A las 6:00 p.m.?
**(b)** ¿Cuándo fue mínimo el consumo de energía eléctrica?
**(c)** ¿Cuándo fue máximo el consumo de energía eléctrica?



Fuente: Pacific Gas & Electric

**44. Terremoto** La gráfica muestra la aceleración vertical del suelo por el terremoto Northridge de 1994 en Los Ángeles, medido por un sismógrafo. (Aquí $t$ representa el tiempo en segundos.)

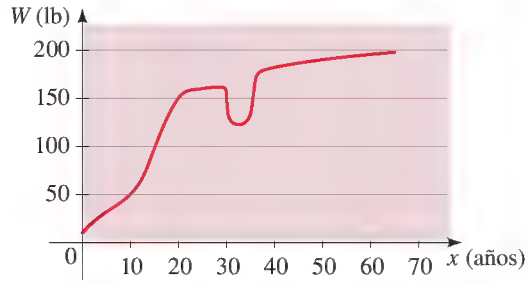
**(a)** ¿En qué tiempo $t$ el terremoto hizo los primeros movimientos observables de la tierra?
**(b)** ¿En qué tiempo $t$ pareció terminar el terremoto?
**(c)** ¿En qué tiempo $t$ alcanzó su intensidad máxima el terremoto?



Fuente: California Department of Mines and Geology

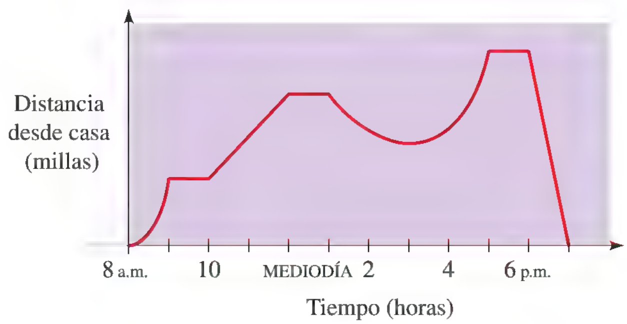
**45. Función de peso** La gráfica da el peso $W$ de una persona a la edad $x$.

**(a)** Determine los intervalos en los que la función $W$ es creciente y aquellos en los que es decreciente.
**(b)** ¿Qué piensa usted que ocurrió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



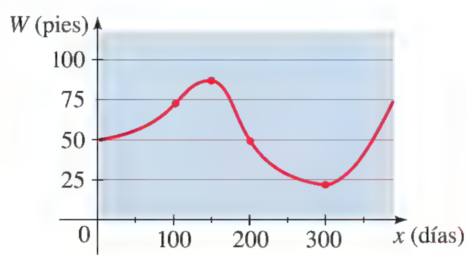
**46. Función de distancia** La gráfica da la distancia de un representante de ventas desde su casa como función del tiempo en cierto día.

**(a)** Determine los intervalos (tiempo) en los que su distancia desde casa fue creciente y aquellos en los que fue decreciente.
**(b)** Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de sus viajes en este día.



**47. Niveles cambiantes de agua** La gráfica muestra la profundidad del agua $W$ en un depósito en un período de un año, como función del número de días $x$ desde el principio del año.

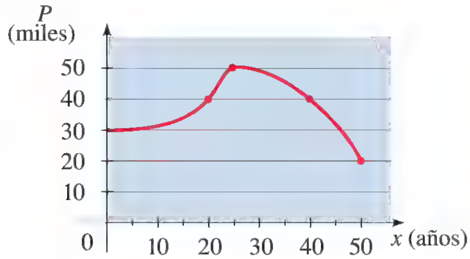
**(a)** Determine los intervalos en los que la función $W$ es creciente y en los que es decreciente.
**(b)** ¿En qué valor de $x$ alcanza $W$ un máximo local? ¿Un mínimo local?



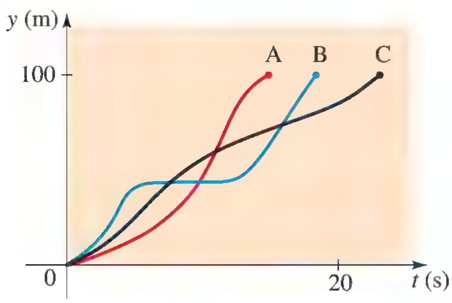
**48. Aumento y disminución de población** La gráfica siguiente muestra la población $P$ en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable $x$ representa los años desde 1950.

**(a)** Determine los intervalos en los que la función $P$ es creciente y aquellos en los que es decreciente.

**(b)** ¿Cuál fue la población máxima, y en qué año se alcanzó?




**49. Carrera de obstáculos** Tres atletas compiten en una carrera de 100 metros con vallas. La gráfica describe la distancia corrida como función del tiempo para cada uno de los atletas. Describa verbalmente lo que indica la gráfica acerca de la carrera. ¿Quién ganó la carrera? ¿Cada uno de los atletas terminó la carrera? ¿Qué piensa usted que le ocurrió al corredor B?




**50. Gravedad cerca de la Luna** Podemos usar la Ley de Newton de Gravitación para medir la atracción gravitacional entre la Luna y un estudiante de álgebra en una nave espacial situada a una distancia $x$ sobre la superficie de la Luna:

$$F(x) = \frac{350}{x^2}$$

Aquí $F$ se mide en newtons (N), y $x$ se mide en millones de metros.

**(a)** Grafique la función $F$ para valores de $x$ entre 0 y 10.

**(b)** Use la gráfica para describir el comportamiento de la atracción gravitacional $F$ cuando aumenta la distancia $x$.

**51. Radios de estrellas** Los astrónomos infieren los radios de estrellas con el uso de la Ley de Stefan Boltzmann:

$$E(T) = (5.67 \times 10^{-8})T^4$$

donde $E$ es la energía radiada por unidad de área superficial medida en watts (W) y $T$ es la temperatura absoluta medida en kelvin (K).

**(a)** Grafique la función $E$ para temperaturas $T$ entre 100 K y 300 K.

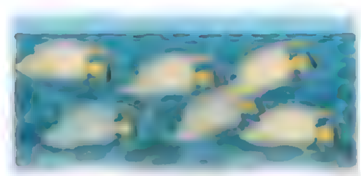
**(b)** Use la gráfica para describir el cambio en energía $E$ cuando la temperatura $T$ aumenta.

**52. Peces migratorios** Un pez nada a una velocidad $v$ con respecto al agua, contra una corriente de 5 mi/h. Usando un modelo matemático de gasto de energía, puede demostrarse que la energía total $E$ requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3\frac{10}{v - 5}$$

Los biólogos piensan que los peces migratorios tratan de reducir al mínimo la energía necesaria para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de $v$ que minimiza la energía necesaria.

NOTA: Este resultado ha sido verificado; los peces migratorios nadan contra una corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.



**53. Ingeniería de carreteras** Una ingeniera de carreteras desea estimar el número máximo de autos que con seguridad puedan viajar por una carretera en particular a una velocidad determinada. Ella supone que cada auto mide 17 pies de largo, viaja a una rapidez $s$, y sigue al auto de adelante a una "distancia segura de seguimiento" para esa rapidez. Ella encuentra que el número $N$ de autos que pueden pasar por cierto punto por minuto está modelado por la función

$$N(s) = \frac{88s}{17 + 17\left(\frac{s}{20}\right)^2}$$

¿A qué rapidez puede viajar con seguridad en esa carretera el máximo número de autos?

**54. Volumen de agua** Entre 0ºC y 30ºC, el volumen $V$ (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura $T$ está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el volumen de 1 kg de agua es mínimo.

**55. Toser** Cuando un cuerpo extraño alojado en la tráquea (garganta) obliga a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba, causando un aumento en presión en los pulmones. Al mismo tiempo, la tráquea se contrae, causando que el aire expulsado se mueva más rápido y aumente la presión sobre el cuerpo extraño. De acuerdo con un modelo matemático de toser, la velocidad $v$ de la corriente de aire que pasa por la tráquea de una persona de tamaño promedio está relacionada con el radio $r$ de la tráquea (en centímetros) por la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2} \le r \le 1$$

Determine el valor de $r$ para el cual $v$ es máxima.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**56. Funciones que son siempre crecientes o decrecientes** Trace gráficas aproximadas de funciones que están definidas para todos los números reales, y que exhiben el comportamiento indicado (o explique por qué el comportamiento es imposible).

**(a)** $f$ es siempre creciente, y $f(x) > 0$ para toda $x$.

**(b)** $f$ es siempre decreciente, y $f(x) > 0$ para toda $x$.

**(c)** $f$ es siempre creciente, y $f(x) < 0$ para toda $x$.

**(d)** $f$ es siempre decreciente, y $f(x) < 0$ para toda $x$.

**57. Máximos y mínimos** En el Ejemplo 7 vimos una situación real en la que el valor máximo de una función es importante. Mencione otras varias situaciones diarias en las que es importante un valor máximo o mínimo.

**58. Reducir al mínimo una distancia** Cuando buscamos un valor mínimo o máximo de una función, a veces es más fácil trabajar con una función más sencilla.

**(a)** Suponga que

$$g(x) = \sqrt{f(x)}$$

donde $f(x) \geq 0$ para toda $x$. Explique por qué los mínimos y máximos locales de $f$ y $g$ se presentan a los mismos valores de $x$.

**(b)** Sea $g(x)$ la distancia entre el punto $(3, 0)$ y el punto $(x, x^2)$ en la gráfica de la parábola $y = x^2$. Exprese $g$ como función de $x$.

**(c)** Encuentre el valor mínimo de la función $g$ que encontró en la parte (b). Use el principio descrito en la parte (a) para simplificar su trabajo.

# 2.4 RAPIDEZ DE CAMBIO PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Rapidez de cambio promedio ▶ Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Las funciones se usan con frecuencia para modelar cantidades que cambian. En esta sección aprendemos a hallar la rapidez a la que cambian los valores de una función cuando cambia la variable de entrada.

## ▼ Rapidez de cambio promedio

Todos estamos familiarizados con el concepto de rapidez: si una persona viaja en auto una distancia de 120 millas en 2 horas, entonces el promedio de rapidez, o rapidez de viaje, es $\frac{120 \text{ mi}}{2 \text{ h}} = 60$ mi/h. Ahora supongamos que usted hace un viaje en auto y registra la distancia recorrida a cada pocos minutos. La distancia $s$ que ha recorrido es una función del tiempo $t$:

$$s(t) = \text{distancia total recorrida en el tiempo } t$$

Graficamos la función $s$ como se ve en la Figura 1. La gráfica muestra que la persona ha recorrido un total de 50 millas después de 1 hora, 75 millas después de 2 horas, 140 millas después de 3 horas, y así sucesivamente. Para hallar su *promedio* de rapidez entre cualesquier dos puntos en el viaje, dividimos la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

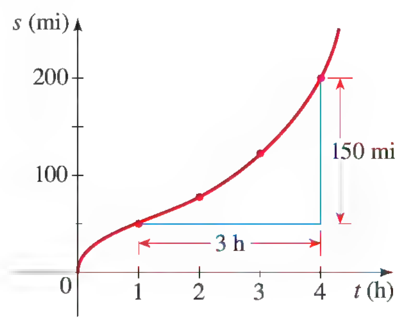



**FIGURA 1**
Promedio de rapidez

Calculemos su promedio de rapidez entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m. El tiempo transcurrido es $4 - 1 = 3$ horas. Para hallar la distancia recorrida, restamos la distancia a la 1:00 p.m. de la distancia a las 4:00 p.m., es decir, $200 - 50 = 150$ millas. Entonces, el promedio de su rapidez es

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{150 \text{ mi}}{3 \text{ h}} = 50 \text{ mi/h}$$

El promedio de rapidez que acabamos de calcular se puede expresar usando notación de funciones:

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{200 - 50}{3} = 50 \text{ mi/h}$$

Observe que el promedio de rapidez es diferente en diferentes intervalos. Por ejemplo, entre las 2:00 p.m. y las 3:00 p.m. encontramos que

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{140 - 75}{1} = 65 \text{ mi/h}$$

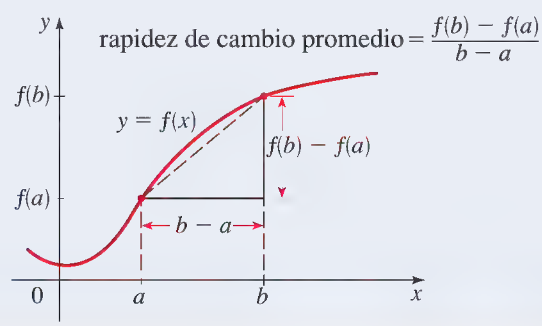
Hallar la rapidez de cambio promedio es importante en innumerables contextos. Por ejemplo, podríamos estar interesados en saber la rapidez con que baja la temperatura del aire cuando una tormenta se aproxima, o la rapidez con la que aumentan los ingresos por la venta de un nuevo producto. Por lo tanto, necesitamos saber cómo determinar la rapidez de cambio promedio de las funciones que modelan estas cantidades. De hecho, el concepto de rapidez de cambio promedio puede definirse para cualquier función.

## RAPIDEZ DE CAMBIO PROMEDIO

La **rapidez de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La rapidez de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de $f$, esto es, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.




## EJEMPLO 1 | Cálculo de la rapidez de cambio promedio

Para la función $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra en la Figura 2, encuentre la rapidez de cambio promedio entre los siguientes puntos:

**(a)** $x = 1$ y $x = 3$ **(b)** $x = 4$ y $x = 7$

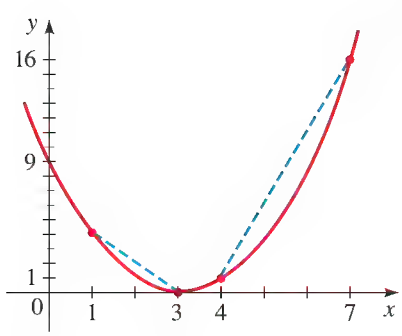



**FIGURA 2** $f(x) = (x - 3)^2$

### SOLUCIÓN

**(a)** Rapidez de cambio promedio

$$= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \qquad \text{Definición}$$

$$= \frac{(3 - 3)^2 - (1 - 3)^2}{3 - 1} \qquad \text{Use } f(x) = (x - 3)^2$$

$$= \frac{0 - 4}{2} = -2$$

**(b)**

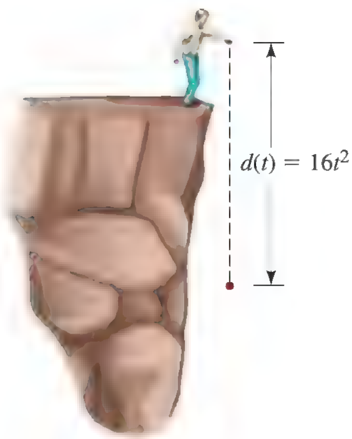
$$\begin{aligned}\text{Rapidez de cambio promedio} &= \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} && \text{Definición} \\ &= \frac{(7-3)^2 - (4-3)^2}{7 - 4} && \text{Use } f(x) = (x-3)^2 \\ &= \frac{16 - 1}{3} = 5\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## EJEMPLO 2 | Promedio de rapidez de un cuerpo en caída

Si un cuerpo se deja caer desde un risco o un edificio alto, entonces la distancia que ha caído después de $t$ segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$. Encuentre su promedio de rapidez (rapidez de cambio promedio) en los siguientes intervalos:

**(a)** Entre 1 s y 5 s **(b)** Entre $t = a$ y $t = a + h$




**Función:** En $t$ segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

### SOLUCIÓN

**(a)**

$$\begin{aligned}\text{Rapidez de cambio promedio} &= \frac{d(5) - d(1)}{5 - 1} && \text{Definición} \\ &= \frac{16(5)^2 - 16(1)^2}{5 - 1} && \text{Use } d(t) = 16t^2 \\ &= \frac{400 - 16}{4} \\ &= 96 \text{ pies/s}\end{aligned}$$

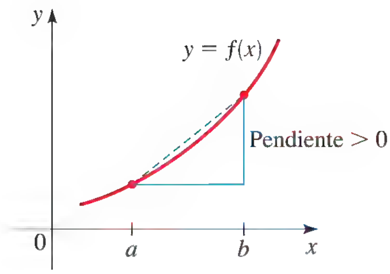
**(b)**

$$\begin{aligned}\text{Rapidez de cambio promedio} &= \frac{d(a+h) - d(a)}{(a+h) - a} && \text{Definición} \\ &= \frac{16(a+h)^2 - 16(a)^2}{(a+h) - a} && \text{Use } d(t) = 16t^2 \\ &= \frac{16(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} && \text{Desarrolla y factorice 16} \\ &= \frac{16(2ah + h^2)}{h} && \text{Simplifique el numerador} \\ &= \frac{16h(2a + h)}{h} && \text{Factorice } h \\ &= 16(2a + h) && \text{Simplifique}\end{aligned}$$

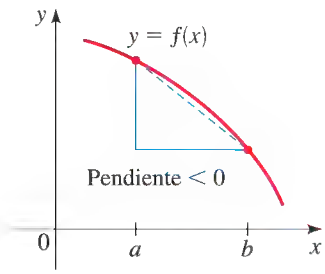
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

La rapidez de cambio promedio calculada en el Ejemplo 2(b) se conoce como un *cociente de diferencias*. En cálculo, usamos cocientes de diferencias para calcular la magnitud de rapidez de cambio *instantáneo*. Un ejemplo de una rapidez de cambio instantáneo es la velocidad indicada en el velocímetro de un auto. Éste cambia de un instante al siguiente cuando cambia la velocidad del auto.

Las gráficas de la Figura 3 muestran que si una función es creciente en un intervalo, entonces la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es positivo, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es negativo.




*f* creciente
Rapidez de cambio promedio positivo




*f* decreciente
Rapidez de cambio promedio negativo

**FIGURA 3**

## EJEMPLO 3 | Rapidez de cambio promedio de temperatura

La tabla siguiente da las temperaturas exteriores observadas por un estudiante de ciencias en un día de primavera. Trace una gráfica de los datos, y encuentre el promedio de rapidez de cambio de temperatura entre las horas siguientes:

**(a)** 8:00 a.m. y 9:00 a.m.
**(b)** 1:00 p.m. y 3:00 p.m.
**(c)** 4:00 p.m. y 7:00 p.m.

| Hora | Temperatura (°F) |
|---|---|
| 8:00 a.m. | 38 |
| 9:00 a.m. | 40 |
| 10:00 a.m. | 44 |
| 11:00 a.m. | 50 |
| 12:00 MEDIODÍA | 56 |
| 1:00 p.m. | 62 |
| 2:00 p.m. | 66 |
| 3:00 p.m. | 67 |
| 4:00 p.m. | 64 |
| 5:00 p.m. | 58 |
| 6:00 p.m. | 55 |
| 7:00 p.m. | 51 |

**SOLUCIÓN** En la Figura 4 se muestra una gráfica de los datos. Con $t$ represente el tiempo, medido en horas desde la medianoche (así, por ejemplo, 2:00 p.m. corresponde a $t = 14$). Defina la función $F$ por

$$F(t) = \text{temperatura en el tiempo } t$$

**(a)** Rapidez de cambio promedio

$$= \frac{\text{temperatura a las 9 a.m.} - \text{temperatura a las 8 a.m.}}{9 - 8}$$

$$= \frac{F(9) - F(8)}{9 - 8} = \frac{40 - 38}{9 - 8} = 2$$

La rapidez de cambio promedio fue 2°F por hora.

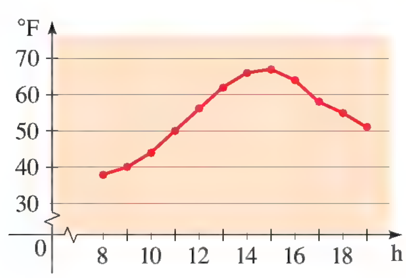



**FIGURA 4**

**(b)** Rapidez de cambio promedio $= \dfrac{\text{temperatura a las 3 p.m.} - \text{temperatura a la 1 p.m.}}{15 - 13}$

$$= \frac{F(15) - F(13)}{15 - 13} = \frac{67 - 62}{2} = 2.5$$

La rapidez de cambio promedio fue 2.5°F por hora.

**(c)** Rapidez de cambio promedio $= \dfrac{\text{temperatura a las 7 p.m.} - \text{temperatura a las 4 p.m.}}{19 - 16}$

$$= \frac{F(19) - F(16)}{19 - 16} = \frac{51 - 64}{3} \approx -4.3$$

La rapidez de cambio promedio fue alrededor de $-4.3$°F por hora durante este intervalo. El signo negativo indica que la temperatura estaba bajando.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Para una función lineal $f(x) = mx + b$ la rapidez de cambio promedio entre cualesquier dos puntos es la misma constante $m$. Esto es consistente con lo que aprendimos en la Sección 1.10 de que la pendiente de una recta $y = mx + b$ es la rapidez de cambio promedio de $y$ con respecto a $x$. Por otra parte, si una función $f$ tiene rapidez de cambio promedio constante, entonces debe ser una función lineal. Nos piden demostrar este dato en el Ejercicio 33. En el siguiente ejemplo encontramos la rapidez de cambio promedio de para una función lineal en particular.

**EJEMPLO 4** | Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante

Sea $f(x) = 3x - 5$. Encuentre la rapidez de cambio promedio de $f$ entre los siguientes puntos.

**(a)** $x = 0$ y $x = 1$
**(b)** $x = 3$ y $x = 7$
**(c)** $x = a$ y $x = a + h$

¿Qué conclusión puede usted sacar de sus respuestas?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Rapidez de cambio promedio $= \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{(3 \cdot 1 - 5) - (3 \cdot 0 - 5)}{1}$

$$= \frac{(-2) - (-5)}{1} = 3$$

**(b)** Rapidez de cambio promedio $= \dfrac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \dfrac{(3 \cdot 7 - 5) - (3 \cdot 3 - 5)}{4}$

$$= \frac{16 - 4}{4} = 3$$

**(c)** Rapidez de cambio promedio $= \dfrac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \dfrac{[3(a + h) - 5] - [3a - 5]}{h}$

$$= \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

Parece que la rapidez de cambio promedio es siempre 3 para esta función. De hecho, la parte (c) demuestra que la rapidez de cambio entre cualesquier dos puntos arbitrarios $x = a$ y $x = a + h$ es 3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

# 2.4 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Si usted hace un viaje de 100 millas en 2 horas, entonces su promedio de velocidad del viaje es

$$\text{promedio de rapidez} = \frac{____}{____} = ______$$

**2.** La rapidez de cambio promedio de una función $f$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{____}{____}$$

**3.** La rapidez de cambio promedio de una función $f(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = b$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{____}{____} = ______$$

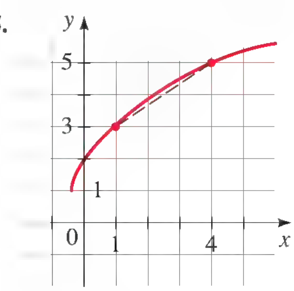
**4. (a)** La rapidez de cambio promedio de una función $f$ entre $x = a$ y $x = b$ es la pendiente de la recta _____ entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

**(b)** La rapidez de cambio promedio de la función lineal $f(x) = 3x + 5$ entre cualesquier dos puntos es _____.

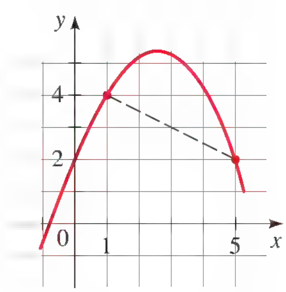
## HABILIDADES

**5-8** ■ Se da la gráfica de una función. Determine la rapidez de cambio promedio de la función entre los valores de la variable dados.

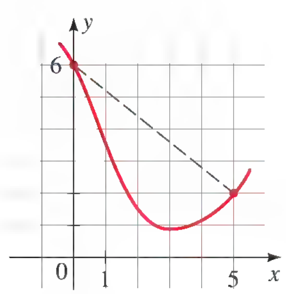
**5.**



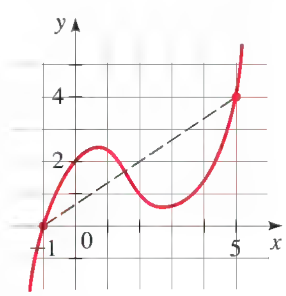

**6.**




**7.**




**8.**




**9-20** ■ Se da la gráfica de una función. Determine la rapidez de cambio promedio de la función entre los valores de la variable dados.

**9.** $f(x) = 3x - 2;\quad x = 2, x = 3$

**10.** $g(x) = 5 + \frac{1}{2}x;\quad x = 1, x = 5$

**11.** $h(t) = t^2 + 2t;\quad t = -1, t = 4$

**12.** $f(z) = 1 - 3z^2;\quad z = -2, z = 0$

**13.** $f(x) = x^3 - 4x^2;\quad x = 0, x = 10$

**14.** $f(x) = x + x^4;\quad x = -1, x = 3$

**15.** $f(x) = 3x^2;\quad x = 2, x = 2 + h$

**16.** $f(x) = 4 - x^2;\quad x = 1, x = 1 + h$

**17.** $g(x) = \dfrac{1}{x};\quad x = 1, x = a$

**18.** $g(x) = \dfrac{2}{x + 1};\quad x = 0, x = h$

**19.** $f(t) = \dfrac{2}{t};\quad t = a, t = a + h$

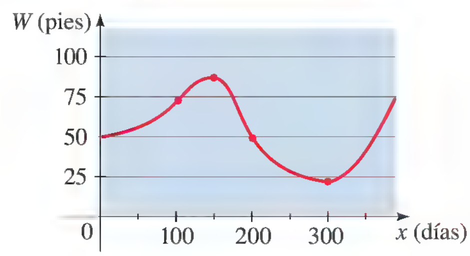
**20.** $f(t) = \sqrt{t};\quad t = a, t = a + h$

**21-22** ■ Se da una función lineal. **(a)** Encuentre la rapidez de cambio promedio de la función entre $x = a$ y $x = a + h$. **(b)** Demuestre que la rapidez de cambio promedio es igual que la pendiente de la recta.

**21.** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **22.** $g(x) = -4x + 2$

## APLICACIONES

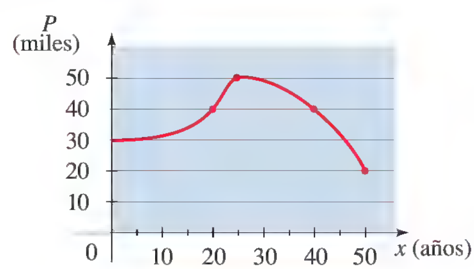
**23. Niveles cambiantes de agua** La gráfica muestra la profundidad del agua $W$ en un depósito en un período de un año, como función del número de días $x$ desde el principio del año. ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de $W$ entre $x = 100$ y $x = 200$?




**24. Aumento y disminución de población** La gráfica siguiente muestra la población $P$ en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable $x$ representa los años desde 1950.

**(a)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de $P$ entre $x = 20$ y $x = 40$?

**(b)** Interprete el valor de la rapidez de cambio promedio que encontró en la parte (a).



**25. Aumento y disminución de población** La tabla siguiente da la población en una pequeña comunidad costera para el período 1997-2006. Las cifras mostradas son para enero 1 de cada año.

**(a)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de población entre 1998 y 2001?
**(b)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de población entre 2002 y 2004?
**(c)** ¿Para cuál período fue creciente la población?
**(d)** ¿Para cuál período fue decreciente la población?

| Año | Población |
|---|---|
| 1997 | 624 |
| 1998 | 856 |
| 1999 | 1336 |
| 2000 | 1578 |
| 2001 | 1591 |
| 2002 | 1483 |
| 2003 | 994 |
| 2004 | 826 |
| 2005 | 801 |
| 2006 | 745 |

**26. Rapidez de carrera** Un hombre está corriendo alrededor de una pista circular que mide 200 m de circunferencia. Un observador usa un cronómetro para registrar el tiempo del corredor al final de cada vuelta, obteniendo los datos de la tabla siguiente.

**(a)** ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre (rapidez) entre 68 y 152 s?
**(b)** ¿Cuál fue el promedio de velocidad del hombre entre 263 y 412 s?
**(c)** Calcule la velocidad del hombre para cada vuelta. ¿Está reduciéndola, aumentándola o ninguna de éstas?

| Tiempo (s) | Distancia (m) |
|---|---|
| 32 | 200 |
| 68 | 400 |
| 108 | 600 |
| 152 | 800 |
| 203 | 1 000 |
| 263 | 1 200 |
| 335 | 1 400 |
| 412 | 1 600 |

**27. Ventas de reproductores de CD** La tabla siguiente muestra el número de reproductores de CD vendidos en una pequeña tienda de aparatos electrónicos en los años 1993-2000.

**(a)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1993 y 2003?
**(b)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1993 y 1994?
**(c)** ¿Cuál fue la rapidez de cambio promedio de ventas entre 1994 y 1996?
**(d)** ¿Entre cuáles dos años sucesivos las ventas de reproductores de CD *aumentaron* más rápidamente? ¿*Disminuyeron* más rápidamente?

| Año | Reproductores de CD vendidos |
|---|---|
| 1993 | 512 |
| 1994 | 520 |
| 1995 | 413 |
| 1996 | 410 |
| 1997 | 468 |
| 1998 | 510 |
| 1999 | 590 |
| 2000 | 607 |
| 2001 | 732 |
| 2002 | 612 |
| 2003 | 584 |

**28. Colección de libros** Entre 1980 y 2000, un coleccionista de libros raros compró libros para su colección a razón de 40 libros por año. Use esta información para completar la tabla siguiente. (Observe que no se dan todos los años en la tabla.)

| Año | Número de libros |
|---|---|
| 1980 | 420 |
| 1981 | 460 |
| 1982 | |
| 1985 | |
| 1990 | |
| 1992 | |
| 1995 | |
| 1997 | |
| 1998 | |
| 1999 | |
| 2000 | 1220 |

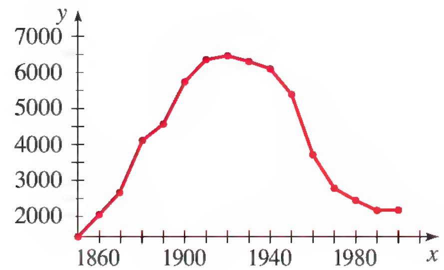
**29. Sopa que se enfría** Cuando un tazón de sopa caliente se deja en un cuarto, la sopa finalmente se enfría a la temperatura del cuarto. La temperatura $T$ de la sopa es una función del tiempo $t$. La tabla siguiente da la temperatura (en °F) de un tazón de sopa $t$ minutos después que se dejó en la mesa. Encuentre la rapidez de cambio promedio de la temperatura de la sopa en los primeros 20 minutos y en los siguientes 20 minutos. ¿Durante qué intervalo se enfrío la sopa más rápidamente?

| $t$ (min) | $T$ (°F) | $t$ (min) | $T$ (°F) |
|---|---|---|---|
| 0 | 200 | 35 | 94 |
| 5 | 172 | 40 | 89 |
| 10 | 150 | 50 | 81 |
| 15 | 133 | 60 | 77 |
| 20 | 119 | 90 | 72 |
| 25 | 108 | 120 | 70 |
| 30 | 100 | 150 | 70 |

**30. Granjas en Estados Unidos** La gráfica siguiente da el número de granjas en Estados Unidos de 1850 a 2000.

**(a)** Estime la rapidez de cambio promedio en el número de granjas entre (i) 1860 y 1890 y (ii) 1950 y 1970.

**(b)** ¿En cuál década experimentó el número de granjas la máxima rapidez de cambio promedio?

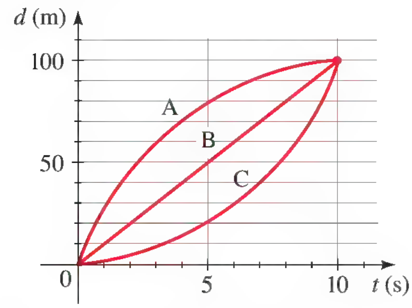



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**31. Carrera de 100 metros** Una carrera de 100 metros termina en un empate triple para el primer lugar. La gráfica siguiente muestra la distancia como función del tiempo para cada uno de los tres ganadores.

**(a)** Encuentre el promedio de rapidez para cada ganador.

**(b)** Describa la diferencia entre las formas en las que los tres atletas corrieron la carrera.




**32. Las funciones lineales tienen rapidez de cambio constante** Si $f(x) = mx + b$ es una función lineal, entonces la rapidez de cambio promedio de $f$ entre cualesquier dos números reales $x_1$ y $x_2$ es

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Calcule esta rapidez de cambio promedio para demostrar que es igual que la pendiente $m$.

**33. Las funciones con rapidez de cambio constante son lineales** Si la función $f$ tiene la misma rapidez de cambio promedio $c$ entre cualesquier dos puntos, entonces para los puntos $a$ y $x$ tenemos

$$c = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Reacomode esta expresión para demostrar que

$$f(x) = cx + (f(a) - ca)$$

y concluya que $f$ es una función lineal.

# 2.5 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Desplazamiento vertical ▶ Desplazamiento horizontal ▶ Gráficas que se reflejan ▶ Alargamiento y contracción verticales ▶ Alargamiento y contracción horizontales ▶ Funciones pares e impares

En esta sección estudiamos la forma en que ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto nos dará una mejor idea de cómo graficar funciones. Las transformaciones que estudiamos son desplazamiento, reflexión y alargamiento.

## ▼ Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza verticalmente su gráfica; hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

En general, suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo obtenemos de ella las gráficas de lo siguiente?

Recuerde que la gráfica de la función $f$ es igual que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c \qquad (c > 0)$$

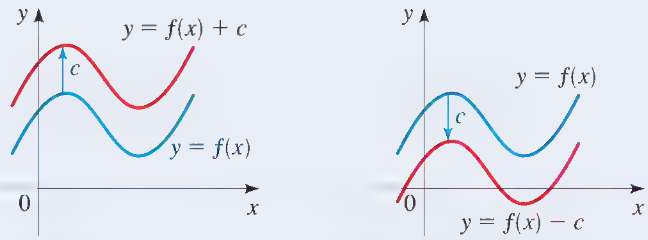
La coordenada $y$ de cada punto en la gráfica de $y = f(x) + c$ está $c$ unidades arriba de la coordenada $y$ del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por tanto, obtenemos la gráfica de $y = f(x) + c$ simplemente desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia arriba $c$ unidades. Del mismo modo, obtenemos la gráfica de $y = f(x) - c$ desplazando la gráfica de $y = f(x)$ hacia abajo $c$ unidades.

**DESPLAZAMIENTOS VERTICALES DE GRÁFICAS**

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades hacia arriba.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades hacia abajo.




## EJEMPLO 1 | Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = x^2 + 3$ **(b)** $h(x) = x^2 - 2$

**SOLUCIÓN** La función $f(x) = x^2$ se graficó en el Ejemplo 1(a), Sección 2.2. Está trazada otra vez en la Figura 1.

**(a)** Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Entonces la coordenada $y$ de cada punto sobre la gráfica de $g$ está 3 unidades arriba del punto correspondiente en la gráfica de $f$. Esto significa que para graficar $g$ desplazamos 3 unidades hacia arriba la gráfica de $f$, como en la Figura 1.

**(b)** Análogamente, para graficar $h$, desplazamos 2 unidades hacia abajo la gráfica de $f$, como en la Figura 1.

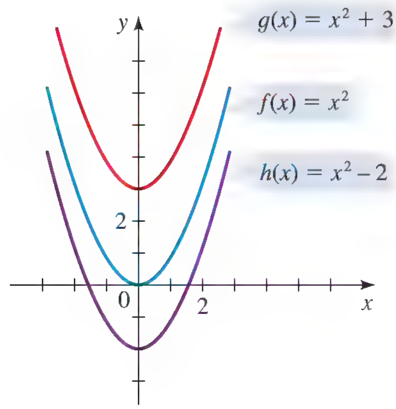



**FIGURA 1**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

## Desplazamiento horizontal

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de lo siguiente?

$$y = f(x + c) \qquad \text{y} \qquad y = f(x - c) \qquad (c > 0)$$

El valor de $f(x - c)$ en $x$ es igual que el valor de $f(x)$ en $x - c$. Como $x - c$ está $c$ unidades a la izquierda de $x$, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$ es justo la gráfica de $y = f(x)$

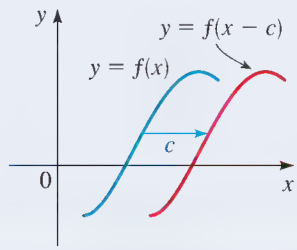
desplazada a la derecha $c$ unidades. Un razonamiento similar muestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda $c$ unidades. El siguiente cuadro resume estos datos.

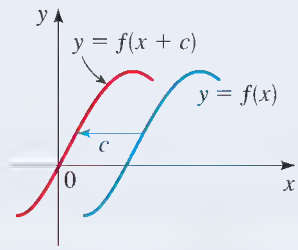
## DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES DE GRÁFICAS

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades a la derecha.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ $c$ unidades a la izquierda.




## EJEMPLO 2 | Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = (x + 4)^2$ **(b)** $h(x) = (x - 2)^2$

### SOLUCIÓN

**(a)** Para graficar $g$, desplazamos 4 unidades a la izquierda la gráfica de $f$.

**(b)** Para graficar $h$, desplazamos 2 unidades a la derecha la gráfica de $f$.

Las gráficas de $g$ y $h$ están trazadas en la Figura 2.

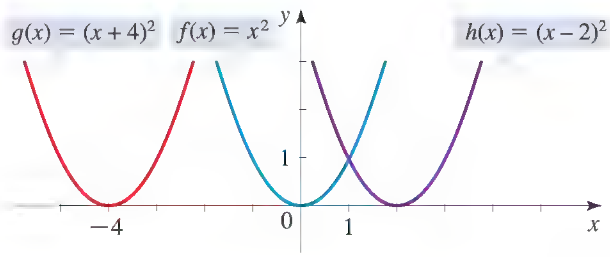



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **27**

Library of Congress

**RENÉ DESCARTES** (1596-1650) nació en la población de La Haye en el sur de Francia. Desde sus primeros años gustaba de las matemáticas por "la certeza de sus resultados y la claridad de su razonamiento". Creía que para llegar a la verdad uno debe empezar por dudar de todo, incluyendo nuestra propia existencia; esto le llevó a formular quizá la frase mejor conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo." En su libro *Discurso del Método* describió lo que ahora se conoce como plano cartesiano. Esta idea de combinar álgebra y geometría hizo posible que los matemáticos por primera vez graficaran funciones y así "vieran" las ecuaciones que estaban estudiando. El filósofo John Stuart Mill llamó a esta invención "el paso más grande jamás dado en el progreso de las ciencias exactas". A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en cama pensando y escribiendo. Inventó el plano de coordenadas estando en cama y viendo una mosca moverse en el techo, razonando que él podría describir la ubicación exacta de la mosca si supiera su distancia desde dos paredes perpendiculares. En 1649 Descartes se convirtió en tutor de la reina Cristina de Suecia, quien gustaba de sus lecciones a las 5 de la mañana cuando, decía, su mente estaba más aguda. Pero, el cambio en los hábitos de Descartes y la helada biblioteca donde estudiaba fueron demasiado para él. En febrero de 1650, después de una estancia de sólo dos meses, contrajo pulmonía y murió.

> **LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**
>
> **Computadoras**
> Durante siglos se han diseñado máquinas para que ejecuten trabajos específicos. Por ejemplo, una lavadora lava ropa, una tejedora teje telas, una sumadora suma números, y así sucesivamente. La computadora ha cambiado todo esto.
>
> La computadora es una máquina que no hace nada sino hasta que se le dan instrucciones para que haga algo. Así es que una computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular $\pi$ a un millón de lugares decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) se le den a la computadora. Ésta puede hacer todo esto porque puede aceptar instrucciones y lógicamente cambiar esas instrucciones basadas en datos de entrada. Esta versatilidad hace útiles a las computadoras en casi todo aspecto de la vida humana.
>
> La idea de una computadora fue descrita teóricamente en la década de 1940 por el matemático Allan Turing (vea página 100) en lo que él llamó *máquina universal*. En 1945 el matemático John Von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.
>
> Los matemáticos continúan perfeccionando nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el "chip", que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener idea de la complejidad de un chip, considere que el chip Pentium tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos.

**EJEMPLO 3 | Combinación de desplazamientos horizontal y vertical**

Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$.

**SOLUCIÓN** Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c), Sección 2.2) y la desplazamos 3 unidades a la derecha para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x-3}$. A continuación desplazamos la gráfica resultante 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ que se ve en la Figura 3.

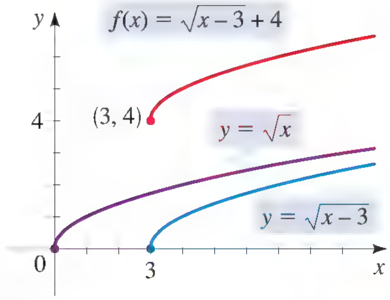


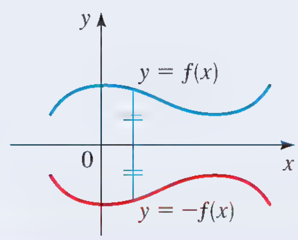

**FIGURA 3**

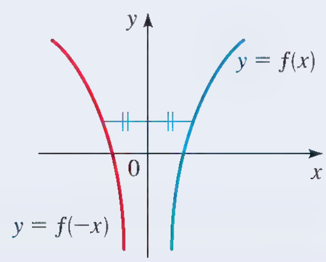
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

## Gráficas que se reflejan

Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada $y$ de cada uno de los puntos en la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada $y$ del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $x$. Por otra parte, el valor de $y = f(-x)$ en $x$ es igual al valor de $y = f(x)$ en $-x$, por lo que la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $y$. En el siguiente recuadro se resumen estas observaciones.

> **GRÁFICAS QUE SE REFLEJAN**
>
> Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $x$.
>
> Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje $y$.




**EJEMPLO 4 | Gráficas que se reflejan**

Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $f(x) = -x^2$ **(b)** $g(x) = \sqrt{-x}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Empezamos con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje $x$ (vea Figura 4).

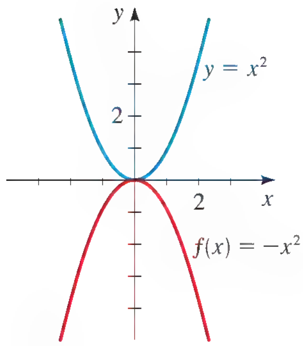



FIGURA 4

**(b)** Empezamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) en la Sección 2.2.) La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje $y$ (vea Figura 5). Observe que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$..

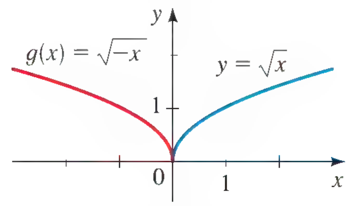



FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **31**

## Alargamiento y contracción verticales

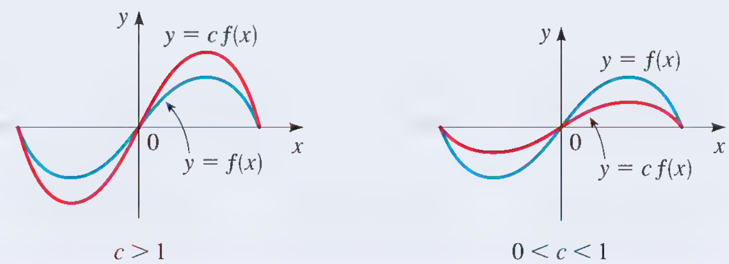
Suponga que conocemos la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo la usamos para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada $y$ de $y = cf(x)$ en $x$ es igual que la coordenada $y$ correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por $c$. Multiplicar las coordenadas por $c$ tiene el efecto de alargar o contraer verticalmente la gráfica en un factor de $c$.

**ALARGAMIENTO Y CONTRACCIÓN VERTICALES DE GRÁFICAS**

Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de $c$.

Si $0 < c < 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de $c$.




## EJEMPLO 5 | Alargamiento y contracción verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = 3x^2$ **(b)** $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica de $g$ se obtiene al multiplicar por 3 la coordenada $y$ de cada punto de la gráfica. Esto es, para obtener la gráfica de $g$, alargamos la gráfica de $f$ verticalmente en un factor de 3. El resultado es la parábola más angosta de la Figura 6.

**(b)** La gráfica de $h$ se obtiene al multiplicar por $\frac{1}{3}$ la coordenada $y$ de cada punto de la gráfica de $f$. Esto es, para obtener la gráfica de $h$, contraemos la gráfica de $f$ verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más ancha de la Figura 6.

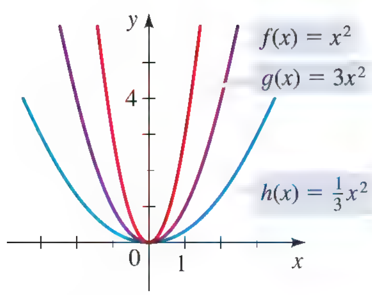



FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35**

Ilustramos el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y alargamiento en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 6** | Combinar desplazamiento, alargamiento y reflexión

Alargue la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

**SOLUCIÓN** Empezando con la gráfica de $y = x^2$, primero desplazamos a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. A continuación reflejamos en el eje $x$ y alargamos por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Finalmente, desplazamos hacia arriba 1 unidad para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ que se ve en la Figura 7.

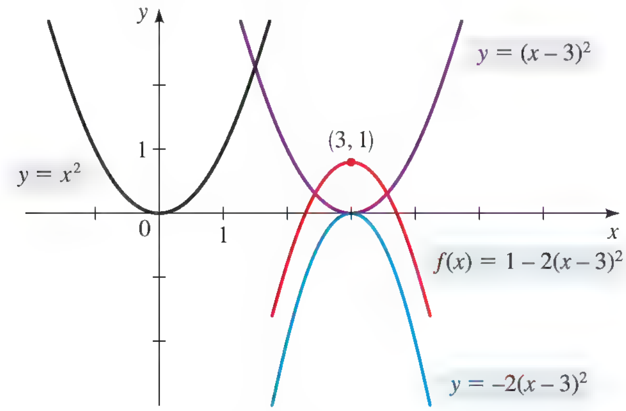



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## Alargamiento y contracción horizontales

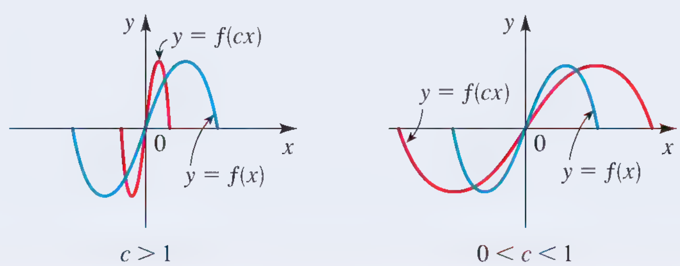
Ahora consideramos la contracción y alargamiento horizontales de gráficas. Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo está relacionada con ella la gráfica de $y = f(cx)$? La coordenada $y$ de $y = f(cx)$ en $x$ es la misma que la coordenada $y$ de $y = f(x)$ en $cx$. Por lo tanto, las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(x)$ corresponden a las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicada por $c$. Viendo esto a la inversa, observamos que las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas $x$ de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, debemos contraer (o alargar) la gráfica horizontalmente en un factor de $1/c$, como se resume en el siguiente recuadro.

**CONTRACCIÓN Y ALARGAMIENTO HORIZONTALES DE GRÁFICAS**

Para graficar $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$.




**EJEMPLO 7** | Alargamiento y contracción horizontales de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la Figura 8 de la página siguiente. Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $y = f(2x)$ **(b)** $y = f(\frac{1}{2}x)$

**SONYA KOVALEVSKY** (1850-1891) es considerada la mujer matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú de una familia aristocrática. Cuando era niña, estudió los principios de cálculo en una forma muy poco común: su habitación estaba temporalmente tapizada con las páginas de un libro de cálculo. Tiempo después escribió que "pasaba muchas horas frente a aquella pared, tratando de entenderla". Como las leyes rusas prohibían que las mujeres estudiaran en universidades contrajo un matrimonio por conveniencia, lo que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Göttingen. Finalmente se le otorgó un profesorado de tiempo completo en la universidad de Estocolmo, donde fue profesora durante ocho años antes de morir por una epidemia de gripe a la edad de 41 años. Su investigación fue de gran utilidad para ayudar a poner las ideas y aplicaciones de funciones y cálculo en una base sólida y lógica. Recibió numerosos homenajes y premios por sus trabajos de investigación.

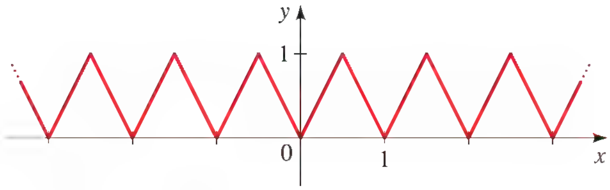



**FIGURA 8** $y = f(x)$

**SOLUCIÓN** Usando los principios descritos en el recuadro precedente, obtener las gráficas de las Figuras 9 y 10.

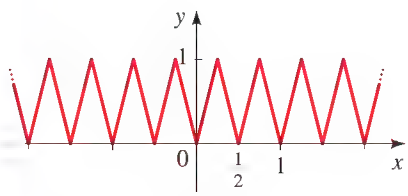



**FIGURA 9** $y = f(2x)$

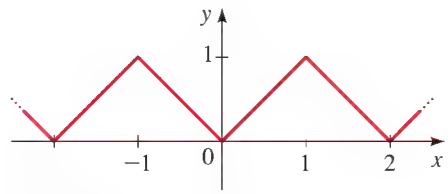



**FIGURA 10** $y = f(\frac{1}{2}x)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

## Funciones pares e impares

Si una función $f$ satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número $x$ en su dominio, entonces $f$ recibe el nombre de **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es función par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje $y$ (vea Figura 11). Esto significa que si hemos trazado la gráfica de $f$ para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica simplemente al reflejar esta parte en el eje $y$.

Si $f$ satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número $x$ en su dominio, entonces $f$ se denomina **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica alrededor del origen (vea Figura 12). Si hemos trazado la gráfica de $f$ para $x \geq 0$, entonces podemos obtener toda la gráfica al girar esta parte 180° alrededor del origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje $x$ y luego en el eje $y$.)

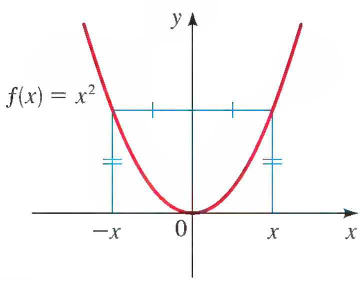



**FIGURA 11** $f(x) = x^2$ es una función par.

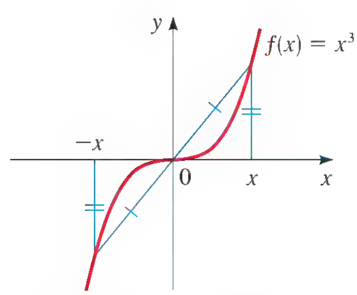


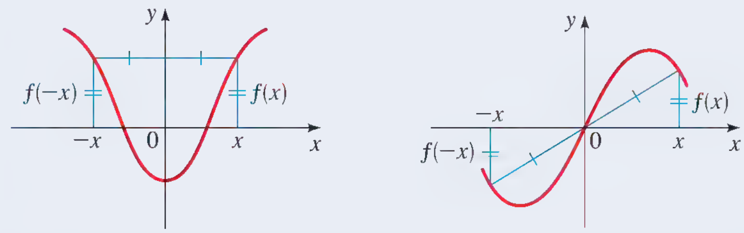

**FIGURA 12** $f(x) = x^3$ es una función impar.

### FUNCIONES PARES E IMPARES

Sea $f$ una función.

$f$ es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.

$f$ es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$.




La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje $y$.

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

## EJEMPLO 8 | Funciones par e impar

Determine si las funciones son par, impar, o ninguna de éstas.

**(a)** $f(x) = x^5 + x$

**(b)** $g(x) = 1 - x^4$

**(c)** $h(x) = 2x - x^2$

### SOLUCIÓN

**(a)**
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Por tanto, $f$ es una función impar.

**(b)** $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

Por tanto, $g$ es par.

**(c)** $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, concluimos que $h$ no es ni par ni impar.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **75, 77** Y **79**

Las gráficas de las funciones del Ejemplo 8 se muestran en la Figura 13. La gráfica de $f$ es simétrica alrededor del origen, y la gráfica de $g$ es simétrica alrededor del eje $y$. La gráfica de $h$ no es simétrica ya sea alrededor del eje $y$ o del origen.

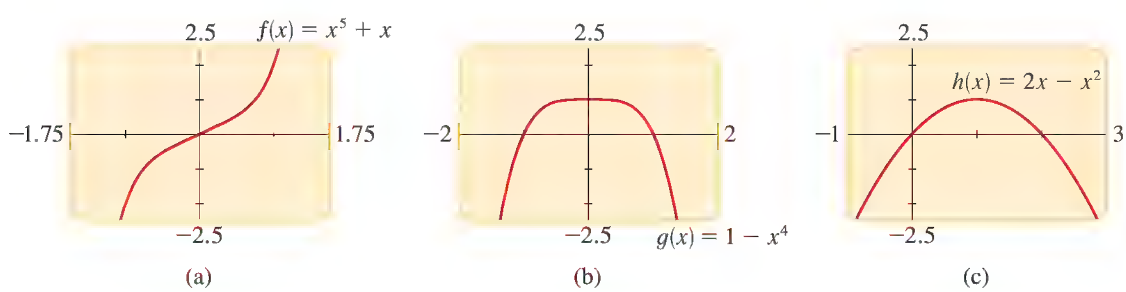



**FIGURA 13**

## 2.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Llene el espacio en blanco con la dirección apropiada (izquierda, derecha, hacia arriba o hacia abajo).

**1.** **(a)** La gráfica de $y = f(x) + 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ________ 3 unidades.

**(b)** La gráfica de $y = f(x + 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar ______3 unidades.

**2.** **(a)** La gráfica de $y = f(x) - 3$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar _____ 3 unidades.

**(b)** La gráfica de $y = f(x - 3)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al desplazar _____ 3 unidades.

**3.** Llene el espacio en blanco con el eje apropiado (eje $x$ o eje $y$)

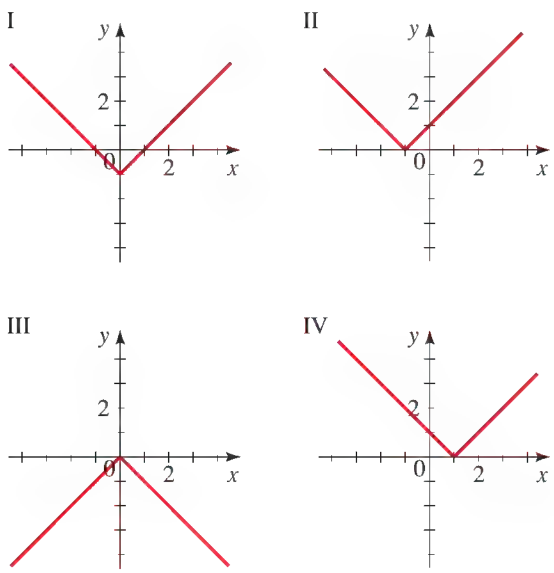
**(a)** La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ________.

**(b)** La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ al reflejar en el ________.

**4.** Relacione la gráfica con la función.

**(a)** $y = |x + 1|$ **(b)** $y = |x - 1|$

**(c)** $y = |x| - 1$ **(d)** $y = -|x|$




### HABILIDADES

**5-14** ■ Suponga que nos dan la gráfica de $f$. Describa la forma en que la gráfica de cada función se puede obtener a partir de la gráfica de $f$.

**5.** **(a)** $y = f(x) - 5$ **(b)** $y = f(x - 5)$

**6.** **(a)** $y = f(x + 7)$ **(b)** $y = f(x) + 7$

**7.** **(a)** $y = -f(x)$ **(b)** $y = f(-x)$

**8.** **(a)** $y = -2f(x)$ **(b)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

**9.** **(a)** $y = -f(x) + 5$ **(b)** $y = 3f(x) - 5$

**10.** **(a)** $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$ **(b)** $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

**11.** **(a)** $y = 2f(x + 1) - 3$ **(b)** $y = 2f(x - 1) + 3$

**12.** **(a)** $y = 3 - 2f(x)$ **(b)** $y = 2 - f(-x)$

**13.** **(a)** $y = f(4x)$ **(b)** $y = f(\frac{1}{4}x)$

**14.** **(a)** $y = f(2x) - 1$ **(b)** $y = 2f(\frac{1}{2}x)$

**15-18** ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de $g$ a partir de la gráfica de $f$.

**15.** **(a)** $f(x) = x^2, \quad g(x) = (x + 2)^2$
**(b)** $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 + 2$

**16.** **(a)** $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x - 4)^3$
**(b)** $f(x) = x^3, \quad g(x) = x^3 - 4$

**17.** **(a)** $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x + 2| - 2$
**(b)** $f(x) = |x|, \quad g(x) = |x - 2| + 2$

**18.** **(a)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = -\sqrt{x} + 1$
**(b)** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{-x} + 1$

**19.** Use la gráfica de $y = x^2$ de la Figura 4 para graficar lo siguiente.

**(a)** $g(x) = x^2 + 1$
**(b)** $g(x) = (x - 1)^2$
**(c)** $g(x) = -x^2$
**(d)** $g(x) = (x - 1)^2 + 3$

**20.** Use la gráfica de $y = \sqrt{x}$ de la Figura 5 para graficar lo siguiente.

**(a)** $g(x) = \sqrt{x - 2}$
**(b)** $g(x) = \sqrt{x} + 1$
**(c)** $g(x) = \sqrt{x + 2} + 2$
**(d)** $g(x) = -\sqrt{x} + 1$

**21-44** ■ Trace la gráfica de la función, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

**21.** $f(x) = x^2 - 1$

**22.** $f(x) = x^2 + 5$

**23.** $f(x) = \sqrt{x} + 1$

**24.** $f(x) = |x| - 1$

**25.** $f(x) = (x - 5)^2$

**26.** $f(x) = (x + 1)^2$

**27.** $f(x) = \sqrt{x + 4}$

**28.** $f(x) = |x - 3|$

**29.** $f(x) = -x^3$

**30.** $f(x) = -|x|$

**31.** $y = \sqrt[4]{-x}$

**32.** $y = \sqrt[3]{-x}$

**33.** $y = \frac{1}{4}x^2$

34. $y = -5\sqrt{x}$

35. $y = 3|x|$

36. $y = \frac{1}{2}|x|$

37. $y = (x - 3)^2 + 5$

38. $y = \sqrt{x + 4} - 3$

39. $y = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

40. $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

41. $y = |x + 2| + 2$

42. $y = 2 - |x|$

43. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$

44. $y = 3 - 2(x - 1)^2$

**45-54** ■ Nos dan una función $f$, y las transformaciones indicadas se aplican a su gráfica (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica final transformada.

45. $f(x) = x^2$; desplazar hacia arriba 3 unidades

46. $f(x) = x^3$; desplazar hacia abajo 1 unidad

47. $f(x) = \sqrt{x}$; desplazar 2 unidades a la izquierda

48. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; desplazar 1 unidad a la derecha

49. $f(x) = |x|$; desplazar 3 unidades a la derecha y desplazar 1 unidad hacia arriba

50. $f(x) = |x|$; desplazar 4 unidades a la izquierda y desplazar 1 unidad hacia abajo

51. $f(x) = \sqrt[4]{x}$; reflejar en el eje $y$ y desplazar hacia arriba 1 unidad

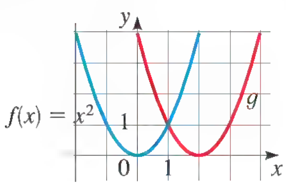
52. $f(x) = x^2$; desplazar 2 unidades a la izquierda y reflejar en el eje $x$

53. $f(x) = x^2$; alargar verticalmente en un factor de 2, desplazar hacia abajo 2 unidades y desplazar 3 unidades a la derecha

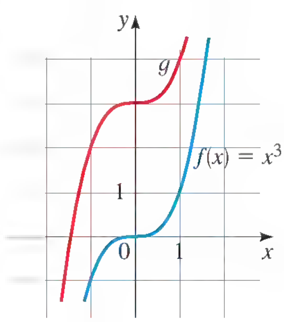
54. $f(x) = |x|$; contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$, desplazar a la izquierda 1 unidad y desplazar hacia arriba 3 unidades.

**55-60** ■ Nos dan las gráficas de $f$ y de $g$. Encuentre una fórmula para la función $g$.

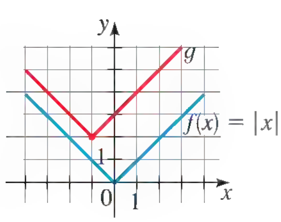
**55.**



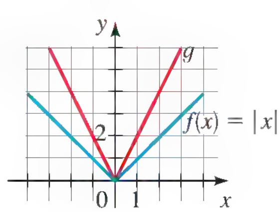

**56.**



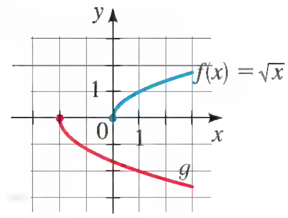

**57.**



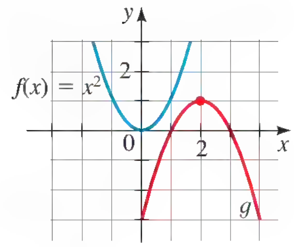

**58.**




**59.**

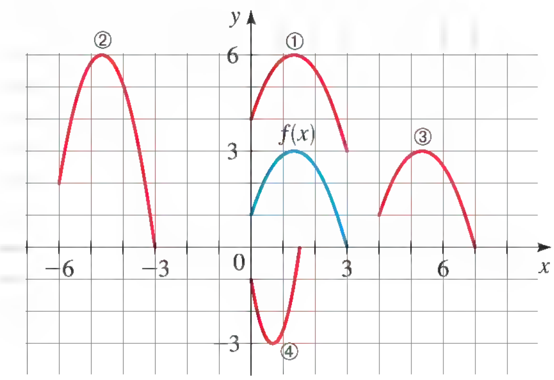



**60.**

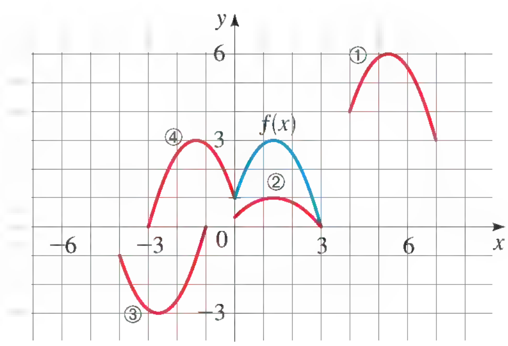



**61-62** ■ Nos dan la gráfica de $y = f(x)$. Relacione cada ecuación con su gráfica.

61. **(a)** $y = f(x - 4)$ **(b)** $y = f(x) + 3$
**(c)** $y = 2f(x + 6)$ **(d)** $y = -f(2x)$

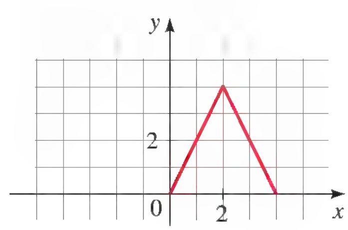



62. **(a)** $y = \frac{1}{3}f(x)$ **(b)** $y = -f(x + 4)$
**(c)** $y = f(x - 4) + 3$ **(d)** $y = f(-x)$



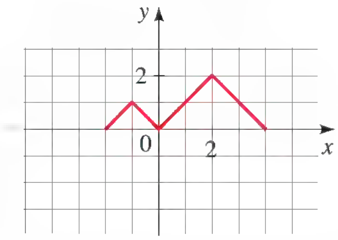

63. Nos dan la gráfica de $f$. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $y = f(x - 2)$ **(b)** $y = f(x) - 2$
**(c)** $y = 2f(x)$ **(d)** $y = -f(x) + 3$
**(e)** $y = f(-x)$ **(f)** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



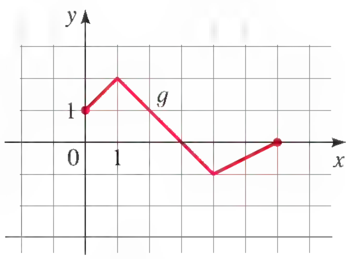
**64.** Nos dan la gráfica de $g$. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $y = g(x + 1)$ **(b)** $y = g(-x)$
**(c)** $y = g(x - 2)$ **(d)** $y = g(x) - 2$
**(e)** $y = -g(x)$ **(f)** $y = 2g(x)$



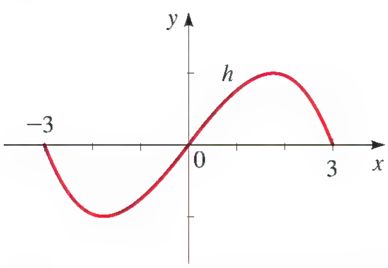

**65.** Nos dan la gráfica de $g$. Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = g(2x)$ **(b)** $y = g(\frac{1}{2}x)$




**66.** Nos dan la gráfica de $h$. Úsela para graficar cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = h(3x)$ **(b)** $y = h(\frac{1}{3}x)$




**67-68** ■ Use la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$ descrita en la página 156 para graficar la función indicada.

**67.** $y = [\![2x]\!]$ **68.** $y = [\![\frac{1}{4}x]\!]$

**69-72** ■ Grafique las funciones en cada pantalla usando el rectángulo de vista dado. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

**69.** Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-2, 8]$
**(a)** $y = \sqrt[4]{x}$ **(b)** $y = \sqrt[4]{x + 5}$
**(c)** $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$ **(d)** $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

**70.** Rectángulo de vista $[-8, 8]$ por $[-6, 6]$
**(a)** $y = |x|$ **(b)** $y = -|x|$
**(c)** $y = -3|x|$ **(d)** $y = -3|x - 5|$

**71.** Rectángulo de vista $[-4, 6]$ por $[-4, 4]$
**(a)** $y = x^6$ **(b)** $y = \frac{1}{3}x^6$
**(c)** $y = -\frac{1}{3}x^6$ **(d)** $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

**72.** Rectángulo de vista $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$
**(a)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **(b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$
**(c)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$ **(d)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}} - 3$

**73.** Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

**(a)** $y = f(x)$ **(b)** $y = f(2x)$ **(c)** $y = f(\frac{1}{2}x)$

**74.** Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo está relacionada cada gráfica con la gráfica de la parte (a)?

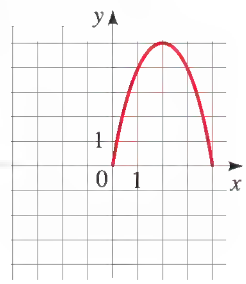
**(a)** $y = f(x)$ **(b)** $y = f(-x)$
**(c)** $y = -f(-x)$ **(d)** $y = f(-2x)$
**(e)** $y = f(-\frac{1}{2}x)$

**75-82** ■ Determine si la función $f$ es par, impar, o ninguna de éstas. Si $f$ es par o impar, use simetría para trazar su gráfica.

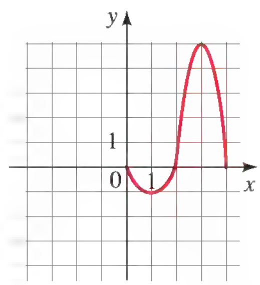
**75.** $f(x) = x^4$ **76.** $f(x) = x^3$
**77.** $f(x) = x^2 + x$ **78.** $f(x) = x^4 - 4x^2$
**79.** $f(x) = x^3 - x$ **80.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$
**81.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **82.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

**83-84** ■ Nos dan la gráfica de una función definida por $x \geq 0$. Complete la gráfica para $x < 0$ para hacer **(a)** una función par y **(b)** una función impar.

**83.**

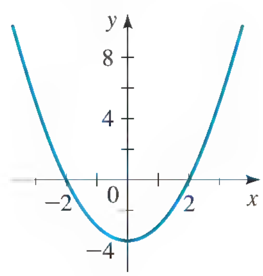



**84.**

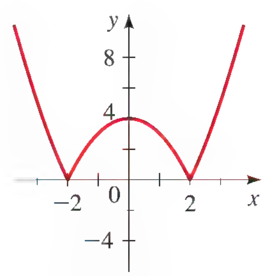



**85-86** ■ Estos ejercicios muestran cómo se obtiene la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$.

**85.** A continuación se presentan las gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |x^2 - 4|$. Explique cómo se obtiene la gráfica de $g$ a partir de la gráfica de $f$.

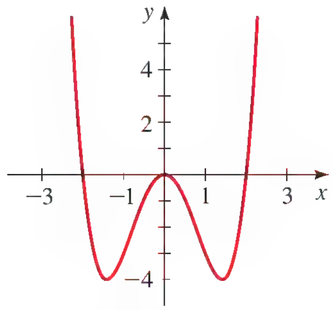



$f(x) = x^2 - 4$




$g(x) = |x^2 - 4|$

**86.** Nos dan la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.




**87-88** ■ Trace la gráfica de cada función.

**87.** **(a)** $f(x) = 4x - x^2$ **(b)** $g(x) = |4x - x^2|$

**88.** **(a)** $f(x) = x^3$ **(b)** $g(x) = |x^3|$

## APLICACIONES

**89. Crecimiento en ventas** Las ventas anuales de cierta empresa pueden modelarse con la función $f(t) = 4 + 0.01t^2$, donde $t$ representa los años desde 1900 y $f(t)$ es medida en millones de dólares.

**(a)** ¿Qué operaciones de cambio y reducción deben hacerse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = f(t)$?

**(b)** Suponga que $t$ representa los años desde 2000 en vez de 1900. ¿Qué transformación podría aplicar a la función $y = f(t)$ para lograr esto? Escriba la nueva función $y = g(t)$ que resulta de esta transformación.

**90. Escalas de temperatura que cambia** La temperatura en cierta tarde está modelada por la función

$$C(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + 2$$

donde $t$ representa horas después de las 12 del mediodía ($0 \leq t \leq 6$) y $C$ se mide en °C.

**(a)** ¿Qué operaciones de desplazamiento y contracción deben efectuarse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = c(t)$?

**(b)** Supongamos que se desea medir la temperatura en °F. ¿Qué transformación tendría que aplicarse a la función $y = C(t)$ para lograr esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$. Escriba la nueva función $y = F(t)$ que resulta de esta transformación.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**91. Sumas de funciones pares e impares** Si $f$ y $g$ son funciones pares ambas, ¿$f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué se puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

**92. Productos de funciones pares e impares** Conteste las mismas preguntas del Ejercicio 91, excepto que esta vez considere el producto de $f$ y $g$ en lugar de la suma.

**93. Funciones de potencia pares e impares** ¿Qué debe ser cierto acerca del entero $n$ si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué piensa usted que los nombres "par" e "impar" se escogieron para estas propiedades de función?

# 2.6 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

Sumas, diferencias, productos y cocientes ▶ Composición de funciones

En esta sección estudiaremos diferentes maneras de combinar funciones para formar nuevas.

## ▼ Sumas, diferencias, productos y cocientes

Dos funciones $f$ y $g$ pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, $fg$ y $f/g$ de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Por ejemplo, definimos la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La suma de $f$ y $g$ está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es "$f + g$". Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del lado derecho representa adición de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

La nueva función $f + g$ se denomina **suma** de las funciones $f$ y $g$; su valor en $x$ es $f(x) + g(x)$. Desde luego, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si $f$ pertenece al dominio de $f$ y también al dominio de $g$. Por lo tanto, si el dominio de $f$ es $A$ y el dominio de $g$ es $B$, entonces el dominio $f + g$ es la intersección de estos dominios, o sea $A \cap B$. Análogamente, podemos definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** $fg$ y el **cociente** $f/g$ de las funciones $f$ y $g$. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente debemos recordar no dividir entre 0.

**ÁLGEBRA DE FUNCIONES**

Sean $f$ y $g$ funciones con dominios $A$ y $B$. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, $fg$ y $f/g$ están definidas como sigue.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Dominio } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

## EJEMPLO 1 | Combinaciones de funciones y sus dominios

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

**(a)** Encuentre las funciones $f+g$, $f-g$, $fg$, y $f/g$ y sus dominios.

**(b)** Encuentre $(f+g)(4)$, $(f-g)(4)$, $(fg)(4)$, y $(f/g)(4)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** El dominio de $f$ es $\{x \mid x \neq 2\}$, y el dominio de $g$ es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de $f$ y $g$ es

$$\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Por lo tanto, tenemos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique:

$$\frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$$

Observe que en el dominio de $f/g$ excluimos 0 porque $g(0) = 0$.

**(b)** Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función.

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

La gráfica de la función $f + g$ puede obtenerse de las gráficas de $f$ y $g$ por **suma gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas $y$ correspondientes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2 | Uso de suma gráfica

Las gráficas de $f$ y $g$ se muestran en la Figura 1. Use suma gráfica para graficar la función de $f + g$.

**SOLUCIÓN** Obtenemos la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se ve en la Figura 2. Esto se implementa al copiar el segmento de recta $PQ$ sobre el de $PR$ para obtener el punto $S$ en la gráfica de $f + g$.

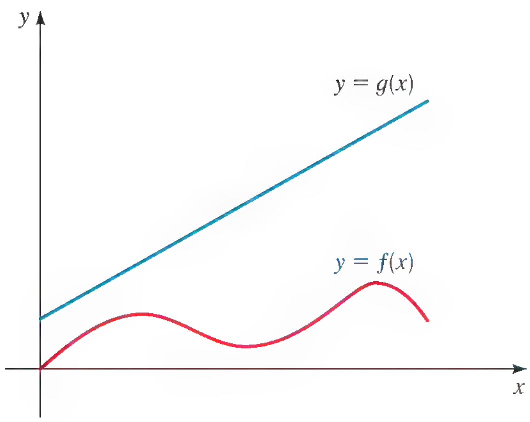



**FIGURA 1**

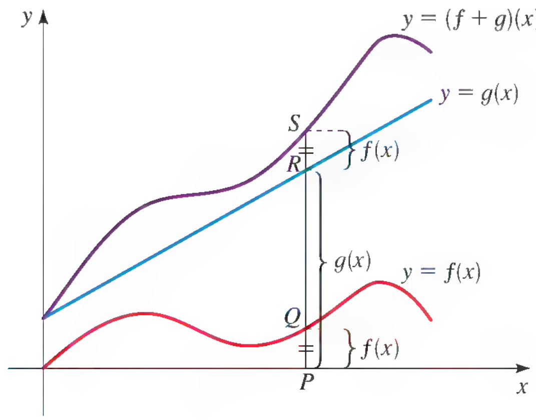



**FIGURA 2** Suma gráfica

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

## Composición de funciones

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Podemos definir una nueva función $h$ como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función $h$ está formada por las funciones $f$ y $g$ en una forma interesante: dado un número $x$, primero le aplicamos la función $g$ y luego aplicamos $f$ al resultado. En este caso, $f$ es la regla "tome la raíz cuadrada", $g$ es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1", y $h$ es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1, luego tome la raíz cuadrada". En otras palabras, obtenemos la regla $h$ al aplicar la regla $g$ y luego la regla $f$. La Figura 3 muestra un diagrama de máquina para $h$

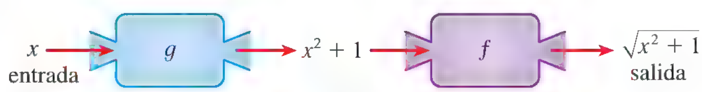



**FIGURA 3** La máquina $h$ está compuesta de la máquina $g$ (primero) y luego por la máquina $f$.

En general, dadas dos funciones $f$ y $g$ cualesquiera, empezamos con un número $x$ en el dominio de $g$ y su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de $f$, podemos entonces calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir $g$ en $f$. Se denomina la *composición* (o *compuesta*) de $f$ y $g$, y se denota con $f \circ g$ ("$f$ compuesta con $g$").

**COMPOSICIÓN DE FUNCIONES**

Dadas dos funciones $f$ y $g$, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada **composición** de $f$ y $g$) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda $x$ en el dominio de $g$ tal que $g(x)$ está en el dominio de $f$. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estén definidas. Podemos describir $f \circ g$ usando un diagrama de flechas (Figura 4).

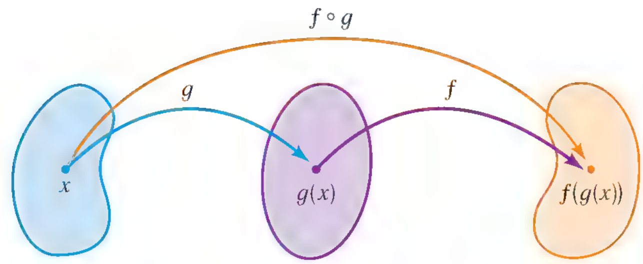



**FIGURA 4** Diagrama de flechas para $f \circ g$

## EJEMPLO 3 | Hallar la composición de funciones

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

**(a)** Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

**(b)** Encuentre $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

**SOLUCIÓN**

En el ejemplo 3, $f$ es la regla "elevar al cuadrado" y $g$ es la regla "reste 3". La función $f \circ g$ primero resta 3 y luego eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ primero eleva al cuadrado y luego resta tres.

**(a)** Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(x-3) && \text{Definición de } g\\ &= (x-3)^2 && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\ &= g(x^2) && \text{Definición de } f\\ &= x^2 - 3 && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Los dominios tanto de $f \circ g$ como de $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

**(b)** Tenemos

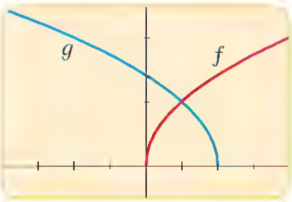
$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

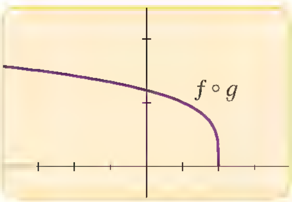
$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

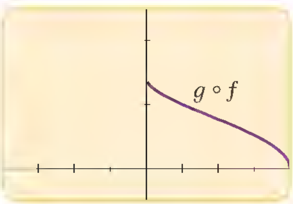
AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **35**

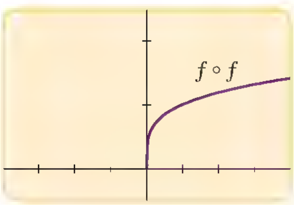
Del Ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ quiere decir que la función $g$ se aplica primero y luego $f$ se aplica en segundo lugar.

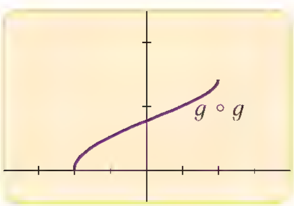
Las gráficas de $f$ y $g$ del Ejemplo 4, así como las de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones que son bastante diferentes de las funciones originales.




## EJEMPLO 4 | Hallar la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

**(a)** $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

### SOLUCIÓN

**(a)**
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt{\sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt[4]{2 - x}
\end{aligned}
$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \ge 0\} = \{x \mid x \le 2\} = (-\infty, 2]$.

**(b)**
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $x \ge 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, debemos tener $2 - \sqrt{x} \ge 0$, es decir, $\sqrt{x} \le 2$, o $x \le 4$. Entonces, tenemos $0 \le x \le 4$ de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

**(c)**
$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f \\
&= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt[4]{x}
\end{aligned}
$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

**(d)**
$$
\begin{aligned}
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g \\
&= g(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Esta expresión está definida cuando$2 - x \ge 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \ge 0$. La primera desigualdad quiere decir que $x \le 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \le 2$, o $2 - x \le 4$, o $x \ge -2$. Por tanto, $-2 \le x \le 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar $h$ primero, después $g$ y luego $f$ como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

## EJEMPLO 5 | Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

### SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h \\
&= f(g(x + 3)) && \text{Definición de } h \\
&= f((x + 3)^{10}) && \text{Definición de } g \\
&= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

Hasta este punto hemos empleado composición para construir funciones complicadas a partir de unas más sencillas, pero, en cálculo, es útil saber "descomponer" una función complicada en unas más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 6 | Reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre funciones $f$ y $g$ tales que $F = f \circ g$.

**SOLUCIÓN** Como la fórmula de $F$ dice que primero sumamos 9 y luego tomamos la raíz cuarta, hacemos

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Y a continuación

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x + 9) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f \\ &= F(x) \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

## EJEMPLO 7 | Una aplicación de composición de funciones

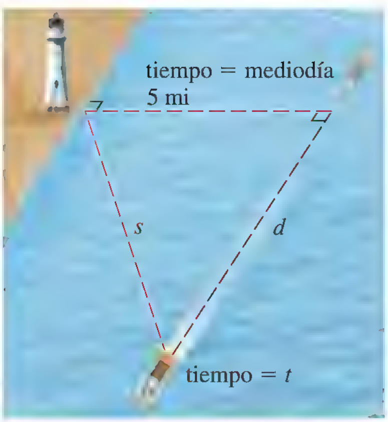



**FIGURA 5**

Un barco está navegando a 20 mi/h paralelo a un borde recto de la playa. El barco está a 5 millas de la playa y pasa frente a un faro al mediodía.

**(a)** Exprese la distancia $s$ entre el faro y el barco como función de $d$, la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; es decir, encuentre $f$ de modo que $s = f(d)$.

**(b)** Exprese $d$ como función de $t$, el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre $g$ para que $d = g(t)$.

**(c)** Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

**SOLUCIÓN** Primero trazamos un diagrama como el de la Figura 5.

**(a)** Podemos relacionar las distancias $s$ y $d$ por el Teorema de Pitágoras. Así, $s$ puede ser expresada como función de $d$ por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

**(b)** Como el barco está navegando a 20 mi/h, la distancia $d$ que ha recorrido es una función de $t$ como sigue:

distancia = rapidez × tiempo

$$d = g(t) = 20t$$

**(c)** Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(20t) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como función del tiempo.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **63**

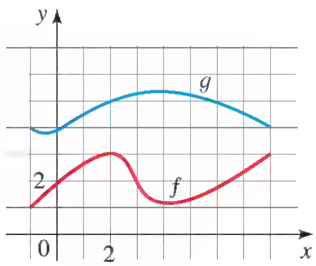
## 2.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** De las gráficas de $f$ y $g$ de la figura, encontramos

$(f+g)(2) =$ ______ $\qquad (f-g)(2) =$ ______

$(fg)(2) =$ ______ $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)(2) =$ ______




**2.** Por definición, $f \circ g(x) =$ ____. Por tanto, si $g(2) = 5$ y $f(5) = 12$, entonces $f \circ g(2) =$ ______.

**3.** Si la regla de la función $f$ es "sumar 1" y la regla de la función $g$ es "multiplicar por 2," entonces la regla de $f \circ g$ es

"________________________."

y la regla de $g \circ f$ es

"________________________."

**4.** Podemos expresar algebraicamente las funciones del Ejercicio 3 como

$f(x) =$ ______ $\qquad g(x) =$ ______

$f \circ g(x) =$ ______ $\qquad g \circ f(x) =$ ______

### HABILIDADES

**5-10** ■ Encuentre $f+g$, $f-g$, $fg$ y $f/g$ y sus dominios.

**5.** $f(x) = x - 3, \quad g(x) = x^2$

**6.** $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

**7.** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x}$

**8.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

**9.** $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{4}{x + 4}$

**10.** $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

**11-14** ■ Encuentre el dominio de la función.

**11.** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

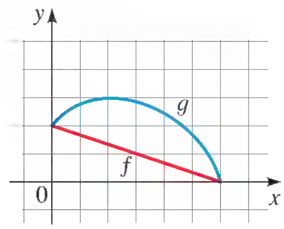
**12.** $g(x) = \sqrt{x + 1} - \dfrac{1}{x}$

**13.** $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$

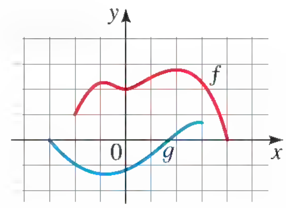
**14.** $k(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

**15-16** ■ Use suma gráfica para trazar la gráfica de $f + g$.

**15.**




**16.**




**17-20** ■ Trace las gráficas de $f$, $g$ y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

**17.** $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

**18.** $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

**19.** $f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3$

**20.** $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

**21-26** ■ Use $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ para evaluar la expresión.

**21.** **(a)** $f(g(0))$ **(b)** $g(f(0))$

**22.** **(a)** $f(f(4))$ **(b)** $g(g(3))$

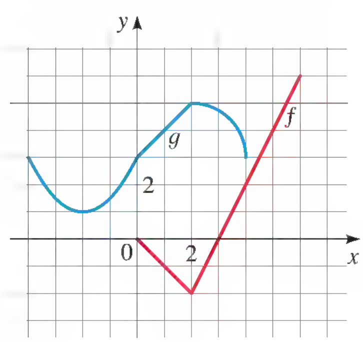
**23.** **(a)** $(f \circ g)(-2)$ **(b)** $(g \circ f)(-2)$

**24.** **(a)** $(f \circ f)(-1)$ **(b)** $(g \circ g)(2)$

**25.** **(a)** $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(x)$

**26.** **(a)** $(f \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ g)(x)$

**27-32** ■ Use las gráficas dadas de $f$ y $g$ para evaluar la expresión.




**27.** $f(g(2))$

**28.** $g(f(0))$

**29.** $(g \circ f)(4)$

**30.** $(f \circ g)(0)$

**31.** $(g \circ g)(-2)$

**32.** $(f \circ f)(4)$

**33-44** ■ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

**33.** $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 4x - 1$

**34.** $f(x) = 6x - 5, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$

**35.** $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$

**36.** $f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

**37.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = 2x + 4$

**38.** $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

**39.** $f(x) = |x|, \quad g(x) = 2x + 3$

**40.** $f(x) = x - 4, \quad g(x) = |x + 4|$

**41.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = 2x - 1$

**42.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x^2 - 4x$

**43.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

**44.** $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

**45-48** ■ Encuentre $f \circ g \circ h$.

**45.** $f(x) = x - 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x - 1$

**46.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^2 + 2$

**47.** $f(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x - 5, \quad h(x) = \sqrt{x}$

**48.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

**49-54** ■ Exprese la función en la forma $f \circ g$.

**49.** $F(x) = (x - 9)^5$

**50.** $F(x) = \sqrt{x} + 1$

**51.** $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

**52.** $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

**53.** $H(x) = |1 - x^3|$

**54.** $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

**55-58** ■ Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

**55.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

**56.** $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

**57.** $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$

**58.** $G(x) = \dfrac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

## APLICACIONES

**59-60** ■ **Ingreso, costo y utilidad** Un taller de imprenta hace calcomanías para pegarse en los parachoques de autos para campañas políticas. Si $x$ calcomanías son solicitadas (donde $x < 10,000$) entonces el precio por calcomanía es $0.15 - 0.000002x$ dólares, y el costo total por producir el pedido es $0.095x - 0.0000005x^2$ dólares.

**59.** Use el hecho de que

ingreso = precio por artículo × número de artículos vendidos

para expresar $R(x)$, el ingreso por un pedido de $x$ calcomanías, como producto de dos funciones de $x$.

**60.** Use el hecho de que

utilidad = ingreso − costo

para expresar $P(x)$, la utilidad de un pedido de $x$ calcomanías, como diferencia de dos funciones de $x$.

**61. Área de una onda** Se deja caer una piedra en un lago, creando una onda circular que se mueve hacia fuera con una rapidez de 60 cm/s.

**(a)** Encuentre una función $g$ que modele el radio como función del tiempo.

**(b)** Encuentre una función $f$ que modele el área del círculo como función del radio.

**(c)** Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

**62. Inflar un globo** Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 1 cm/s.

**(a)** Encuentre una función $f$ que modele el radio como función del tiempo.

**(b)** Encuentre una función $g$ que modele el volumen como función del radio.

**(c)** Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

**63. Área de un globo** Un globo esférico de meteorología está siendo inflado. El radio del globo es creciente a razón de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como función del tiempo $t$ (en segundos).

**64. Descuentos múltiples** Una persona tiene un cupón de \$50 del fabricante, bueno para la compra de un teléfono celular. La tienda donde compra el teléfono está ofreciendo un 20% de descuento en todos los teléfonos celulares. Represente con $x$ el precio regular del teléfono celular.

**(a)** Suponga que sólo aplica el 20% de descuento. Encuentre una función que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio regular $x$.

**(b)** Suponga que sólo aplica el cupón de $50. Encuentre una función $g$ que modele el precio de compra del teléfono celular como función del precio $x$ de la etiqueta.

**(c)** Si se puede usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es ya sea $f \circ g(x)$ o $g \circ f(x)$, dependiendo del pedido en el que se aplique el precio. Encuentre $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Cuál composición da el precio más bajo?

**65. Descuentos múltiples** Un distribuidor de aparatos electrodomésticos anuncia un 10% de descuento en todas sus máquinas lavarropas. Además, el fabricante ofrece un descuento de $100 sobre la compra de una lavarropas. Represente con $x$ el precio de la etiqueta de la máquina lavarropas.

**(a)** Suponga que sólo aplica el 10% de descuento. Encuentre una función $f$ que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio $x$ de etiqueta.

**(b)** Suponga que sólo aplica el descuento de $100. Encuentre una función $g$ que modele el precio de compra de la lavarropas como función del precio $x$ de etiqueta.

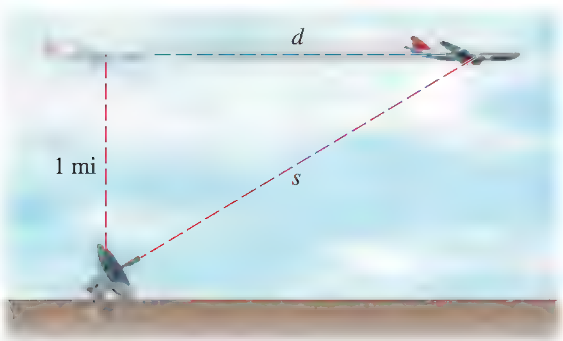
**(c)** Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?

**66. Trayectoria de un avión** Un avión está volando con una rapidez de 350 mi/h a una altitud de 1 milla. El avión pasa directamente arriba de una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

**(a)** Exprese la distancia $s$ (en millas) entre el avión y la estación de radar como función de la distancia horizontal $d$ (en millas) que el avión ha volado.

**(b)** Exprese $d$ como función del tiempo $t$ (en horas) que el avión ha volado.

**(c)** Use composición para expresar $s$ como función de $t$.




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**67. Interés compuesto** Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si una persona invierte $x$ dólares en esa cuenta, entonces la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir,

$$A(x) = x + 0.05x = 1.05x$$

Encuentre

$$A \circ A$$

$$A \circ A \circ A$$

$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que la persona obtiene cuando capitalice $n$ copias de $A$.

**68. Composición de funciones lineales** Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1x + b_1$$

$$g(x) = m_2x + b_2$$

son rectas con pendientes $m_1$ y $m_2$, respectivamente. ¿Es una recta de la gráfica $f \circ g$? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

**69. Despejar una función desconocida de una ecuación** Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$

$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función $f$ tal que $f \circ g = h$. (Piense en qué operaciones tendrá que efectuar en la fórmula de $g$ para terminar con la fórmula de $h$.) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$

$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Utilice la misma clase de razonamiento para hallar una función $g$ tal que $f \circ g = h$.

**70. Composiciones de funciones impares y pares** Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si $g$ es una función par, ¿$h$ es necesariamente par? Si $g$ es impar, ¿$h$ es impar? ¿Qué pasa si $g$ es par y $f$ es impar? ¿Qué pasa si $g$ es impar y $f$ es par?

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Iteración y caos**

En este proyecto exploramos el proceso de componer repetidamente una función consigo misma; el resultado puede ser regular o caótico. Usted puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 2.7 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

Funciones uno a uno ▶ La inversa de una función ▶ Graficar la inversa de una función

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno.*

## ▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones $f$ y $g$ cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que $f$ nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en $A$ tienen imágenes diferentes), mientras que $g$ toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.

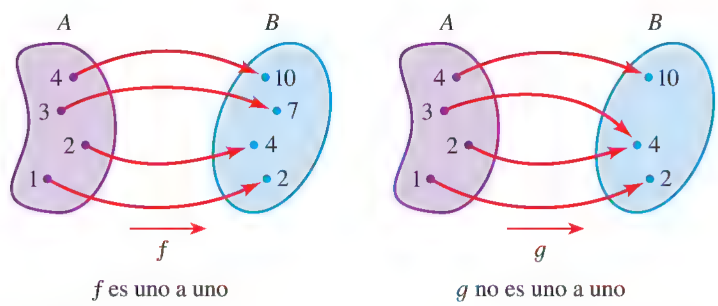



**FIGURA 1**

### DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio $A$ se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de $A$ que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

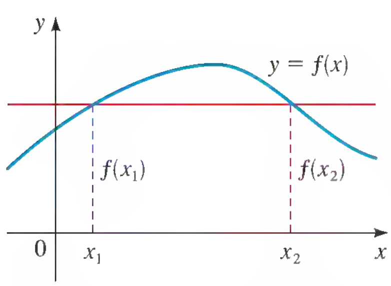



**FIGURA 2** Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de $f$ en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que $f$ no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

### PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

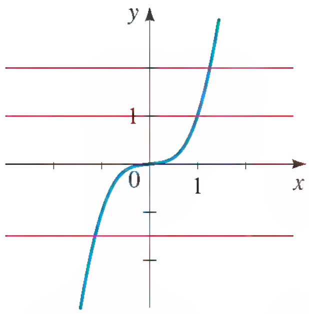



**FIGURA 3** $f(x) = x^3$ es uno a uno.

## EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

**SOLUCIÓN 1** Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

**SOLUCIÓN 2** De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, $f$ es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Observe que la función $f$ del Ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno.*

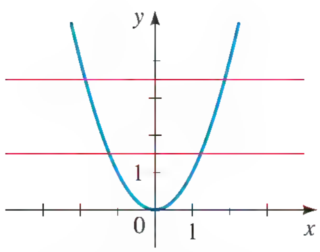



**FIGURA 4** $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

## EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

**SOLUCIÓN 1** Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y $-1$ tienen la misma imagen.

**SOLUCIÓN 2** De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de $g$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, $g$ no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

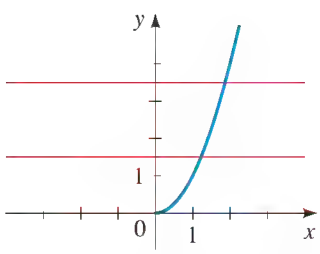



**FIGURA 5** $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ es uno a uno.

Aun cuando la función $g$ del Ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

entonces $h$ es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

## EJEMPLO 3 | Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

**SOLUCIÓN** Suponga que hay números $x_1$ y $x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4 \qquad \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2 \qquad \text{Reste 4}$$

$$x_1 = x_2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por lo tanto, $f$ es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

### DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea $f$ una función uno a uno con dominio $A$ y rango $B$. Entonces su **función inversa** $f^{-1}$ tiene dominio $B$ y rango $A$ y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier $y$ en $B$.

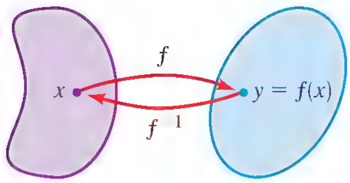



**FIGURA 6**

Esta definición dice que si $f$ toma $x$ por $y$, entonces $f^{-1}$ regresa $y$ a $x$. (Si $f$ no fuera uno a uno, entonces $f^{-1}$ no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 6 indica que $f^{-1}$ invierte el efecto de $f$. De la definición tenemos

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

No confunda el $-1$ de $f^{-1}$ por un exponente.

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

## EJEMPLO 4 | Hallar $f^{-1}$ para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, hallar $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(10)$.

**SOLUCIÓN** De la definición de $f^{-1}$ tenemos

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$
$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$
$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

La Figura 7 muestra cómo $f^{-1}$ invierte el efecto de $f$ en este caso.

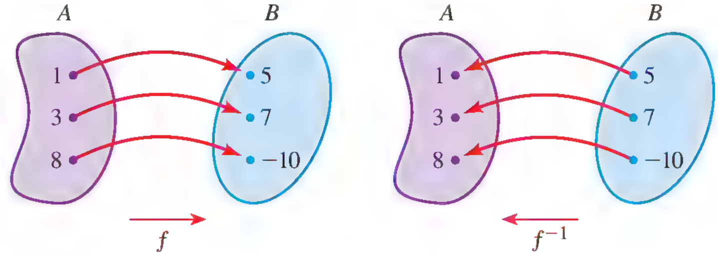



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Por definición, la función inversa $f^{-1}$ deshace lo que $f$ hace: si empezamos con $x$, aplicamos $f$ y luego aplicamos $f^{-1}$, llegamos otra vez a $x$, donde empezamos. Análogamente, $f$ deshace lo que $f^{-1}$ hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de $f$ en esta forma debe ser la inversa de $f$. Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

### PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea $f$ una función uno a uno con dominio $A$ y rango $B$. La función inversa $f^{-1}$ satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

Recíprocamente, cualquier función $f^{-1}$ que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de $f$.

Estas propiedades indican que $f$ es la función inversa de $f^{-1}$, de modo que decimos que $f$ y $f^{-1}$ son *inversas entre sí*.

## EJEMPLO 5 | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

**SOLUCIÓN** Observe que el dominio y rango de $f$ y de $g$ es $\mathbb{R}$. Tenemos

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por lo tanto, por la Propiedad de Funciones Inversas, $f$ y $g$ son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de $f^{-1}$ que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si $y = f(x)$ y si podemos despejar $x$ de esta ecuación en términos de $y$, entonces debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si entonces intercambiamos $x$ y $y$, tenemos $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

### CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje $x$ de esta ecuación en términos de $y$ (si es posible).
3. Intercambie $x$ y $y$. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar $x$ y $y$ primero y luego despejar $y$ en términos de $x$.

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que $f^{-1}$ invierte el efecto de $f$. La función $f$ es la regla "Multiplique por 3, luego reste 2", mientras que $f^{-1}$ es la regla "Sume 2, luego divida entre 3".

## EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos $x$ de esta ecuación.

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$
$$x = \frac{y+2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente, intercambiamos $x$ y $y$.

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x-2)+2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+2}{3}\right) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \checkmark$$

En el Ejemplo 7, observe que $f^{-1}$ invierte el efecto de $f$. La función $f$ es la regla "Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que $f^{-1}$ es la regla "Multiplique por 2, sume 3, luego tome la quinta potencia".

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Usamos la Propiedad de la Función Inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5-3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5-3}{2}\right)+3\right]^{1/5} \\ &= (x^5-3+3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \\ f(f^{-1}(x)) &= f((2x+3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x+3)^{1/5}]^5-3}{2} \\ &= \frac{2x+3-3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \quad ✔ \end{aligned}$$

Las funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

## EJEMPLO 7 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5-3}{2}$.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos $x$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^5-3}{2} && \text{Ecuación que define la función} \\ 2y &= x^5 - 3 && \text{Multiplique por 2} \\ x^5 &= 2y + 3 && \text{Sume 3 (y cambie lados)} \\ x &= (2y+3)^{1/5} && \text{Tome raíz quinta de cada lado} \end{aligned}$$

A continuación intercambiamos $x$ y $y$ para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

## EJEMPLO 8 | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos $y = (2x + 3)/(x - 1)$ y despejamos $x$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+3}{x-1} && \text{Ecuación que define la función} \\ y(x-1) &= 2x+3 && \text{Multiplique por } x-1 \\ yx - y &= 2x+3 && \text{Desarrolle} \\ yx - 2x &= y+3 && \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo} \\ x(y-2) &= y+3 && \text{Factorice } x \\ x &= \frac{y+3}{y-2} && \text{Divida entre } y-2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

## Graficar la inversa de una función

El principio de intercambiar $x$ y $y$ para hallar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de $f^{-1}$ a partir de la gráfica de $f$. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto $(a, b)$ está en la gráfica de $f$ si y sólo si el punto $(b, a)$ está en la gráfica de $f^{-1}$. Pero obtenemos el punto $(b, a)$ a partir del punto $(a, b)$ al reflejar en la recta $y = x$ (vea la Figura 8 en la página siguiente). Por lo tanto, como lo ilustra la Figura 9 de la página siguiente, lo siguiente es verdadero.

> La gráfica de $f^{-1}$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f$ en la recta $y = x$.

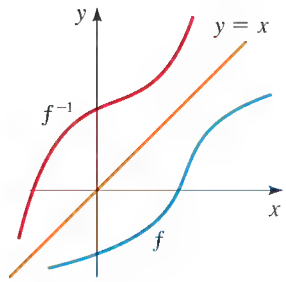



FIGURA 8

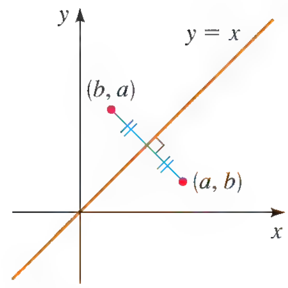



FIGURA 9

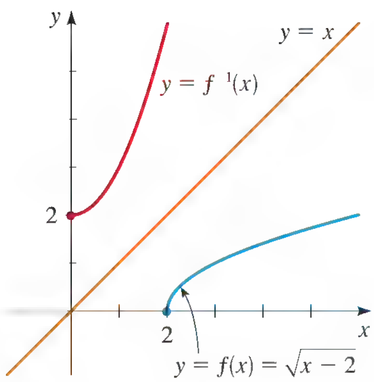



FIGURA 10

## EJEMPLO 9 | Graficar la inversa de una función

**(a)** Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-2}$.

**(b)** Use la gráfica de $f$ para trazar la gráfica de $f^{-1}$.

**(c)** Encuentre la ecuación de $f^{-1}$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Usando las transformaciones desde la Sección 2.5, trazamos la gráfica de $y = \sqrt{x-2}$ al hallar los puntos de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) de la Sección 2.2) y moverla a la derecha 2 unidades.

**(b)** La gráfica de $f^{-1}$ se obtiene de la gráfica de $f$ de la parte (a) al reflejarla en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 10.

**(c)** De la ecuación $y = \sqrt{x-2}$ despeje $x$, observando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada uno de los lados}$$

$$x = y^2 + 2 \qquad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

Intercambie $x$ y $y$:

$$y = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$$

Por lo tanto $\qquad f^{-1}(x) = x^2 + 2 \qquad x \geq 0$

Esta expresión muestra que la gráfica de $f^{-1}$ es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la Figura 10, esto parece razonable.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

En el Ejemplo 9 observe cómo $f^{-1}$ invierte el efecto de $f$. La función $f$ es la reglas "Reste 2, luego tome la raíz cuadrada," en tanto que $f^{-1}$ es la regla "Eleve al cuadrado, luego reste 2."

## 2.7 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Una función $f$ es uno a uno si diferentes entradas producen ______ salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la Prueba de la ________ __________.

**2. (a)** Para que una función tenga una inversa, debe ser ________. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3$$

**(b)** ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en la parte (a)?

**3.** Una función $f$ tiene la siguiente descripción verbal: "Multiplique por 3, sume 5, y luego tome la tercera potencia del resultado".

**(a)** Escriba una descripción verbal para $f^{-1}$.

**(b)** Encuentre fórmulas algebraicas que expresen $f$ y $f^{-1}$ en términos de la entrada $x$.

**4.** *¿Verdadero o falso?*

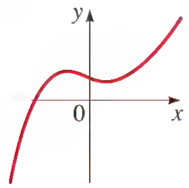
**(a)** Si $f$ tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es lo mismo que $\dfrac{1}{f(x)}$.

**(b)** Si $f$ tiene una inversa, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.

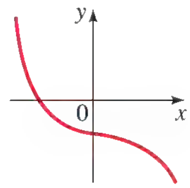
## HABILIDADES

**5-10** ■ Nos dan la gráfica de una función $f$. Determine si $f$ es uno a uno.

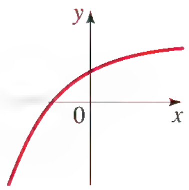
**5.**



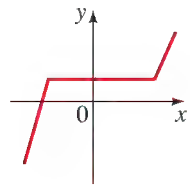
**6.**



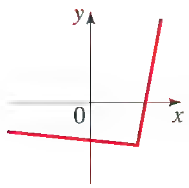
**7.**



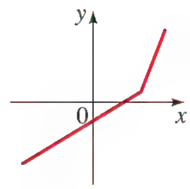
**8.**



**9.**



**10.**



**11-20** ■ Determine si la función es uno a uno.

**11.** $f(x) = -2x + 4$
**12.** $f(x) = 3x - 2$
**13.** $g(x) = \sqrt{x}$
**14.** $g(x) = |x|$
**15.** $h(x) = x^2 - 2x$
**16.** $h(x) = x^3 + 8$
**17.** $f(x) = x^4 + 5$
**18.** $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \le x \le 2$
**19.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
**20.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**21-22** ■ Suponga que $f$ es una función uno a uno.

**21.** **(a)** Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.
**(b)** Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

**22.** **(a)** Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.
**(b)** Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

**23.** Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

**24.** Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \ge -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

**25-36** ■ Use la Propiedad de la Función Inversa para demostrar que $f$ y $g$ son inversas entre sí.

**25.** $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

**26.** $f(x) = 3x; \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

**27.** $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x + 5}{2}$

**28.** $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

**29.** $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

**30.** $f(x) = x^5; \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

**31.** $f(x) = x^2 - 4, \quad x \ge 0;$
$g(x) = \sqrt{x + 4}, \quad x \ge -4$

**32.** $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x - 1)^{1/3}$

**33.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x \ne 1; \quad g(x) = \dfrac{1}{x} + 1, \quad x \ne 0$

**34.** $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2;$
$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2$

**35.** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}; \quad g(x) = \dfrac{2x + 2}{x - 1}$

**36.** $f(x) = \dfrac{x - 5}{3x + 4}; \quad g(x) = \dfrac{5 + 4x}{1 - 3x}$

**37-60** ■ Encuentre la función inversa de $f$.

**37.** $f(x) = 2x + 1$
**38.** $f(x) = 6 - x$
**39.** $f(x) = 4x + 7$
**40.** $f(x) = 3 - 5x$
**41.** $f(x) = 5 - 4x^3$
**42.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$
**43.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
**44.** $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$
**45.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 4}$
**46.** $f(x) = \dfrac{3x}{x - 2}$
**47.** $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 7}$
**48.** $f(x) = \dfrac{4x - 2}{3x + 1}$
**49.** $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$
**50.** $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 3}$
**51.** $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$
**52.** $f(x) = x^2 + x, \quad x \ge -\frac{1}{2}$
**53.** $f(x) = 4 - x^2, \quad x \ge 0$
**54.** $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
**55.** $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$
**56.** $f(x) = (2 - x^3)^5$
**57.** $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$
**58.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad 0 \le x \le 3$
**59.** $f(x) = x^4, \quad x \ge 0$
**60.** $f(x) = 1 - x^3$

**61-64** ■ Nos dan una función $f$. **(a)** Trace la gráfica de $f$. **(b)** Use la gráfica de $f$ para trazar la gráfica de $f^{-1}$. **(c)** Encuentre $f^{-1}$.

**61.** $f(x) = 3x - 6$
**62.** $f(x) = 16 - x^2, \quad x \ge 0$
**63.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$
**64.** $f(x) = x^3 - 1$

**65-70** ■ Trace la gráfica de $f$ y úsela para determinar si la función es uno a uno.

**65.** $f(x) = x^3 - x$
**66.** $f(x) = x^3 + x$
**67.** $f(x) = \dfrac{x + 12}{x - 6}$
**68.** $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$
**69.** $f(x) = |x| - |x - 6|$
**70.** $f(x) = x \cdot |x|$

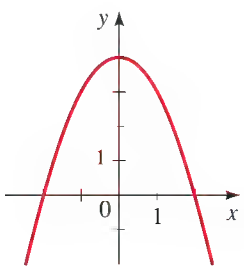
**71-74** ■ Nos dan una función uno a uno. **(a)** Encuentre la inversa de la función. **(b)** Grafique ambas funciones y su inversa en la misma pantalla para verificar que las gráficas son reflexiones una de la otra en la recta $y = x$.

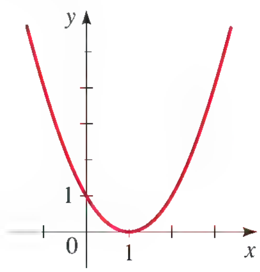
**71.** $f(x) = 2 + x$ **72.** $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

**73.** $g(x) = \sqrt{x + 3}$ **74.** $g(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

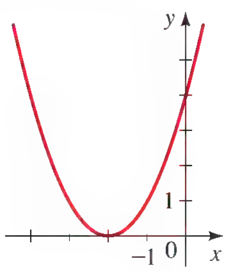
**75-78** ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio para que la función resultante *sea* uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

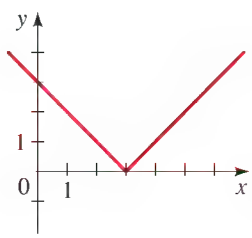
**75.** $f(x) = 4 - x^2$ **76.** $g(x) = (x - 1)^2$



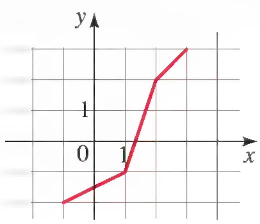

**77.** $h(x) = (x + 2)^2$ **78.** $k(x) = |x - 3|$



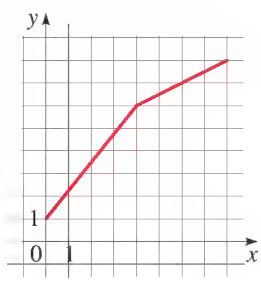




**79-80** ■ Use la gráfica de $f$ para trazar la gráfica de $f^{-1}$.

**79.**




**80.**




## APLICACIONES

**81. Tarifa por un servicio** Por sus servicios, un investigador privado requiere una tarifa de retención de \$500 más \$80 por hora. Represente con $x$ el número de horas que el investigador emplea trabajando en un caso.

**(a)** Encuentre una función que modele la tarifa del investigador como función de $x$.

**(b)** Encuentre $f^{-1}$. ¿Qué representa $f^{-1}$?

**(c)** Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

**82. Ley de Torricelli** Un tanque contiene 100 galones de agua que se drena por una fuga del fondo y hace que el tanque se vacíe en 40 minutos. La Ley de Torricelli da el volumen del agua restante en el tanque después de $t$ minutos como

$$V(t) = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

**(a)** Encuentre $V^{-1}$. ¿Qué representa $V^{-1}$?

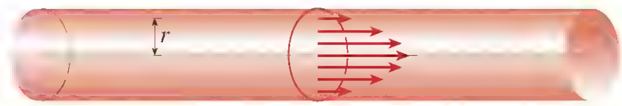
**(b)** Encuentre $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

**83. Circulación sanguínea** Cuando la sangre se mueve en una vena o arteria, su velocidad $v$ es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que aumenta la distancia $r$ desde el eje central (vea la figura siguiente). Para una arteria con radio 0.5 cm, $v$ (en cm/s) está dada como función de $r$ (en cm)

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2)$$

**(a)** Encuentre $v^{-1}$. ¿Qué representa $v^{-1}$?

**(b)** Encuentre $v^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?




**84. Función de demanda** La cantidad de una mercancía que se vende recibe el nombre de *demanda* de esa mercancía. La demanda $D$ de cierta mercancía es función del precio dado por

$$D(p) = -3p + 150$$

**(a)** Encuentre $D^{-1}$. ¿Qué representa $D^{-1}$?

**(b)** Encuentre $D^{-1}(30)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

**85. Escalas de temperatura** La relación entre las escalas Fahrenheit ($F$) y Celsius ($C$) está dada por

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

**(a)** Encuentre $F^{-1}$. ¿Qué representa $F^{-1}$?

**(b)** Encuentre $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

**86. Tasas de cambio** El valor relativo de las monedas en circulación fluctúa a diario. Cuando este problema se escribió, un dólar canadiense valía 1.0573 dólares de Estados Unidos.

**(a)** Encuentre una función $f$ que dé el valor del dólar de Estados Unidos $f(x)$ de $x$ dólares canadienses.

**(b)** Encuentre $f^{-1}$. ¿Qué representa $f^{-1}$?

**(c)** ¿Cuánto dinero canadiense valdrían \$12,250 en dólares de Estados Unidos?

**87. Impuesto sobre la renta** En cierto país, el impuesto sobre ingresos iguales o menores a € 20,000 es 10%. Para ingresos mayores a €20,000, el impuesto es €2000 más 20% de la cantidad que pase de €20,000.

**(a)** Encuentre una función $f$ que dé el impuesto sobre la renta en un ingreso $x$. Exprese $f$ como función definida por tramos.

**(b)** Encuentre $f^{-1}$. ¿Qué representa $f^{-1}$?

**(c)** ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de €10,000?

**88. Descuentos múltiples** Un distribuidor de autos anuncia un 15% de descuento en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece un descuento de \$1000 en la compra de un auto nuevo. Con $x$ represente el precio de etiqueta del auto.

**(a)** Suponga que aplica sólo el 15% de descuento. Encuentre una función $f$ que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta $x$.

(b) Suponga que aplica sólo el descuento de \$1000. Encuentre una función $g$ que modele el precio de compra del auto como función del precio de etiqueta $x$.
(c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.
(d) Encuentre $H^{-1}$. ¿Qué representa $H^{-1}$?
(e) Encuentre $H^{-1}(13{,}000)$. ¿Qué representa la respuesta de usted?

**89. Costo de una pizza** Marcello's Pizza cobra un precio base de \$7 por una pizza grande más \$2 por cada aderezo o guarnición. Así, si una persona ordena una pizza grande con $x$ aderezos, el precio de su pizza está dado por la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre $f^{-1}$. ¿Qué representa la función $f^{-1}$?

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**90. Determinar cuándo una función lineal tiene inversa** Para que la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? Si es así, ¿cuál es su pendiente?

**91. Hallar una inversa "mentalmente"** En las notas al margen de esta sección señalamos que se puede hallar la inversa de una función con sólo invertir las operaciones que forman la función. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 vimos que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \qquad \text{es} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

porque la "inversa" de "Multiplique por 3 y reste 2" es "Sume 2 y divida entre 3". Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{5}$  (b) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$
(c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$  (d) $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? Si es así, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil este trabajo.

**92. La función identidad** La función $f(x) = x$ se denomina **función identidad**. Demuestre que para cualquier función $f$ tenemos $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que la función identidad $I$ se comporta para funciones y composición igual que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

**93. Despejar una función incógnita de una ecuación** En el Ejercicio 69 de la Sección 2.6 se pidió al estudiante resolviera ecuaciones en las que las incógnitas eran funciones. Ahora que ya sabemos de inversas y la función identidad (vea Ejercicio 92), podemos usar álgebra para resolver esas ecuaciones. Por ejemplo, para despejar la función incógnita $f$ de $f \circ g = h$, efectuamos los siguientes pasos:

| | |
|---|---|
| $f \circ g = h$ | Problema: despejar $f$ |
| $f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$ | Componer con $g^{-1}$ en la derecha |
| $f \circ I = h \circ g^{-1}$ | Porque $g \circ g^{-1} = I$ |
| $f = h \circ g^{-1}$ | Porque $f \circ I = f$ |

Entonces la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para despejar la función desconocida indicada de la ecuación $f \circ g = h$.
(a) Despeje $f$, donde $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.
(b) Despeje $y$, donde $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

# CAPÍTULO 2 | REPASO

## ■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1.** Defina verbalmente cada concepto. (Verifique consultando la definición del texto.)
(a) Función
(b) Dominio y rango de una función
(c) Gráfica de una función
(d) Variables independientes y dependientes

**2.** Trace manualmente, en los mismos ejes, las gráficas de las siguientes funciones.
(a) $f(x) = x$  (b) $g(x) = x^2$
(c) $h(x) = x^3$  (d) $j(x) = x^4$

**3.** (a) Exprese la Prueba de la Recta Vertical.
(b) Exprese la Prueba de la Recta Horizontal.

**4.** ¿Cómo se define la rapidez de cambio promedio de la función $f$ entre dos puntos?

**5.** ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de cambio promedio de una función lineal?

**6.** Defina verbalmente cada concepto.
(a) Función creciente
(b) Función decreciente
(c) Función constante

**7.** Suponga que nos dan la gráfica de $f$. Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtenga de la gráfica de $f$ como sigue.
(a) Desplazar 3 unidades hacia arriba.
(b) Desplazar 3 unidades hacia abajo.
(c) Desplazar 3 unidades a la derecha.
(d) Desplazar 3 unidades a la izquierda.
(e) Reflejar en el eje $x$.
(f) Reflejar en el eje $y$.
(g) Contraer verticalmente en un factor de 3.
(h) Contraer verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$.
(i) Alargar verticalmente en un factor de 2.
(j) Alargar verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$.

8. **(a)** ¿Qué es una función par? ¿Qué simetría posee esta gráfica? Dé un ejemplo de una función par.
   **(b)** ¿Qué es una función impar? ¿Qué simetría posee esta gráfica? Dé un ejemplo de una función par.

9. ¿Qué significa decir que $f(3)$ es un valor máximo local de $f$?

10. Suponga que $f$ tiene dominio $A$ y $g$ tiene dominio $B$.
   **(a)** ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
   **(b)** ¿Cuál es el dominio de $fg$?
   **(c)** ¿Cuál es el dominio de $f/g$?

11. ¿Cómo está definida la función compuesta $f \circ g$?

12. **(a)** ¿Qué es una función uno a uno?
   **(b)** ¿Cómo se puede saber de la gráfica de una función si es uno a uno?
   **(c)** Suponga que $f$ es uno a uno con dominio $A$ y rango $B$. ¿Cómo está definida la función inversa $f^{-1}$? ¿Cuál es el dominio de $f^{-1}$? ¿Cuál es el rango de $f^{-1}$?
   **(d)** Si nos dan una fórmula para $f$, ¿cómo encontramos una fórmula para $f^{-1}$?
   **(e)** Si nos dan la gráfica de $f$, ¿cómo encontramos la gráfica de $f^{-1}$?

## EJERCICIOS

**1-2** ■ Nos dan una descripción verbal de una función $f$. Encuentre una fórmula que exprese $f$ en notación de funciones.

1. "Elevar al cuadrado, luego restar 5."

2. "Dividir entre 2, luego sumar 9."

**3-4** ■ Nos dan una fórmula para una función $f$. Dé una descripción verbal de la función.

3. $f(x) = 3(x + 10)$

4. $f(x) = \sqrt{6x - 10}$

**5-6** ■ Complete la tabla de valores para la función dada.

5. $g(x) = x^2 - 4x$

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| −1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

6. $h(x) = 3x^2 + 2x - 5$

| $x$ | $h(x)$ |
|---|---|
| 2 | |
| −1 | |
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |

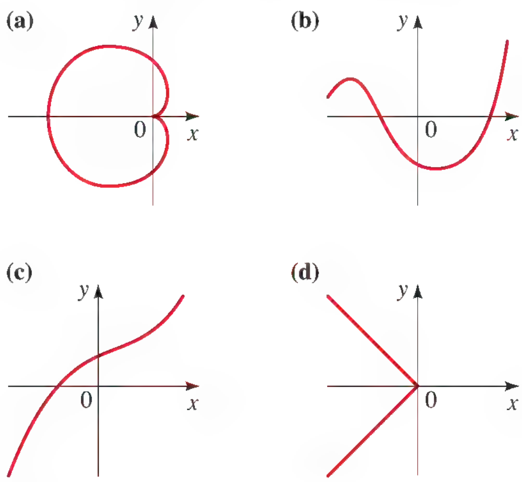
7. Un editor estima que el costo $C(x)$ de imprimir una serie de $x$ ejemplares de cierto libro de texto de matemáticas está dado por la función $C(x) = 5000 + 30x - 0.001x^2$.
   **(a)** Encuentre $C(1000)$ y $C(10{,}000)$.
   **(b)** ¿Qué representan las respuestas de usted en la parte (a)?
   **(c)** Encuentre $C(0)$. ¿Qué representa este número?

8. Reynalda trabaja como vendedora en el departamento de electrónica de una tienda departamental. Ella gana un salario semanal fijo más una comisión basada en el precio al menudeo de los artículos que venda. Si vende mercancía con valor de $x$ dólares, su ganancia de la semana está dada por la función $E(x) = 400 + 0.03x$.
   **(a)** Encuentre $E(2000)$ y $E(15{,}000)$.
   **(b)** ¿Qué representan las respuestas de usted en la parte (a)?
   **(c)** Encuentre $E(0)$. ¿Qué representa este número?
   **(d)** De la fórmula para $E$, determine qué porcentaje gana Reynalda sobre los artículos que venda.

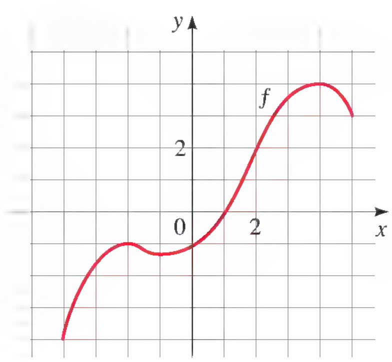
9. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, encuentre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(x + 1)$, $f(2x)$, y $2f(x) - 2$.

10. Si $f(x) = 4 - \sqrt{3x - 6}$, encuentre $f(5)$, $f(9)$, $f(a + 2)$, $f(-x)$, $f(x^2)$, y $[f(x)]^2$.

11. ¿Cuáles de las siguientes figuras son gráficas de funciones? ¿Cuáles de las funciones son uno a uno?




12. Nos dan la gráfica de una función $f$.
   **(a)** Encuentre $f(-2)$ y $f(2)$.
   **(b)** Encuentre el dominio de $f$.
   **(c)** Encuentre el rango de $f$.
   **(d)** ¿En qué intervalos es $f$ creciente? ¿En qué intervalos es $f$ decreciente?
   **(e)** ¿Cuáles son los valores máximos locales de $f$?
   **(f)** ¿$f$ es uno a uno?




**13-14** ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

13. $f(x) = \sqrt{x + 3}$

14. $F(t) = t^2 + 2t + 5$

**15-22** ■ Encuentre el dominio de la función.

**15.** $f(x) = 7x + 15$

**16.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

**17.** $f(x) = \sqrt{x + 4}$

**18.** $f(x) = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$

**19.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2}$

**20.** $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

**21.** $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

**22.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt[3]{2x} + 2}$

**23-40** ■ Trace la gráfica de la función.

**23.** $f(x) = 1 - 2x$

**24.** $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5),\ 2 \le x \le 8$

**25.** $f(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$

**26.** $g(t) = t^2 - 2t$

**27.** $f(x) = x^2 - 6x + 6$

**28.** $f(x) = 3 - 8x - 2x^2$

**29.** $g(x) = 1 - \sqrt{x}$

**30.** $g(x) = -|x|$

**31.** $h(x) = \frac{1}{2}x^3$

**32.** $h(x) = \sqrt{x + 3}$

**33.** $h(x) = \sqrt[3]{x}$

**34.** $H(x) = x^3 - 3x^2$

**35.** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

**36.** $G(x) = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

**37.** $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

**38.** $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

**39.** $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

**40.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

**41-44** ■ Determine si la ecuación define a $y$ como una función de $x$.

**41.** $x + y^2 = 14$

**42.** $3x - \sqrt{y} = 8$

**43.** $x^3 - y^3 = 27$

**44.** $2x = y^4 - 16$

**45.** Determine cuál rectángulo de vista produce la gráfica más apropiada de la función

$$f(x) = 6x^3 - 15x^2 + 4x - 1$$

(i) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (ii) $[-8, 8]$ por $[-8, 8]$
(iii) $[-4, 4]$ por $[-12, 12]$ (iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

**46.** Determine cuál rectángulo de vista produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = \sqrt{100 - x^3}$

(i) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(ii) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(iii) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$
(iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

**47-50** ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado.

**47.** $f(x) = x^2 + 25x + 173$

**48.** $f(x) = 1.1x^3 - 9.6x^2 - 1.4x + 3.2$

**49.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

**50.** $f(x) = |x(x + 2)(x + 4)|$

**51.** Encuentre, aproximadamente, el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$$

**52.** Encuentre, aproximadamente, el rango de la función

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6$$

**53-54** ■ Trace la gráfica de la función $f$, y determine los intervalos en los que $f$ es creciente y en los que es decreciente.

**53.** $f(x) = x^3 - 4x^2$

**54.** $f(x) = |x^4 - 16|$

**55-58** ■ Encuentre la rapidez de cambio promedio de la función entre los puntos dados.

**55.** $f(x) = x^2 + 3x;\quad x = 0, x = 2$

**56.** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2};\quad x = 4, x = 8$

**57.** $f(x) = \dfrac{1}{x};\quad x = 3, x = 3 + h$

**58.** $f(x) = (x + 1)^2;\quad x = a, x = a + h$

**59.** La población de una comunidad planeada a orillas del mar en Florida está dada por la función $P(t) = 3000 + 200t + 0.1t^2$, donde $t$ representa el número de años desde que la comunidad fue incorporada en 1985.
**(a)** Encuentre $P(10)$ y $P(20)$. ¿Qué representan estos valores?
**(b)** Encuentre la rapidez de cambio promedio de $P$ entre $t = 10$ y $t = 20$. ¿Qué representa este número?

**60.** Ella está ahorrando para su retiro, haciendo depósitos regulares en un plan 401(k). Cuando aumenta su salario, encuentra que puede depositar cantidades crecientes cada año. Entre 1995 y 2008, la cantidad anual (en dólares) que depositó estuvo dada por la función $D(t) = 3500 + 15t^2$, donde $t$ representa el año del depósito medido desde el principio del plan (entonces, 1995 corresponde a $t = 0$ y 1996 corresponde a $t = 1$, y así sucesivamente).
**(a)** Encuentre $D(0)$ y $D(15)$. ¿Qué representan estos valores?
**(b)** Suponiendo que sus depósitos continúen siendo modelados por la función $D$, ¿en qué año habrá depositado \$17,000?
**(c)** Encuentre la rapidez de cambio promedio de $D$ entre $t = 0$ y $t = 15$. ¿Qué representa este número?

**61-62** ■ Nos dan una función $f$. **(a)** Encuentre la rapidez de cambio promedio de $f$ entre $x = 0$ y $x = 2$, y la rapidez de cambio promedio de $f$ entre $x = 15$ y $x = 50$. **(b)** ¿Son iguales las dos rapidez de cambio promedios que encontró usted en la parte (a)? Explique por qué sí o por qué no.

**61.** $f(x) = \frac{1}{2}x - 6$

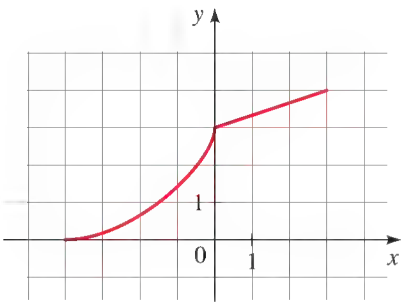
**62.** $f(x) = 8 - 3x$

**63.** Suponga que nos dan la gráfica de $f$. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de $f$.

**(a)** $y = f(x) + 8$ **(b)** $y = f(x + 8)$
**(c)** $y = 1 + 2f(x)$ **(d)** $y = f(x - 2) - 2$
**(e)** $y = f(-x)$ **(f)** $y = -f(-x)$
**(g)** $y = -f(x)$ **(h)** $y = f^{-1}(x)$

**64.** Nos dan la gráfica de $f$. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

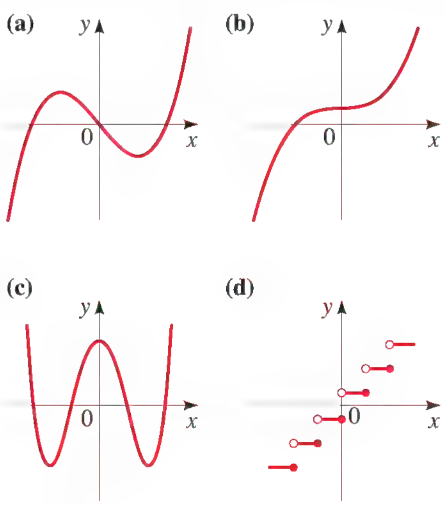
**(a)** $y = f(x - 2)$ **(b)** $y = -f(x)$
**(c)** $y = 3 - f(x)$ **(d)** $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
**(e)** $y = f^{-1}(x)$ **(f)** $y = f(-x)$




**65.** Determine si $f$ es par, impar, o ninguna de éstas.

**(a)** $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ **(b)** $f(x) = x^3 - x^7$
**(c)** $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **(d)** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

**66.** Determine si la función de la figura es par, impar, o ninguna de éstas.




**67.** Encuentre el mínimo valor de la función $g(x) = 2x^2 + 4x - 5$.

**68.** Encuentre el máximo valor de la función $f(x) = 1 - x - x^2$.

**69.** Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra verticalmente hacia arriba. Su altura (en pies) arriba del suelo después de $t$ segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 48t + 32$$

¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

**70.** La utilidad $P$ (en dólares) generada por vender $x$ unidades de cierta mercancía está dada por

$$P = -1500 + 12x - 0.0004x^2$$

¿Cuál es la máxima utilidad, y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?

**71-72** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y los valores de $x$ en los que se presentan. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

**71.** $f(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$ **72.** $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

**73-74** ■ Nos dan dos funciones, $f$ y $g$. Trace gráficas de $f$, $g$ y $f + g$ en la misma pantalla de una calculadora graficadora para ilustrar el concepto de adición gráfica.

**73.** $f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^2$

**74.** $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = 3 - x^2$

**75.** Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = 4 - 3x$, encuentre las siguientes funciones.

**(a)** $f + g$ **(b)** $f - g$ **(c)** $fg$
**(d)** $f/g$ **(e)** $f \circ g$ **(f)** $g \circ f$

**76.** Si $f(x) = 1 + x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, encuentre lo siguiente.

**(a)** $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $(f \circ g)(2)$
**(d)** $(f \circ f)(2)$ **(e)** $f \circ g \circ f$ **(f)** $g \circ f \circ g$

**77-78** ■ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

**77.** $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 2x - x^2$

**78.** $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

**79.** Encuentre $f \circ g \circ h$, donde $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = 1 - x^2$, y $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

**80.** Si $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, encuentre funciones $f$, $g$, y $h$ tales que $f \circ g \circ h = T$.

**81-86** ■ Determine si la función es uno a uno.

**81.** $f(x) = 3 + x^3$

**82.** $g(x) = 2 - 2x + x^2$

**83.** $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

**84.** $r(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$

**85.** $p(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

**86.** $q(x) = 3.3 + 1.6x + 2.5x^3$

**87-90** ■ Encuentre la inversa de la función.

**87.** $f(x) = 3x - 2$ **88.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

**89.** $f(x) = (x + 1)^3$ **90.** $f(x) = 1 + \sqrt[5]{x - 2}$

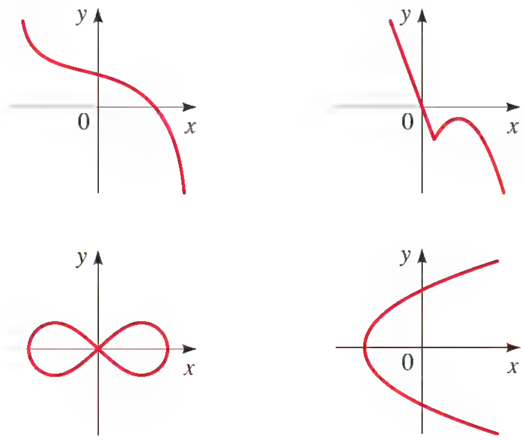
**91. (a)** Trace la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad x \geq 0$$

**(b)** Use la parte (a) para trazar la gráfica de $f^{-1}$.
**(c)** Encuentre una ecuación para $f^{-1}$.

**92. (a)** Demuestre que la función de $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$ es uno a uno.
**(b)** Trace la gráfica de $f$.
**(c)** Use la parte (b) para trazar la gráfica de $f^{-1}$.
**(d)** Encuentre una ecuación para $f^{-1}$.

1. ¿Cuáles de las siguientes gráficas son funciones? Si la gráfica es la de una función, ¿es uno a uno?




2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$.
   **(a)** Evalúe $f(3)$, $f(5)$ y $f(a - 1)$.
   **(b)** Encuentre el dominio de $f$.

3. Una función tiene la siguiente descripción verbal: "Restar 2, luego elevar al cubo el resultado."
   **(a)** Encuentre una fórmula que exprese $f$ algebraicamente.
   **(b)** Haga una tabla de valores de $f$, para las entradas $-1$, 0, 1, 2, 3 y 4.
   **(c)** Trace una gráfica de $f$, usando la tabla de valores de la parte (b) para ayudarse.
   **(d)** ¿Cómo sabemos que $f$ tiene una inversa? Dé una descripción verbal para $f^{-1}$.
   **(e)** Encuentre una fórmula que exprese $f^{-1}$ algebraicamente.

4. Un grupo de personas que recaudan fondos para una escuela vende barras de chocolate para ayudar a financiar una piscina para su programa de educación física. El grupo encuentra que cuando fijan el precio de $x$ dólares por barra (donde $0 < x \le 5$), el ingreso total por sus ventas (en dólares) está dado por la función $R(x) = -500x^2 + 3000x$.
   **(a)** Evalúe $R(2)$ y $R(4)$. ¿Qué representan estos valores?
   **(b)** Use calculadora graficadora para graficar $R$. ¿Qué le dice la gráfica acerca de lo que ocurre al ingreso cuando aumenta el precio de 0 a 5 dólares?
   **(c)** ¿Cuál es el máximo ingreso, y a qué precio se obtiene?

5. Determine la rapidez de cambio promedio para la función $f(t) = t^2 - 2t$ entre $t = 2$ y $t = 5$.

6. **(a)** Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3$.
   **(b)** Use la parte (a) para graficar la función $g(x) = (x - 1)^3 - 2$.

7. **(a)** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(x - 3) + 2$ a partir de la gráfica de $f$?
   **(b)** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(-x)$ a partir de la gráfica de $f$?

8. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 \quad x & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   **(a)** Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.
   **(b)** Trace la gráfica de $f$.

9. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$, encuentre lo siguiente.
   **(a)** $f \circ g$
   **(b)** $g \circ f$
   **(c)** $f(g(2))$
   **(d)** $g(f(2))$
   **(e)** $g \circ g \circ g$

**10.** **(a)** Si $f(x) = \sqrt{3 - x}$, encuentre la función inversa $f^{-1}$.

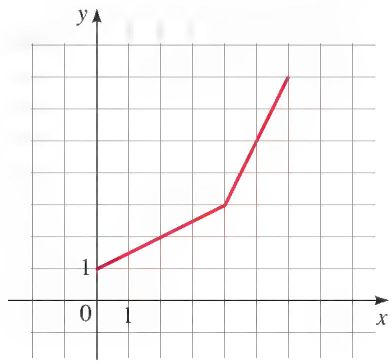
**(b)** Trace las gráficas de $f$ y $f^{-1}$ en los mismos ejes de coordenadas.

**11.** Nos dan la gráfica de una función $f$.

**(a)** Encuentre el dominio y rango de $f$.

**(b)** Trace la gráfica de $f^{-1}$.

**(c)** Encuentre la rapidez de cambio promedio de $f$ entre $x = 2$ y $x = 6$.




**12.** Sea $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$.

**(a)** Trace la gráfica de $f$ en un rectángulo de vista apropiado.

**(b)** ¿$f$ es uno a uno?

**(c)** Encuentre los valores máximo y mínimo locales de $f$ y los valores de $x$ en los que se presentan. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

**(d)** Use la gráfica para determinar el rango de $f$.

**(e)** Encuentre los intervalos en los que $f$ es creciente y en los que $f$ es decreciente.

# Modelado con funciones

Muchos de los procesos que se estudian en ciencias físicas y sociales se relacionan con entender la forma en que una cantidad varía con respecto de otra. Hallar una función que describa la dependencia de una cantidad, respecto de otra, se conoce como *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo aumenta con el tiempo. Él trata de modelar este fenómeno al hallar la función (o regla) precisa que relacione la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En este *Enfoque* aprenderemos a hallar modelos que se puedan construir usando propiedades geométricas o algebraicas del objeto en estudio. Una vez hallado el modelo, lo usaremos para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso en estudio.

## Modelado con funciones

Empezamos con una situación práctica que ilustra el proceso de modelado.

### EJEMPLO 1 | Modelar el volumen de una caja

Una compañía productora de cereales para desayuno fabrica cajas para envasar sus productos. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su ancho es el triple de su profundidad, y su altura es 5 veces su profundidad.

**(a)** Encuentre una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

**(b)** Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulg.

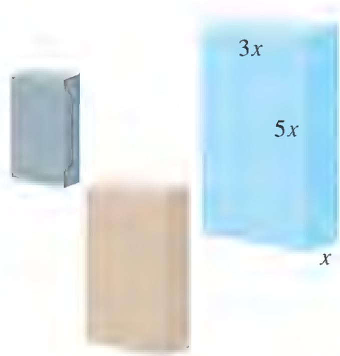
**(c)** ¿Para qué profundidad tendrá un volumen de 90 pulg$^3$?

**(d)** ¿Para qué profundidad tendrá un volumen mayor a 60 pulg$^3$?

#### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulgada, entonces el ancho es 3 pulgadas y la altura es 5 pulgadas. Por lo tanto, en este caso, el volumen es $V = 1 \times 3 \times 5 = 15$ pulg.$^3$. La tabla da otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y a mayor profundidad, mayor volumen.

| Profundidad | Volumen |
|---|---|
| 1 | $1 \times 3 \times 5 = 15$ |
| 2 | $2 \times 6 \times 10 = 120$ |
| 3 | $3 \times 9 \times 15 = 405$ |
| 4 | $4 \times 12 \times 20 = 96$ |




#### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar la función que modele el volumen de la caja, usamos los siguientes pasos.

### ▶ Expresar verbalmente el volumen

Sabemos que el volumen de una caja rectangular es

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

### ▶ Escoger la variable

Hay tres cantidades que varían: ancho, profundidad y altura. Como la función que buscamos depende de la profundidad, hacemos

$$x = \text{profundidad de la caja}$$

Entonces, expresamos las otras dimensiones de la caja en términos de $x$.

| Verbalmente | En álgebra |
|---|---|
| Profundidad | $x$ |
| Ancho | $3x$ |
| Altura | $5x$ |

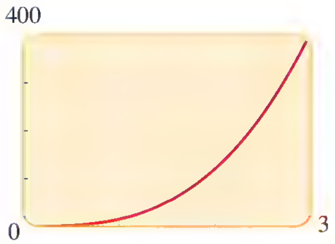



**FIGURA 1**

### ▶ Establecer el modelo

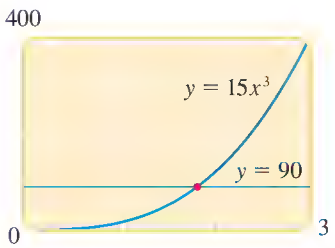
El modelo es la función $V$ que da el volumen de la caja en términos de la profundidad $x$.

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja está modelado por la función $V(x) = 15x^3$. La función $V$ está graficada en la Figura 1.




$15x^3 = 90$

**FIGURA 2**

### ▶ Usar el modelo

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b), (c) y (d).

**(b)** Si la profundidad es 1.5 pulg., el volumen es $V(1.5) = 15(1.5)^3 = 50.625$ pulg.$^3$.

**(c)** Necesitamos resolver la ecuación $V(x) = 90$, es decir,

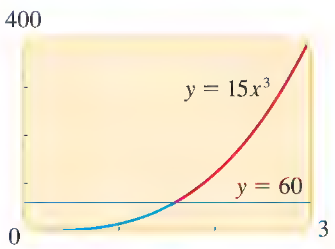
$$15x^3 = 90$$
$$x^3 = 6$$
$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1.82 \text{ pulgadas}$$

El volumen es 90 pulg.$^3$ cuando la profundidad es alrededor de 1.82 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta ecuación, como se ve en la Figura 2.)

**(d)** Necesitamos resolver la desigualdad $V(x) \geq 60$, es decir,

$$15x^3 \geq 60$$
$$x^3 \geq 4$$
$$x \geq \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

El volumen será mayor de 60 pulg.$^3$ si la profundidad es mayor a 1.59 pulgadas. (También podemos resolver gráficamente esta desigualdad, como se ve en la Figura 3.) ■




$15x^3 \geq 60$

**FIGURA 3**

Los pasos del Ejemplo 1 son característicos de cómo modelamos con funciones. Están resumidos en el recuadro siguiente.

## GUÍA PARA MODELAR CON FUNCIONES

1. **Expresar verbalmente el problema.** Identificar la cantidad que se desea modelar y expresarla, verbalmente, como función de las otras cantidades del problema.
2. **Escoger la variable.** Identificar todas las variables que se usan para expresar la función del Paso 1. Asignar un símbolo, por ejemplo $x$, a una variable, y expresar las otras variables en términos de este símbolo.
3. **Establecer el modelo.** Expresar la función en el lenguaje de álgebra al escribirla como función de la variable única escogida en el Paso 2.
4. **Usar el modelo.** Usar la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, usar los métodos descritos en la Sección 3.3.)

## EJEMPLO 2 | Instalar una cerca en un jardín

Una jardinera tiene 140 pies de malla para instalar una cerca en un jardín rectangular de hortalizas.

**(a)** Encuentre una función que modele el área del jardín que ella pueda cercar.

**(b)** ¿Para qué rango de anchos el área es mayor a 825 pies$^2$?

**(c)** ¿Puede ella cercar un jardín con área de 1250 pies$^2$?

**(d)** Encuentre las dimensiones del área más grande que ella pueda cercar.

### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Si la jardinera instala una cerca alrededor de un lote con 10 pies, entonces la longitud debe ser 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Entonces, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

La tabla siguiente muestra varias opciones para cercar el jardín. Vemos que cuando aumenta el ancho, aumenta el área cercada y luego disminuye.

| Ancho | Longitud | Área |
|---|---|---|
| 10 | 60 | 600 |
| 20 | 50 | 1000 |
| 30 | 40 | 1200 |
| 40 | 30 | 1200 |
| 50 | 20 | 1000 |
| 60 | 10 | 600 |

### SOLUCIÓN

**(a)** El modelo que buscamos es una función que da el área que ella pueda cercar.

▶ **Expresar verbalmente el problema**

Sabemos que el área del jardín rectangular es

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{longitud}$$

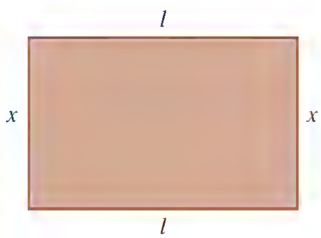



FIGURA 4

### ▶ Escoger la variable

Hay dos cantidades que varían: ancho y longitud. Como la función que buscamos depende sólo de una variable, hacemos

$$x = \text{ancho del jardín}$$

Entonces debemos expresar la longitud en términos de $x$. El perímetro se fija en 140 pies, de modo que la longitud está determinada una vez que escojamos el ancho. Si hacemos que la longitud sea $l$, como en la Figura 4, entonces $2x + 2l = 140$, de modo que $l = 70 - x$. Resumimos estos datos.

| Verbalmente | En álgebra |
|---|---|
| Ancho | $x$ |
| Longitud | $70 - x$ |

### ▶ Establecer el modelo

El modelo es la función $A$ que da el área del jardín para cualquier ancho $x$.

área = ancho × longitud

$$A(x) = x(70 - x)$$

$$A(x) = 70x - x^2$$

El área que ella puede cercar está modelada por la función $A(x) = 70x - x^2$.

### ▶ Usar el modelo

Usamos el modelo para contestar las preguntas de las partes (b)−(d).

**(b)** Necesitamos resolver la desigualdad $A(x) \geq 825$. Para resolver gráficamente, graficamos $y = 70x - x^2$ y $y = 825$ en el mismo rectángulo de vista (vea Figura 5). Vemos que $15 \leq x \leq 55$.

**(c)** De la Figura 6 vemos que la gráfica de $A(x)$ siempre está debajo de la recta $y = 1250$, de modo que nunca se alcanza un área de 1250 pies$^2$.

**(d)** Necesitamos hallar en dónde se presenta el máximo valor de la función $A(x) = 70x - x^2$. La función está graficada en la Figura 7. Usando la función TRACE de una calculadora graficadora, hallamos que la función alcanza su valor máximo en $x = 35$. Entonces, el área máxima que ella puede cercar es aquella cuando el ancho del jardín es 35 pies y su longitud es $70 - 35 = 35$ pies. El área máxima entonces es $35 \times 35 = 1225$ pies$^2$.

Los valores máximos de funciones se estudian en la página 166.

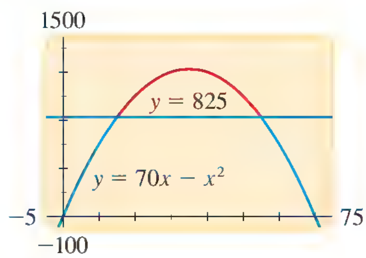



FIGURA 5

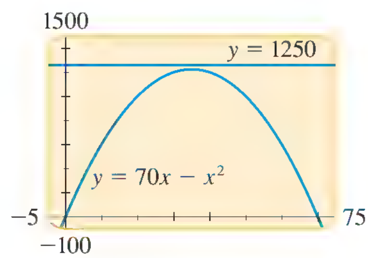



FIGURA 6

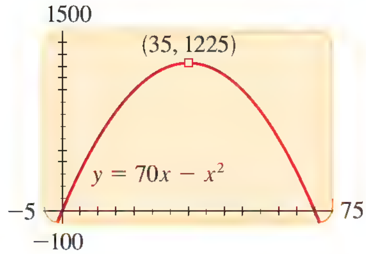



FIGURA 7

## EJEMPLO 3 | Reducir al mínimo el metal de una lata

Un fabricante hace una lata que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal de la lata?

### CONSIDERANDO EL PROBLEMA

Para usar la cantidad mínima de metal, debemos reducir al mínimo el área superficial de la lata, es decir, el área de la tapa, fondo y costados. El área de la tapa y fondo es $2\pi r^2$ y el área de los costados es $2\pi rh$ (vea Figura 8), de modo que el área superficial de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

El radio y altura de la lata se pueden escoger de modo que el volumen sea exactamente 1 L, o 1000 $cm^3$. Si buscamos un radio pequeño, por ejemplo $r = 3$, entonces la altura debe ser precisamente de la altura suficiente para hacer que el volumen total sea 1000 $cm^3$. En otras palabras, debemos tener

$$\pi(3)^2 h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000}{9\pi} \approx 35.4 \text{ cm} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora que sabemos el radio y la altura, podemos hallar el área superficial de la lata:

$$\text{área superficial} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 723.8 \text{ cm}^3$$

Si buscamos un radio diferente, podemos hallar la correspondiente altura y área superficial en una forma similar.

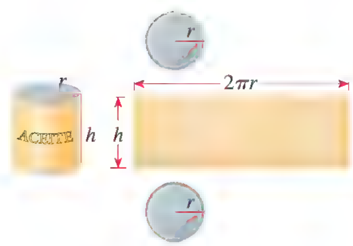



**FIGURA 8**

**SOLUCIÓN** El modelo que buscamos es una función que da el área superficial de la lata.

### ▶ Expresar verbalmente el modelo

Sabemos que para una lata cilíndrica

área superficial = área de tapa y fondo + área costados

### ▶ Escoger la variable

Hay dos cantidades que varían: radio y altura. Como la función que buscamos depende del radio, hacemos

$$r = \text{radio de la lata}$$

A continuación, debemos expresar la altura en términos de $r$. Como el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y el volumen debe ser 1000 $cm^3$, tenemos

$$\pi r^2 h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es 1000 cm}^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora podemos expresar el área de la tapa, fondo y costados en términos sólo de $r$.

| Verbalmente | En álgebra |
|---|---|
| Radio de la lata | $r$ |
| Altura de la lata | $\dfrac{1000}{\pi r^2}$ |
| Área de tapa y fondo | $2\pi r^2$ |
| Área de costados ($2\pi rh$) | $2\pi r\left(\dfrac{1000}{\pi r^2}\right)$ |

### ▶ Establecer el modelo

El modelo es la función $S$ que da el área superficial de la lata como función del radio $r$.

área superficial = área de tapa y fondo + área costados

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

### ▶ Usar el modelo

Usamos el modelo para hallar el área superficial mínima de la lata. Graficamos $S$ en la Figura 9 y hacemos acercamiento (zoom) en el punto mínimo para hallar que el valor mínimo de $S$ es alrededor de 554 cm$^2$ y se presenta cuando el radio es de unos 5.4 cm.

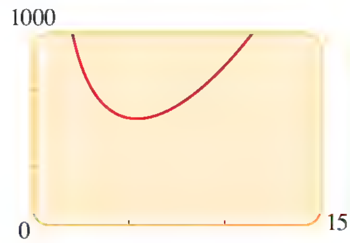



**FIGURA 9** $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

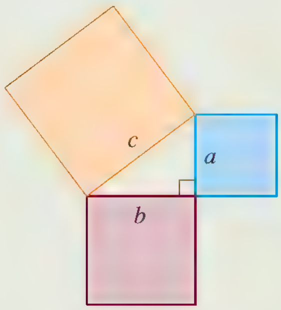
## PROBLEMAS

**1-18** ■ En estos problemas nos piden hallar una función que modele una situación real. Use los principios de modelar descritos en este *Enfoque* para ayudarse.

1. **Área** Un lote rectangular para construcción es tres veces más largo que ancho. Encuentre una función que modele su área $A$ en términos de su ancho $w$.
2. **Área** Un cartel mide 10 pulgadas más de largo que de ancho. Encuentre una función que modele su área $A$ en términos de su ancho $w$.
3. **Volumen** Una caja rectangular tiene base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen $V$ en términos de su ancho $w$.
4. **Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen $V$ del cilindro en términos de su radio $r$.
5. **Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele su área $A$ en términos de la longitud $x$ de uno de sus lados.
6. **Perímetro** Un rectángulo tiene un área de 16 m$^2$. Encuentre una función que modele su perímetro $P$ en términos de la longitud $x$ de uno de sus lados.

**PITÁGORAS** (hacia 580-500 a.C.) fundó una escuela en Croton, en el sur de Italia, dedicada al estudio de aritmética, geometría, música y astronomía. Los pitagóricos, como se llamaron, eran una sociedad secreta con peculiares reglas y ritos de iniciación. No escribieron nada y no daban a conocer a nadie lo que habían aprendido del maestro. Aun cuando por ley se prohibía a las mujeres asistir a reuniones públicas, Pitágoras las permitía en su escuela y su más famosa discípula fue Theana (con quien posteriormente se casó).

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas son los principios de todas las cosas." Su frase era "Todo es un número," con la que querían decir números *enteros*. La sobresaliente aportación de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre. En un triángulo recto, el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas del cuadrado de los otros dos lados.




$$c^2 = a^2 + b^2$$

El recíproco del Teorema de Pitágoras también es verdadero; es decir, un triángulo cuyos lados $a$, $b$ y $c$ satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo recto.

**7. Área** Encuentre una función que modele el área $A$ de un triángulo equivalente en términos de la longitud $x$ de uno de sus lados.

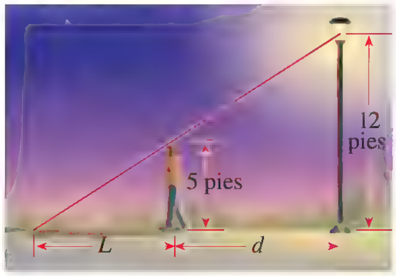
**8. Área** Encuentre una función que modele el área superficial $S$ de un cubo en términos de su volumen $V$.

**9. Radio** Encuentre una función que modele el radio $r$ de un círculo en términos de su área $A$.

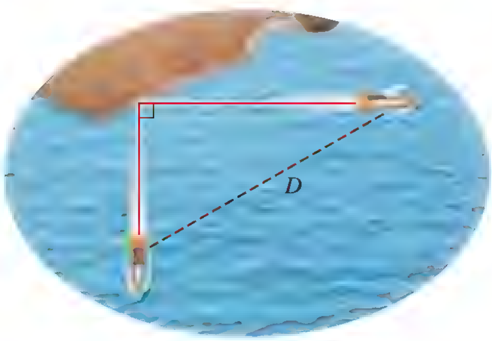
**10. Área** Encuentre una función que modele el área $A$ de un círculo en términos de su circunferencia $C$.

**11. Área** Una caja rectangular con volumen de 60 pies$^3$ tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial $S$ en términos de la longitud $x$ de un lado de su base.

**12. Longitud** Una mujer de 5 pies de estatura está de pie cerca de un farol que es de 12 pies de altura, como se ve en la figura. Encuentre una función que modele la longitud $L$ de su sombra en términos de su distancia $d$ desde la base del farol.




**13. Distancia** Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo. Uno navega al sur a 15 mi/h y, el otro, navega al este a 20 mi/h. Encuentre una función que modele la distancia $D$ entre los barcos en términos del tiempo $t$ (en horas) transcurrido desde su salida.

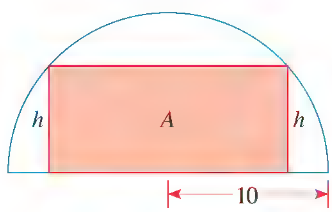



**14. Producto** La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto $P$ en términos de $x$, uno de los números.

**15. Área** Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área $A$ en términos de la longitud de su base $b$.

**16. Perímetro** Un triángulo rectángulo tiene un cateto del doble de largo que el otro. Encuentre una función que modele el perímetro $P$ en términos de la longitud $x$ del cateto más corto.

**17. Área** Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área $A$ del rectángulo en términos de su altura $h$.




**18. Altura** El volumen de un cono es 100 pulg.$^3$. Encuentre una función que modele la altura $h$ del cono en términos de su radio $r$.

**19-32** ■ En estos problemas pedimos al estudiante hallar una función que modele una situación práctica, y luego usar el modelo para contestar preguntas acerca de la situación. Use las guías de la página 215 para ayudarse.

**19. Maximizar un producto** Considere el siguiente problema: Hallar dos números cuya suma es 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.

**(a)** Experimente con el problema, haciendo una tabla como la siguiente, que muestre el producto de pares diferentes de números que totalizan 19. Con base en la evidencia de la tabla, estime la respuesta al problema.

**(b)** Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.

**(c)** Use su modelo para resolver el problema y compárelo con su respuesta a la parte (a).

**20. Reducir al mínimo una suma** Encuentre dos números positivos cuya suma es 100 y la suma de cuyos cuadrados es mínima.

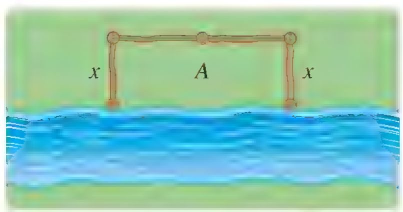
**21. Cerca alrededor de un campo** Considere el siguiente problema: Un agricultor tiene 2400 pies de malla para cercar y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cerca a lo largo del río (vea la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del campo de área máxima que él puede cercar?

**(a)** Experimente con el problema, trazando varios diagramas que ilustren la situación. Calcule el área de cada configuración y use sus resultados para estimar las dimensiones del campo más grande posible.

| Primer número | Segundo número | Producto |
|---|---|---|
| 1 | 18 | 18 |
| 2 | 17 | 34 |
| 3 | 16 | 48 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

**(b)** Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.

**(c)** Use su modelo para resolver el problema, y compárelo con su respuesta a la parte (a).



**22. Dividir un corral** Un ranchero con 750 pies de malla para cercar desea encerrar un área rectangular, y luego dividirla en cuatro corrales con cercas paralelas a un lado del rectángulo (vea la figura).

**(a)** Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.

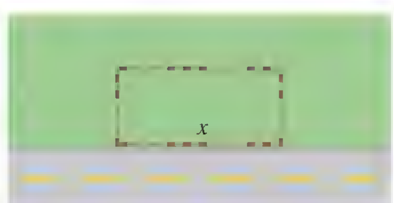
**(b)** Encuentre el área total máxima posible de los cuatro corrales.

**23. Cercar un terreno para jardín** El dueño de una propiedad desea cercar un terreno para jardín adyacente a un camino, como se ve en la figura. La cerca junto al camino debe ser más robusta y cuesta \$5 por pie, pero la otra cerca cuesta sólo \$3 por pie. El jardín ha de tener un área de 1200 pies$^2$.

**(a)** Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.

**(b)** Encuentre las dimensiones del jardín que reduzcan al mínimo el costo de cercar el jardín.

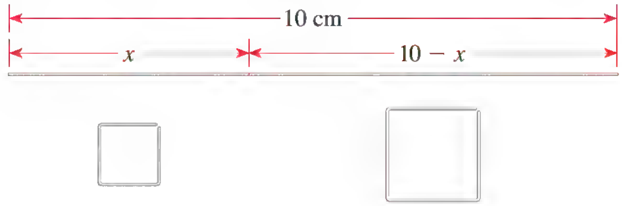
**(c)** Si el dueño tiene a lo sumo \$600 para gastar en la cerca, encuentre el rango de longitudes que puede cercar a lo largo del camino.

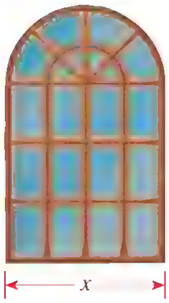


**24. Maximizar un área** Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos partes, una de longitud $x$ y la otra de longitud $10 - x$, como se ve en la figura. Cada pieza se dobla en forma de cuadrado.

**(a)** Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.

**(b)** Encuentre el valor de $x$ que reduzca al mínimo el área total de los dos cuadrados.




**25. Luz de una ventana** Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo, como se muestra en la figura de la izquierda. Se ha de construir una ventana normanda con perímetro de 30 pies.

**(a)** Encuentre una función que modele el área de la ventana.

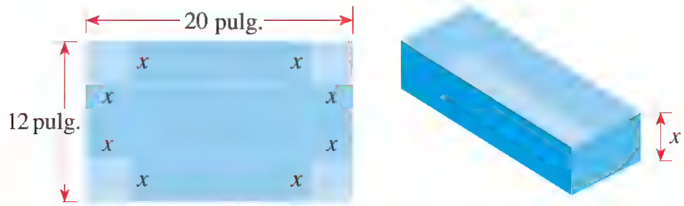
**(b)** Encuentre las dimensiones de la ventana que deje pasar la máxima cantidad de luz.

**26. Volumen de una caja** Se ha de construir una caja abierta por arriba, de un trozo rectangular de cartón con dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, cortando cuadrados iguales de lado $x$ en cada esquina y luego doblando hacia arriba los lados (vea la figura).

**(a)** Encuentre una función que modele el volumen de la caja.

**(b)** Encuentre los valores de $x$ para los cuales el volumen es mayor a 200 $\text{pulg.}^3$.

**(c)** Encuentre el máximo volumen que tal caja pueda tener.

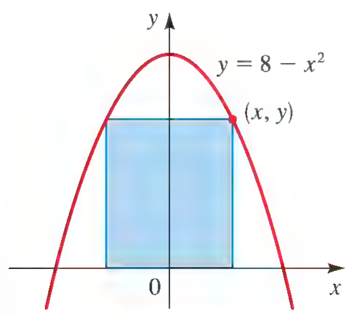



**27. Área de una caja** Una caja abierta con base cuadrada ha de tener un volumen de 12 $\text{pies}^3$.

**(a)** Encuentre una función que modele el área superficial de la caja.

**(b)** Encuentre las dimensiones de caja que reduzcan al mínimo la cantidad de material utilizado.

**28. Rectángulo inscrito** Encuentre las dimensiones que den la máxima área para el rectángulo que se muestra en la figura. Su base está sobre el eje $x$ y los otros dos vértices están arriba del eje $x$, sobre la parábola $y = 8 - x^2$.




**29. Reducir costos al mínimo** Un ranchero desea construir un corral rectangular con un área de 100 $\text{m}^2$.

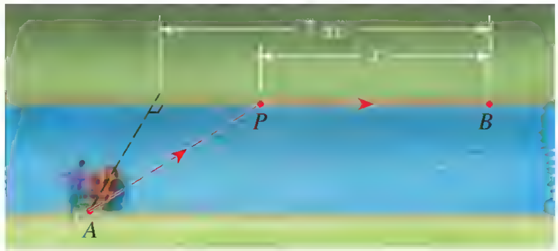
**(a)** Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.

**(b)** Encuentre las dimensiones del corral que requieran la mínima cantidad de malla para cerca.

**30. Reducir al mínimo el tiempo** Un hombre está de pie en el punto $A$ en la orilla de un río recto, de 2 millas de ancho. Para llegar al punto $B$, que está a 7 millas aguas abajo en la orilla opuesta, él rema en su bote al punto $P$ en la orilla opuesta y luego camina la distancia $x$ restante hasta $B$, como se muestra en la figura. Ahora ya puede remar a una velocidad de 2 millas/h y caminar a una velocidad de 5 millas/h.

**(a)** Encuentre una función que modele el tiempo necesario para el viaje.

**(b)** ¿Dónde debe desembarcar para llegar a $B$ tan pronto como sea posible?




**31. Vuelo de pájaro** Se suelta un ave desde el punto $A$ en una isla, a 5 millas del punto $B$ más cercano en una orilla recta. El ave vuela al punto $C$ en la orilla y luego vuela a lo largo de la orilla a su zona de anidar $D$ (vea la figura). Suponga que el ave requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre tierra y 14 kcal/milla para volar sobre el agua.

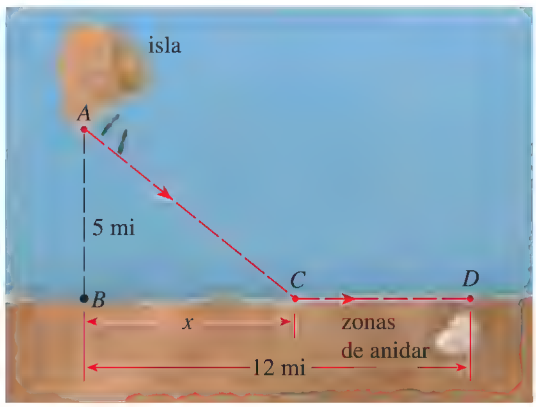
**(a)** Use el dato de que

$$\text{energía empleada} = \text{energía por milla} \times \text{millas de vuelo}$$

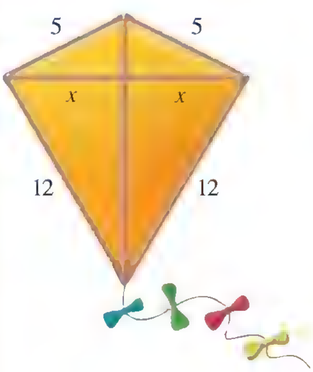
para demostrar que el total de energía empleada por el ave está modelada por la función

$$E(x) = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

**(b)** Si el ave instintivamente escoge una trayectoria que reduce al mínimo su gasto de energía, ¿a qué punto vuela?




**32. Área de una cometa** El bastidor de una cometa se ha de construir con seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde han sido cortadas a las longitudes indicadas en la figura. Sea $x$ como se muestra en la figura.




**(a)** Demuestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x\left(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2}\right)$$

**(b)** ¿Cuál debe ser la longitud de los dos travesaños para hacer máxima el área de la cometa?

Image 100/Corbis

CAPÍTULO 3

# FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES



Las funciones definidas por expresiones de polinomios se denominan funciones polinomiales. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que si ella aumenta el número de trabajadores, aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). Como otro ejemplo, cuando se golpea un balón de volibol, éste primero sube y luego baja, siguiendo una trayectoria que también está modelada por una función cuadrática. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas. Por ejemplo, los diseñadores de botes de vela unen partes de las gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas curvas paramétricas) para hacer las curvas del casco de un bote de velas.

# 3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

**Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas**

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1 x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

**FUNCIONES CUADRÁTICAS**

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

## ▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

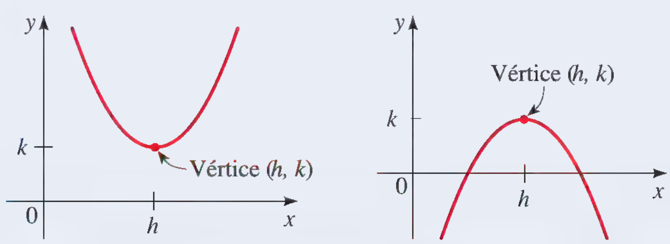
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

**FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA**

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de $f$ es una parábola con vértice $(h, k)$; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.




$f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, \; a < 0$

**EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática**

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

**(a)** Exprese $f$ en forma normal. **(b)** Trace la gráfica de $f$.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como el coeficiente de $x^2$ no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen $x$ antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x - 3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

La forma normal es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

**(b)** La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de $f$ al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en $y$ es $f(0) = 23$.

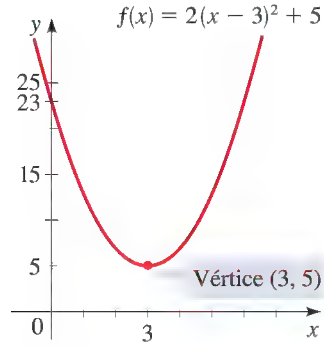



**FIGURA 1**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

## Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

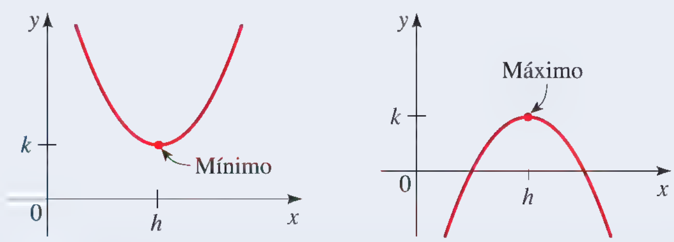
Si una función cuadrática tiene vértice $(h, k)$, entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

### VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sea $f$ una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de $f$ ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de $f$ es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de $f$ es $f(h) = k$.




$f(x) = a(x - h)^2 + k, a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k, a < 0$

## EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

**(a)** Exprese $f$ en forma normal.

**(b)** Trace la gráfica de $f$.

**(c)** Encuentre el valor mínimo de $f$.

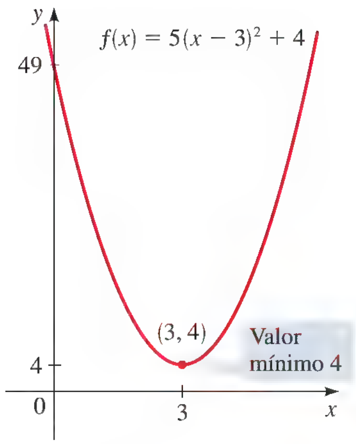



**FIGURA 2**

**SOLUCIÓN**

**(a)** Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x \quad 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

**(b)** La gráfica es la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

**(c)** Como el coeficiente de $x^2$ es positivo, $f$ tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25**

## EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

**(a)** Exprese $f$ en forma normal.

**(b)** Trace la gráfica de $f$.

**(c)** Encuentre el valor máximo de $f$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

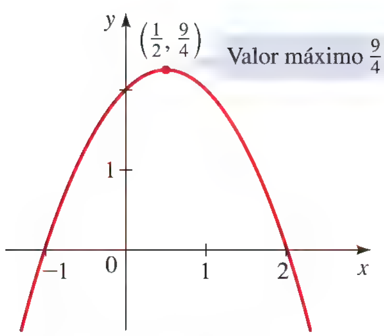



**FIGURA 3** Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

**(b)** De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en $y$ es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en $x$, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en $x$ son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de $f$ se traza en la Figura 3.

**(c)** Como el coeficiente de $x^2$ es negativo, $f$ tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o

mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\tfrac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

> **VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA**
>
> El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en
>
> $$x = -\frac{b}{2a}$$
>
> Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
>
> Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

## EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

**(a)** $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

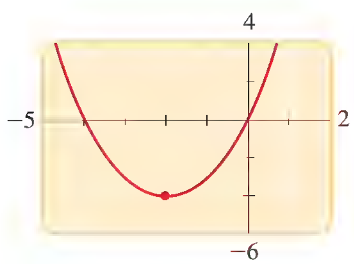
### SOLUCIÓN

**(a)** Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



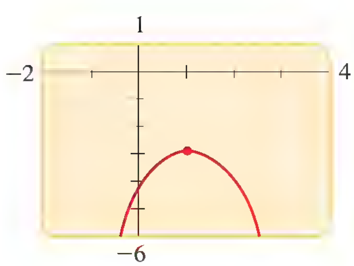
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

**(b)** Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35**

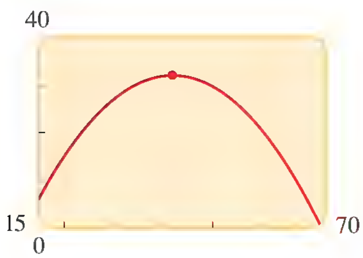
## Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

### EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento $M$ para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \leq s \leq 70$$




El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

donde $s$ es la rapidez en mi/h y $M$ se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?

**SOLUCIÓN** La función $M$ es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

### EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

**(a)** Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

**(b)** Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

**(c)** ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de $x$.

| Verbalmente | En álgebra |
|---|---|
| Precio del boleto | $x$ |
| Cantidad que baja precio del boleto | $14 - x$ |
| Aumento en asistencia | $1000(14 \quad x)$ |
| Asistencia | $9500 + 1000(14 - x)$ |

**Establezca el modelo.** El modelo que buscamos es la función $R$ que da el ingreso para un determinado precio de boleto $x$.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$
$$R(x) = x(23{,}500 - 1000x)$$
$$R(x) = 23{,}500x - 1000x^2$$

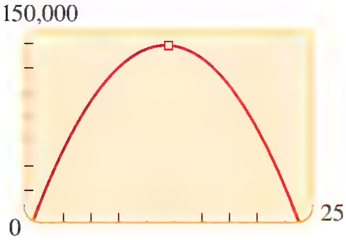
**(b)** **Use el modelo.** Como $R$ es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23{,}500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23{,}500}{2(\quad 1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

**(c)** **Use el modelo.** Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23{,}500x - 1000x^2 = 0 \qquad \text{Haga } R(x) = 0$$
$$23.5x - x^2 = 0 \qquad \text{Divida entre 1000}$$
$$x(23.5 - x) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \qquad \text{Despeje } x$$




La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

## 3.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el_________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.
   (a) La gráfica de $f$ es una parábola con vértice (___,___).
   (b) Si $a > 0$, la gráfica de $f$ abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de $f$.
   (c) Si $a < 0$, la gráfica de $f$ abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de $f$.

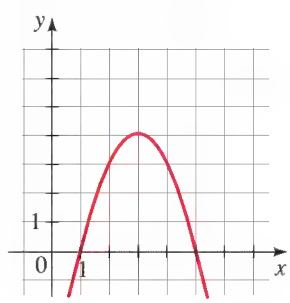
3. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ ____es el valor (mínimo/máximo)____de $f$.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de $f$.

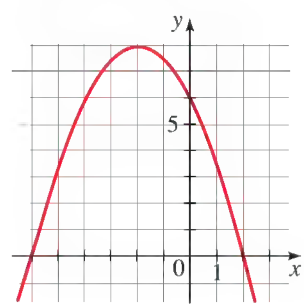
### HABILIDADES

**5-8** ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática $f$. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de $f$. **(c)** Encuentre el dominio y rango de $f$.

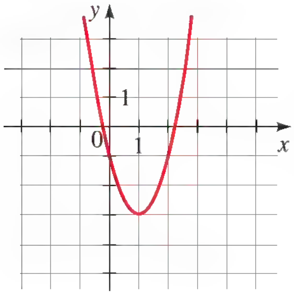
**5.** $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



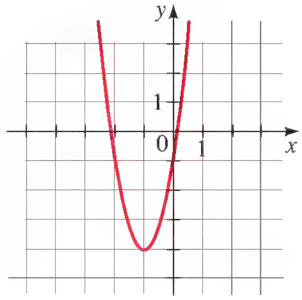

**6.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



**7.** $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$




**8.** $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$




**9-22** ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección $x$ y $y$. **(c)** Trace su gráfica.

**9.** $f(x) = x^2 - 6x$ **10.** $f(x) = x^2 + 8x$

**11.** $f(x) = 2x^2 + 6x$ **12.** $f(x) = -x^2 + 10x$

**13.** $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

**15.** $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **16.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

**17.** $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **18.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

**19.** $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **20.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

**21.** $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **22.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

**23-32** ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

**23.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

**25.** $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ **26.** $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

**27.** $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **28.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

**29.** $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **30.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

**31.** $h(x) = 1 - x - x^2$ **32.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

**33-42** ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

**33.** $f(x) = x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

**35.** $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **36.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

**37.** $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **38.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

**39.** $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **40.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

**41.** $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **42.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

**43.** Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

**44.** Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

**45-48** ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

**45.** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **46.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

**47.** $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

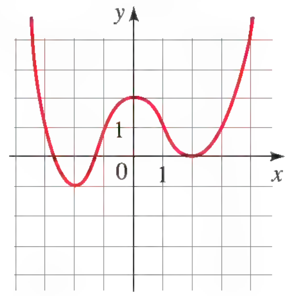
**49-50** ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $f$, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de $f$, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

**49.** $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

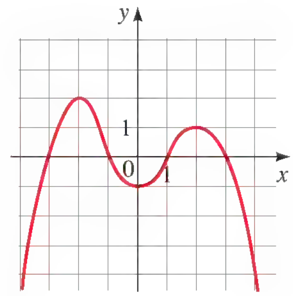
**50.** $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

**51-54** ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

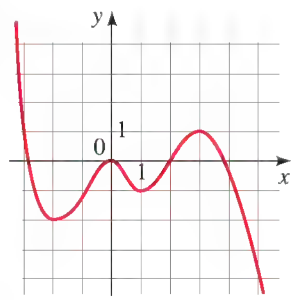
**51.**



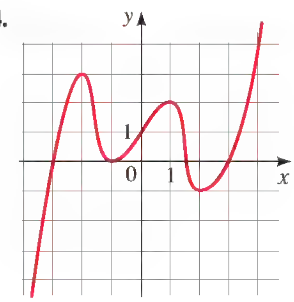

**52.**




**53.**




**54.**




**55-62** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de $x$ en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

**55.** $f(x) = x^3 - x$

**56.** $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

**57.** $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

**58.** $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

**59.** $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

**60.** $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

**61.** $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

**62.** $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

## APLICACIONES

**63. Altura de una pelota** Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de $t$ segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

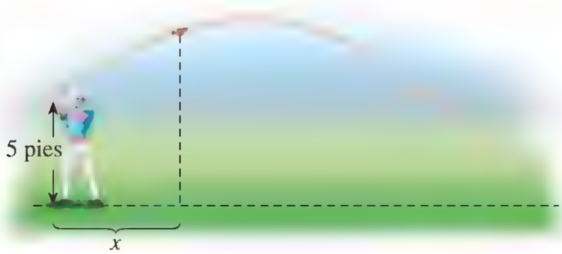
**64. Trayectoria de un balón** Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45º con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde $x$ es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

**(a)** Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

**(b)** Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.




**65. Ingresos** Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender $x$ unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

**66. Ventas** Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende $x$ latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

**67. Publicidad** La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad $E$ se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

donde $n$ es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

**68. Productos farmacéuticos** Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de $t$ minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

**69. Agricultura** El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si $n$ árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?

**70. Agricultura** En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde $n$ es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

**71-74** ■ Use las fórmulas de esta sección par dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

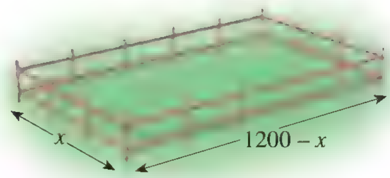
**71.** Problema 21 **72.** Problema 22

**73.** Problema 25 **74.** Problema 24

**75. Cercar un corral para caballos** Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

**(a)** Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho $x$ del corral.

**(b)** Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

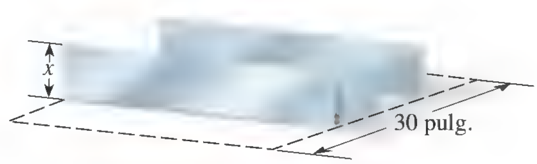



**76. Hacer un canal para agua de lluvia** Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

**(a)** Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de $x$.

**(b)** Encuentre el valor de $x$ que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.

**(c)** ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



**77. Ingresos en un estadio** Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

**78. Maximizar utilidades** Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**79. Vértice y puntos de intersección $x$** Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección $x$ de la gráfica de $f$? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada $x$ del vértice en términos de $m$ y $n$? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

**80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado** Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

# 3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento final y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

### FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado $n$** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $n$ es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número $a_0$ es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número $a_n$, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante $-6$.

Coeficiente principal 3 | Grado 5 | Término constante $-6$

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$ | Coeficientes 3, 6, $-2$, 1, 7 y $-6$

A continuación veamos algunos ejemplos más de funciones polinomiales.

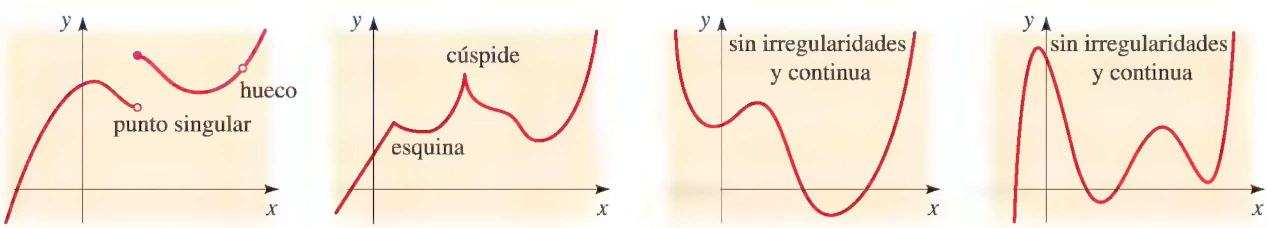
| | |
|---|---|
| $P(x) = 3$ | Grado 0 |
| $Q(x) = 4x - 7$ | Grado 1 |
| $R(x) = x^2 + x$ | Grado 2 |
| $S(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10$ | Grado 3 |

Si un polinomio está formado por un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son funciones monomiales.

## Graficar funciones polinomiales básicas

Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (Sección 1.10), y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (Sección 3.1). Cuanto mayor sea el grado de un polinomio, más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es **continua**. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea Figura 1). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva sin irregularidades; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la Figura 1.

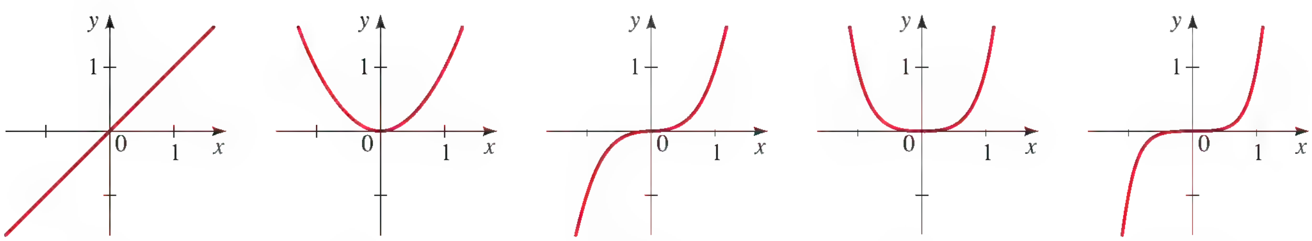
Las funciones continuas se estudian en la Sección 13.2 página 851.




No es gráfica de una función polinomial — No es gráfica de una función polinomial — Gráfica de una función polinomial — Gráfica de una función polinomial

**FIGURA 1**

Las funciones polinomiales más sencillas son las definidas con monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se ven en la Figura 2. Como lo sugiere la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando $n$ es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando $n$ es impar. Sin embargo, cuando el grado $n$ es más grande, las gráficas se aplanan alrededor del origen y son más pronunciadas en otras partes.




(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$

**FIGURA 2** Gráficas de monomios

### EJEMPLO 1 | Transformaciones de funciones monomiales

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

**(a)** $P(x) = -x^3$ **(b)** $Q(x) = (x - 2)^4$

**(c)** $R(x) = -2x^5 + 4$

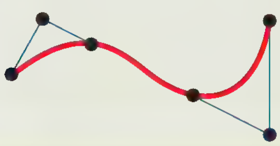
**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**Curvas paramétricas**

Una curva paramétrica es una larga tira de madera que se curva al mismo tiempo que se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado, los constructores de barcos empleaban curvas paramétricas para crear la forma curva del casco de un bote. Las curvas paramétricas también se usan para hacer las curvas de un piano, un violín o la boca de salida de una tetera.

Unos matemáticos descubrieron que se pueden obtener formas de curvas paramétricas al unir piezas de polinomios. Por ejemplo, puede hacerse que la gráfica de un polinomio cúbico se ajuste a puntos especificados si se ajustan los coeficientes del polinomio (vea el Ejemplo 10, página 242).

Las curvas obtenidas en esta forma reciben el nombre de curvas paramétricas cúbicas. En los modernos programas de diseño por computadora, como el Adobe Illustrator o el Microsoft Paint, se puede trazar una curva al fijar dos puntos y luego usar el ratón para arrastrar uno o más puntos de ancla. Mover los puntos de ancla significa ajustar los coeficientes de un polinomio cúbico.



**SOLUCIÓN** Usamos las gráficas de la Figura 2 y las transformamos usando las técnicas de la Sección 2.5.

**(a)** La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje $x$, como se ve en la Figura 3(a) siguiente.

**(b)** La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada 2 unidades a la derecha, como se ve en la Figura 3(b).

**(c)** Empezamos con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene alargando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje $x$ (vea la gráfica azul de trazos interrumpidos de la Figura 3(c)). Finalmente, la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene al desplazar 4 unidades hacia arriba (vea la gráfica roja en la Figura 3(c)).

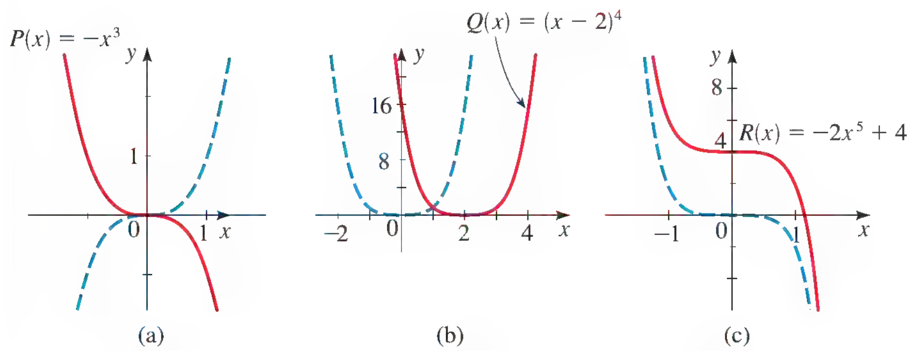



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## Comportamiento final y el término principal

El **comportamiento final** de una función polinomial es una descripción de lo que ocurre cuando $x$ se hace grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento final, usamos la siguiente notación:

| $x \to \infty$ | significa | "$x$ se hace grande en la dirección positiva" |
|---|---|---|

| $x \to -\infty$ | significa | "$x$ se hace grande en la dirección negativa" |
|---|---|---|

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la Figura 2(b) tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

El monomio $y = x^3$ en la Figura 2(c) tiene el siguiente comportamiento final:

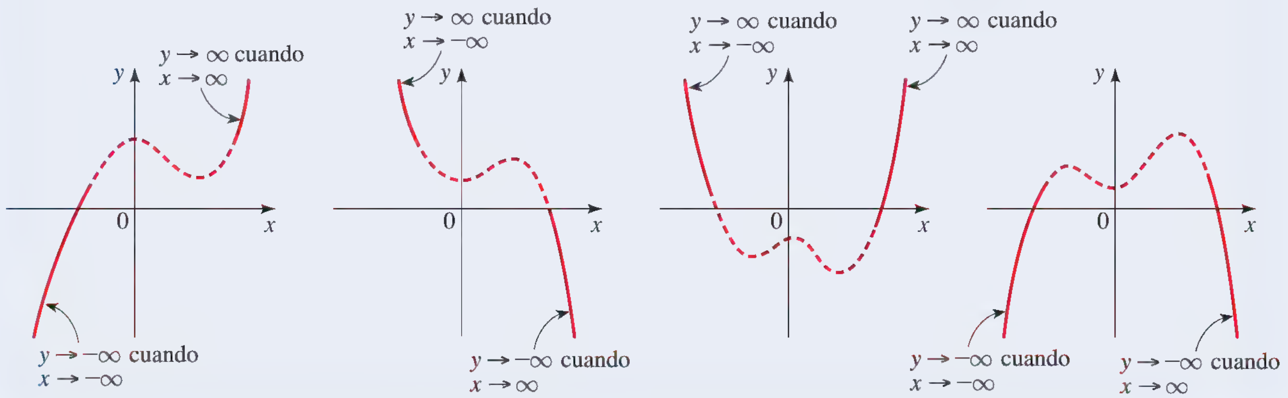
$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier función polinomial *el comportamiento final está determinado por el término que contiene la mayor potencia de x* porque, cuando $x$ es grande, los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud. El cuadro siguiente muestra los cuatro posibles tipos de comportamiento final, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

### COMPORTAMIENTO FINAL DE POLINOMIOS

El comportamiento final de la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado $n$ y el signo del coeficiente principal $a_n$, como se indica en las gráficas siguientes.

***P* tiene grado impar** | ***P* tiene grado par**




Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo | Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo

## EJEMPLO 2 | Comportamiento final de una función polinomial

Determine el comportamiento final de la función polinomial

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

**SOLUCIÓN** La función polinomial $P$ tiene grado 4 y coeficiente principal $-2$. Por lo tanto, $P$ tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo*, de modo que tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

La gráfica de la Figura 4 ilustra el comportamiento final de $P$.

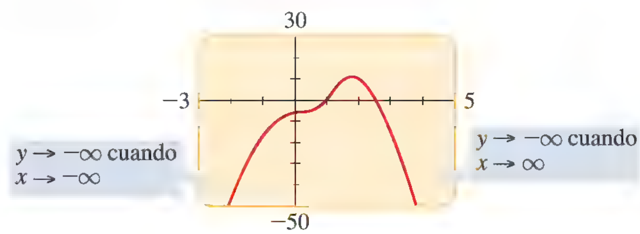



**FIGURA 4**
$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## EJEMPLO 3 | Comportamiento final de una función polinomial

**(a)** Determine el comportamiento final de la función polinomial $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

**(b)** Confirme que $P$ y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tienen el mismo comportamiento final al graficarlos juntos.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $P$ tiene grado impar y coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

**(b)** La Figura 5 muestra las gráficas de $P$ y $Q$ en rectángulos de vista progresivamente más grandes. Cuanto más grande sea el rectángulo de vista más se asemejan las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento final.

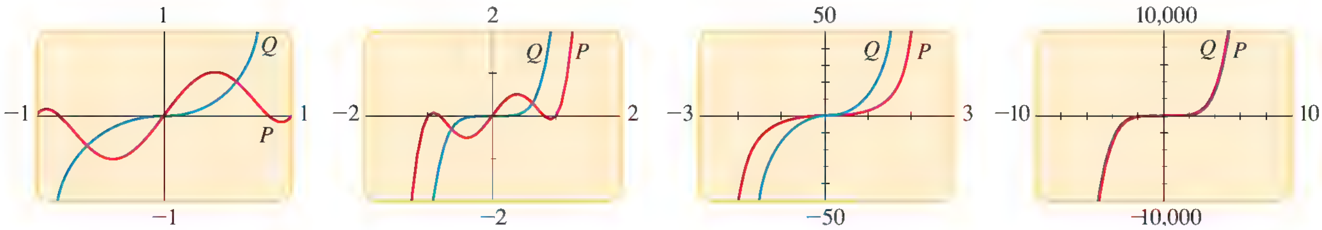



**FIGURA 5**
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Para ver algebraicamente por qué $P$ y $Q$ del Ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento final, factorice $P$ como sigue y compárelo con $Q$.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando $x$ es grande, los términos $5/3x^2$ y $2/3x^4$ están cercanos a 0 ( vea el Ejercicio 83 en la página 12). Entonces, para $x$ grande, tenemos

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Por lo tanto, cuando $x$ es grande, $P$ y $Q$ tienen aproximadamente los mismos valores. También podemos ver esto numéricamente si hacemos una tabla como la siguiente.

| $x$ | $P(x)$ | $Q(x)$ |
|---|---|---|
| 15 | 2,261,280 | 2,278,125 |
| 30 | 72,765,060 | 72,900,000 |
| 50 | 936,875,100 | 937,500,000 |

Por el mismo razonamiento, podemos demostrar que el comportamiento final de *cualquier* función polinomial está determinado por su término principal.

## Uso de ceros para graficar funciones polinomiales

Si $P$ es una función polinomial, entonces $c$ se denomina **cero** de $P$ si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de $P$ son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de $P$ tiene un punto de intersección $x$ en $x = c$, de modo que los puntos de intersección $x$ de la gráfica son los ceros de la función.

### CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si $P$ es una polinomial y $c$ es un número real, entonces los siguientes son equivalentes:

1. $c$ es un cero de $P$.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. $c$ es un punto de intersección $x$ de la gráfica de $P$.

Para hallar los ceros de una polinomial $P$, factorizamos y usamos la Propiedad del Producto Cero (vea página 47). Por ejemplo, para hallar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, factorizamos $P$ para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

Desde esta forma factorizada podemos ver fácilmente que

**1.** 2 es un cero de $P$.
**2.** $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
**3.** $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
**4.** 2 es un punto de intersección $x$ de la gráfica de $P$.

Los mismos datos son verdaderos para el otro cero, $-3$.

El siguiente teorema tiene numerosas e importantes consecuencias. (Vea, por ejemplo, el *Proyecto de descubrimiento* citado en la página 263.) Aquí lo usamos para ayudarnos a graficar funciones polinomiales.

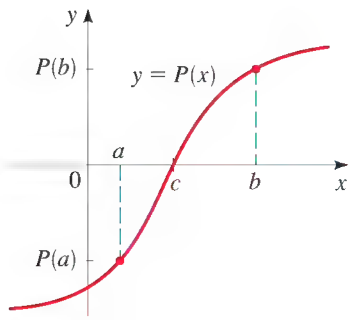



**FIGURA 6**

### TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO FUNCIONES POLINOMIALES

Si $P$ es una función polinomial $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe al menos un valor de $c$ entre $a$ y $b$ para el cual $P(c) = 0$.

No demostraremos este teorema, pero la Figura 6 muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que, entre cualesquier dos ceros sucesivos, los valores de una función polinomial son todos positivos o todos negativos. Esto es, entre dos ceros sucesivos la gráfica de una polinomial se encuentra *enteramente arriba* o *enteramente abajo* del eje $x$. Para ver por qué, suponga que $c_1$ y $c_2$ son ceros sucesivos de $P$. Si $P$ tiene valores positivos y negativos entre $c_1$ y $c_2$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio $P$ debe tener otro cero entre $c_1$ y $c_2$. Pero eso no es posible porque $c_1$ y $c_2$ son ceros sucesivos. Esta observación nos permite usar las siguientes guías para graficar funciones polinomiales.

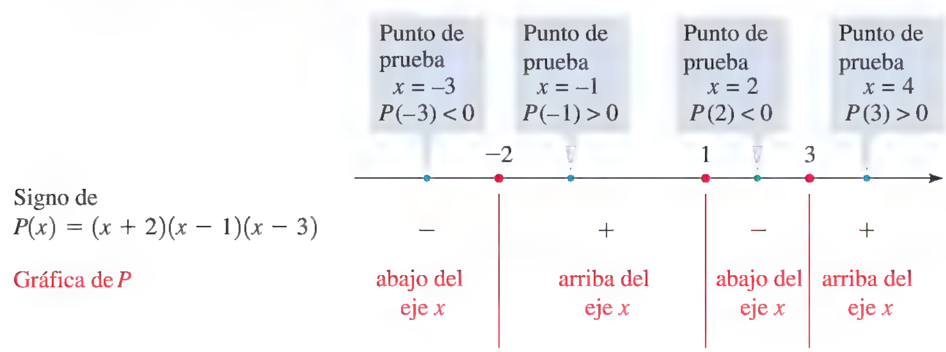
### GUÍAS PARA GRAFICAR FUNCIONES POLINOMIALES

1. **Ceros.** Factorizar la polinomial para hallar todos sus ceros reales; éstos son los puntos de intersección $x$ de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Hacer una tabla de valores para la polinomial. Incluir puntos de prueba para determinar si la gráfica de la polinomial se encuentra arriba o abajo del eje $x$ sobre los intervalos determinados por los ceros. Incluir el punto de intersección $y$ en la tabla.
3. **Comportamiento final.** Determinar el comportamiento final de la polinomial.
4. **Graficar.** Localizar los puntos de intersección y otros puntos que se encuentren en la tabla. Trazar una curva sin irregularidades que pase por estos puntos y exhibir el comportamiento final requerido.

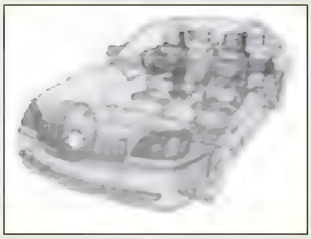
## EJEMPLO 4 | Usar ceros para graficar una función polinomial

Trace la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

**SOLUCIÓN** Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Éstos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Usando puntos de prueba en estos intervalos, obtenemos la información en el siguiente diagrama de signos (vea Sección 1.7).



## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO



3DProfi/Shutterstock.com

**Diseño de automotores**

El diseño asistido por computadora (CAD) ha cambiado por completo la forma en la que las compañías fabricantes de automotores diseñan y manufacturan estos autos. Antes de la década de 1980, los ingenieros de diseño construirían un modelo de "tuercas y tornillos" a escala completa de un nuevo auto propuesto; ésta era realmente la única forma de saber si el diseño era factible. Hoy en día, los ingenieros en automotores construyen un modelo matemático, que existe sólo en la memoria de una computadora. El modelo incorpora todas las características principales de diseño del auto. Ciertas curvas con polinomio, llamadas *curvas paramétricas*, se usan en dar forma a la carrocería del auto. El "auto matemático" resultante puede ser probado en cuanto a su estabilidad estructural, manejo, aerodinámica, respuesta de suspensión y más; todas estas pruebas se realizan antes de construir un prototipo. Como es de suponerse, el CAD ahorra millones de dólares cada año a los fabricantes y, lo que es más importante, el CAD da a los ingenieros de diseño mucha más flexibilidad en el diseño; los cambios deseados se pueden crear y probar en segundos. Con ayuda de gráficas por computadora, los diseñadores pueden ver qué tan bien se verá un "auto matemático" antes de construir uno real. Además, el auto matemático puede ser visto desde cualquier perspectiva; puede moverse, hacerse girar y verse desde el interior. Estas manipulaciones del auto en el monitor de una computadora se convierten matemáticamente en grandes sistemas para resolver ecuaciones lineales.

Localizar unos cuantos puntos adicionales y enlazarlos con una curva sin irregularidades nos ayuda a completar la gráfica de la Figura 7.

| | $x$ | $P(x)$ |
|---|---|---|
| Punto de prueba → | $-3$ | $-24$ |
| | $-2$ | 0 |
| Punto de prueba → | $-1$ | 8 |
| | 0 | 6 |
| | 1 | 0 |
| Punto de prueba → | 2 | $-4$ |
| | 3 | 0 |
| Punto de prueba → | 4 | 18 |

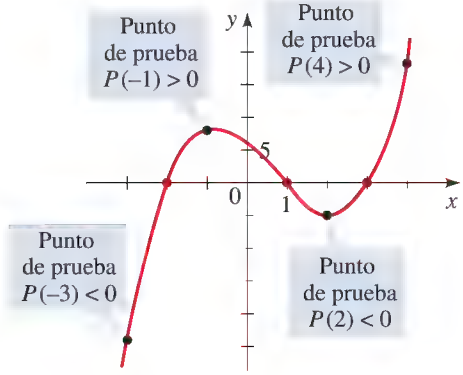



**FIGURA 7** $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## EJEMPLO 5 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

**(a)** Encontrar los ceros de $P$.
**(b)** Trazar una gráfica de $P$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ &= x(x^2 - 2x - 3) && \text{Factorizar } x \\ &= x(x-3)(x+1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$.

**(b)** Los puntos de intersección $x$ son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$. El punto de intersección $y$ es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha e izquierda de éstos).

Como $P$ es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Localizamos los puntos en la tabla y los enlazamos con una curva sin irregularidades para completar la gráfica, como se ve en la Figura 8.

| | $x$ | $P(x)$ |
|---|---|---|
| Punto de prueba → | $-2$ | $-10$ |
| | $-1$ | 0 |
| Punto de prueba → | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{8}$ |
| | 0 | 0 |
| Punto de prueba → | 1 | $-4$ |
| | 2 | $-6$ |
| | 3 | 0 |
| Punto de prueba → | 4 | 20 |

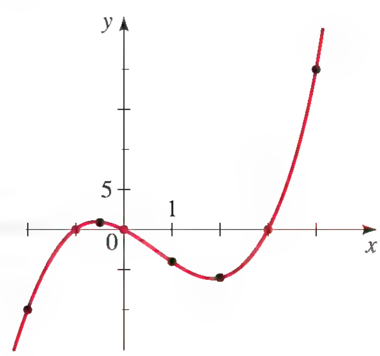



**FIGURA 8** $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 6 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

**(a)** Hallar los ceros de $P$. **(b)** Trazar una gráfica de $P$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\
&= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar } -x^2 \\
&= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factor cuadrático}
\end{aligned}
$$

Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

**(b)** Los puntos de intersección son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. El punto de intersección $y$ es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha e izquierda) de éstos.

Como $P$ es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Localizamos los puntos de la tabla y enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades para completar la gráfica de la Figura 9.

Una tabla de valores se calcula con más facilidad si se usa una calculadora programable o calculadora graficadora.

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| −2 | −12 |
| −1.5 | 0 |
| −1 | 2 |
| −0.5 | 0.75 |
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.5 |
| 1 | 0 |
| 1.5 | −6.75 |

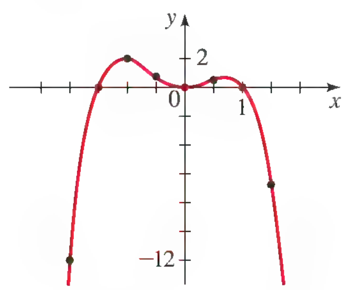



**FIGURA 9** $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

## EJEMPLO 7 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

**(a)** Hallar los ceros de $P$. **(b)** Trazar una gráfica de $P$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\
&= x^2(x - 2) - 4(x - 2) && \text{Agrupar y factorizar} \\
&= (x^2 - 4)(x - 2) && \text{Factorizar } x - 2 \\
&= (x + 2)(x - 2)(x - 2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= (x + 2)(x - 2)^2 && \text{Simplificar}
\end{aligned}
$$

Entonces, los ceros son $x = -2$ y $x = 2$.

**(b)** Los puntos de intersección $x$ son $x = -2$ y $x = 2$. El punto de intersección $y$ es $P(0) = 8$. La tabla da valores adicionales de $P(x)$.

Como $P$ es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades y completamos la gráfica de la Figura 10.

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| $-3$ | $-25$ |
| $-2$ | $0$ |
| $-1$ | $9$ |
| $0$ | $8$ |
| $1$ | $3$ |
| $2$ | $0$ |
| $3$ | $5$ |

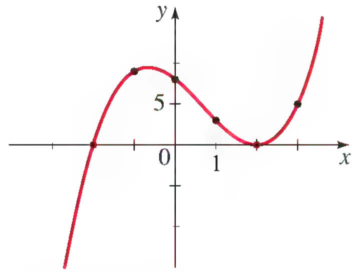



**FIGURA 10** $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 33

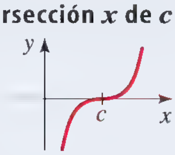
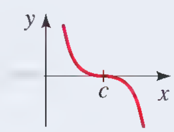
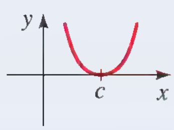
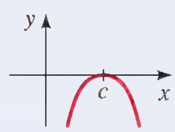
## Forma de la gráfica cerca de un cero

Aun cuando $x = 2$ es un cero de la función polinomial en el Ejemplo 7, la gráfica no cruza el eje $x$ en el punto de intersección 2. Esto es porque el factor $(x - 2)^2$ correspondiente a ese cero está elevado a una potencia par, de modo que no cambia signo cuando probamos puntos en cualquiera de los lados de 2. En la misma forma, la gráfica no cruza el eje $x$ en $x = 0$ en el Ejemplo 6.

En general, si $c$ es un cero de $P$, y el correspondiente factor $x - c$ se presenta exactamente $m$ veces en la factorización de $P$, entonces decimos que $c$ es un **cero de multiplicidad $m$**. Si consideramos puntos de prueba en cualquiera de los lados del punto $c$ de intersección en $x$, concluimos que la gráfica cruza el eje $x$ en $c$ si la multiplicidad $m$ es impar y no cruza el eje $x$ si $m$ es par. Además, puede demostrarse mediante cálculo que cerca de $x = c$ la gráfica tiene la misma forma general que la gráfica de $y = A(x - c)^m$.

**FORMA DE LA GRÁFICA CERCA DE UN CERO DE MULTIPLICIDAD $m$**

Si $c$ es un cero de $P$ de multiplicidad $m$, entonces la forma de la gráfica de $P$ cerca de $c$ es como sigue.

| Multiplicidad de $c$ | Forma de la gráfica de $P$ cerca del punto de intersección $x$ de $c$ |
|---|---|
| $m$ impar, $m > 1$ |  O  |
| $m$ par, $m > 1$ |  O  |

**EJEMPLO 8** | Graficar una función polinomial usando sus ceros

Grafique el polinomio $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.

**SOLUCIÓN** Los ceros de $P$ son $-1$, 0 y 2 con multiplicidades 2, 4 y 3, respectivamente.

0 es un cero de multiplicidad 4

2 es un cero de multiplicidad 3

$-1$ es un cero de multiplicidad 2

$$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$$

El cero 2 tiene multiplicidad *impar*, de modo que la gráfica cruza el eje $x$ en el punto de cruce $x$ de 2. Pero los ceros 0 y $-1$ tienen multiplicidad *par*, de modo que la gráfica no cruza el eje $x$ en los puntos de intersección 0 y $-1$.

Como $P$ es una polinomial de grado 9 y tiene coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Con esta información y una tabla de valores trazamos la gráfica de la Figura 11.

| $x$ | $P(x)$ |
|---|---|
| $-1.3$ | $-9.2$ |
| $-1$ | 0 |
| $-0.5$ | $-3.9$ |
| 0 | 0 |
| 1 | 4 |
| 2 | 0 |
| 2.3 | 8.2 |

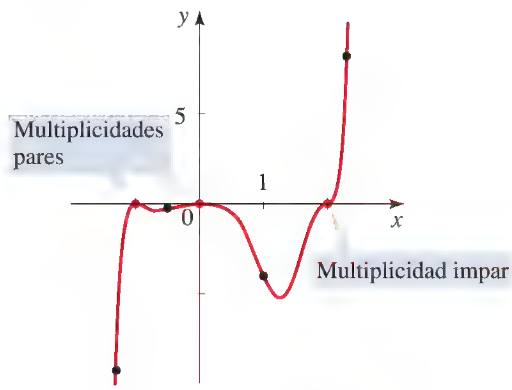



**FIGURA 11** $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

Recuerde de la Sección 2.3 que si el punto $(a, f(a))$ es el más alto en la gráfica de $f$ dentro de algún rectángulo de vista, entonces $f(a)$ es un valor máximo local de $f$, y si $(b, (f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de $f$ dentro de un rectángulo de vista, entonces $f(b)$ es un valor mínimo local (vea Figura 12). Decimos que tal punto $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** en la gráfica y que $(b, (f(b))$ es un **punto mínimo local**. Los puntos máximos y mínimos locales en la gráfica de una función se denominan **extremos locales**.

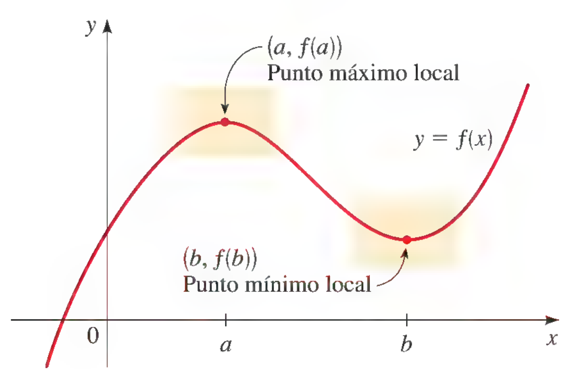



**FIGURA 12**

Para una función polinomial, el número de extremos locales debe ser menor que el grado, como indica el siguiente principio. (Una prueba de este principio requiere Cálculo.)

**EXTREMOS LOCALES DE FUNCIONES POLINOMIALES**

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función polinomial de grado $n$, entonces la gráfica de $P$ tiene a lo sumo $n - 1$ extremos locales.

En efecto, una función polinomial de grado $n$ puede tener menos de $n - 1$ extremos locales. Por ejemplo, $P(x) = x^5$ (graficado en la Figura 2) *no tiene* extremos locales, aun cuando es de grado 5. El principio precedente nos dice sólo que una función polinomial de grado $n$ no puede tener más de $n - 1$ extremos locales.

## EJEMPLO 9 | El número de extremos locales

Determine cuántos extremos locales tiene cada función polinomial.

**(a)** $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

**(b)** $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

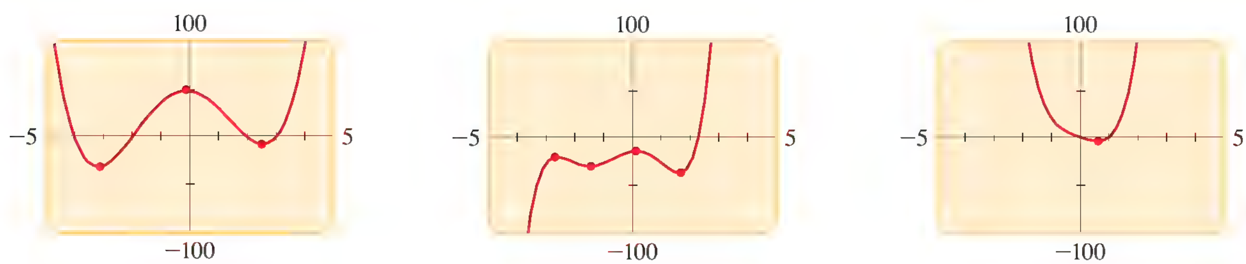
**(c)** $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

**SOLUCIÓN** Las gráficas se muestran en la Figura 13.

**(a)** $P_1$ tiene dos puntos mínimos locales y un punto máximo local, para un total de tres extremos locales.

**(b)** $P_2$ tiene dos puntos mínimos locales y dos puntos máximos locales, para un total de cuatro extremos locales.

**(c)** $P_3$ tiene sólo un extremo local, un mínimo local.




(a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ (b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$ (c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

**FIGURA 13**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61** Y **63**

Con una calculadora graficadora podemos rápidamente trazar las gráficas de numerosas funciones a la vez, en la misma pantalla de vista. Esto nos permite ver la forma en que cambiar un valor en la definición de las funciones afecta la forma de su gráfica. En el siguiente ejemplo aplicamos este principio a una familia de polinomiales de tercer grado.

## EJEMPLO 10 | Una familia de funciones polinomiales

Trace la familia de polinomiales $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y $3$. ¿Cómo se afecta la gráfica con el cambio del valor de $c$?

**SOLUCIÓN** Las funciones polinomiales

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$
$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

están graficadas en la Figura 14. Vemos que aumentar el valor de $c$ hace que la gráfica desarrolle un "valle" cada vez más profundo a la derecha del eje $y$, creando un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el cuarto cuadrante. Este mínimo local se mueve más abajo y a más distancia a la derecha cuando $c$ aumenta. Para ver por qué ocurre esto, factorice $P(x) = x^2(x - c)$. La función polinomial $P$ tiene ceros en 0 y en $c$ y, cuanto más grande se haga $c$, a más distancia a la derecha estará el mínimo entre 0 y $c$.

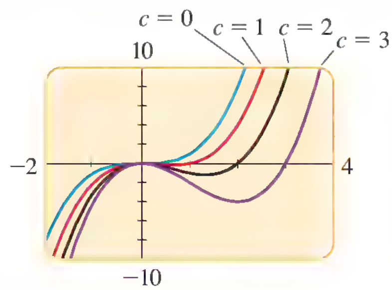



**FIGURA 14** Una familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$

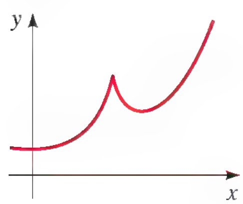
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

## 3.2 EJERCICIOS

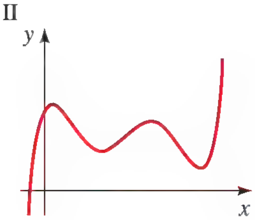
### CONCEPTOS

**1.** Sólo una de las gráficas siguientes podría ser la gráfica de una función polinomial. ¿Cuál? ¿Por qué las otras no son gráficas polinomiales?

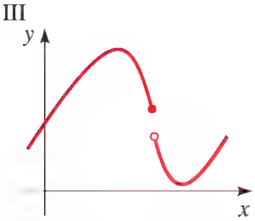
I




II




III




**2.** Toda función polinomial tiene uno de los siguientes comportamientos:

(i) $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$
(ii) $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$
(iii) $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$
(iv) $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

Para cada polinomial, escoja la descripción apropiada de su comportamiento final de la lista anterior.

**(a)** $y = x^3 - 8x^2 + 2x - 15$: comportamiento final ________.

**(b)** $y = -2x^4 + 12x + 100$: comportamiento final ________.

**3.** Si $c$ es un cero de la polinomial $P$, ¿cuál de los siguientes enunciados debe ser verdadero?
**(a)** $P(c) = 0$. **(b)** $P(0) = c$.
**(c)** $x - c$ es un factor de $P(x)$.
**(d)** $c$ es el punto de intersección $y$ de la gráfica de $P$.

**4.** ¿Cuál de los siguientes enunciados no podría ser verdadero acerca de la función polinomial $P$?
**(a)** $P$ tiene grado 3, dos máximos locales y dos mínimos locales.
**(b)** $P$ tiene grado 3 y no tiene máximos ni mínimos locales.
**(c)** $P$ tiene grado 4, un máximo local y no tiene mínimos locales.

### HABILIDADES

**5-8** ■ Trace la gráfica de cada función al transformar la gráfica de una función apropiada de la forma $y = x^n$ de la Figura 2. Indique todos los puntos de intersección $x$ y $y$ en cada gráfica.

**5. (a)** $P(x) = x^2 - 4$ **(b)** $Q(x) = (x - 4)^2$
**(c)** $R(x) = 2x^2 - 2$ **(d)** $S(x) = 2(x - 2)^2$

**6. (a)** $P(x) = x^4 - 16$ **(b)** $Q(x) = (x + 2)^4$
**(c)** $R(x) = (x + 2)^4 - 16$ **(d)** $S(x) = -2(x + 2)^4$

**7. (a)** $P(x) = x^3 - 8$ **(b)** $Q(x) = -x^3 + 27$
**(c)** $R(x) = -(x + 2)^3$ **(d)** $S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

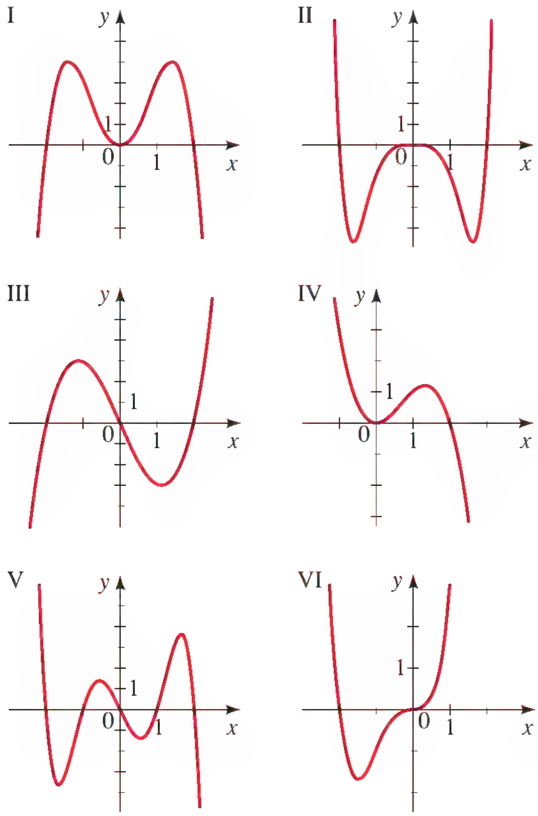
**8. (a)** $P(x) = (x + 3)^5$ **(b)** $Q(x) = 2(x + 3)^5 - 64$
**(c)** $R(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5$ **(d)** $S(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5 + 16$

**9-14** ■ Relacione la función polinomial con una de las gráficas I-IV de la página siguiente. Dé razones para su selección.

**9.** $P(x) = x(x^2 - 4)$ **10.** $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

**11.** $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$ **12.** $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

**13.** $T(x) = x^4 + 2x^3$ **14.** $U(x) = -x^3 + 2x^2$




**15-26** ■ Trace la gráfica de la función polinomial. Asegúrese que su gráfica muestre todos los puntos de intersección y exhiba el comportamiento final apropiado.

**15.** $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

**16.** $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

**17.** $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

**18.** $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

**19.** $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

**20.** $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

**21.** $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$ **22.** $P(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

**23.** $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$ **24.** $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

**25.** $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$ **26.** $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

**27-40** ■ Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. A continuación, trace la gráfica.

**27.** $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$ **28.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

**29.** $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$ **30.** $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

**31.** $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ **32.** $P(x) = x^5 - 9x^3$

**33.** $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ **34.** $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

**35.** $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

**36.** $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

**37.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

**38.** $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

**39.** $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ **40.** $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

**41-46** ■ Determine el comportamiento final de $P$. Compare las gráficas de $P$ y $Q$ en rectángulos de vista grandes y pequeños, como en el Ejemplo 3(b).

**41.** $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1;\quad Q(x) = 3x^3$

**42.** $P(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x;\quad Q(x) = -\frac{1}{8}x^3$

**43.** $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x + 5;\quad Q(x) = x^4$

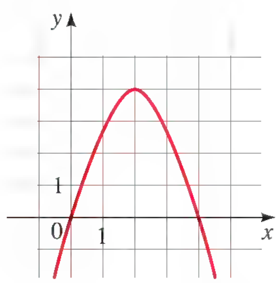
**44.** $P(x) = -x^5 + 2x^2 + x;\quad Q(x) = -x^5$

**45.** $P(x) = x^{11} - 9x^9;\quad Q(x) = x^{11}$

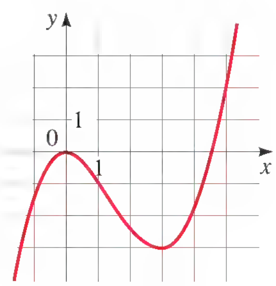
**46.** $P(x) = 2x^2 - x^{12};\quad Q(x) = -x^{12}$

**47-50** ■ Nos dan la gráfica de una función polinomial. De la gráfica, encuentre **(a)** los puntos de intersección $x$ y $y$ y **(b)** las coordenadas de todos los extremos locales.

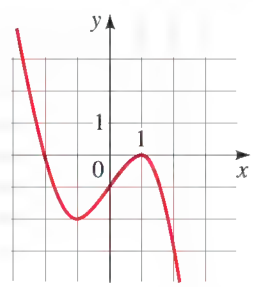
**47.** $P(x) = -x^2 + 4x$



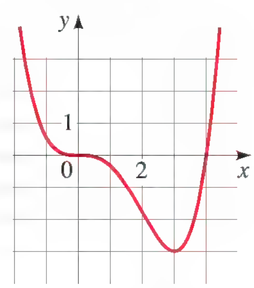
**48.** $P(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2$



**49.** $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$



**50.** $P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$



**51-58** ■ Grafique la función polinomial en el rectángulo de vista dado. Encuentre las coordenadas de todos los extremos locales. Exprese su respuesta redondeada a dos lugares decimales.

**51.** $y = -x^2 + 8x$, $[-4, 12]$ por $[-50, 30]$

**52.** $y = x^3 - 3x^2$, $[-2, 5]$ por $[-10, 10]$

**53.** $y = x^3 - 12x + 9$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

**54.** $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32$, $[-5, 5]$ por $[-60, 30]$

**55.** $y = x^4 + 4x^3$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

**56.** $y = x^4 - 18x^2 + 32$, $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$

**57.** $y = 3x^5 - 5x^3 + 3$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

**58.** $y = x^5 - 5x^2 + 6$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

**59-68** ■ Grafique la función polinomial y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

**59.** $y = -2x^2 + 3x + 5$

**60.** $y = x^3 + 12x$

**61.** $y = x^3 - x^2 - x$

**62.** $y = 6x^3 + 3x + 1$

**63.** $y = x^4 - 5x^2 + 4$

**64.** $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

**65.** $y = (x - 2)^5 + 32$

**66.** $y = (x^2 - 2)^3$

**67.** $y = x^8 - 3x^4 + x$

**68.** $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

**69-74** ■ Grafique la familia de polinomiales en el mismo rectángulo de vista, usando los valores dados de $c$. Explique la forma en que cambiar el valor de $c$ afecta la gráfica.

**69.** $P(x) = cx^3; \quad c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

**70.** $P(x) = (x - c)^4; \quad c = -1, 0, 1, 2$

**71.** $P(x) = x^4 + c; \quad c = -1, 0, 1, 2$

**72.** $P(x) = x^3 + cx; \quad c = 2, 0, -2, -4$

**73.** $P(x) = x^4 - cx; \quad c = 0, 1, 8, 27$

**74.** $P(x) = x^c; \quad c = 1, 3, 5, 7$

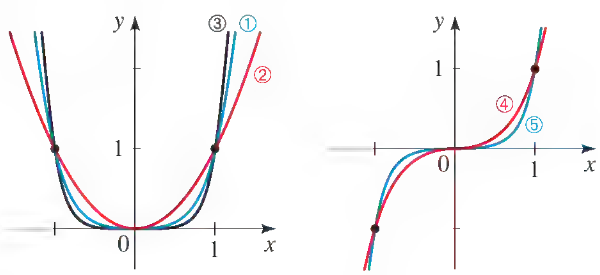
**75. (a)** En los mismos ejes de coordenadas, trace gráficas (tan precisamente como sea posible) de las funciones.

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 + 5x + 2$$

**(b)** Con base en el trazo que haya hecho usted en la parte (a), ¿en cuántos puntos parecen cruzarse las dos gráficas?

**(c)** Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

**76.** En la figura siguiente están localizadas partes de las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ y $y = x^6$. Determine cuál función pertenece a cada gráfica.




**77.** Recuerde que una función $f$ es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda $x$ real.

**(a)** Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias impares de $x$ es una función impar.

**(b)** Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias pares de $x$ es una función par.

**(c)** Demuestre que una función polinomial $P(x)$ contiene potencias impares y pares de $x$, entonces no es función ni impar ni par.

**(d)** Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

y la suma de una función impar y una función par.

**78. (a)** Grafique la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y encuentre todos los extremos locales, correctos al décimo más cercano.

**(b)** Grafique la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y use sus respuestas a la parte (a) para hallar todos los extremos locales, correctos al décimo más cercano.

**79. (a)** Grafique la función $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ y determine cuántos extremos locales tiene.

**(b)** Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

**80. (a)** ¿Cuántos puntos de intersección $x$ y cuántos extremos locales tiene la función polinomial $P(x) = x^3 - 4x$?

**(b)** ¿Cuántos puntos de intersección $x$ y cuántos extremos locales tiene la función polinomial $Q(x) = x^3 + 4x$?

**(c)** Si $a > 0$, ¿cuántos puntos de intersección $x$ y cuántos extremos locales tiene cada una de las funciones polinomiales $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

## APLICACIONES

**81. Estudio de mercado** Un analista de mercado, que trabaja para un fabricante de aparatos electrodomésticos pequeños, encuentra que si la compañía produce y vende $x$ licuadoras al año, su utilidad total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Grafique la función $P$ en un rectángulo de observación apropiado y use la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

**(a)** Cuando se fabrican sólo unas cuantas licuadoras, la compañía pierde dinero (utilidad negativa). (Por ejemplo, $P(10) = -263.3$, de modo que la compañía pierde \$263.30 si produce y vende sólo 10 licuadoras.) ¿Cuántas licuadoras debe producir la compañía para alcanzar el punto de equilibrio (no pierde ni gana)?

**(b)** ¿La ganancia se incrementa infinitamente entre más licuadoras se produzcan y se vendan? Si no es así ¿cuál es la mayor ganancia posible que la firma puede tener?

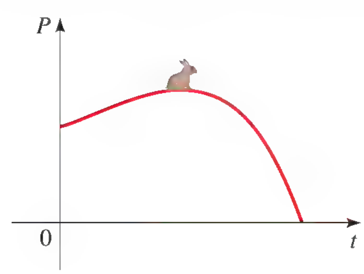
**82. Cambio de población** Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

donde $t$ es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones de la isla.

**(a)** ¿Cuándo se alcanza la máxima población, y cuál es la máxima población?

**(b)** ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

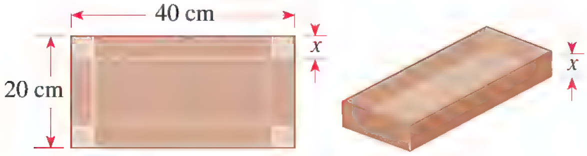


**83. Volumen de una caja** Se ha de construir una caja con una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de longitud $x$ de lado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba, como se ve en la figura.

**(a)** Exprese el volumen $V$ de la caja como función de $x$.

**(b)** ¿Cuál es el dominio de $V$? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

**(c)** Trace una gráfica de la función $V$, y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.




**84. Volumen de una caja** Una caja de cartón tiene base cuadrada, con cada arista de la caja con longitud de $x$ pulgadas, como se ve en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas.

**(a)** Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

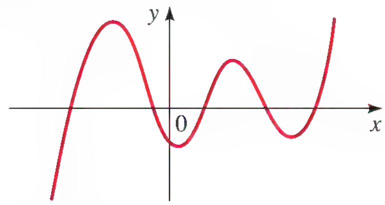
**(b)** ¿Cuál es el dominio de $V$? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

**(c)** Trace una gráfica de la función $V$ y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**85. Gráficas de potencias grandes** Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \le x \le 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo piensa usted que se verá la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se puede decir de $y = x^{101}$? Haga una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

**86. Número máximo de extremos locales** ¿Cuál es el grado más pequeño posible que puede tener la función polinomial cuya gráfica se muestra? Explique.




**87. Número posible de extremos locales** ¿Es posible que una polinomial de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Una polinomial de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener polinomiales de tercero, cuarto, quinto y sexto grados? (Considere el comportamiento final de esas funciones polinomiales.) A continuación, dé un ejemplo de una función polinomial que tenga seis extremos locales.

**88. ¿Situación imposible?** ¿Es posible que una función polinomial tenga dos máximos locales y no tenga un mínimo local? Explique.

# 3.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División larga de polinomios ▶ División sintética ▶ Los teoremas del residuo y factor

Hasta este punto en este capítulo hemos estado estudiando funciones polinomiales *gráficamente*. En esta sección empezamos por estudiar polinomios *algebraicamente*. La mayor parte de nuestro trabajo se ocupará de factorizar polinomios y, para factorizar, necesitamos saber cómo dividir polinomios.

## ▼ División larga de polinomios

La división de polinomios es muy semejante al conocido proceso de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos

Dividendo (38), Divisor (7), Cociente (5), Residuo (3)

$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}$$

Para dividir polinomios, usamos división larga, como sigue.

> **ALGORITMO DE DIVISIÓN**
>
> Si $P(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomiales únicas $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor al grado de $D(x)$, de modo que
>
> $$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$
>
> Las funciones polinomiales $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

Para escribir el algoritmo de división de otro modo, dividimos todo entre $D(x)$:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

## EJEMPLO 1 | División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

**SOLUCIÓN** El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. En seguida multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo

$$\begin{array}{rl} & 6x \\ x - 4 & \overline{)6x^2 - 26x + 12} \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \quad -2x + 12 \end{array}$$

Divida términos principales: $\frac{6x^2}{x} = 6x$

Multiplique: $6x(x - 4) = 6x^2 - 24x$

Reste y "baje" 12

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{rl} & 6x^2 - 2 \\ x - 4 & \overline{)6x^2 - 26x + 12} \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \quad -2x + 12 \\ & \quad \underline{-2x + \ \ 8} \\ & \qquad\qquad 4 \end{array}$$

Divida términos principales: $\frac{2x}{x} = -2$

Multiplique: $-2(x - 4) = -2x + 8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el *residuo*, y el renglón superior contienen el *cociente*. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

$$\frac{\overset{\text{Dividendo}}{6x^2 - 26x + 12}}{\underset{\text{Divisor}}{x - 4}} = \overset{\text{Cociente}}{6x - 2} + \frac{\overset{\text{Residuo}}{4}}{x - 4}$$

o

$$\underset{\text{Dividendo}}{6x^2 - 26x + 12} = \underset{\text{Divisor}}{(x - 4)}\underset{\text{Cociente}}{(6x - 2)} + \underset{\text{Residuo}}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomiales $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

**SOLUCIÓN** Usamos división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$\begin{array}{r l}
 & 4x^2 + 2x \\
2x^2 - x + 2 \,\big)\! & 8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1 \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \qquad \text{Multiplique el divisor por } 4x^2 \\
 & \quad 4x^3 - 2x^2 - 3x \qquad \text{Reste} \\
 & \quad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \qquad \text{Multiplique el divisor por } 2x \\
 & \qquad -7x + 1 \qquad \text{Reste}
\end{array}$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga de líneas antes vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - c$. En división sintética escribimos sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5$ por $x - 3$. (Explicaremos cómo realizar la división sintética en el Ejemplo 3.)

**División larga**

$$\begin{array}{r l}
 & 2x^2 - x - 3 \qquad \leftarrow \text{Cociente} \\
x - 3 \,\big)\! & 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5 \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \quad -x^2 + 0x \\
 & \quad \underline{-x^2 + 3x} \\
 & \qquad -3x + 5 \\
 & \qquad \underline{-3x + 9} \\
 & \qquad\quad -4 \qquad \leftarrow \text{Residuo}
\end{array}$$

**División sintética**

$$\begin{array}{r|r r r r}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & 2 & -1 & -3 & -4
\end{array}$$

Cociente: $2 \quad -1 \quad -3$ ; Residuo: $-4$

Observe que en la división sintética abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ al escribir sólo los coeficientes: $2,\ -7,\ 0,\ 5$ y en lugar de $x - 3$ escribimos simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de $-3$ nos permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de todos los números que aparecen en las cajas color oro.)

El siguiente ejemplo muestra cómo se realiza la división sintética.

## EJEMPLO 3 | División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

**SOLUCIÓN** Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

$$\text{Divisor } x - 3 \rightarrow \begin{array}{r|r r r r}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array} \leftarrow \text{Dividendo } 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$$

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array}$$

Multiplique: $3 \cdot 2 = 6$

Sume: $-7 + 6 = -1$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array}$$

Multiplique: $3(-1) = -3$

Sume: $0 + (-3) = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array}$$

Multiplique: $3(-3) = -9$

Sume: $5 + (-9) = -4$

Cociente $2x^2 - x - 3$

Residuo $-4$

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es $-4$. Por lo tanto,

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## Los teoremas del residuo y factor

El siguiente teorema muestra la forma en que la división sintética se puede usar para evaluar funciones polinomiales fácilmente.

**TEOREMA DEL RESIDUO**

Si la función polinomial $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

**DEMOSTRACIÓN** Si el divisor del Algoritmo de División es de la forma $x - c$ para algún número real $c$, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos $r$, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Sustituyendo $x$ por $c$ en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo $r$.

**EJEMPLO 4** | Uso del Teorema del Residuo para hallar el valor de una función polinomial

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

**(a)** Encuentre el cociente y residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

**(b)** Use el Teorema del Residuo para hallar $P(-2)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & 6 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, y el residuo es 5.

**(b)** Por el Teorema del Residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. De la parte (a) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

El siguiente teorema dice que los *ceros* de polinomiales corresponden a *factores*; utilizamos este dato en la Sección 3.2 para graficar funciones polinomiales.

**TEOREMA DEL FACTOR**

$c$ es cero de $P$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

**DEMOSTRACIÓN** Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$.

## EJEMPLO 5 | Factorizar una función polinomial usando el Teorema del Factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$ y use este dato para factorizar $P(x)$ completamente.

**SOLUCIÓN** Sustituyendo, vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el Teorema del Factor esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando división sintética o larga (mostrada al margen), vemos que

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x \quad 6 \\ x - 1\overline{)x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\ x^3 \quad x^2 \qquad\qquad \\ x^2 - 7x \qquad \\ x^2 \quad\; x \qquad \\ -6x + 6 \\ 6x + 6 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomial dada} \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) && \text{Vea al margen} \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57**

## EJEMPLO 6 | Hallar una función polinomial con ceros especificados

Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga ceros $-3$, 0, 1 y 5.

**SOLUCIÓN** Por el Teorema del Factor $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben todos ellos ser factores de la función polinomial deseada.

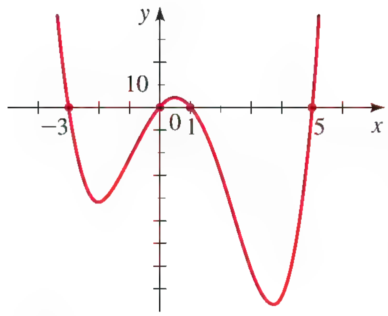



**FIGURA 1**
$P(x) = (x + 3)x(x - 1)(x - 5)$ tiene ceros $-3$, 0, 1 y 5.

Sea

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 3)(x - 0)(x - 1)(x - 5) \\ &= x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x \end{aligned}$$

Como $P(x)$ es de grado 4, es una solución del problema. Cualquiera otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, porque sólo una multiplicación por una constante no cambia el grado.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

La función polinomial $P$ del Ejemplo 6 está graficada en la Figura 1. Observe que los ceros de $P$ corresponden a los puntos de intersección $x$ de la gráfica.

## 3.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Si dividimos la polinomial $P$ entre el factor $x - c$ y obtenemos la ecuación $P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$, entonces decimos que $x - c$ es el divisor, $Q(x)$ es el ______, y $R(x)$ es el ______.

**2. (a)** Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de 0, entonces sabemos que $c$ es un _____ de $P$.

**(b)** Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de $k$, entonces sabemos que $P(c) =$ _____.

### HABILIDADES

**3-8** ■ Nos dan dos funciones polinomiales $P$ y $D$. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese $P$ en la forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

**3.** $P(x) = 3x^2 + 5x - 4, \quad D(x) = x + 3$

**4.** $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1, \quad D(x) = x - 1$

**5.** $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x, \quad D(x) = 2x - 3$

**6.** $P(x) = 4x^3 + 7x + 9, \quad D(x) = 2x + 1$

**7.** $P(x) = x^4 - x^3 + 4x + 2, \quad D(x) = x^2 + 3$

**8.** $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3, \quad D(x) = x^2 - 2$

**9-14** ■ Nos dan dos funciones polinomiales $P$ y $D$. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

**9.** $P(x) = x^2 + 4x - 8, \quad D(x) = x + 3$

**10.** $P(x) = x^3 + 6x + 5, \quad D(x) = x - 4$

**11.** $P(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad D(x) = 2x - 1$

**12.** $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$

**13.** $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2, \quad D(x) = x^2 + 4$

**14.** $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad D(x) = x^2 + x - 1$

**15-24** ■ Encuentre el cociente y residuo usando división larga.

**15.** $\dfrac{x^2 - 6x - 8}{x - 4}$ **16.** $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 6}{x - 2}$

**17.** $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$ **18.** $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$

**19.** $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$ **20.** $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$

**21.** $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$ **22.** $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$

**23.** $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ **24.** $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

**25-38** ■ Encuentre el cociente y residuo usando división sintética.

**25.** $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$ **26.** $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

**27.** $\dfrac{3x^2 + 5x}{x - 6}$ **28.** $\dfrac{4x^2 - 3}{x + 5}$

**29.** $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$ **30.** $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$

**31.** $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$ **32.** $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

**33.** $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$ **34.** $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

**35.** $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

**36.** $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

**37.** $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ **38.** $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

**39-51** ■ Use división sintética y el Teorema del Residuo para evaluar $P(c)$.

**39.** $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

**40.** $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

**41.** $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

**42.** $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

**43.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

**44.** $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

**45.** $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

**46.** $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

**47.** $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

**48.** $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

**49.** $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

**50.** $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

**51.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

**52.** Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ **(a)** usando división sintética y **(b)** sustituyendo $x = 7$ en la función polinomial y evaluando directamente.

**53-56** ■ Use el Teorema del Factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para el (los) valor(es) dado(s) de $c$.

**53.** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

**54.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

**55.** $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

**56.** $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

**57-58** ■ Demuestre que el (los) valor(es) dado(s) de $c$ son ceros de $P(x)$, y encuentre todos los otros ceros de $P(x)$.

**57.** $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

**58.** $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

**59-62** ■ Encuentre una función polinomial del grado especificado que tenga los ceros dados.

**59.** Grado 3: ceros $-1, 1, 3$

**60.** Grado 4: ceros $-2, 0, 2, 4$

**61.** Grado 4: ceros $-1, 1, 3, 5$

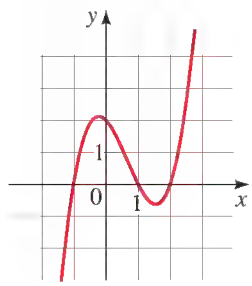
**62.** Grado 5: ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

**63.** Encuentre una función polinomial de grado 3 que tenga ceros $1, -2$ y $3$ y en el que el coeficiente de $x^2$ sea 3.

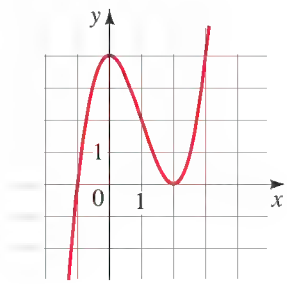
**64.** Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $1, -1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

**65-68** ■ Encuentre la función polinomial del grado especificado cuya gráfica se muestra.

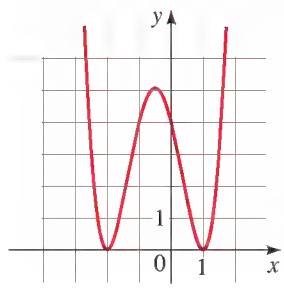
**65.** Grado 3



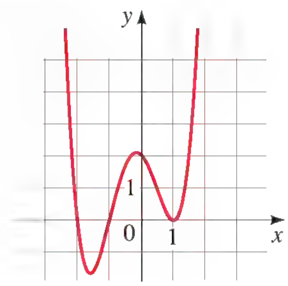

**66.** Grado 3




**67.** Grado 4




**68.** Grado 4




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**69. ¿División imposible?** Supongamos que nos piden resolver los siguientes dos problemas en un examen:

**A.** Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

**B.** ¿$x - 1$ es factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas al hacer una división, porque los polinomios son de grado muy alto. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* hacer realmente la división.

**70. Forma anidada de una función polinomial** Expanda $Q$ para demostrar que las polinomiales $P$ y $Q$ son iguales.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Trate de evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ mentalmente, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba la función polinomial $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma “anidada”, como la polinomial $Q$. Use la forma anidada para hallar $R(3)$ mentalmente.

¿Ve usted cómo calcular con la forma anidada sigue los mismos pasos aritméticos que calcular el valor de una función polinomial usando división sintética?

# 3.4 CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

**Ceros racionales de funciones polinomiales ▶ Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces ▶ Uso de álgebra y calculadoras gratificadoras para resolver ecuaciones con polinomios**

El Teorema del Factor nos dice que hallar los ceros de una función polinomial es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección estudiamos algunos métodos algebraicos que nos ayudan a hallar los ceros reales de una función polinomial y, por tanto, factorizar el polinomio. Empezamos con los ceros *racionales* de una función polinomial.

## ▼ Ceros racionales de funciones polinomiales

Para ayudarnos a entender el siguiente teorema, consideremos la función polinomial

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4) \qquad \text{Forma factorizada}$$

$$= x^3 - x^2 - 14x + 24 \qquad \text{Forma expandida}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de $P$ son 2, 3 y $-4$. Cuando se expande el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros de la función polinomial son todos ellos factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

**TEOREMA DE CEROS RACIONALES**

Si la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de $P$ es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde $p$ es un factor del coeficiente constante $a_0$

y $q$ es un factor del coeficiente principal $a_n$.

**DEMOSTRACIÓN** Si $p/q$ es un cero racional, en sus términos más sencillos, la función polinomial $P$, entonces tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0 q^n \text{ y factorice el lado izquierdo}$$

Ahora $p$ es un factor del lado izquierdo, de modo que también debe ser un factor del lado derecho. Como $p/q$ está en sus términos más sencillos, $p$ y $q$ no tienen factor en común, de modo que $p$ debe ser un factor de $a_0$. Una demostración similar muestra que $q$ es un factor de $a_n$. ■

---

Vemos del Teorema de Ceros Racionales que si el coeficiente principal es 1 o $-1$, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

### EJEMPLO 1 Uso del Teorema de Ceros Racionales

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Library of Congress

**EVARISTE GALOIS** (1811-1832) es uno de los muy pocos matemáticos de tener toda una teoría a la que se ha dado nombre en su honor. Murió cuando todavía no cumplía 21 años, pero ya había resuelto por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación con polinomios se puede resolver con operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos de su tiempo, aunque casi no fue conocido. Repetidas veces envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes o bien perdieron las cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo terso e incluía pocos detalles, lo cual es probable desempeñó un papel para no aprobar los exámenes de admisión de la Ecole Polytechique de París. Político radical, Galois pasó varios meses en prisión por sus actividades revolucionarias. Su corta vida llegó a su fin cuando murió en un duelo por un lío de faldas y, temiendo esto, escribió la esencia de sus ideas y las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "habrá, espero, personas que encuentren ventaja en descifrar todo este desorden." El matemático Camille Jordan hizo justamente esto, 14 años después.

**SOLUCIÓN** Como el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Entonces los ceros racionales posibles son $\pm 1$ y $\pm 2$. Probamos cada una de estas posibilidades.

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$
$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$
$$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$$
$$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$$

Los ceros racionales de $P$ son 1 y $-2$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

En el siguiente recuadro se explica cómo usar el Teorema de Ceros Racionales con división sintética para factorizar un polinomio.

**HALLAR LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO**

1. **Hacer una lista de los ceros posibles.** Haga una lista de todos los ceros racionales posibles, usando el Teorema de Ceros Racionales.
2. **Dividir.** Use división sintética para evaluar la función polinomial de cada uno de los candidatos para los ceros racionales que usted encontró en el Paso 1. Cuando el residuo sea 0, observe el cociente que haya obtenido.
3. **Repetir.** Repita los Pasos 1 y 2 para el cociente. Deténgase cuando obtenga un cociente que sea cuadrático o se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para hallar los ceros restantes.

## EJEMPLO 2 | Hallar ceros racionales

Factorice la función polinomial $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, y encuentre todos sus ceros.

**SOLUCIÓN** Por el Teorema de Ceros Racionales, los ceros racionales de $P$ son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de término constante}}{\text{factor de coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, y

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de } 6}{\text{factor de } 2}$$

Los factores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y los factores de 2 son $\pm 1, \pm 2$. Por lo tanto, los posibles ceros racionales de $P$ son

$$\pm\frac{1}{1},\quad \pm\frac{2}{1},\quad \pm\frac{3}{1},\quad \pm\frac{6}{1},\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{2}{2},\quad \pm\frac{3}{2},\quad \pm\frac{6}{2}$$

Simplificando las fracciones y eliminando duplicados, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1,\quad \pm 2,\quad \pm 3,\quad \pm 6,\quad \pm\frac{1}{2},\quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuál de estos *posibles* ceros en realidad *son* ceros, necesitamos evaluar $P$ en cada uno de estos números. Una forma eficiente de hacerlo es usar división sintética.

**Pruebe con 1 como cero**

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 2 & 3 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -10 & -4 \end{array}$$

El residuo *no es* 0, por lo que 1 *no es* un cero

**Pruebe si 2 es un cero**

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo *es* 0, por lo que 2 *es* un cero

De la última división sintética vemos que 2 es un cero de $P$ y que $P$ se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 && \text{Función polinomial dada} \\ &= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) && \text{De división sintética} \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) && \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de $P$ son 2, $\frac{1}{2}$ y $-3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 3 | Uso del Teorema de Ceros Racionales y la Fórmula Cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

**(a)** Encuentre los ceros de $P$. **(b)** Trace la gráfica de $P$.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 1 & -4 & -9 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & -9 & 14 & 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 2 & -6 & -22 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -11 & 1 & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 5 & 0 & -25 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

**(a)** El coeficiente principal de $P$ es 1, de modo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Entonces, los posibles candidatos son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Usando división sintética (vea al margen), encontramos que 1 y 2 no son ceros pero que 5 es un cero y que $P$ se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x-5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora tratamos de factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus posibles ceros son los divisores de $-2$, es decir,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

Como ya sabemos que 1 y 2 no son ceros de la función polinomial original $P$, no necesitamos probarlos otra vez. Verificando los candidatos restantes, $-1$ y $-2$, vemos que $-2$ es un cero (vea al margen), y $P$ se factoriza como

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x-5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

A continuación use la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de $P$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de $P$ son 5, $-2$, $1 + \sqrt{2}$, y $1 - \sqrt{2}$.

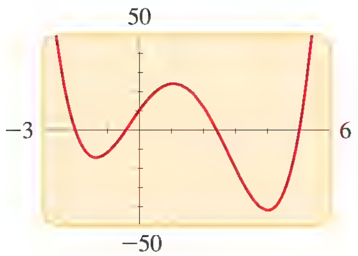



**FIGURA 1**
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

**(b)** Ahora que conocemos los ceros de $P$, podemos usar los métodos de la Sección 3.2 para trazar la gráfica. Si deseamos usar una calculadora graficadora, conocer los ceros nos permite escoger un rectángulo de vista apropiado, que sea lo suficiente ancho como para contener todos los puntos de intersección $x$ de $P$. Las aproximaciones numéricas de los ceros de $P$ son

$$5, \qquad -2, \qquad 2.4, \qquad \text{y} \qquad -0.4$$

Por lo tanto, en este caso escogemos el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y trazamos la gráfica que se ve en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51**

## Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces

En algunos casos, la regla siguiente descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes hacia 1637 (vea página 181) es útil para eliminar candidatos de listas largas de posibles raíces racionales. Para describir esta regla, necesitamos el concepto de *variación en signo.* Si $P(x)$ es una función polinomial con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de $x$ (y omitiendo potencias con coeficiente 0), entonces una **variación en signo** se presenta siempre que coeficientes adyacentes tengan signos contrarios. Por ejemplo,

| Polinomio | Variaciones en signo |
|---|---|
| $x^2 + 4x + 1$ | 0 |
| $2x^3 + x - 6$ | 1 |
| $x^4 - 3x^2 - x + 4$ | 2 |

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones en signos.

### REGLA DE DESCARTES DE SIGNOS

Sea $P$ una función polinomial con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(-x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.

### EJEMPLO 4 | Uso de la Regla de Descartes

Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos de la función polinomial

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

**SOLUCIÓN** La polinomial tiene una variación en signo, de modo que tiene un cero positivo. Ahora

$$\begin{aligned} P(-x) &= 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3 \\ &= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(-x)$ tiene tres variaciones en signo. Entonces, $P(x)$ tiene ya sea tres o un cero negativo, haciendo un total de dos o de cuatro ceros reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

Decimos que $a$ es un **límite inferior** y $b$ es un **límite superior** para los ceros de una función polinomial si todo cero real $c$ de la polinomial satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema nos ayuda a hallar esos límites para los ceros de una función polinomial.

> **TEOREMA DE LOS LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES**
>
> Sea $P$ una función polinomial con coeficientes reales.
>
> 1. Si dividimos $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo no tiene una entrada negativa, entonces $b$ es un límite superior para los ceros reales de $P$.
> 2. Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo tiene entradas que son alternativamente no positivas y no negativas, entonces $a$ es un límite inferior para los ceros reales de $P$.

Una demostración de este teorema está sugerida en el Ejercicio 97. La frase "alternativamente no positivas y no negativas" simplemente quiere decir que los signos de los números se alternan, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.

### EJEMPLO 5 | Límites superior e inferior para ceros de una función polinomial

Demuestre que todos los ceros reales de la función polinomial $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre $-3$ y 2.

**SOLUCIÓN** Dividimos $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ usando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array} \quad \text{Todas las entradas positivas}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & -3 & 9 & -18 & 48 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -16 & 43 \end{array} \quad \text{Las entradas se alternan en signo}$$

Por el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores, $-3$ es un límite inferior y 2 es un límite superior para los ceros. Como ni $-3$ ni 2 es un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división), todos los ceros reales están entre estos números.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

### EJEMPLO 6 | Factorizar una función polinomial de quinto grado

Factorice completamente la función polinomial

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

**SOLUCIÓN** Los posibles ceros racionales de $P$ son $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3, \pm\frac{9}{2}$, y $\pm 9$. Verificamos primero los candidatos positivos, empezando con el más pequeño.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 1 & 3 & -\frac{5}{2} & -\frac{33}{4} & -\frac{9}{8} \\ \hline & 2 & 6 & -5 & -\frac{33}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{63}{8} \end{array} \quad \tfrac{1}{2} \text{ no es un cero}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 & 0 \end{array} \quad P(1) = 0$$

Entonces 1 es un cero, y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Continuamos factorizando el cociente. Todavía tenemos la misma lista de posibles ceros excepto que $\frac{1}{2}$ se ha eliminado.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 2 & 9 & 8 & -7 \\ \hline & 2 & 9 & 8 & -7 & -16 \end{array} \quad 1 \text{ no es un cero}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 3 & 15 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 10 & 14 & 6 & 0 \end{array} \quad P\left(\tfrac{3}{2}\right) = 0, \text{ todas las entradas no negativas}$$

Vemos que $\frac{3}{2}$ es un cero y un límite superior para los ceros de $P(x)$, de modo que no necesitamos verificar más por ceros positivos, porque todos los candidatos restantes son mayores a $\frac{3}{2}$.

$$P(x) = (x - 1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^3 + 10x^2 + 14x + 6) \quad \text{Por división sintética}$$

$$= (x - 1)(2x - 3)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \quad \text{Factorice 2 del último factor, multiplique en segundo factor}$$

Por la Regla de Descartes de los Signos, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene cero positivo, de modo que sus únicos ceros racionales posibles son $-1$ y $-3$.

| −1 | 1 | 5 | 7 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| | | −1 | −4 | −3 |
| | 1 | 4 | 3 | 0 |

$P(-1) = 0$

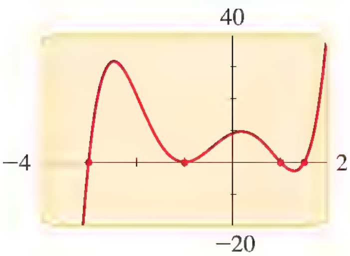



**FIGURA 2**
$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3)$

Por lo tanto,

$$P(x) = (x - 1)(2x - 3)(x + 1)(x^2 + 4x + 3) \quad \text{Por división sintética}$$

$$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3) \quad \text{Factorización cuadrática}$$

Esto significa que los ceros de $P$ son $1, \frac{3}{2}, -1$ y $-3$. La gráfica de la función polinomial se muestra en la Figura 2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79** ■

## Uso de álgebra y calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones con polinomios

En la Sección 1.9 utilizamos calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones gráficamente. Ahora podemos usar las técnicas algebraicas que hemos aprendido, para seleccionar un rectángulo de vista apropiado cuando resolvamos gráficamente una ecuación con polinomios.

**EJEMPLO 7 | Resolver gráficamente una ecuación de cuarto grado**

Encuentre todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, redondeadas al décimo más cercano.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

**SOLUCIÓN** Para resolver gráficamente la ecuación, graficamos

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para ver dónde pueden hallarse las soluciones.

Primero usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para hallar dos números entre los cuales deben estar todas las soluciones. Esto nos permite escoger un rectángulo de vista que seguramente contiene todos los puntos de intersección $x$ de $P$. Usamos división sintética y procedemos por prueba y error.

Para hallar un límite superior, intentamos los números enteros 1, 2, 3, . . . , como candidatos potenciales. Vemos que 2 es un límite superior para las soluciones.

| 2 | 3 | 4 | −7 | −2 | −3 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 20 | 26 | 48 |
| | 3 | 10 | 13 | 24 | 45 |

Todos positivos

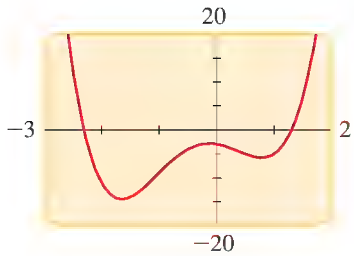



**FIGURA 3**
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Ahora buscamos un límite inferior, intentando con los números $-1$, $-2$ y $-3$ como potenciales candidatos. Vemos que $-3$ es un límite inferior para las soluciones.

| $-3$ | 3 | 4 | $-7$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-9$ | 15 | $-24$ | 78 |
| | 3 | $-5$ | 8 | $-26$ | 75 |

Las entradas se alternan en signo

Entonces, todas las soluciones se encuentran entre $-3$ y 2. Por lo tanto, el rectángulo de vista $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene todos los puntos de intersección $x$ de $P$. La gráfica de la figura 3 tiene dos puntos de intersección $x$, uno entre $-3$ y $-2$ y el otro entre 1 y 2. Si hacemos acercamiento (zoom), encontramos que las soluciones de la ecuación, al décimo más cercano, son $-2.3$ y 1.3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **93**

## EJEMPLO 8 | Determinar el tamaño de un tanque de combustible

Un tanque de combustible está formado por una sección cilíndrica central de 4 pies de largo y dos secciones hemisféricas de extremo, como se ve en la Figura 4. Si el tanque tiene un volumen de 100 pies³, ¿cuál es el radio $r$ que se muestra en la figura, redondeado al centésimo de pie más cercano?

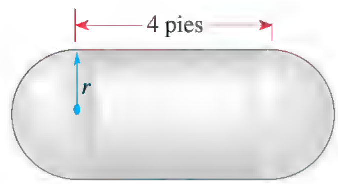



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN** Usando la fórmula del volumen al final de este libro, vemos que el volumen de la sección cilíndrica del tanque es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Como el volumen total del tanque es de 100 pies³, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para $r$ no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución podemos verificar que $r = 3$ lleva a un tanque que tiene más de 226 pies³ de volumen, mucho mayor que el requerido de 100 pies³. Por lo tanto, sabemos que el radio correcto está entre 0 y 3 pies, de modo que usamos un rectángulo de vista de $[0, 3]$ por $[50, 150]$ para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se ve en la Figura 5. Como buscamos que el valor de esta función sea 100, también graficamos la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de vista. El radio correcto será la coordenada $x$ del punto de intersección de la curva y la recta. Usando el cursor y haciendo acercamiento zoom, vemos que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, redondeado a dos lugares decimales. Entonces el tanque tiene un radio de aproximadamente 2.15 pies.

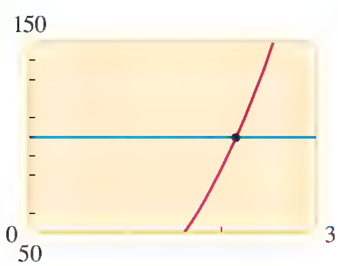



**FIGURA 5**
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Observe que podríamos haber resuelto la ecuación del Ejemplo 8 al escribirla primero como

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y luego hallar el punto de intersección $x$ de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

## 3.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Si la función polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

tiene coeficientes enteros, entonces los únicos números que posiblemente podrían ser ceros racionales de $P$ son todos los de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p$ es un factor de _____ y $q$ es un factor de _____. Los posibles ceros racionales de $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 19x - 10$ son __________.

2. Usando la Regla de Descartes de los Signos, podemos decir que la función polinomial $P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 8$ tiene ______, _____, o ______ ceros reales positivos y ____ ceros reales negativos.

3. *¿Verdadero o falso?* Si $c$ es un cero real de la polinomial $P$, entonces todos los otros ceros de $P$ son ceros de $P(x)/(x - c)$.

4. *¿Verdadero o falso?* Si $a$ es un límite superior para los ceros reales de la polinomial $P$, entonces $-a$ es necesariamente un límite inferior para los ceros reales de $P$.

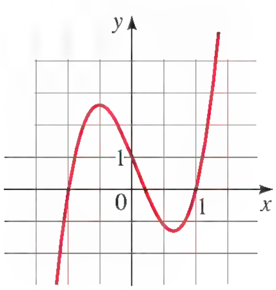
### HABILIDADES

**5-10** ■ Haga una lista de todos los posibles ceros racionales dados por el Teorema de Ceros Racionales (pero no verifique cuáles son realmente ceros).

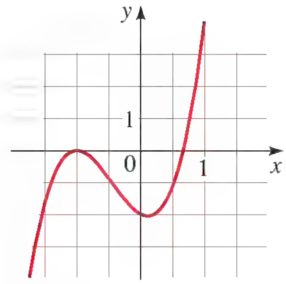
5. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
6. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$
7. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$
8. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$
9. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$
10. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

**11-14** ■ Nos dan una función polinomial $P$ y su gráfica. **(a)** Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de $P$ dados por el Teorema de Ceros Racionales. **(b)** De la gráfica, determine cuáles de los posibles ceros racionales en realidad resultan ser ceros.

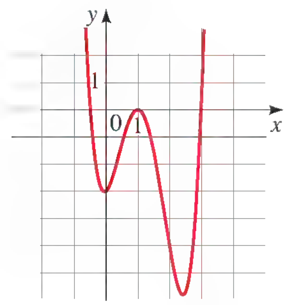
11. $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$



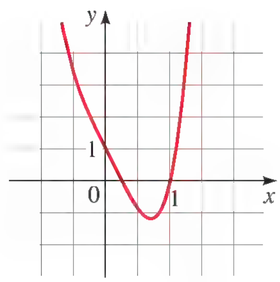

12. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$




13. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$




14. $P(x) = 4x^4 - x^3 - 4x + 1$




**15-46** ■ Encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial, y escriba el polinomio en forma factorizada.

15. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
16. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$
17. $P(x) = x^3 - 3x - 2$
18. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
19. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
20. $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$
21. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
22. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$
23. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$
24. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$
25. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
26. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

**27.** $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

**28.** $P(x) = x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90$

**29.** $P(x) = 4x^4 - 25x^2 + 36$

**30.** $P(x) = 2x^4 - x^3 - 19x^2 + 9x + 9$

**31.** $P(x) = 3x^4 - 10x^3 - 9x^2 + 40x - 12$

**32.** $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

**33.** $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

**34.** $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

**35.** $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

**36.** $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - x - 3$

**37.** $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x - 15$

**38.** $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$

**39.** $P(x) = 20x^3 - 8x^2 - 5x + 2$

**40.** $P(x) = 12x^3 - 20x^2 + x + 3$

**41.** $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

**42.** $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$

**43.** $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 31x^2 + 36$

**44.** $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24$

**45.** $P(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$

**46.** $P(x) = 2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

**47-56** ■ Encuentre todos los ceros reales de la función polinomial. Use la fórmula cuadrática si es necesario, como en el Ejemplo 3(a).

**47.** $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

**48.** $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$

**49.** $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$

**50.** $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

**51.** $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$

**52.** $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 2x - 4$

**53.** $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

**54.** $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8x - 2$

**55.** $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x - 1$

**56.** $P(x) = 4x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 91x^2 - 60x + 9$

**57-64** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Encuentre todos los ceros reales de $P$. **(b)** Trace la gráfica de $P$.

**57.** $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

**58.** $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

**59.** $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

**60.** $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

**61.** $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

**62.** $P(x) = -x^4 + 10x^2 + 8x - 8$

**63.** $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

**64.** $P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$

**65-70** ■ Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar cuántos ceros reales positivos y cuántos negativos puede tener la función polinomial. A continuación, determine el posible número total de ceros reales.

**65.** $P(x) = x^3 - x^2 - x - 3$

**66.** $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$

**67.** $P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

**68.** $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

**69.** $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$

**70.** $P(x) = x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

**71-74** ■ Demuestre que los valores dados para $a$ y $b$ son límites inferiores y superiores para los ceros reales de la función polinomial.

**71.** $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2;\quad a = -3, b = 1$

**72.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8;\quad a = -3, b = 5$

**73.** $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9;\quad a = -3, b = 2$

**74.** $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1;\quad a = 0, b = 6$

**75-78** ■ Encuentre enteros que sean límites superiores e inferiores para los ceros reales de la función polinomial.

**75.** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

**76.** $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

**77.** $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$

**78.** $P(x) = x^5 - x^4 + 1$

**79-84** ■ Encuentre todos los ceros racionales de la función polinomial, y luego encuentre los ceros irracionales, si los hay. Siempre que sea apropiado, use el Teorema de Ceros Racionales, el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores, la Regla de Descartes de los Signos, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización.

**79.** $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

**80.** $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4$

**81.** $P(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$

**82.** $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x$

**83.** $P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$

**84.** $P(x) = 8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6$

**85-88** ■ Demuestre que la función polinomial no tiene ningún cero racional.

**85.** $P(x) = x^3 - x - 2$

**86.** $P(x) = 2x^4 - x^3 + x + 2$

**87.** $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 12$

**88.** $P(x) = x^{50} - 5x^{25} + x^2 - 1$

**89-92** ■ Las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Haga una lista de todas las posibles raíces racionales usando el Teorema de Ceros Racionales, y luego grafique la función polinomial en el rectángulo de vista dado para determinar cuáles valores son soluciones realmente. (Todas las soluciones se puedan ver en el rectángulo de vista.)

**89.** $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0;\quad [-4, 4]$ por $[-15, 15]$

**90.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;\quad [-4, 4]$ por $[-30, 30]$

**91.** $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$; $[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

**92.** $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

**93-96** ■ Use una calculadora graficadora para hallar todas las soluciones reales de la ecuación, redondeada a dos lugares decimales.

**93.** $x^4 - x - 4 = 0$

**94.** $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

**95.** $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

**96.** $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

**97.** Sea $P(x)$ una función polinomial con coeficientes reales y sea $b > 0$. Use el Algoritmo de División para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geq 0$ y que todos los coeficientes en $Q(x)$ son no negativos. Sea $z > b$.

**(a)** Demuestre que $P(z) > 0$.

**(b)** Demuestre la primera parte del Teorema de los Límites Superiores e Inferiores.

**(c)** Use la primera parte del Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para demostrar la segunda parte. [*Sugerencia:* Demuestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

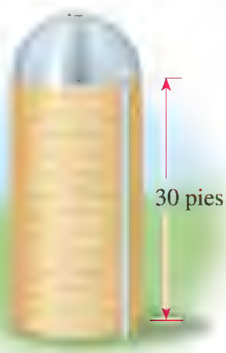
**98.** Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

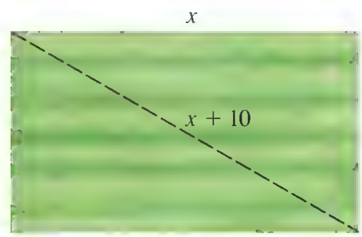
tiene exactamente una raíz racional, y luego demuestre que debe tener ya sea dos o cuatro raíces racionales.

## APLICACIONES

**99. Volumen de un silo** Un silo para granos está formado por una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (incluyendo la parte dentro de la sección del techo) es de 15,000 pies$^3$ y la parte cilíndrica es de 30 pies de altura, ¿cuál es el radio del silo, redondeado al décimo de pie más cercano?




**100. Dimensiones de un lote** Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 5000 pies$^2$. Una diagonal entre esquinas opuestas se mide y resulta ser 10 pies más larga que un lado de la parcela. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno, redondeadas al pie más cercano?




**101. Profundidad de una nevada** Empezó a caer nieve al mediodía de un domingo. La cantidad de nieve en el suelo en cierto lugar en el tiempo $t$ está dada por la función

$$h(t) = 11.60t - 12.41t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

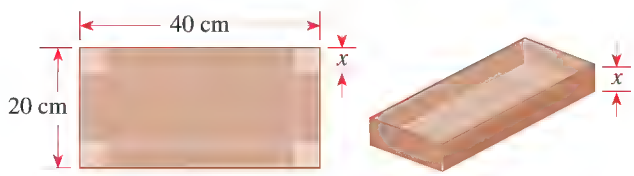
donde $t$ se mide en días desde el comienzo de la nevada y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y use su gráfica para contestar las siguientes preguntas.

**(a)** ¿Qué ocurrió poco después del mediodía del martes?

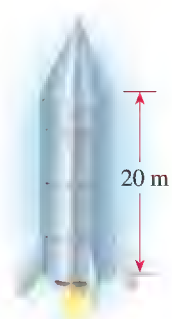
**(b)** ¿Hubo más de 5 pulgadas de nieve en el suelo? Si es así, ¿en qué día(s)?

**(c)** ¿En qué día y a qué hora (a la hora más cercana) desapareció por completo la nieve?

**102. Volumen de una caja** Una caja abierta con volumen de 1500 cm$^3$ ha de construirse tomando una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de lado de longitud $x$ cm de cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Demuestre que esto puede hacerse en dos formas diferentes, y encuentre las dimensiones exactas de la caja en cada caso.




**103. Volumen de un cohete** Un cohete está formado por un cilindro circular recto de 20 m de altura, rematado por un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es igual que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser este radio (redondeado a dos lugares decimales) si el volumen total debe ser de $500\pi/3$ m$^3$?



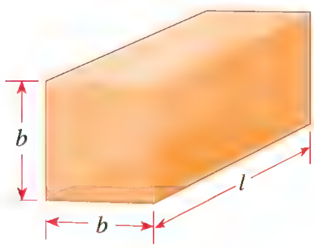
**104. Volumen de una caja** Una caja rectangular con volumen de $2\sqrt{2}$ pies$^3$ tiene una base cuadrada, como se ilustra en la figura siguiente. La diagonal de la caja (entre un par de esquinas opuestas) es 1 pie más larga que cada lado de la base.

**(a)** Si la caja tiene lados de longitud de $x$ pies, demuestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

**(b)** Demuestre que dos cajas diferentes satisfacen las condiciones dadas. Encuentre las dimensiones en cada caso, redondeadas al centésimo de pie más cercano.

**105. Dimensiones alrededor de una caja** Una caja con base cuadrada tiene longitud más dimensiones a su alrededor de 108 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es de 2200 pulg.$^3$?




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**106. ¿Cuántos ceros reales puede tener una función polinomial?** Dé ejemplos polinomiales que tengan las siguientes propiedades, o explique por qué es imposible hallar ese polinomio.

**(a)** Una polinomial de grado 3 que no tiene ceros reales

**(b)** Una polinomial de grado 4 que no tiene ceros reales

**(c)** Una polinomial de grado 3 que no tiene tres ceros reales, sólo uno de los cuales es racional

**(d)** Una polinomial de grado 3 que no tiene cuatro ceros reales, ninguno de los cuales es racional.

¿Qué debe ser verdadero acerca del grado de una polinomial con coeficientes enteros si no tiene ceros reales?

**107. La cúbica deprimida** La ecuación cúbica más general (tercer grado) con coeficientes racionales se puede escribir como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

**(a)** Demuestre que si sustituimos $x$ por $X - a/3$ y simplificamos, terminamos con una ecuación que no tiene término en $X^2$, es decir, una ecuación de la forma

$$X^3 + pX + q = 0$$

A esto se llama *cúbica deprimida*, porque hemos "deprimido" el término cuadrático.

**(b)** Use el procedimiento descrito en la parte (a) para deprimir la ecuación $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

**108. La fórmula cúbica** La fórmula cuadrática se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática (o de segundo grado). El estudiante puede preguntarse si existen esas fórmulas para ecuaciones cúbicas (de tercer grado), cuárticas (de cuarto grado) y de grado superior. Para la cúbica deprimida $x^3 + px + q = 0$, Cardano (página 274) encontró la siguiente fórmula para una solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Una fórmula para ecuaciones cuárticas (de cuarto grado) fue descubierta por el matemático italiano Ferrari en 1540. En 1824, el matemático noruego Niels Henrik Abel demostró que es imposible escribir una fórmula quíntica, es decir, una fórmula para ecuaciones de quinto grado. Finalmente, Galois (página 254) dio un criterio para determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver mediante una fórmula que contenga radicales.

Utilice la fórmula cúbica para hallar una solución para las siguientes ecuaciones. A continuación resuelva las ecuaciones usando los métodos que aprendió en esta sección. ¿Cuál método es más fácil?

**(a)** $x^3 - 3x + 2 = 0$

**(b)** $x^3 - 27x - 54 = 0$

**(c)** $x^3 + 3x + 4 = 0$

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Apuntando hacia un cero**

En este proyecto exploramos un método numérico para aproximar los ceros de una función polinomial. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 3.5 NÚMEROS COMPLEJOS

**Operaciones aritméticas con números complejos ▶ Raíces cuadradas de números negativos ▶ Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas**

En la Sección 1.5 vimos que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene solución real. Si intentamos resolver esta ecuación, obtenemos $x^2 = -4$, por lo que

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, porque el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo, $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Por lo tanto, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Vea en la nota acerca de Cardano (página 274) un ejemplo de cómo se usan números complejos para hallar soluciones reales de ecuaciones con polinomios.

Para hacer posible resolver *todas* las ecuaciones cuadráticas, los matemáticos han inventado un sistema numérico expandido, llamado *sistema de números complejos*. Primero definieron el nuevo número

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es entonces un número de la forma $a + bi$, donde $a$ y $b$ son números reales.

### DEFINICIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde $a$ y $b$ son números reales y $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es $a$ y la **parte imaginaria** es $b$. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Observe que las partes reales e imaginarias de un número complejo son números reales.

### EJEMPLO 1 | Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

| | |
|---|---|
| $3 + 4i$ | Parte real 3, parte imaginaria 4 |
| $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$ | Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$ |
| $6i$ | Parte real 0, parte imaginaria 6 |
| $-7$ | Parte real $-7$, parte imaginaria 0 |

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **9**

Un número tal como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro**. Un número real como $-7$ puede considerarse como número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos, toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2i^2 = 4(-1) = -4 \quad \text{y} \quad (-2i)^2 = (-2)^2i^2 = 4(-1) = -4$$

Aun cuando usamos el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben considerarse como menos "reales" (en el sentido más bien ordinario que matemático de la palabra) que números negativos o números irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana —los números $-1$ y $\sqrt{2}$ así como el número $i$. Estudiamos números complejos porque completan, en una forma útil y elegante, nuestro estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los

números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino también en las otras ciencias. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

## ▼ Operaciones aritméticas con números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen exactamente igual que con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que necesitamos recordar es que $i^2 = -1$. Entonces, los siguientes cálculos son válidos.

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 \qquad \text{Multiplique y reúna términos semejantes}$$

$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \qquad i^2 = -1$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \text{Combine partes reales e imaginarias}$$

Por lo tanto definimos la suma, diferencia y producto de números complejos como sigue.

### SUMAR, RESTAR Y MULTIPLICAR NÚMEROS COMPLEJOS

| Definición | Descripción |
|---|---|
| **Suma** | |
| $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ | Para sumar números complejos, sumamos las partes reales y las partes imaginarias. |
| **Resta** | |
| $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ | Para restar números complejos, restamos las partes reales y las partes imaginarias. |
| **Multiplicación** | |
| $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ | Multiplicamos números complejos como binomios, usando $i^2 = -1$. |

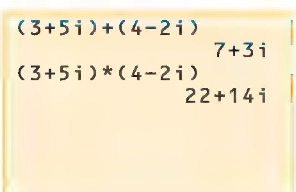
### EJEMPLO 2 | Sumar, restar y multiplicar números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

**(a)** $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ **(b)** $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

**(c)** $(3 + 5i)(4 - 2i)$ **(d)** $i^{23}$

Las calculadoras graficadoras pueden realizar operaciones aritméticas con números complejos.




**SOLUCIÓN**

**(a)** De acuerdo con la definición, sumamos las partes reales y sumamos las partes imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

**(b)** $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

**(c)** $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

**(d)** $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15, 19, 25** Y **33** ■

Conjugados complejos

| Número | Conjugado |
|---|---|
| $3 + 2i$ | $3 - 2i$ |
| $1 - i$ | $1 + i$ |
| $4i$ | $-4i$ |
| $5$ | $5$ |

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión radical, que consideramos en la Sección 1.4. Para el número complejo $z = a + bi$ definimos que su **conjugado complejo** es $\bar{z} = a - bi$. Observe que

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Library of Congress

**LEONHARD EULER** (1707-1783) nació en Basilea, Suiza, hijo de un pastor. Cuando Euler tenía 13 años, su padre lo envió a la Universidad en Basilea a estudiar teología, pero Euler pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología, estudió matemáticas, medicina, astronomía, física e idiomas de Asia. Se dice que Euler podía calcular sin esfuerzo al igual que "los hombres respiran o las águilas vuelan". Cien años antes de Euler, Fermat (vea página 99) había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda $n$. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65,537, y 4,294,967,297. Es fácil demostrar que los primeros cuatro son primos. El quinto también fue considerado primo hasta que Euler, con su fenomenal capacidad de cálculo, demostró que es el producto 641 × 6,700,417 por lo tanto no es primo. Euler publicó más que cualquier otro matemático en la historia. Sus obras recolectadas comprenden 75 grandes volúmenes. Aun cuando quedó ciego los últimos 17 años de su vida, continuó trabajando y publicando sus obras. En éstas popularizó el uso de los símbolos $\pi$, $e$ e $i$, que el lector encontrará en este libro. Una de las más duraderas aportaciones de Euler es su desarrollo de los números complejos.

De modo que el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Usamos esta propiedad para dividir números complejos.

**DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS**

Para simplificar el cociente $\dfrac{a+bi}{c+di}$, multiplicamos el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Más que memorizar toda esta fórmula, es más fácil recordar el primer paso y luego multiplicar el numerador y el denominador como de costumbre.

## EJEMPLO 3 | Dividir números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

**(a)** $\dfrac{3+5i}{1-2i}$ **(b)** $\dfrac{7+3i}{4i}$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador para hacer que el nuevo denominador sea un número real.

**(a)** El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1-2i} = 1 + 2i$.

$$\frac{3+5i}{1-2i} = \left(\frac{3+5i}{1-2i}\right)\left(\frac{1+2i}{1+2i}\right) = \frac{-7+11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

**(b)** El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto,

$$\frac{7+3i}{4i} = \left(\frac{7+3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12-28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$

INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **43**

## ▼ Raíces cuadradas de números negativos

Así como todo número real positivo $r$ tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo también tiene dos raíces cuadradas. Si $-r$ es un número negativo, entonces sus raíces cuadradas son $\pm i\sqrt{r}$, porque $(i\sqrt{r})^2 = i^2 r = -r$ y $(-i\sqrt{r})^2 = (-1)^2 i^2 r = -r$.

**RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS**

Si $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$.

Por lo general escribimos $i\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$

## EJEMPLO 4 | Raíces cuadradas de números negativos

**(a)** $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$ **(b)** $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$ **(c)** $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **49**

Debe tenerse especial cuidado al realizar cálculos que comprendan raíces cuadradas de números negativos. Aun cuando $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando $a$ y $b$ son positivas, *esto no es verdadero* cuando ambas son negativas. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero

$$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

entonces

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}$$

Al completar radicales de números negativos, exprésela primero en la forma $i\sqrt{r}$ (donde $r > 0$) para evitar posibles errores de este tipo.

### EJEMPLO 5 | Usar raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y exprésela en la forma $a + bi$.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4})\\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i)\\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

## Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Ya hemos visto que si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Pero en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones porque los números negativos tienen raíces cuadradas en la situación expandida.

### EJEMPLO 6 | Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Resuelva cada una de las ecuaciones siguientes.

**(a)** $x^2 + 9 = 0$ **(b)** $x^2 + 4x + 5 = 0$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, y entonces

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por tanto $3i$ y $-3i$.

**(b)** Por la Fórmula Cuadrática tenemos

$$\begin{aligned}x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2}\\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}\\ &= \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i\end{aligned}$$

Entonces las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **59**

Vemos del Ejemplo 6 que si una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene soluciones complejos, entonces estas soluciones son complejos conjugados entre sí. Por lo tanto, si $a + bi$ es una solución, entonces $a - bi$ también es una solución.

### EJEMPLO 7 | Complejos conjugados como soluciones de una cuadrática

Demuestre que las soluciones de la ecuaciones

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son conjugados complejos entre sí.

**SOLUCIÓN** Usamos la Fórmula Cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Por lo tanto, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y éstos son complejos conjugados.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

## 3.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. El número imaginario $i$ tiene la propiedad de que $i^2 =$ _______.
2. Para el número complejo $3 + 4i$ la parte real es _______ y la parte imaginaria es _______.
3. **(a)** El complejo conjugado de $3 + 4i$ es $\overline{3 + 4i} =$_______.
   **(b)** $(3 + 4i)(\overline{3 + 4i}) =$ ________.
4. Si $3 + 4i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales, entonces _______ también es una solución de la ecuación.

### HABILIDADES

**5-14** ■ Encuentre las partes real e imaginaria del número complejo.

**5.** $5 - 7i$
**6.** $-6 + 4i$
**7.** $\dfrac{-2 - 5i}{3}$
**8.** $\dfrac{4 + 7i}{2}$
**9.** $3$
**10.** $-\frac{1}{2}$
**11.** $-\frac{2}{3}i$
**12.** $i\sqrt{3}$
**13.** $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$
**14.** $2 - \sqrt{-5}$

**15-46** ■ Evalúe la expresión y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

**15.** $(2 - 5i) + (3 + 4i)$
**16.** $(2 + 5i) + (4 - 6i)$
**17.** $(-6 + 6i) + (9 - i)$
**18.** $(3 - 2i) + \left(-5 - \frac{1}{3}i\right)$
**19.** $\left(7 - \frac{1}{2}i\right) - \left(5 + \frac{3}{2}i\right)$
**20.** $(-4 + i) - (2 - 5i)$
**21.** $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$
**22.** $6i - (4 - i)$
**23.** $4(-1 + 2i)$
**24.** $2i\left(\frac{1}{2} - i\right)$
**25.** $(7 - i)(4 + 2i)$
**26.** $(5 - 3i)(1 + i)$
**27.** $(3 - 4i)(5 - 12i)$
**28.** $\left(\frac{2}{3} + 12i\right)\left(\frac{1}{6} + 24i\right)$
**29.** $(6 + 5i)(2 - 3i)$
**30.** $(-2 + i)(3 - 7i)$
**31.** $i^3$
**32.** $(2i)^4$
**33.** $i^{100}$
**34.** $i^{1002}$
**35.** $\dfrac{1}{i}$
**36.** $\dfrac{1}{1 + i}$
**37.** $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$
**38.** $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$
**39.** $\dfrac{26 + 39i}{2 - 3i}$
**40.** $\dfrac{25}{4 - 3i}$
**41.** $\dfrac{10i}{1 - 2i}$
**42.** $(2 - 3i)^{-1}$
**43.** $\dfrac{4 + 6i}{3i}$
**44.** $\dfrac{3 + 5i}{15i}$
**45.** $\dfrac{1}{1 + i} - \dfrac{1}{1 - i}$
**46.** $\dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$

**47-56** ■ Evalúe la expresión radical y exprese el resultado en la forma $a + bi$.

**47.** $\sqrt{-25}$
**48.** $\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$
**49.** $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$
**50.** $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

**51.** $(3 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-1})$

**52.** $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

**53.** $\dfrac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$

**54.** $\dfrac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$

**55.** $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

**56.** $\dfrac{\sqrt{-7}\sqrt{-49}}{\sqrt{28}}$

**57-72** ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación y expréselas en la forma $a + bi$.

**57.** $x^2 + 49 = 0$

**58.** $9x^2 + 4 = 0$

**59.** $x^2 - 4x + 5 = 0$

**60.** $x^2 + 2x + 2 = 0$

**61.** $x^2 + 2x + 5 = 0$

**62.** $x^2 - 6x + 10 = 0$

**63.** $x^2 + x + 1 = 0$

**64.** $x^2 - 3x + 3 = 0$

**65.** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

**66.** $2x^2 + 3 = 2x$

**67.** $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$

**68.** $z + 4 + \dfrac{12}{z} = 0$

**69.** $6x^2 + 12x + 7 = 0$

**70.** $4x^2 - 16x + 19 = 0$

**71.** $\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 0$

**72.** $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

**73-80** ■ Recuerde que el símbolo $\overline{z}$ representa el conjugado complejo de $z$. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, demuestre cada enunciado.

**73.** $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$

**74.** $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

**75.** $(\overline{z})^2 = \overline{z^2}$

**76.** $\overline{\overline{z}} = z$

**77.** $z + \overline{z}$ es un número real.

**78.** $z - \overline{z}$ es un número imaginario puro.

**79.** $z \cdot \overline{z}$ es un número real.

**80.** $z = \overline{z}$ si y sólo si $z$ es real.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**81. Raíces complejas conjugadas** Suponga que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué deben las raíces ser complejos conjugados entre sí? (Piense en cómo encontraría las raíces usando la Fórmula Cuadrática.)

**82. Potencias de $i$** Calcule las primeras 12 potencias de $i$, es decir, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Se observa un patrón? Explique cómo calcularía usted cualquier potencia entera de $i$, usando el patrón que haya descubierto. Use este procedimiento para calcular $i^{4446}$.

# 3.6 Ceros complejos y el Teorema Fundamental de Álgebra

El Teorema Fundamental de Álgebra y Factorización Completa ▶ Ceros y sus multiplicidades ▶ Los ceros complejos vienen en pares conjugados ▶ Factores lineales y cuadráticos

Ya hemos visto que una función polinomial de grado $n$ puede tener como máximo $n$ ceros reales. En el sistema de números complejos, una función polinomial de grado $n$ tiene exactamente $n$ ceros y por lo tanto se puede factorizar en exactamente $n$ factores lineales. Este dato es una consecuencia del Teorema Fundamental de Álgebra, que fue demostrado por el matemático alemán C. F. Gauss en 1799 (vea página 272).

## ▼ El Teorema Fundamental de Álgebra y Factorización Completa

El siguiente teorema es la base para gran parte de nuestro trabajo de factorizar polinomios y resolver ecuaciones con polinomios.

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE ÁLGEBRA**

Toda función polinomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene al menos un cero complejo.

Debido a que cualquier número real también es un número complejo, el teorema también se aplica a funciones polinomiales con coeficientes reales.

El Teorema Fundamental de Álgebra y el Teorema del Factor juntos demuestran que un polinomio se puede factorizar completamente en factores lineales, como lo demostramos a continuación.

### TEOREMA DE FACTORIZACIÓN COMPLETA

Si $P(x)$ es una función polinomial de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tal que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

**DEMOSTRACIÓN** Por el Teorema Fundamental de Álgebra, $P$ tiene al menos un cero. Llamémosle $c_1$. Por el Teorema del Factor (vea página 250), $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. La aplicación del Teorema Fundamental al cociente $Q_1(x)$ nos da la factorización

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y $c_2$ es un cero de $Q_1(x)$. Al continuar este proceso para $n$ pasos, obtenemos un cociente final $Q_n(x)$ de grado 0, una constante diferente de cero a la que llamaremos $a$. Esto significa que $P$ ha sido factorizado como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Para hallar realmente los ceros complejos de un polinomio de grado $n$, por lo general factorizamos primero tanto como sea posible, luego usamos la fórmula cuadrática en partes que no podamos factorizar más.

## EJEMPLO 1 | Factorizar completamente una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

**(a)** Encuentre todos los ceros de $P$.

**(b)** Encuentre la factorización completa de $P$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero factorizamos $P$ como sigue.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 && \text{Dado} \\ &= x^2(x - 3) + (x - 3) && \text{Agrupar términos} \\ &= (x - 3)(x^2 + 1) && \text{Factorizar } x - 3 \end{aligned}$$

Encontramos los ceros de $P$ al igualar a 0 cada factor:

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

Este factor es 0 cuando $x = 3$ | Este factor es 0 cuando $x = i$ o $i$

Haciendo $x - 3 = 0$, vemos que $x = 3$ es un cero. Haciendo $x^2 + 1 = 0$, obtenemos $x^2 = -1$, de modo que $x = \pm i$. Por lo tanto, los ceros de $P$ son 3, $i$ y $-i$.

**(b)** Como los ceros son 3, $i$ y $-i$ por el Teorema de Factorización Completa $P$ se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 3)(x - i)[x - (-i)] \\ &= (x - 3)(x - i)(x + i) \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## EJEMPLO 2 | Factorizar completamente una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x + 4$.

**(a)** Encuentre todos los ceros de $P$.

**(b)** Encuentre la factorización completa de $P$.

**SOLUCIÓN**

| $-2$ | $1$ | $-0$ | $-2$ | $-4$ |
|---|---|---|---|---|
| | | $-2$ | $4$ | $-4$ |
| | $1$ | $-2$ | $-2$ | $0$ |

**(a)** Los posibles ceros racionales son los factores de 4, que son $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$. Usando división sintética (vea al margen), encontramos que $-2$ es un cero, y los factores con polinomios como

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Este factor es 0 cuando $x = -2$ | Use la Fórmula Cuadrática para hallar cuándo es 0 este factor

Para hallar los ceros, igualamos a 0 cada factor. Desde luego, $x + 2 = 0$ significa que $x = -2$. Usamos la fórmula cuadrática para hallar cuándo es 0 el otro factor.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 el factor}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \qquad \text{Fórmula Cuadrática}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad \text{Tome raíz cuadrada}$$

$$x = 1 \pm i \qquad \text{Simplifique}$$

Por lo tanto, los ceros de $P$ son $-2$, $1 + i$ y $1 - i$.

**(b)** Como los ceros son $-2$, $1 + i$ y $1 - i$, por el Teorema de Factorización Completa, $P$ se factoriza como

$$P(x) = [x - (-2)][x - (1 + i)][x - (1 - i)]$$
$$= (x + 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## Ceros y sus multiplicidades

En el Teorema de Factorización Completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de $P$. Estos ceros no necesitan ser todos diferentes. Si el factor $x - c$ aparece $k$ veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces decimos que $c$ es un cero de **multiplicidad $k$** (vea página 240). Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

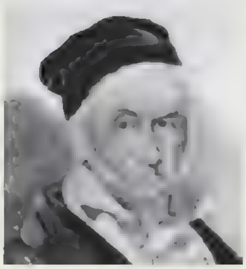
tiene los siguientes ceros:

1 (multiplicidad 3), $\quad -2$ (multiplicidad 2) $\quad -3$ (multiplicidad 5)

La función polinomial $P$ tiene el mismo número de ceros que su grado: tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre que contemos multiplicidades. Esto es verdadero para todas las funciones polinomiales, como lo demostramos en el siguiente teorema.

**TEOREMA DE CEROS**

Toda función polinomial de grado $n \geq 1$ tiene exactamente $n$ ceros, siempre que un cero de multiplicidad $k$ se cuente $k$ veces.



© CORBIS

**CARL FRIEDRICH GAUSS** (1777-1855) es considerado el más grande matemático de los tiempos modernos. Sus contemporáneos lo llamaban "Príncipe de las Matemáticas". Nació de una familia pobre; su padre se ganaba la vida como albañil. Cuando Gauss era aún muy pequeño, encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre, el primero de muchos incidentes que dieron evidencia de su precocidad matemática. (Vea también página 796.) Cuando tenía 19 años, Gauss demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir con escuadra y compás, algo notable porque, desde los tiempos de Euclides, se pensaba que los únicos polígonos regulares que se podían construir de esta forma eran el triángulo y el pentágono. Por este descubrimiento, Gauss decidió buscar una carrera en matemáticas en lugar de idiomas, su otra pasión. En su tesis de doctorado, escrita a la edad de 22 años, Gauss demostró el Teorema Fundamental de Álgebra: Un polinomio de grado $n$ con coeficientes complejos tiene $n$ raíces. Sus otros logros abarcan todas las ramas de las matemáticas, así como de la física y la astronomía.

**DEMOSTRACIÓN** Sea $P$ una función polinomial de grado $n$. Por el Teorema de Factorización complete

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Ahora supongamos que $c$ es un cero de $P$ diferente de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Entonces

$$P(c) = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n) = 0$$

Así, por la Propiedad del Producto Cero, uno de los factores $c - c_i$ debe ser 0, por lo que $c = c_i$ para alguna $i$. Se deduce que $P$ tiene exactamente $n$ ceros $c_1, c_2, \ldots, c_n$. ■

## EJEMPLO 3 | Factorización de una función polinomial con ceros complejos

Encuentre la factorización completa y los cinco ceros de la función polinomial

$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

**SOLUCIÓN** Como $3x$ es un factor común, tenemos

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este factor es 0 cuando $x = 0$

Este factor es 0 cuando $x = 2i$ o $x = -2i$

Para factorizar $x^2 + 4$, observe que $2i$ y $-2i$ son ceros de esta función polinomial. Entonces, $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$, y

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)^2(x + 2i)^2 \end{aligned}$$

0 es un cero de multiplicidad 1

$2i$ es un cero de multiplicidad 2

$-2i$ es un cero de multiplicidad 2

Los ceros de $P$ son 0, $2i$ y $-2i$. Como los factores $x - 2i$ y $x + 2i$ se presentan cada uno dos veces en la factorización completa de $P$, los ceros $2i$ y $-2i$ son de multiplicidad 2 (o *dobles* ceros). Por lo tanto, hemos encontrado los cinco ceros.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29** ■

La tabla siguiente da más ejemplos de funciones polinomiales con sus factorizaciones completas y ceros.

| Grado | Polinomial | Cero(s) | Número de ceros |
|---|---|---|---|
| 1 | $P(x) = x - 4$ | 4 | 1 |
| 2 | $P(x) = x^2 - 10x + 25$<br>$= (x - 5)(x - 5)$ | 5 (multiplicidad 2) | 2 |
| 3 | $P(x) = x^3 + x$<br>$= x(x - i)(x + i)$ | $0, i, -i$ | 3 |
| 4 | $P(x) = x^4 + 18x^2 + 81$<br>$= (x - 3i)^2(x + 3i)^2$ | $3i$ (multiplicidad 2),<br>$-3i$ (multiplicidad 2) | 4 |
| 5 | $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$<br>$= x^3(x - 1)^2$ | 0 (multiplicidad 3),<br>1 (multiplicidad 2) | 5 |

## EJEMPLO 4 | Hallar funciones polinomiales con ceros especificados

**(a)** Encuentre una función polinomial $P(x)$ de grado 4, con ceros $i, -i$, 2 y $-2$, y con $P(3) = 25$.

**(b)** Encuentre una función polinomial $Q(x)$ de grado 4, con ceros $-2$ y 0, donde $-2$ es un cero de multiplicidad 3.

**SOLUCIÓN**

**(a)** El polinomio pedido tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (-2)) \\ &= a(x^2 + 1)(x^2 - 4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= a(x^4 - 3x^2 - 4) && \text{Multiplique} \end{aligned}$$

Sabemos que $P(3) = a(3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, de modo que $a = \frac{1}{2}$. Entonces,

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

**(b)** Requerimos

$$\begin{aligned} Q(x) &= a[x - (-2)]^3(x - 0) \\ &= a(x + 2)^3 x \\ &= a(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x && \text{Fórmula 4 de Productos Notables (Sección 1.3)} \\ &= a(x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \end{aligned}$$

Como no nos dan información acerca de $Q$ que no sea sus ceros y su multiplicidad, podemos escoger cualquier número por $a$. Si usamos $a = 1$, obtenemos

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

## EJEMPLO 5 | Hallar todos los ceros de una función polinomial

Encuentre todos los ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

**SOLUCIÓN** Usando el Teorema de Ceros Racionales de la Sección 3.4, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Comprobando éstos usando división sintética, encontramos que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros, y obtenemos la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) && \text{Factorice } x - 2 \\ &= (x - 2)(x + \tfrac{1}{3})(3x^2 + 3x + 6) && \text{Factorice } x + \tfrac{1}{3} \\ &= 3(x - 2)(x + \tfrac{1}{3})(x^2 + x + 2) && \text{Factorice 3} \end{aligned}$$

Los ceros del factor cuadrático son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

por lo tanto los ceros de $P(x)$ son

$$2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

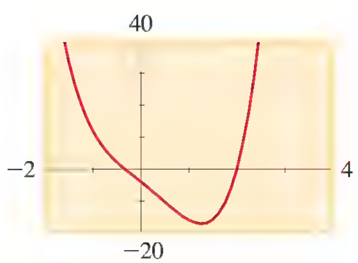



**FIGURA 1**
$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$

La Figura 1 muestra la gráfica de la función polinomial $P$ del Ejemplo 5. Los puntos de intersección $x$ corresponden a los ceros reales de $P$. Los ceros imaginarios no pueden ser determinados a partir de la gráfica.

**GEROLAMO CARDANO** (1501-1576) es ciertamente una de las figuras más pintorescas en la historia de las matemáticas. Fue el médico mejor conocido en la Europa de su tiempo, pero toda su vida estuvo atormentada por numerosas enfermedades, incluyendo fracturas, hemorroides y un temor irracional de encontrarse con perros rabiosos. Fue un padre afectuoso, pero sus amados hijos lo descorazonaron: su hijo favorito fue decapitado por asesinar a su propia esposa. Cardano fue también un jugador compulsivo; de hecho, su vicio lo llevó a escribir el *Libro de juegos y oportunidades*, su primer estudio de probabilidad desde un punto de vista matemático.

En la obra matemática más importante de Cardano, la *Ars Magna*, detalló la solución de las ecuaciones generales de tercero y cuarto grados. Cuando se publicó, los matemáticos se sintieron incómodos incluso con números negativos, pero las fórmulas de Cardano facilitaron el camino para la aceptación no sólo de números negativos, sino también de números imaginarios, porque ocurrían de manera natural para resolver ecuaciones con polinomios. Por ejemplo, para la ecuación cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

una de sus fórmulas da la solución

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(Vea página 263, Ejercicio 108). Este valor de $x$ en realidad resulta ser el *entero* 4, pero, para encontrarlo, Cardano tuvo que usar el número imaginario $\sqrt{-121} = 11i$.

## Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Como ya es posible que el lector haya observado, por los ejemplos dados hasta este punto, los ceros complejos de funciones polinomiales con coeficientes reales vienen en pares. Siempre que $a + bi$ es un cero, su complejo conjugado $a - bi$ es también un cero.

### TEOREMA DE CEROS CONJUGADOS

Si la función polinomial $P$ tiene coeficientes reales y si el número complejo $z$ es un cero de $P$, entonces su complejo conjugado $\bar{z}$ también es un cero de $P$.

**DEMOSTRACIÓN** Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada coeficiente es real. Suponga que $P(z) = 0$. Debemos demostrar que $P(\bar{z}) = 0$. Usamos los datos de que el complejo conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$\begin{aligned} P(\bar{z}) &= a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \cdots + a_1\bar{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} && \text{Porque los coeficientes son reales} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que $\bar{z}$ también es un cero de $P(x)$, que demuestra el teorema. ■

## EJEMPLO 6 | Una función polinomial con un cero complejo especificado

Encuentre una función polinomial $P(x)$ de grado 3 que tenga coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

**SOLUCIÓN** Como $3 - i$ es un cero, entonces también lo es $3 + i$ por el Teorema de Ceros Conjugados. Esto significa que $P(x)$ debe tener la siguiente forma.

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupe} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de Diferencia de Cuadrados} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 6x + 10) && \text{Expanda} \\ &= a\left(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5\right) && \text{Expanda} \end{aligned}$$

Para hacer enteros todos los coeficientes, hacemos $a = 2$ y tenemos

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otra función polinomial que satisfaga los requisitos dados debe ser un múltiplo entero de éste.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

## Factores lineales y cuadráticos

Hemos visto que un polinomio se factoriza completamente en factores lineales si usamos números complejos. Si no usamos números complejos, entonces un polinomio con coeficientes reales siempre puede factorizarse en factores lineales y cuadráticos. Usamos esta propiedad en la Sección 10.7 cuando estudiamos fracciones parciales. Un polinomio cuadrático sin ceros reales se denomina **irreductible** en los números reales. Dicho polinomio no puede ser factorizado sin usar números complejos.

### TEOREMA DE FACTORES LINEALES Y CUADRÁTICOS

Toda función polinomial con coeficientes reales puede ser factorizado en un producto de factores lineales y cuadráticos irreductibles con coeficientes reales.

**DEMOSTRACIÓN** Primero observamos que si $c = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned}(x - c)(x - \bar{c}) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)]\\ &= [(x - a) - bi][(x - a) + bi]\\ &= (x - a)^2 - (bi)^2\\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

La última expresión es una cuadrática con coeficientes *reales*.

Ahora, si $P$ es una función polinomial con coeficientes reales, entonces por el Teorema de Factorización Completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

Como las raíces complejas se presentan en pares conjugados, podemos multiplicar los factores correspondientes a cada uno de tales pares para obtener un factor cuadrático con coeficientes reales. Esto resulta en que $P$ es factorizada en factores lineales y cuadráticos irreductibles. ■

### EJEMPLO 7 | Factorizar una función polinomial en factores lineales y cuadráticos

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

**(a)** Factorice $P$ en factores lineales y cuadráticos irreductibles con coeficientes reales.

**(b)** Factorice $P$ completamente en factores lineales con coeficientes reales.

**SOLUCIÓN**

**(a)**

$$\begin{aligned}P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8\\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4)\\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4)\end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreductible, porque no tiene ceros reales.

**(b)** Para obtener la factorización completa, factorizamos el factor cuadrático restante.

$$\begin{aligned}P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4)\\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i)\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

## 3.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. La función polinomial $P(x) = 3(x - 5)^3(x - 3)(x + 2)$ tiene grado_____. Tiene ceros 5, 3 y _____. El cero 5 tiene multiplicidad_____, y el cero 3 tiene multiplicidad _____.

2. **(a)** Si $a$ es un cero de la función polinomial $P$, entonces _____ debe ser un factor de $P(x)$.

   **(b)** Si $a$ es un cero de multiplicidad $m$ de la función polinomial $P$, entonces _____ debe ser un factor de $P(x)$ cuando factorizamos $P$ completamente.

3. Una función polinomial de grado $n \geq 1$ tiene exactamente _____ ceros si un cero de multiplicidad $m$ se cuenta $m$ veces.

4. Si la función polinomial $P$ tiene coeficientes reales y si $a + bi$ es un cero de $P$, entonces _____ es también un cero de $P$.

### HABILIDADES

**5-16** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Encuentre todos los ceros de $P$, reales y complejos. **(b)** Factorice $P$ completamente.

**5.** $P(x) = x^4 + 4x^2$ **6.** $P(x) = x^5 + 9x^3$

**7.** $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ **8.** $P(x) = x^3 + x^2 + x$

**9.** $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ **10.** $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

**11.** $P(x) = x^4 - 16$ **12.** $P(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

**13.** $P(x) = x^3 + 8$ **14.** $P(x) = x^3 - 8$

**15.** $P(x) = x^6 - 1$ **16.** $P(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

**17-34** ■ Factorice la función polinomial completamente, y encuentre todos sus ceros. Exprese la multiplicidad de cada cero.

**17.** $P(x) = x^2 + 25$ **18.** $P(x) = 4x^2 + 9$

**19.** $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ **20.** $Q(x) = x^2 - 8x + 17$

**21.** $P(x) = x^3 + 4x$ **22.** $P(x) = x^3 - x^2 + x$

**23.** $Q(x) = x^4 - 1$ **24.** $Q(x) = x^4 - 625$

**25.** $P(x) = 16x^4 - 81$ **26.** $P(x) = x^3 - 64$

**27.** $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$ **28.** $P(x) = x^6 - 729$

**29.** $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ **30.** $Q(x) = x^4 + 10x^2 + 25$

**31.** $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$ **32.** $P(x) = x^5 + 7x^3$

**33.** $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$ **34.** $P(x) = x^6 + 16x^3 + 64$

**35-44** ■ Encuentre una función polinomial con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

**35.** $P$ tiene grado 2 y ceros $1 + i$ y $1 - i$.

**36.** $P$ tiene grado 2 y ceros $1 + i\sqrt{2}$ y $1 - i\sqrt{2}$.

**37.** $Q$ tiene grado 3 y ceros 3, $2i$ y $-2i$.

**38.** $Q$ tiene grado 3 y ceros 0 e $i$.

**39.** $P$ tiene grado 3 y ceros 2 e $i$.

**40.** $Q$ tiene grado 3 y ceros $-3$ y $1 + i$.

**41.** $R$ tiene grado 4 y ceros $1 - 2i$ y 1, con 1 un cero de multiplicidad 2.

**42.** $S$ tiene grado 4 y ceros $2i$ y $3i$.

**43.** $T$ tiene grado 4, ceros $i$ y $1 + i$, y término constante 12.

**44.** $U$ tiene grado 5, ceros $\frac{1}{2}$, $-1$ y $-i$, y coeficiente principal 4; el cero $-1$ tiene multiplicidad 2.

**45-62** ■ Encuentre todos los ceros de la función polinomial.

**45.** $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

**46.** $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$

**47.** $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

**48.** $P(x) = x^3 + 7x^2 + 18x + 18$

**49.** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

**50.** $P(x) = x^3 - x - 6$

**51.** $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$

**52.** $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

**53.** $P(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

**54.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

**55.** $P(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 12x - 12$

**56.** $P(x) = x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$ [*Sugerencia*: Factorize por grupos.]

**57.** $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36$

**58.** $P(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$

**59.** $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

**60.** $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

**61.** $P(x) = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 28x^2 + 27x - 9$

**62.** $P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

**63-68** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Factorice $P$ en factores lineales y cuadráticos irreductibles con coeficientes reales. **(b)** Factorice $P$ completamente en factores lineales con coeficientes complejos.

**63.** $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

**64.** $P(x) = x^3 - 2x - 4$

**65.** $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$ **66.** $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

**67.** $P(x) = x^6 - 64$ **68.** $P(x) = x^5 - 16x$

**69.** Por el Teorema de Ceros, toda ecuación de $n$ grado con polinomios tiene exactamente $n$ soluciones (incluyendo posiblemente algunas que son repetidas). Algunas de éstas pueden ser reales, y algunas pueden ser imaginarias. Use una calculadora graficadora para determinar cuántas soluciones reales e imaginarias tiene cada ecuación.

**(a)** $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$
**(b)** $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x - 5 = 0$
**(c)** $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 40 = 0$

**70-72** ■ Hasta este punto, hemos trabajado sólo con polinomios que tienen coeficientes reales. Estos ejercicios contienen polinomios con coeficientes reales e imaginarios.

**70.** Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

**(a)** $2x + 4i = 1$ **(b)** $x^2 - ix = 0$
**(c)** $x^2 + 2ix - 1 = 0$ **(d)** $ix^2 - 2x + i = 0$

**71.** **(a)** Demuestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

**(b)** Explique por qué el resultado de la parte (a) no viola el Teorema de Ceros Conjugados.

**72.** **(a)** Encuentre la función polinomial con coeficientes *reales* del grado más bajo posible para el que $i$ y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

**(b)** Encuentre la función polinomial con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el que $i$ y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**73.** **Polinomios de grado impar** El Teorema de Ceros Conjugados dice que los ceros complejos de una función polinomial con coeficientes reales se presentan en pares conjugados complejos. Explique la forma en que este hecho demuestra que una función polinomial con coeficientes reales y grado impar tiene al menos un cero real.

**74.** **Raíces de la unidad** Hay dos raíces cuadradas de 1, es decir, 1 y $-1$. Éstas son las soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Encuéntrelas. ¿Cómo hallaría usted las raíces sextas de 1? ¿Cuántas raíces hay? Haga una conjetura acerca del número de las $n$-raíces de 1.

# 3.7 FUNCIONES RACIONALES

Funciones racionales y asíntotas ▶ Transformaciones de $y = 1/x$ ▶ Asíntotas de funciones racionales ▶ Gráficas de funciones racionales ▶ Asíntotas diagonales y comportamiento final ▶ Aplicaciones

Una función racional es una función de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P$ y $Q$ son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales.

## ▼ Funciones racionales y asíntotas

Los dominios de expresiones racionales se estudian en la Sección 1.4.

El *dominio* de una función racional está formado por todos los números reales $x$ excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Al hacer la gráfica de una función racional, debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores $x$. Empezamos por graficar una función racional muy sencilla.

### EJEMPLO 1 | Una función racional sencilla

Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y exprese el dominio y rango.

**SOLUCIÓN** La función $f$ no está definida para $x = 0$. Las tablas siguientes muestran que cuando $x$ es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y cuanto más se acerque $x$ a cero, más grande se hace $|f(x)|$.

Para números positivos reales,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-0.1$ | $-10$ |
| $-0.01$ | $-100$ |
| $-0.00001$ | $-100,000$ |

Se aproxima a $0^-$ — Se aproxima a $-\infty$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.1 | 10 |
| 0.01 | 100 |
| 0.00001 | 100,000 |

Se aproxima a $0^+$ — Se aproxima a $\infty$

Describimos este comportamiento en palabras y en símbolos como sigue. La primera tabla muestra que cuando $x$ se aproxima a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ decrecen sin límite. En símbolos

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0$$ "$y$ se aproxima al infinito negativo cuando $x$ se aproxima a 0 por la izquierda"

La segunda tabla muestra que cuando $x$ se aproxima a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ aumentan sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$ "$y$ se aproxima al infinito cuando $x$ se aproxima a 0 por la derecha"

Las dos tablas siguientes muestran cómo cambia $f(x)$ cuando $|x|$ se hace grande.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-10$ | $-0.1$ |
| $-100$ | $-0.01$ |
| $-100,000$ | $-0.00001$ |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 10 | 0.1 |
| 100 | 0.01 |
| 100,000 | 0.00001 |

Se aproxima a $-\infty$ Se aproxima a 0 Se aproxima a $\infty$ Se aproxima a 0

Estas tablas muestran que cuando $|x|$ se hace grande, el valor de $f(x)$ se aproxima y está cerca de cero. Describimos esta situación simbólicamente al escribir.

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y localizando unos cuantos puntos adicionales, obtenemos la gráfica de la Figura 1.

| $x$ | $f(x) = \frac{1}{x}$ |
|---|---|
| $-2$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $-1$ | $-1$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-2$ |
| $\frac{1}{2}$ | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |

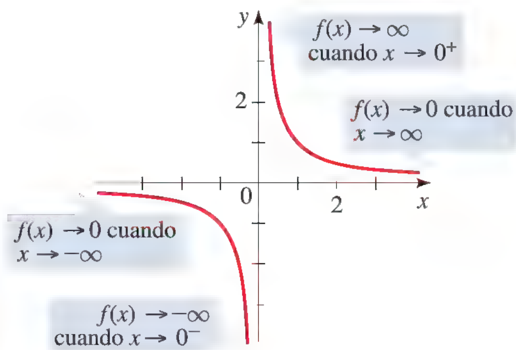



**FIGURA 1**
$f(x) = \frac{1}{x}$

La función $f$ está definida para todos los valores de $x$ que no sean 0, de modo que el dominio $\{x \mid x \neq 0\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

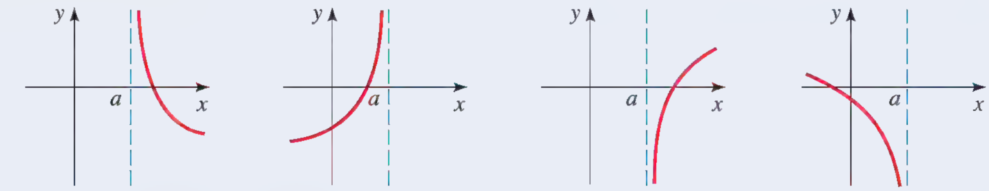
En el Ejemplo 1 utilizamos la siguiente notación de flechas.

| Símbolo | Significado |
|---|---|
| $x \to a$ | $x$ se aproxima a $a$ por la izquierda |
| $x \to a^+$ | $x$ se aproxima a $a$ por la derecha |
| $x \to \quad \infty$ | $x$ se va al infinito negativo; es decir, $x$ decrece sin límite |
| $x \to \infty$ | $x$ se va al infinito; es decir, $x$ aumenta sin límite |

La recta $x = 0$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la Figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

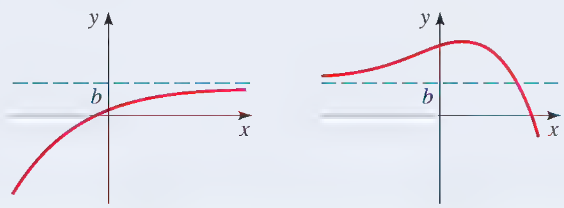
### DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

**1.** La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si $y$ se aproxima a $\pm\infty$ cuando $x$ se aproxima a $a$ por la derecha o por la izquierda.



$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

**2.** La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si $y$ se aproxima a $b$ cuando $x$ se aproxima a $\pm\infty$.



$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $\quad$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

## Transformaciones de $y = 1/x$

Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

puede graficarse al desplazar, estirar y/o reflejar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrada en la Figura 1, usando las transformaciones estudiadas en la Sección 2.5. (Tales funciones se denominan *transformaciones fraccionarias lineales*.)

### EJEMPLO 2 | Usar transformaciones para graficar funciones racionales

Grafique cada función racional, y exprese el dominio y rango.

**(a)** $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ $\qquad$ **(b)** $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces podemos expresar $r$ en términos de $f$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
r(x) &= \frac{2}{x - 3} \\
&= 2\left(\frac{1}{x - 3}\right) && \text{Factorice 2} \\
&= 2(f(x - 3)) && \text{Porque } f(x) = \tfrac{1}{x}
\end{aligned}
$$

De esta forma vemos que la gráfica de $r$ se obtiene de la gráfica de $f$ al desplazar 3 unidades a la derecha y alargar verticalmente en un factor de 2. Entonces, $r$ tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de $r$ se muestra en la Figura 2.

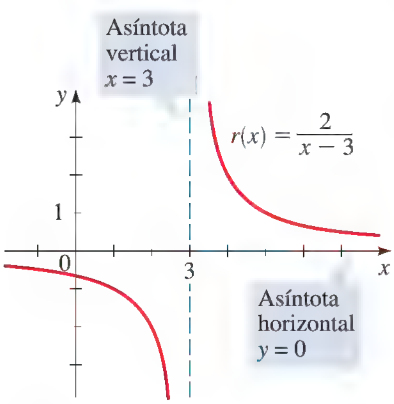



**FIGURA 2**

La función $r$ está definida para toda $x$ que no sea 3, por lo que el dominio es $\{x \mid x \neq 3\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2 \overline{)3x + 5} \\ 3x + 6 \\ \hline -1 \end{array}$$

**(b)** Usando división larga (vea al margen), obtenemos $s(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$. Entonces, podemos expresar $s$ en términos de $f$ como sigue:

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2} + 3 && \text{Reacomodando términos} \\ &= -f(x+2) + 3 && \text{Ya que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de $s$ se obtiene de la gráfica de $f$ al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje $x$ y desplazar hacia arriba 3 unidades. Entonces, $s$ tiene una asíntota vertical $x = -2$ y asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de $s$ se muestra en la Figura 3.

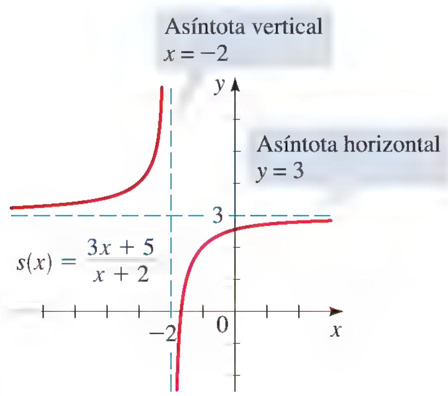



**FIGURA 3**

La función $s$ está definida para toda $x$ que no sea $-2$, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 3\}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35** Y **37**

## Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del Ejemplo 2 se cumplen sólo para funciones racionales simples. Para graficar unas más complicadas, necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas vertical y horizontal.

### EJEMPLO 3 | Asíntotas de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ y exprese el dominio y rango.

**SOLUCIÓN**

Asíntota vertical: Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de $r$ es cero cuando $x = 1$.

Para ver cuál es el aspecto de la gráfica de $f$ cerca de la asíntota vertical, hacemos tablas de valores para valores $x$ a la izquierda y derecha de 1. De las tablas mostradas a continuación vemos que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

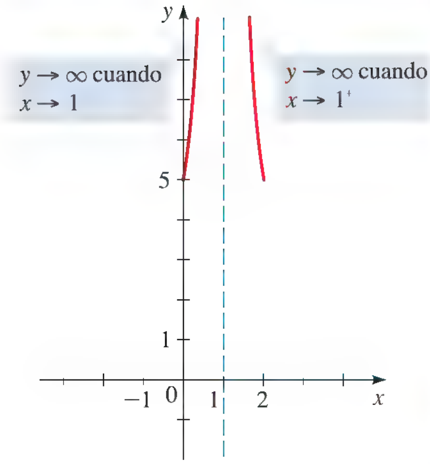



**FIGURA 4**

$x \to 1^-$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 0.5 | 14 |
| 0.9 | 302 |
| 0.99 | 30,002 |

Se aproxima a $1^-$ — Se aproxima a $\infty$

$x \to 1^+$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 1.5 | 14 |
| 1.1 | 302 |
| 1.01 | 30,002 |

Se aproxima a $1^+$ — Se aproxima a $\infty$

Entonces, cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de $r$ tiene la forma mostrada en la Figura 4.

**Asíntota horizontal:** La asíntota horizontal es el valor que alcanza $y$ cuando $x \to \pm\infty$. Para ayudarnos a hallar este valor, dividimos numerador y denominador entre $x^2$, la potencia superior de $x$ que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ se aproximan todas a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (vea Ejercicio 83, página 12). Por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

Estos términos se aproximan a 0

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos se aproximan a 0

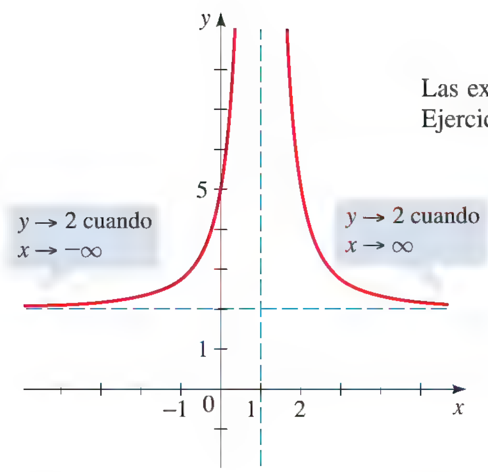



**FIGURA 5**

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Como la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, podemos completarla como en la Figura 5.

**Dominio y rango:** La función $r$ está definida para todos los valores de $x$ que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y > 2\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

Del Ejemplo 3 vemos que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y denominador, porque después de dividir todo entre $x^2$ (la potencia superior de $x$), todos los otros términos se aproximan a cero. En general, si $r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de $P$ y $Q$ son iguales (ambos $n$, por ejemplo), entonces dividir entre $x^n$ tanto numerador como denominador muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el siguiente recuadro se resume el procedimiento para hallar asíntotas.

> **HALLAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES**
>
> Sea $r$ la función racional
>
> $$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
>
> **1.** Las asíntotas verticales de $r$ son las rectas $x = a$, donde $a$ es un cero del denominador.
>
> **2.** **(a)** Si $n < m$, entonces $r$ tiene asíntota horizontal $y = 0$.
>
> **(b)** Si $n = m$, entonces $r$ tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.
>
> **(c)** Si $n > m$, entonces $r$ no tiene asíntota horizontal.

## EJEMPLO 4 | Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

**SOLUCIÓN**

Asíntotas verticales: Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0 cuando $x = -2$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal de numerador}}{\text{coeficiente principal de denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar nuestros resultados, graficamos $r$ usando una calculadora graficadora (vea Figura 6).

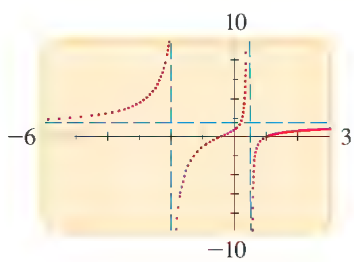



**FIGURA 6**

$r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

La gráfica está trazada usando modo de puntos para evitar líneas extrañas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

## ▼ Gráficas de funciones racionales

Hemos visto que las asíntotas son importantes cuando se grafican funciones racionales. En general, usamos las siguientes guías para graficar funciones racionales.

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

### TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. **Factorizar.** Factorice el numerador y denominador.
2. **Puntos de intersección.** Encuentre los puntos de intersección $x$ al determinar los ceros del numerador, así como los puntos de intersección $y$ a partir del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Encuentre las asíntotas verticales al determinar los ceros del denominador y, a continuación, vea si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical mediante el uso de valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encuentre la asíntota horizontal (si la hay) usando el procedimiento descrito en el recuadro de la página 282.
5. **Trazar la gráfica.** Grafique la información dada por los primeros cuatro pasos. A continuación localice tantos puntos adicionales como sea necesario, para llenar el resto de la gráfica de la función.

## EJEMPLO 5 | Graficar una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$ y exprese el dominio y rango.

**SOLUCIÓN** Factorizamos el numerador y el denominador, encontramos los puntos de intersección y asíntotas, y trazamos la gráfica.

Factorice: $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

Puntos de intersección $x$: Los puntos de intersección $x$ son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Puntos de intersección $y$: Para hallar el punto de intersección $y$, sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función.

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

El punto de intersección $y$ es 2.

Asíntotas verticales: Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada vemos que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

Cuando escojamos valores de prueba, debemos asegurarnos que no haya un punto de intersección $x$ entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

Comportamiento cerca de asíntotas verticales: Necesitamos saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de $y$ para valores $x$ cerca de las asíntotas verticales, usamos valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si $y$ es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Entonces, $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otra parte, cuando $x \to 1^+$, usamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces, $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Las otras entradas de la tabla siguiente se calculan de manera semejante.

| **Cuando $x \to$** | $-2$ | $-2^+$ | $1^-$ | $1^+$ |
|---|---|---|---|---|
| **el signo de $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$ es** | $\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$ | $\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$ | $\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$ | $\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$ |
| **entonces $y \to$** | $-\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ |

**Asíntota horizontal:** Los grados del numerador y el denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

**Gráfica:** Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 7.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −6 | 0.93 |
| −3 | 1.75 |
| −1 | 4.50 |
| 1.5 | 6.29 |
| 2 | 4.50 |
| 3 | 3.50 |

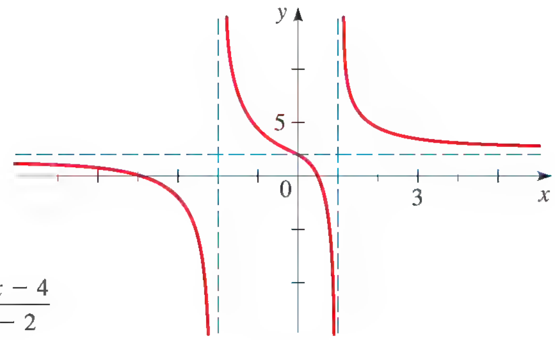



**FIGURA 7**

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

**Dominio y rango:** El dominio es $\{x \mid x \neq 1, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## EJEMPLO 6 | Gráfica de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese el dominio y rango.

**SOLUCIÓN**

**Factorice:** $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

**Punto de intersección *x*:** $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

**Punto de intersección *y*:** $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25}$

$$= \frac{21}{25}$$

**Asíntota vertical:** $x = -5$, de los ceros del denominador

**Comportamiento cerca de asíntota vertical:**

| Cuando $x \to$ | $-5^-$ | $-5^+$ |
|---|---|---|
| el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es | $\dfrac{(-)}{(-)(-)}$ | $\dfrac{(-)}{(+)(+)}$ |
| entonces $y \to$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

**Asíntota horizontal:** $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**Códigos indescifrables**

Si usted lee novelas de espías, sabe de códigos secretos y cómo es que el héroe "descifra" el código. Hoy en día, los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en computadoras está codificada para evitar su uso por personas no autorizadas. Por ejemplo, los registros bancarios, los historiales médicos, los datos escolares y otros similares están codificados. Un sinnúmero de teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie más pueda oírla. Por fortuna, por los recientes avances en matemáticas, los códigos de la actualidad son "indescifrables".

Los códigos modernos están basados en un principio sencillo: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, trate de multiplicar 78 y 93; ahora trate de factorizar 9991. Lleva tiempo factorizar 9991 porque es un producto de los dos números primos 97 × 103, de manera que para factorizarlos tenemos que hallar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número *N* que es producto de dos primos *p* y *q*, cada uno de ellos de 200 dígitos de largo. Hasta las computadoras más potentes tardarían millones de años en factorizar ese número. Pero la misma computadora tardaría menos de un segundo en multiplicar esos dos números. Este dato fue utilizado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman en la década de 1970 para idear el código RSA. El código de ellos utiliza un número extremadamente grande para codificar un mensaje pero exige que conozcamos sus factores para descifrarlo. Como se puede ver, ese código es particularmente indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de código de "cifrado público clave". En dichos códigos, cualquiera puede cifrar un mensaje usando un procedimiento conocido públicamente basado en *N*, pero para decodificar el mensaje deben saber *p* y *q*, los factores de *N*. Cuando fue inventado el código RSA, se pensó que un número de 80 dígitos cuidadosamente seleccionado daría un código indescifrable, pero es curioso que recientes avances en el estudio de la factorización hayan hecho necesarios números mucho más grandes.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 8.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −15 | −0.5 |
| −10 | −1.2 |
| −3 | 1.5 |
| −1 | 1.0 |
| 3 | 0.6 |
| 5 | 0.5 |
| 10 | 0.3 |

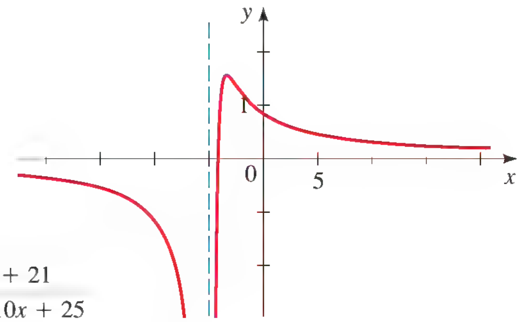



**FIGURA 8**
$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.5]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

---

De la gráfica de la Figura 8 vemos que, al contrario de una mala interpretación, una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la Figura 8 cruza el eje $x$ (la asíntota horizontal) desde abajo, alcanza un valor máximo cerca de $x = -3$, y luego se aproxima al eje $x$ desde arriba cuando $x \to \infty$.

## EJEMPLO 7 | Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

### SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$

Puntos de intersección *x*: $-1$ y $4$, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

Punto de intersección *y*: Ninguno, porque $r(0)$ no está definido

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = -2$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntotas verticales:

| **Cuando $x \to$** | $-2^-$ | $-2^+$ | $0^-$ | $0^+$ |
|---|---|---|---|---|
| **el signo de $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$ es** | $\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$ | $\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$ | $\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$ | $\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$ |
| **entonces $y \to$** | $\infty$ | $-\infty$ | $\infty$ | $-\infty$ |

Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el grado del denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 9

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −3 | 2.33 |
| −2.5 | 3.90 |
| −0.5 | 1.50 |
| 1 | 1.00 |
| 3 | −0.13 |
| 5 | 0.09 |

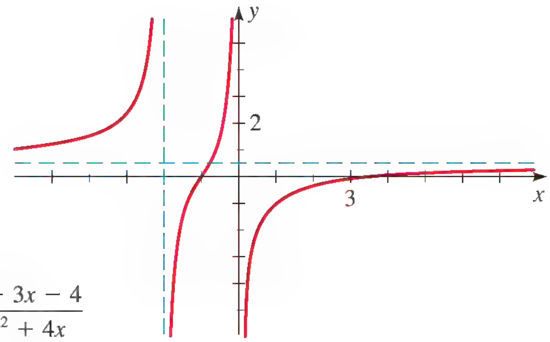



**FIGURA 9**
$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 0, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 57

## Asíntotas diagonales y comportamiento final

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, podemos usar el Algoritmo de división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de $R$ es menor que el grado de $Q$ y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$, de modo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de $y = ax + b$. En esta situación decimos que $y = ax + b$ es una **asíntota diagonal**, o una **asíntota oblicua**.

### EJEMPLO 8 | Una función racional con una asíntota diagonal

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

**SOLUCIÓN**

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$

Puntos de intersección *x*: $-1$ y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

Puntos de intersección *y*: $\frac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Asíntota vertical: $x = 3$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x - 5 \\ \underline{-x + 3} \\ -8 \end{array}$$

**Asíntota diagonal:** Como el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota diagonal. Dividiendo (vea al margen), obtenemos

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es la asíntota diagonal.

**Gráfica:** Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 10.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −2 | −1.4 |
| 1 | 4 |
| 2 | 9 |
| 4 | −5 |
| 6 | 2.33 |

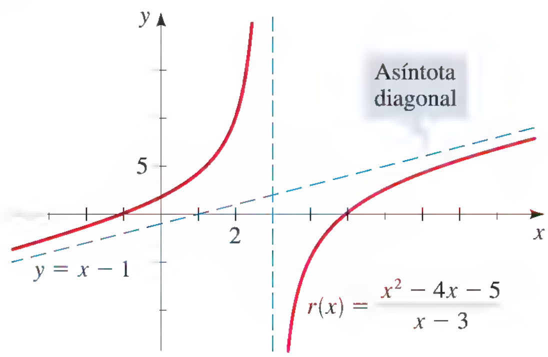



**FIGURA 10**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 65

Hasta este punto, hemos considerado sólo asíntotas horizontales y diagonales como comportamientos finales para funciones racionales. En el siguiente ejemplo graficamos una función cuyo comportamiento final es como el de una parábola.

## EJEMPLO 9 | Comportamiento final de una función racional

Grafique la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

y describa su comportamiento final.

### SOLUCIÓN

**Factorice:** $y = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

**Puntos de intersección x:** $-1$, de $x + 1 = 0$ (El otro factor del numerador no tiene ceros reales.)

**Puntos de intersección y:** $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

**Asíntota vertical:** $x = 2$, del cero del denominador

**Comportamiento cerca de asíntota vertical:** $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

**Asíntota horizontal:** Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x - 2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3 \end{array}$$

**Comportamiento final:** Dividiendo (vea al margen), tenemos

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

Esto demuestra que el comportamiento final de $r$ es como el de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x - 2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Esto es, $3/(x - 2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de $r$ estará cercana a la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

Gráfica: En la Figura 11(a) graficamos $r$ en un rectángulo de vista pequeño; podemos ver los puntos de intersección, las asíntotas verticales y el mínimo local. En la Figura 11(b) la gráfica $r$ en un rectángulo de vista más grande; aquí la gráfica se ve casi como la gráfica de una parábola. En la figura 11(c) graficamos tanto $y = r(x)$ como $y = x^2$; estas gráficas están muy cercanas entre sí excepto cerca de la asíntota vertical.

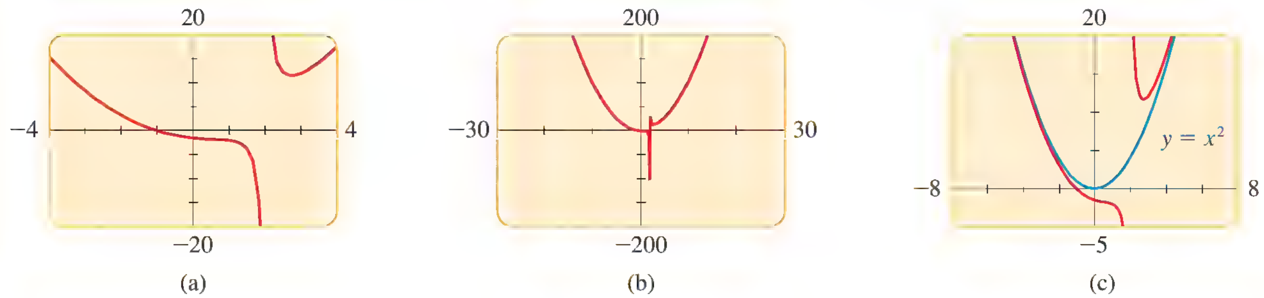



**FIGURA 11**
$r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73**

## Aplicaciones

Con frecuencia se presentan funciones racionales en aplicaciones científicas de álgebra. En el ejemplo del texto analizamos la gráfica de una función de teoría de electricidad.

### EJEMPLO 10 | Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores con resistencias $R_1$ y $R_2$ están conectados en paralelo, su resistencia combinada $R$ está dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

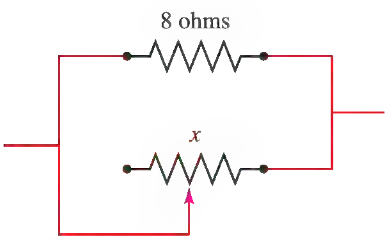



**FIGURA 12**

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms está conectado en paralelo con un resistor variable, como se ve en la Figura 12. Si la resistencia del resistor variable está denotada por $x$, entonces la resistencia combinada $R$ es una función de $x$. Grafique $R$, y dé una interpretación física de la gráfica.

**SOLUCIÓN** Sustituyendo $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula dará la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Como la resistencia no puede ser negativa, esta función tiene significado físico sólo cuando $x > 0$. La función está graficada en la Figura 13(a) usando el rectángulo de vista $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando $x$ está restringida a valores positivos. La resistencia combinada $R$ aumenta cuando la resistencia variable $x$ aumenta. Si ampliamos el rectángulo de vista a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, obtenemos la gráfica de la Figura 13(b). Para $x$ grande, la resistencia combinada $E$ se nivela, acercándose más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. Sin importar lo grande que sea la resistencia variable $x$, la resistencia combinada nunca es mayor que 8 ohms.

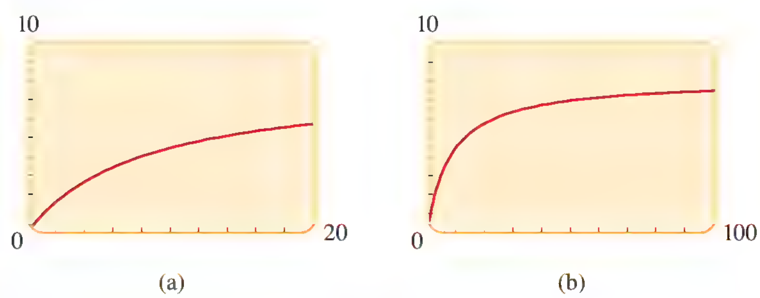



**FIGURA 13**
$R(x) = \dfrac{8x}{8 + x}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

# 3.7 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota vertical $x = 2$, entonces cuando $x \to 2^+$, ya sea $y \to$____o $y \to$ ____.

2. Si la función racional $y = r(x)$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$, entonces $y \to$____cuando $x \to \pm\infty$.

**3-6** ■ Las preguntas siguientes son acerca de la función racional

$$r(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

3. La función $r$ tiene puntos de intersección $x$___ y ___.
4. La función $r$ tiene punto de intersección $y$ _____.
5. La función $r$ tiene asíntotas verticales $x =$ _____ y $x =$ _____.
6. La función $r$ tiene asíntota horizontal $y =$ _____.

## HABILIDADES

**7-10** ■ Nos dan una función racional. **(a)** Complete cada tabla para la función. **(b)** Describa el comportamiento de la función cerca de su asíntota vertical, basada en las Tablas 1 y 2. **(c)** Determine la asíntota horizontal, basada en las Tablas 3 y 4.

**TABLA 1**

| $x$ | $r(x)$ |
|---|---|
| 1.5 | |
| 1.9 | |
| 1.99 | |
| 1.999 | |

**TABLA 2**

| $x$ | $r(x)$ |
|---|---|
| 2.5 | |
| 2.1 | |
| 2.01 | |
| 2.001 | |

**TABLA 3**

| $x$ | $r(x)$ |
|---|---|
| 10 | |
| 50 | |
| 100 | |
| 1000 | |

**TABLA 4**

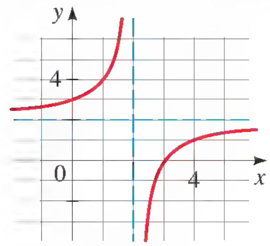
| $x$ | $r(x)$ |
|---|---|
| −10 | |
| −50 | |
| −100 | |
| −1000 | |

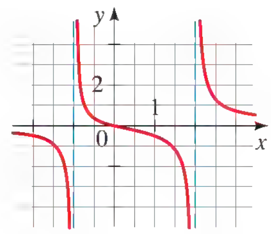
7. $r(x) = \dfrac{x}{x-2}$
8. $r(x) = \dfrac{4x+1}{x-2}$
9. $r(x) = \dfrac{3x-10}{(x-2)^2}$
10. $r(x) = \dfrac{3x^2+1}{(x-2)^2}$

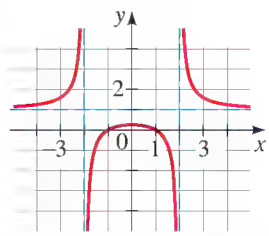
**11-16** ■ Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ de la función racional.

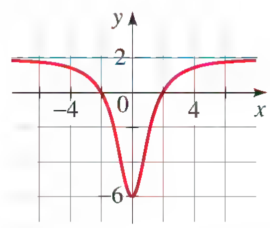
11. $r(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$
12. $s(x) = \dfrac{3x}{x-5}$
13. $t(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-6}$
14. $r(x) = \dfrac{2}{x^2+3x-4}$
15. $r(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$
16. $r(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+4}$

**17-20** ■ De la gráfica, determine los puntos de intersección $x$ y $y$ y las asíntotas verticales y horizontales.

17.



18.



19.



20.



**21-32** ■ Encuentre todas las asíntotas horizontales y verticales (si las hay).

21. $r(x) = \dfrac{5}{x-2}$
22. $r(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-1}$
23. $r(x) = \dfrac{6x}{x^2+2}$
24. $r(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+x+1}$
25. $s(x) = \dfrac{6x^2+1}{2x^2+x-1}$
26. $s(x) = \dfrac{8x^2+1}{4x^2+2x-6}$
27. $s(x) = \dfrac{(5x-1)(x+1)}{(3x-1)(x+2)}$
28. $s(x) = \dfrac{(2x-1)(x+3)}{(3x-1)(x-4)}$
29. $r(x) = \dfrac{6x^3-2}{2x^3+5x^2+6x}$
30. $r(x) = \dfrac{5x^3}{x^3+2x^2+5x}$
31. $t(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$
32. $r(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

**33-40** ■ Use transformaciones de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ para graficar la función racional, como en el Ejemplo 2.

33. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$
34. $r(x) = \dfrac{1}{x+4}$
35. $s(x) = \dfrac{3}{x+1}$
36. $s(x) = \dfrac{-2}{x-2}$
37. $t(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$
38. $t(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$
39. $r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$
40. $r(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$

**41-64** ■ Encuentre los puntos de intersección y asíntotas y, a continuación, trace una gráfica de la función racional y exprese el dominio y rango. Use una calculadora graficadora para confirmar su respuesta.

41. $r(x) = \dfrac{4x-4}{x+2}$
42. $r(x) = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

**43.** $s(x) = \dfrac{4 - 3x}{x + 7}$ **44.** $s(x) = \dfrac{1 - 2x}{2x + 3}$

**45.** $r(x) = \dfrac{18}{(x - 3)^2}$ **46.** $r(x) = \dfrac{x - 2}{(x + 1)^2}$

**47.** $s(x) = \dfrac{4x - 8}{(x - 4)(x + 1)}$ **48.** $s(x) = \dfrac{x + 2}{(x + 3)(x - 1)}$

**49.** $s(x) = \dfrac{6}{x^2 - 5x - 6}$ **50.** $s(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 + x - 2}$

**51.** $t(x) = \dfrac{3x + 6}{x^2 + 2x - 8}$ **52.** $t(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x}$

**53.** $r(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 1)(x - 3)}$ **54.** $r(x) = \dfrac{2x(x + 2)}{(x - 1)(x - 4)}$

**55.** $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ **56.** $r(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x - 3}$

**57.** $r(x) = \dfrac{2x^2 + 10x - 12}{x^2 + x - 6}$ **58.** $r(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x}$

**59.** $r(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x}$ **60.** $r(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - x - 6}$

**61.** $r(x) = \dfrac{3x^2 + 6}{x^2 - 2x - 3}$ **62.** $r(x) = \dfrac{5x^2 + 5}{x^2 + 4x + 4}$

**63.** $s(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2}$ **64.** $t(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^3 - 3x - 2}$

**65-72** ■ Encuentre la asíntota diagonal, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

**65.** $r(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$ **66.** $r(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$

**67.** $r(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$ **68.** $r(x) = \dfrac{3x - x^2}{2x - 2}$

**69.** $r(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x - 3}$ **70.** $r(x) = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2 + x - 1}$

**71.** $r(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$ **72.** $r(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

**73-76** ■ Grafique la función racional $f$, y determine todas las asíntotas verticales a partir de su gráfica. A continuación, grafique $f$ y $g$ en un rectángulo de vista suficientemente grande como para demostrar que tienen el mismo comportamiento final.

**73.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x + 3}$, $g(x) = 2x$

**74.** $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - 2x}$, $g(x) = -x + 4$

**75.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 16}{x - 2}$, $g(x) = x^2$

**76.** $f(x) = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 2x}{(x - 1)^2}$, $g(x) = 1 - x^2$

**77-82** ■ Grafique la función racional, y encuentre todas las asíntotas verticales, puntos de intersección $x$ y $y$, y extremos locales, correctos al decimal más cercano. A continuación, use división larga para hallar una función polinomial que tenga el mismo comportamiento final que la función racional, y grafique ambas funciones en un rectángulo de vista suficientemente grande como para verificar que los comportamientos finales de la polinomial y la función racional son iguales.

**77.** $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$

**78.** $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

**79.** $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$ **80.** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

**81.** $r(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x - 3}$ **82.** $r(x) = \dfrac{4 + x^2 - x^4}{x^2 - 1}$

## APLICACIONES

**83. Crecimiento poblacional** Suponga que la población de conejos de la granja de Mr. Jenkin sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde principios del año.

**(a)** Trace una gráfica de la población de conejos.
**(b)** ¿Qué ocurre finalmente a la población de conejos?

**84. Concentración de medicamento** Después que cierta droga se inyecta en un paciente, se vigila la concentración $c$ de la droga en el torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

**(a)** Trace una gráfica de la concentración del medicamento.
**(b)** ¿Qué ocurre finalmente a la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo?

**85. Concentración de medicamento** Se administra una droga a un paciente, y se vigila la concentración de la droga en su torrente sanguíneo. En el tiempo $t \geq 0$ (en horas desde que se aplicó la droga), la concentración (en mg/L) está dada por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Grafique la función $c$ con una calculadora graficadora.

**(a)** ¿Cuál es la concentración más alta de droga que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?
**(b)** ¿Qué ocurre a la concentración de medicamento después de un tiempo prolongado?
**(c)** ¿Cuánto tarda la concentración en bajar a menos de 0.3 mg/L?

**86. Vuelo de un cohete** Suponga que un cohete es disparado hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial $v$ (medida en metros por segundo). Entonces la máxima altura $h$ (en metros) alcanzada por el cohete está dada por la función

$$h(v) = \frac{Rv^2}{2gR - v^2}$$

donde $R = 6.4 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra y $g = 9.8$ m/s$^2$ es la aceleración debida a la gravedad. Use calculadora graficadora para trazar una gráfica de la función $h$. (Observe que $h$ y $v$ deben ser positivas ambas, de modo que no es necesario que el rectángulo de observación contenga valores negativos.) ¿Qué representa físicamente la asíntota vertical?

**87. El efecto Doppler** Cuando un tren se acerca a un observador (vea la imagen), el tono de su silbato suena más alto al observador de lo que sonaría si el tren estuviera en reposo, porque las crestas de las ondas de sonido están comprimidas más cerca unas de otras. Este fenómeno se conoce como *efecto Doppler*. El tono observado $P$ es una función de la velocidad $v$ del tren y está dado por

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

donde $P_0$ es el paso real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ m/s es la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato con tono en $P_0 = 440$ Hz. Grafique la función $y = P(v)$ usando una calculadora graficadora. ¿Cómo puede interpretarse físicamente la asíntota vertical de esta función?

**88. Distancia de enfoque** Para que una cámara con un lente de longitud focal $F$ fija se enfoque en un objeto situado a una distancia $x$ desde el lente, la película debe ser colocada a una distancia $y$ detrás del lente, donde $F$, $x$ y $y$ están relacionadas por

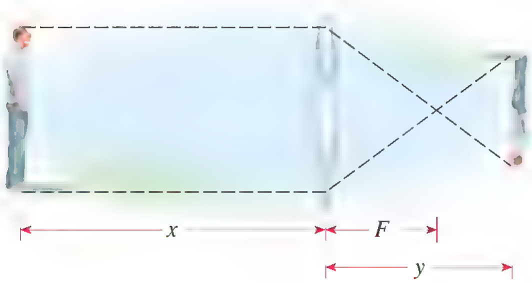
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

(Vea la figura.) Suponga que la cámara tiene un lente de 55 mm ($F = 55$).

**(a)** Exprese $y$ como función de $x$ y grafique la función.

**(b)** ¿Qué ocurre a la distancia de enfoque $y$ cuando el objeto se aleja del lente?

**(c)** ¿Qué ocurre a la distancia de enfoque $y$ cuando el objeto se acerca al lente?




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**89. Construcción de una función racional a partir de sus asíntotas** Dé un ejemplo de una función racional que tiene asíntota vertical $x = 3$. A continuación dé un ejemplo de una que tenga asíntota vertical $x = 3$ *y además* asíntota horizontal $y = 2$. Ahora dé un ejemplo de una función racional con asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$ y punto de intersección $x$ de 4.

**90. Una función racional sin asíntota** Explique cómo se puede decir (sin graficarla) que la función

$$r(x) = \frac{x^6 + 10}{x^4 + 8x^2 + 15}$$

no tiene punto de intersección $x$ y no tiene asíntota horizontal, vertical ni diagonal. ¿Cuál es su comportamiento final?

**91. Gráficas con agujeros** En este capítulo adoptamos la convención de que, en funciones racionales, el numerador y el denominador no comparten un factor común. En este ejercicio consideramos la gráfica de una función racional que no satisface esta regla.

**(a)** Demuestre que la gráfica de

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x - 2}$$

es la recta $y = 3x + 3$ con el punto (2, 9) removido. [*Sugerencia:* Factorice. ¿Cuál es el dominio de $r$?]

**(b)** Grafique las funciones racionales:

$$s(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$$

$$t(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$u(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$$

**92. Transformaciones de $y = 1/x^2$** En el Ejemplo 2 vimos que algunas funciones racionales simples pueden ser graficadas al desplazar, estirar o reflejar la gráfica de $y = 1/x$. En este ejercicio consideramos funciones racionales que pueden ser graficadas al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$, mostrada en la página siguiente.

**(a)** Grafique la función

$$r(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$.

**(b)** Use división larga y factorización para demostrar que la función

$$s(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 1}$$

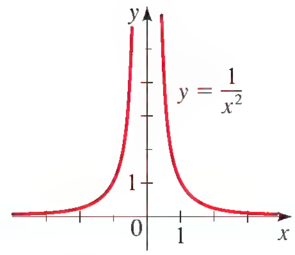
se puede escribir como

$$s(x) = 2 + \frac{3}{(x + 1)^2}$$

A continuación grafique $s$ al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$.

**(c)** Una de las siguientes funciones puede ser graficada al transformar la gráfica de $y = 1/x^2$; la otra no puede ser graficada. Use transformaciones para graficar la que se puede graficar, y explique por qué este método no funciona para la otra.

$$p(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4} \qquad q(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$




# CAPÍTULO 3 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1.** **(a)** Escriba la ecuación de definición para una función polinomial $P$ de grado $n$.
**(b)** ¿Qué significa decir que $c$ es un cero de $P$?

**2.** Trace gráficas que muestren los posibles comportamientos finales de una función polinomial de grado impar y de grado par.

**3.** ¿Qué pasos seguiría usted para graficar manualmente una función polinomial?

**4.** **(a)** ¿Qué significa un punto máximo local o un punto mínimo local de una función polinomial?
**(b)** ¿Cuántos extremos locales puede tener una función polinomial de grado $n$?

**5.** Exprese el Algoritmo de División e identifique el dividendo, divisor, cociente y residuo.

**6.** ¿Cómo funciona la división sintética?

**7.** **(a)** Exprese el Teorema del Residuo.
**(b)** Exprese el Teorema del Factor.

**8.** **(a)** Exprese el Teorema de Ceros Racionales.
**(b)** ¿Qué pasos tomaría usted para hallar los ceros racionales de una función polinomial?

**9.** Exprese la Regla de Descartes de los Signos.

**10.** **(a)** ¿Qué significa decir que $a$ es un límite inferior y $b$ es un límite superior para los ceros de una función polinomial?
**(b)** Exprese el Teorema de Límites Superiores e Inferiores.

**11.** **(a)** ¿Qué es un número complejo?
**(b)** ¿Cuáles son las partes reales e imaginarias de un número complejo?
**(c)** ¿Qué es el complejo conjugado de un número complejo?
**(d)** ¿Cómo se suman, restan, multiplican y dividen números complejos?

**12.** **(a)** Exprese el Teorema Fundamental de Álgebra.
**(b)** Exprese el Teorema de Factorización Completa.
**(c)** ¿Qué significa decir que $c$ es un cero de multiplicidad $k$ de una función polinomial $P$?
**(d)** Exprese el Teorema de Ceros.
**(e)** Exprese el Teorema de Ceros Conjugados.

**13.** **(a)** ¿Qué es una función racional?
**(b)** ¿Qué significa decir que $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$?
**(c)** ¿Cómo se localiza una asíntota vertical?
**(d)** ¿Qué significa decir que $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$?
**(e)** ¿Cómo se localiza una asíntota horizontal?
**(f)** ¿Cuáles pasos se siguen para trazar manualmente la gráfica de una función racional?
**(g)** ¿Bajo qué circunstancias una función tendrá una asíntota diagonal? Si existe una, ¿cómo se encuentra?
**(h)** ¿Cómo se determina el comportamiento final de una función racional?

## EJERCICIOS

**1-4** ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función en forma normal. **(b)** Grafique la función.

**1.** $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **2.** $f(x) = -2x^2 + 12x + 12$

**3.** $g(x) = 1 + 8x - x^2$ **4.** $g(x) = 6x - 3x^2$

**5-6** ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función cuadrática.

**5.** $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ **6.** $g(x) = 1 - x - x^2$

**7.** Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio. Su altura (en pies) arriba del suelo después de $t$ segundos está dada por la función $h(t) = -16t^2 + 48t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?

**8.** La utilidad $P$ (en dólares) generada por vender $x$ unidades de cierta mercancía está dada por la función

$$P(x) = -1500 + 12x - 0.004x^2$$

¿Cuál es la utilidad máxima y cuántas unidades deben ser vendidas para generarla?

**9-14** ■ Grafique la función polinomial al transformar una gráfica apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre claramente todos los puntos de intersección $x$ y $y$.

**9.** $P(x) = -x^3 + 64$ **10.** $P(x) = 2x^3 - 16$

**11.** $P(x) = 2(x + 1)^4 - 32$ **12.** $P(x) = 81 - (x - 3)^4$

**13.** $P(x) = 32 + (x - 1)^5$ **14.** $P(x) = -3(x + 2)^5 + 96$

**15-16** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Determine la multiplicidad de cada cero de $P$. **(b)** Trace una gráfica de $P$.

**15.** $P(x) = x^3(x - 2)^2$ **16.** $P(x) = x(x + 1)^3(x - 1)^2$

**17-20** ■ Use calculadora graficadora para graficar la función polinomial. Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ y las coordenadas de todos los extremos locales, correctos al decimal más cercano. Describa el comportamiento final del polinomio.

**17.** $P(x) = x^3 - 4x + 1$ **18.** $P(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$

**19.** $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 10x - 1$

**20.** $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x + 3$

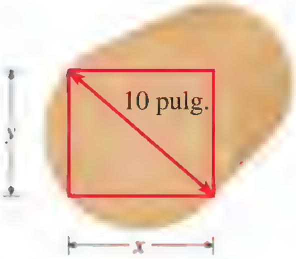
**21.** La resistencia $S$ de una viga de madera de ancho $x$ y profundidad $y$ está dada por la fórmula $S = 13.8xy^2$. Se ha de cortar una viga de un tronco de 10 pulgadas de diámetro, como se muestra en la figura.

**(a)** Exprese la resistencia $S$ de esta viga como función sólo de $x$.

**(b)** ¿Cuál es el dominio de la función $S$?

**(c)** Trace una gráfica de $S$.

**(d)** ¿Qué ancho hará que sea más fuerte la viga?

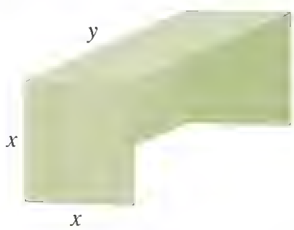



**22.** Un pequeño cobertizo para plantas delicadas se ha de construir con material plástico delgado. Tendrá extremos cuadrados y parte superior y posterior rectangulares, con fondo y frente abiertos, como se ve en la figura. El área total de los cuatro lados de plástico debe ser de 1200 pulg.$^2$

**(a)** Exprese el volumen $V$ del cobertizo como función de la profundidad $x$.

**(b)** Trace una gráfica de $V$.

**(c)** ¿Qué dimensiones harán máximo el volumen del cobertizo?




**23-30** ■ Encuentre el cociente y residuo.

**23.** $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ **24.** $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

**25.** $\dfrac{x^3 - x^2 + 11x + 2}{x - 4}$ **26.** $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 10}{x + 3}$

**27.** $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 2x + 7}{x + 5}$ **28.** $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 12}{x + 4}$

**29.** $\dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 1}$ **30.** $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - x + 3}$

**31-32** ■ Encuentre el valor indicado de la función polinomial usando el Teorema del Residuo.

**31.** $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$; encuentre $P(5)$

**32.** $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$; encuentre $Q(-3)$

**33.** Demuestre que $\frac{1}{2}$ es un cero de la función polinomial.

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$

**34.** Use el Teorema del Factor para demostrar que $x + 4$ es un factor de la función polinomial.

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 23x + 12$$

**35.** ¿Cuál es el residuo cuando la función polinomial

$$P(x) = x^{500} + 6x^{201} - x^2 - 2x + 4$$

se divide entre $x - 1$?

**36.** ¿Cuál es el residuo cuando $x^{101} - x^4 + 2$ se divide entre $x + 1$?

**37-38** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Haga una lista de todos los posibles ceros racionales (sin probar por ver si en realidad son ceros). **(b)** Determine el posible número de ceros reales positivos y negativos usando la Regla de Descartes de los Signos.

**37.** $P(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 + 2x + 18$

**38.** $P(x) = 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 4$

**39-46** ■ Nos dan una función polinomial $P$. **(a)** Encuentre todos los ceros reales de $P$ y exprese sus multiplicidades. **(b)** Trace la gráfica de $P$.

**39.** $P(x) = x^3 - 16x$

**40.** $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

**41.** $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$

**42.** $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

**43.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

**44.** $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

**45.** $P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

**46.** $P(x) = 9x^5 - 21x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

**47-56** ■ Evalúe la expresión y escriba en la forma $a + bi$.

**47.** $(2 - 3i) + (1 + 4i)$ **48.** $(3 - 6i) - (6 - 4i)$

**49.** $(2 + i)(3 - 2i)$ **50.** $4i(2 - \frac{1}{2}i)$

**51.** $\dfrac{4 + 2i}{2 - i}$ **52.** $\dfrac{8 + 3i}{4 + 3i}$

**53.** $i^{25}$ **54.** $(1 + i)^3$

**55.** $(1 - \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})$ **56.** $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-40}$

**57.** Encuentre una función polinomial de grado 3 con coeficiente constante 12 y ceros $-\frac{1}{2}$, 2 y 3.

**58.** Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $3i$ y 4, con 4 un doble cero.

**59.** ¿Existe una función polinomial de grado 4 con coeficientes enteros que tenga ceros $i$, $2i$, $3i$ y $4i$? Si es así, encuéntrelo; si no, explique por qué.

**60.** Demuestre que la ecuación $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ no tiene raíz real.

**61-70** ■ Encuentre todos los ceros racionales, irracionales y complejos (y exprese sus multiplicidades). Use la Regla de Descartes de los Signos, el Teorema de Límites Superiores e Inferiores, la Fórmula Cuadrática u otras técnicas de factorización para ayudarse siempre que sea posible.

**61.** $P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

**62.** $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

**63.** $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 28x + 20$

**64.** $P(x) = x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20$

**65.** $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

**66.** $P(x) = x^4 - 81$

**67.** $P(x) = x^6 - 64$

**68.** $P(x) = 18x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

**69.** $P(x) = 6x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 30x + 36$

**70.** $P(x) = x^4 + 15x^2 + 54$

**71-74** ■ Use una calculadora graficadora para hallar todas las soluciones reales de la ecuación.

**71.** $2x^2 = 5x + 3$

**72.** $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

**73.** $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0$

**74.** $x^5 = x + 3$

**75-76** ■ Nos dan una función polinomial $P$. Encuentre todos los ceros reales de $P$ y factorice $P$ completamente en factores cuadráticos lineales e irreductibles con coeficientes reales.

**75.** $P(x) = x^3 - 2x - 4$ **76.** $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

**77-82** ■ Grafique la función racional. Demuestre claramente todos los puntos de intersección $x$ y $y$ y asíntotas.

**77.** $r(x) = \dfrac{3x - 12}{x + 1}$ **78.** $r(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

**79.** $r(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 8}$ **80.** $r(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 7}{x - 4}$

**81.** $r(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 1}$ **82.** $r(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 4}$

**83-86** ■ Use calculadora graficadora para analizar la gráfica de la función racional. Encuentre todos los puntos de intersección $x$ y $y$ y todas las asíntotas verticales, horizontales y diagonales. Si la función no tiene asíntota horizontal o diagonal, encuentre una función polinomial que tenga el mismo comportamiento final como la función racional.

**83.** $r(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 6}$ **84.** $r(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 + 9}$

**85.** $r(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - x - 2}$ **86.** $r(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x + 1}$

**87.** Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas

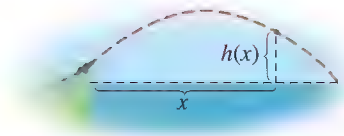
$$y = x^4 + x^2 + 24x \quad \text{y} \quad y = 6x^3 + 20$$

## CAPÍTULO 3 EXAMEN

1. Exprese la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 6$ en forma normal, y trace su gráfica.

2. Encuentre el valor máximo o mínimo de la función cuadrática $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$.

3. Una bala de cañón disparada al mar desde una batería en la costa sigue una trayectoria parabólica dada por la gráfica de la ecuación




$$h(x) = 10x - 0.01x^2$$

donde $h(x)$ es la altura de la bala de cañón sobre el agua cuando ha recorrido una distancia horizontal de $x$ pies.

**(a)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala de cañón?

**(b)** ¿Qué distancia recorre horizontalmente la bala de cañón antes de caer al agua?

4. Grafique la función polinomial $P(x) = -(x + 2)^3 + 27$, mostrando claramente todos los puntos de intersección $x$ y $y$.

5. **(a)** Use división sintética para hallar el cociente y residuo cuando $x^4 - 4x^2 + 2x + 5$ se divide entre $x - 2$.

   **(b)** Use división larga para hallar el cociente y residuo cuando $2x^5 + 4x^4 - x^3 - x^2 + 7$ se divide entre $2x^2 - 1$.

6. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

   **(a)** Haga una lista de todos los ceros racionales posibles de $P$.

   **(b)** Encuentre la factorización completa de $P$.

   **(c)** Encuentre los ceros de $P$.

   **(d)** Trace la gráfica de $P$.

7. Realice la operación indicada y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

   **(a)** $(3 - 2i) + (4 + 3i)$ **(b)** $(3 - 2i) - (4 + 3i)$

   **(c)** $(3 - 2i)(4 + 3i)$ **(d)** $\dfrac{3 - 2i}{4 + 3i}$

   **(e)** $i^{48}$ **(f)** $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})(\sqrt{8} + \sqrt{-2})$

8. Encuentre todos los ceros reales y complejos de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$.

9. Encuentre la factorización completa de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

10. Encuentre una función polinomial de cuarto grado con coeficientes enteros que tenga ceros $3i$ y $-1$, con $-1$ un cero de multiplicidad 2.

11. Sea $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 - 18x + 3$.

    **(a)** Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar cuántos ceros reales positivos y cuántos negativos puede tener $P$.

    **(b)** Demuestre que 4 es un límite superior y $-1$ es un límite inferior para los ceros reales de $P$.

    **(c)** Trace una gráfica de $P$, y úsela para estimar los ceros reales de $P$, correctos a dos lugares decimales.

    **(d)** Encuentre las coordenadas de todos los extremos locales de $P$, correctas a dos decimales.

12. Considere las siguientes funciones racionales:

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad s(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4} \qquad t(x) = \frac{x^3 - 9x}{x + 2} \qquad u(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25}$$

    **(a)** ¿Cuál de estas funciones racionales tiene una asíntota horizontal?

    **(b)** ¿Cuál de estas funciones tiene una asíntota diagonal?

    **(c)** ¿Cuál de estas funciones no tiene asíntota vertical?

    **(d)** Grafique $y = u(x)$, mostrando claramente cualesquiera asíntotas y puntos de intersección $x$ y $y$ que la función pueda tener.

    **(e)** Use división larga para hallar una función polinomial $P$ que tenga el mismo comportamiento final que $t$. Grafique $P$ y $t$ en la misma pantalla para verificar que tienen el mismo comportamiento final.

# Ajuste de datos a curvas con funciones polinomiales

Hemos aprendido a ajustar datos a una recta (vea *Enfoque en el modelado*, página 130). La recta modela la tendencia creciente y decreciente en los datos. Si los datos exhiben más variabilidad, por ejemplo un aumento seguido por un decremento, entonces para modelar los datos necesitamos usar una curva más que una recta. La Figura 1 muestra una gráfica de dispersión con tres posibles modelos que parecen ajustarse a los datos. ¿Cuál modelo se ajusta mejor a los datos?

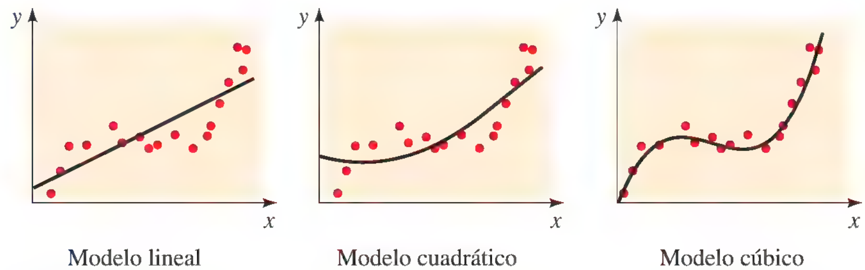



**FIGURA 1**

## Funciones polinomiales como modelos

Las funciones polinomiales son ideales para modelar datos para los cuales la gráfica de dispersión tiene picos o valles (esto es, máximos o mínimos locales). Por ejemplo, si los datos tienen un solo pico como en la Figura 2(a), entonces puede ser apropiado usar una polinomia cuadrática para modelar los datos. Cuantos más picos o valles exhiban los datos, más elevado es el grado de la función polinomial necesaria para modelar los datos (vea Figura 2).

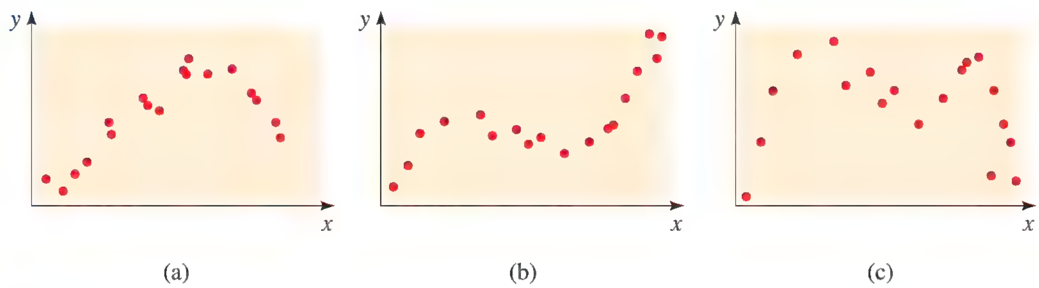



**FIGURA 2**

Las calculadoras graficadoras están programadas para hallar la función **polinomial de mejor ajuste** de un grado especificado. Al igual que en el caso de las rectas (vea página 131), una función polinomial de un grado determinado se ajusta a los datos *mejor*, si la suma de los cuadrados de las distancias entre la gráfica de la función polinomial y los puntos de datos se reduce al mínimo.

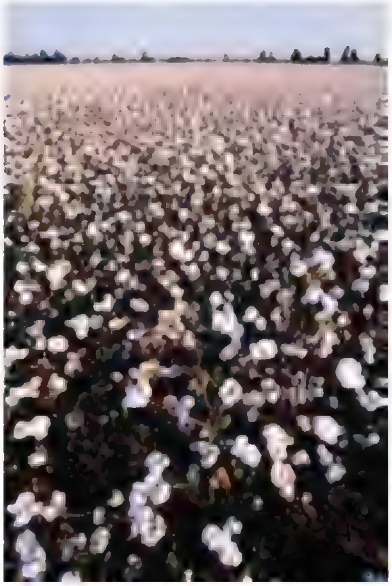
### EJEMPLO 1 | Lluvia y producción de cosechas

La lluvia es esencial para que crezcan las cosechas, pero demasiada lluvia puede disminuir la producción. Los datos siguientes dan la lluvia y producción de algodón por acre para varias estaciones en cierto condado.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos. ¿Qué grado de la función polinomial parece ser apropiado para modelar los datos?

**(b)** Use calculadora graficadora para hallar el polinomio de mejor ajuste. Grafique la función polinomial en la gráfica de dispersión.

**(c)** Use el modelo que haya encontrado para estimar la producción si hay 25 pulgadas de lluvia.



Ted Wood/The Image Bank/Getty Images

| Estación | Lluvia (pulg.) | Producción (kg/acre) |
|---|---|---|
| 1 | 23.3 | 5311 |
| 2 | 20.1 | 4382 |
| 3 | 18.1 | 3950 |
| 4 | 12.5 | 3137 |
| 5 | 30.9 | 5113 |
| 6 | 33.6 | 4814 |
| 7 | 35.8 | 3540 |
| 8 | 15.5 | 3850 |
| 9 | 27.6 | 5071 |
| 10 | 34.5 | 3881 |

## SOLUCIÓN

**(a)** La gráfica de dispersión se muestra en la Figura 3. Los datos parecen tener un pico, de modo que es apropiado modelar los datos por medio de una función polinomial cuadrática (grado 2).

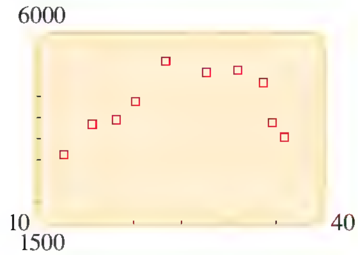



**FIGURA 3** Gráfica de dispersión de producción contra datos de lluvia

**(b)** Usando calculadora graficadora, encontramos que la función polinomial cuadrática de mejor ajuste es

$$y = -12.6x^2 + 651.5x - 3283.2$$

La salida de la calculadora y la gráfica de dispersión, junto con la gráfica del modelo cuadrático, se muestran en la Figura 4.

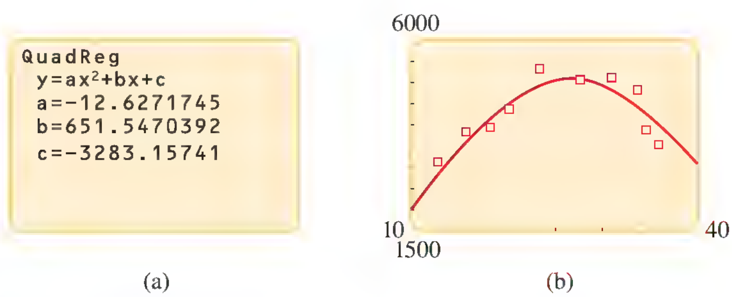



**FIGURA 4**

**(c)** Usando el modelo con $x = 25$, obtenemos

$$y = -12.6(25)^2 + 651.5(25) - 3283.2 \approx 5129.3$$

Estimamos que la producción es de unos 5130 kg/acre. ■

Otolitos para varias especies de peces

## EJEMPLO 2 | Datos de longitud a cierta edad para peces

Los otolitos ("orejas de piedra") son diminutas estructuras que se encuentran en la cabeza de peces. Los anillos microscópicos de crecimiento en los otolitos, que no son diferentes a los anillos de crecimiento de un árbol, registran la edad de un pez. La tabla siguiente da las longitudes de róbalos pescados a diferentes edades, como lo determinan sus otolitos. Unos científicos han propuesto un polinomio cúbico para modelar estos datos.

**(a)** Use calculadora graficadora para hallar la función polinomial cúbica de mejor ajuste para los datos.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique la función polinomial de la parte (a).

**(c)** Un pescador captura un róbalo de 20 pulgadas de largo. Use el modelo para estimar su edad.

| Edad (años) | Longitud (pulg.) | Edad (años) | Longitud (pulg.) |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.8 | 9 | 18.2 |
| 2 | 8.8 | 9 | 17.1 |
| 2 | 8.0 | 10 | 18.8 |
| 3 | 7.9 | 10 | 19.5 |
| 4 | 11.9 | 11 | 18.9 |
| 5 | 14.4 | 12 | 21.7 |
| 6 | 14.1 | 12 | 21.9 |
| 6 | 15.8 | 13 | 23.8 |
| 7 | 15.6 | 14 | 26.9 |
| 8 | 17.8 | 14 | 25.1 |

### SOLUCIÓN

**(a)** Usando calculadora graficadora (vea Figura 5(a)), encontramos la función polinomial cúbica de mejor ajuste:

$$y = 0.0155x^3 - 0.372x^2 + 3.95x + 1.21$$

**(b)** La gráfica de dispersión de los datos y la función polinomial cúbica están graficadas en la Figura 5(b).

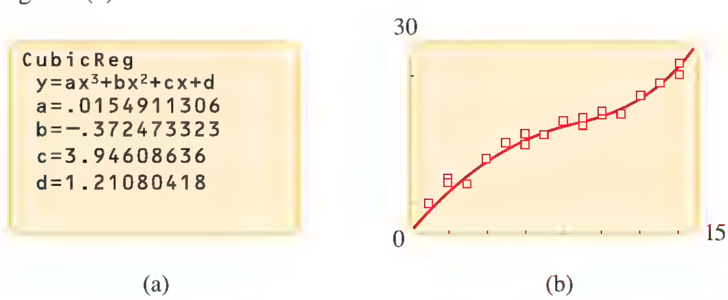



**FIGURA 5**

**(c)** Moviendo el cursor a lo largo de la gráfica del polinomio, encontramos que $y = 20$ cuando $x \approx 10.8$. Entonces, el pez tiene alrededor de 11 años de edad.

## PROBLEMAS

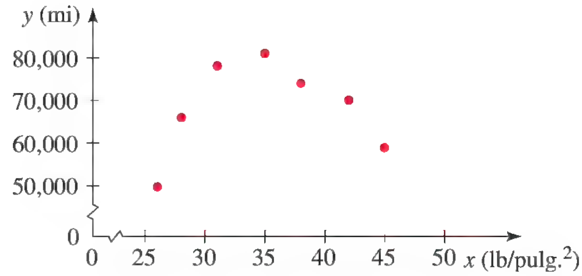
**1. Presión de inflado de llantas y desgaste de la superficie de rodamiento** Es necesario inflar correctamente las llantas de autos. Una presión excesiva o demasiado baja pueden causar desgaste prematuro. Los datos y gráfica de dispersión de la página siguiente muestran la duración de una llanta para diferentes valores de inflado para cierto tipo de llanta.

**(a)** Encuentre la función polinomial cuadrática que mejor se ajuste a los datos.

**(b)** Trace una gráfica de la polinomial de la parte (a) junto con una gráfica de dispersión de los datos.

**(c)** Use su resultado de la parte (b) para estimar la presión que da la duración más larga.

| Presión (lb/pulg.$^2$) | Duración (mi) |
|---|---|
| 26 | 50,000 |
| 28 | 66,000 |
| 31 | 78,000 |
| 35 | 81,000 |
| 38 | 74,000 |
| 42 | 70,000 |
| 45 | 59,000 |




**2. ¿Demasiadas plantas de maíz por acre?** Cuanto más maíz plante un agricultor por acre, mayor es la producción que éste pueda esperar… pero hasta cierto punto. Demasiadas plantas por acre pueden causar demasiada aglomeración y disminuye la producción. Los datos siguientes dan producciones por acre para varias densidades de plantación de maíz, como lo hallaron investigadores en una granja de pruebas de una universidad.

**(a)** Encuentre la función polinomial cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
**(b)** Trace una gráfica de la función polinomial de la parte (a) junto con una gráfica de dispersión de los datos.
**(c)** Use su resultado de la parte (b) para estimar la producción para 37,000 plantas por acre.

| Densidad (plantas/acre) | Producción (búshels/acre) |
|---|---|
| 15,000 | 43 |
| 20,000 | 98 |
| 25,000 | 118 |
| 30,000 | 140 |
| 35,000 | 142 |
| 40,000 | 122 |
| 45,000 | 93 |
| 50,000 | 67 |

**3. ¿Con qué rapidez puede usted hacer una lista de sus cosas favoritas?** Si a usted se le pide hacer una lista de objetos en cierta categoría, la rapidez con la que pueda hacer esa lista sigue un modelo que se puede predecir. Por ejemplo, si trata de mencionar tantas hortalizas como pueda, es probable que piense en varias de ellas de inmediato, por ejemplo zanahorias, chícharos, frijoles, maíz, etcétera. Después, tras cierta pausa, puede pensar en otras que usted coma con menos frecuencia, quizá calabacines, berenjenas y espárragos. Finalmente, puede pensar en unas pocas legumbres exóticas como alcachofas, jícama, repollo chino u otras semejantes. Un psicólogo hace este experimento en varios individuos. La tabla siguiente da el número promedio de legumbres que las personas han citado en cierto número de segundos.

**(a)** Encuentre la función polinomial cúbica que mejor se ajuste a los datos.
**(b)** Trace una gráfica de la función polinomial de la parte (a) junto con una gráfica de dispersión de los datos.
**(c)** Use su resultado de la parte (b) para estimar el número de legumbres que las personas podrían mencionar en 40 segundos.
**(d)** De acuerdo con el modelo, ¿cuánto tardaría una persona (al décimo de segundo más cercano) en citar cinco legumbres?

| Segundos | Número de legumbres |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 6 |
| 5 | 10 |
| 10 | 12 |
| 15 | 14 |
| 20 | 15 |
| 25 | 18 |
| 30 | 21 |

4. **Las ventas de ropa son estacionales** Las ventas de ropa tienden a variar por temporadas, con más de ellas vendidas en primavera y otoño. La tabla siguiente da las cifras de ventas para cada mes en cierta tienda de ropa.

**(a)** Encuentre una función polinomial cuártica (de cuarto grado) que mejor se ajuste a los datos.
**(b)** Trace una gráfica de la función polinomial de la parte (a) junto con una gráfica de dispersión de los datos.
**(c)** ¿Piensa usted que una función polinomial cuártica es un buen modelo para estos datos? Explique.

| Mes | Ventas ($) |
|---|---|
| Enero | 8,000 |
| Febrero | 18,000 |
| Marzo | 22,000 |
| Abril | 31,000 |
| Mayo | 29,000 |
| Junio | 21,000 |
| Julio | 22,000 |
| Agosto | 26,000 |
| Septiembre | 38,000 |
| Octubre | 40,000 |
| Noviembre | 27,000 |
| Diciembre | 15,000 |

5. **Altura de una pelota de béisbol** Una pelota es lanzada hacia arriba y su altura se mide a intervalos de 0.5 segundos con una luz estroboscópica. Los datos resultantes se dan en la tabla siguiente.

**(a)** Trace una gráfica de dispersión de los datos. ¿Qué grado de una función polinomial es apropiado para modelar los datos?
**(b)** Encuentre un modelo de polinomial que mejor se ajuste a los datos y grafíquelo en la gráfica de dispersión.
**(c)** Encuentre los tiempos en los que la pelota está a 20 pies sobre el suelo.
**(d)** ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la pelota?

| Tiempo (s) | Altura (pies) |
|---|---|
| 0 | 4.2 |
| 0.5 | 26.1 |
| 1.0 | 40.1 |
| 1.5 | 46.0 |
| 2.0 | 43.9 |
| 2.5 | 33.7 |
| 3.0 | 15.8 |

6. **Ley de Torricelli** El agua de un tanque se saldrá por un pequeño agujero del fondo con más rapidez cuando el tanque esté casi lleno que cuando esté casi vacío. De acuerdo con la ley de Torricelli, la altura $h(t)$ del agua restante en el tiempo $t$ es una función cuártica de $t$.

Cierto tanque se llena con agua y se deja drenar. La altura del agua se mide en tiempos diferentes como se muestra en la tabla.

**(a)** Encuentre la función polinomial cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
**(b)** Trace una gráfica de la función polinomial de la parte (a) junto con una gráfica de dispersión de los datos.
**(c)** Use su gráfica de la parte (b) para estimar cuánto tardará el tanque en drenarse por completo.

| Tiempo (min) | Altura (pies) |
|---|---|
| 0 | 5.0 |
| 4 | 3.1 |
| 8 | 1.9 |
| 12 | 0.8 |
| 16 | 0.2 |

George Marks/Retrofile/Getty Images

CAPÍTULO 4

# FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



En este capítulo estudiamos una clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Éstas son funciones, como $f(x) = 2^x$, donde la variable independiente está en el exponente. Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, como por ejemplo el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión que gana interés compuesto. Una vez obtenido el modelo exponencial, podemos usar el modelo para predecir el tamaño poblacional o calcular la cantidad de una inversión para cualquier fecha futura. Para investigar *cuándo* una población llegará a cierto nivel, usamos las funciones inversas de funciones exponenciales, llamadas *funciones logarítmicas*. Por lo tanto, si tenemos un modelo exponencial para crecimiento poblacional, podemos contestar preguntas como: ¿Cuándo estará mi ciudad tan congestionada como la calle de Nueva York que se ve en la foto?

# 4.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

Funciones exponenciales ▶ Gráficas de funciones exponenciales ▶ Interés compuesto

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(10) &= 2^{10} = 1024 \\ f(30) &= 2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824 \end{aligned}$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

## ▼ Funciones exponenciales

Para estudiar funciones exponenciales, primero debemos definir lo que queremos decir por la expresión $a^x$ cuando $x$ es cualquier número. En la Sección 1.2 definimos $a^x$ para $a > 0$ y $x$ un número racional, pero todavía no hemos definido potencias irracionales. Por lo tanto, ¿qué significa $5^{\sqrt{3}}$ o $2^{\pi}$? Para definir $a^x$ cuando $x$ es irracional, aproximamos $x$ por medio de números racionales.

Por ejemplo, dado que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, sucesivamente aproximamos $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

Intuitivamente, podemos ver que estas potencias racionales de $a$ se acercan más y más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar mediante matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que estas potencias se aproximan. Definimos que $a^{\sqrt{3}}$ es este número.

Por ejemplo, usando calculadora, encontramos

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt{3}} &\approx 5^{1.732} \\ &\approx 16.2411\ldots \end{aligned}$$

Cuantos más lugares decimales de $\sqrt{3}$ usemos en nuestro cálculo, es mejor nuestra aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

Las Leyes de Exponentes se dan en la página 14.

Se puede demostrar que las *Leyes de Exponentes todavía son verdaderas cuando los exponentes son números reales.*

**FUNCIONES EXPONENCIALES**

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales $x$ por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 3^x \qquad h(x) = 10^x$$

Base 2     Base 3     Base 10

## EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

**(a)** $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

**(c)** $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

**SOLUCIÓN** Usamos calculadora para obtener los valores de $f$.

| | Tecleo en calculadora | Salida |
|---|---|---|
| **(a)** $f(2) = 3^2 = 9$ | 3 ^ 2 ENTER | 9 |
| **(b)** $f(\ \frac{2}{3}) = 3^{\ 2/3} \approx 0.4807$ | 3 ^ ( (−) 2 ÷ 3 ) ENTER | 0.4807498 |
| **(c)** $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$ | 3 ^ π ENTER | 31.5442807 |
| **(d)** $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$ | 3 ^ √ 2 ENTER | 4.7288043 |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## Gráficas de funciones exponenciales

Primero graficamos funciones exponenciales al localizar puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

## EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

**SOLUCIÓN** Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

| $x$ | $f(x) = 3^x$ | $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ |
|---|---|---|
| −3 | $\frac{1}{27}$ | 27 |
| 2 | $\frac{1}{9}$ | 9 |
| −1 | $\frac{1}{3}$ | 3 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | $\frac{1}{3}$ |
| 2 | 9 | $\frac{1}{9}$ |
| 3 | 27 | $\frac{1}{27}$ |

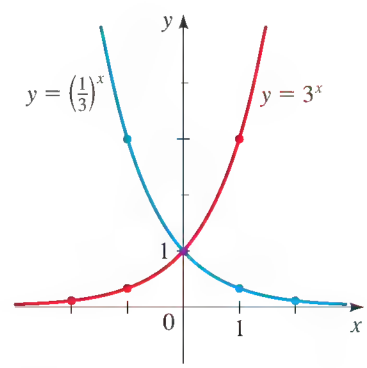



**FIGURA 1**

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

de modo que hemos obtenido la gráfica de $g$ a partir de la gráfica de $f$ al reflejar en el eje $y$.

La reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Para ver la rapidez con la que aumenta $f(x) = 2^x$, realicemos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de grueso, y lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel, se duplica el grosor de la pila del papel, de modo que el grosor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿De qué grosor piensa usted qué es? Resulta que es de más de 17 millones de millas.

La Figura 2 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ para varios valores de la base $a$. Todas estas gráficas pasan por el punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la Figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función aumenta rápidamente (vea nota al margen).

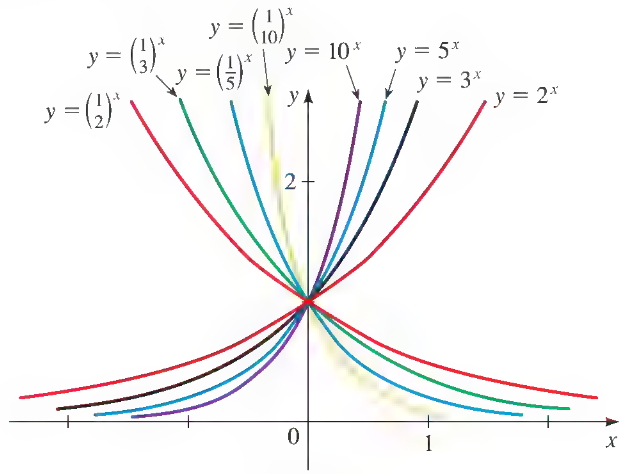



**FIGURA 2** Una familia de funciones exponenciales

Vea la Sección 3.7, página 278, donde se explica la "notación de flechas" empleada aquí.

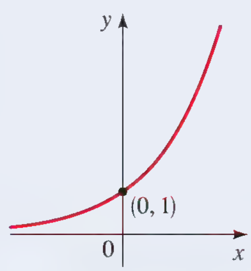
El eje $x$ es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, tenemos $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (vea Figura 2). También $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

### GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

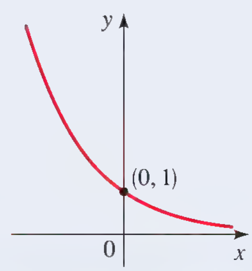
La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje $x$) es una asíntota horizontal de $f$. La gráfica de $f$ tiene una de las siguientes formas.




$f(x) = a^x$ para $a > 1$

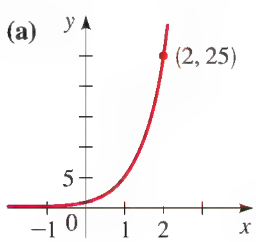



$f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

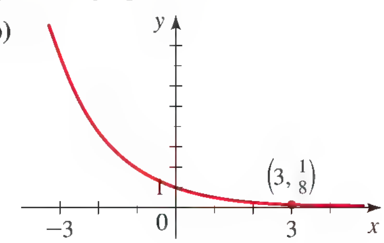
## EJEMPLO 3 | Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

**(a)**




**(b)**



**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

**(b)** Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

---

En el siguiente ejemplo vemos cómo graficar ciertas funciones, no localizando puntos sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la Figura 2, y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la Sección 2.5.

## EJEMPLO 4 | Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = 1 + 2^x$  **(b)** $h(x) = -2^x$  **(c)** $k(x) = 2^{x\ \ 1}$

**SOLUCIÓN**

El desplazamiento y reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

**(a)** Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

**(b)** De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje $x$ para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la Figura 3(b).

**(c)** Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la Figura 3(c).

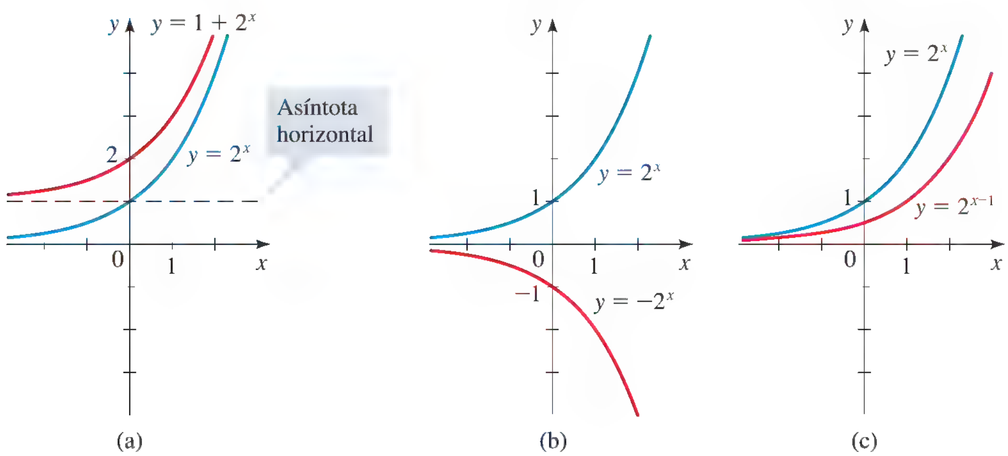



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25, 27** Y **31**

---

## EJEMPLO 5 | Comparación de funciones exponenciales y potencia

Compare la rapidez de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista.

**(a)** $[0, 3]$ por $[0, 8]$

**(b)** $[0, 6]$ por $[0, 25]$

**(c)** $[0, 20]$ por $[0, 1000]$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La Figura 4(a) muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza, y hasta supera, a la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

**(b)** El rectángulo de vista más grande de la Figura 4(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ alcanza a la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

**(c)** La Figura 4(c) da una vista más global y muestra que cuando $x$ es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho mayor que $g(x) = x^2$.

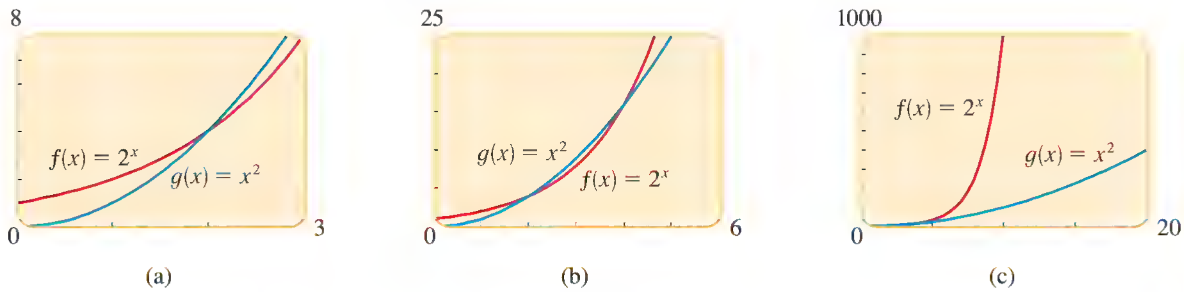



**FIGURA 4**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## Interés compuesto

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Si una cantidad de dinero $P$, llamada **principal**, se invierte a una tasa de interés $i$ por período, entonces después de un período el interés es $Pi$, y la cantidad $A$ de dinero es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si el interés se reinvierte, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro período es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. Análogamente, después de un tercer período la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de $k$ períodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Observe que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es $r$ y si el interés se capitaliza $n$ veces por año, entonces en cada período la tasa de interés es $i = r/n$, y hay $nt$ períodos en $t$ años. Esto lleva a la siguiente fórmula para la cantidad después de $t$ años.

### INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde
$A(t)$ = cantidad después de $t$ años
$P$ = principal
$r$ = tasa de interés por año
$n$ = número de veces que el interés se capitaliza por año
$t$ = número de años

*$r$ se conoce a veces como* *tasa nominal de interés anual.*

## EJEMPLO 6 | Cálculo de interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensualmente y a diario.

**SOLUCIÓN** Usamos la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

| Capitalización | $n$ | Cantidad después de 3 años |
|---|---|---|
| Anual | 1 | $1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$ |
| Semestral | 2 | $1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$ |
| Trimestral | 4 | $1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$ |
| Mensual | 12 | $1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$ |
| Diario | 365 | $1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$ |

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **51**

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento en porcentaje anual** (APY) es la tasa de interés *simple* que rinde la misma cantidad al término de un año.

## EJEMPLO 7 | Cálculo del rendimiento en porcentaje anual

Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% por año, capitalizado a diario.

**SOLUCIÓN** Después de un año, un principal $P$ crecerá a

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

El interés simple se estudia en la Sección 1.6.

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Comparando, vemos que $1 + r = 1.06183$, entonces $r = 0.06183$. Por lo tanto, el rendimiento en porcentaje anual es \$6.183.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

## 4.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ______; $f(-2) =$ ______, $f(0) =$ ______, $f(2) =$ ______ y $f(6) =$ ______.

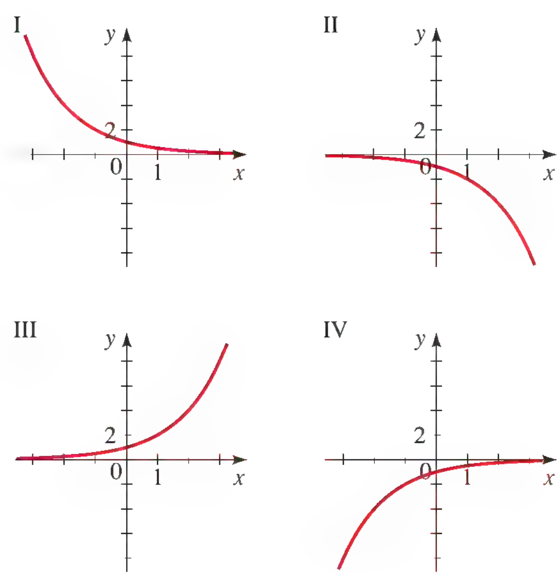
**2.** Relacione la función exponencial con su gráfica.

**(a)** $f(x) = 2^x$

**(b)** $f(x) = 2^{\ x}$

**(c)** $f(x) = -2^x$

**(d)** $f(x) = -2^{\ x}$



3. **(a)** Para obtener la gráfica de $g(x) = 2^x - 1$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (hacia arriba/abajo) 1 unidad.
   **(b)** Para obtener la gráfica de $h(x) = 2^{x-1}$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (a la izquierda/derecha) 1 unidad.

4. En la fórmula $A(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ para interés compuesto las letras $P$, $r$, $n$ y $t$ representan _______, _______, _______ y _______, respectivamente, y $A(t)$ representa _______. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés de 6% capitalizado trimestralmente, entonces la cantidad después de 2 años es _______.

## HABILIDADES

**5-10** ■ Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

5. $f(x) = 4^x$; $f(0.5), f(\sqrt{2}), f(-\pi), f(\frac{1}{3})$
6. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5), f(\sqrt{3}), f(e), f(-\frac{5}{4})$
7. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x\ 1}$; $g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g(-\frac{1}{2})$
8. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7), g(\sqrt{7}/2), g(1/\pi), g(\frac{2}{3})$

**9-14** ■ Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

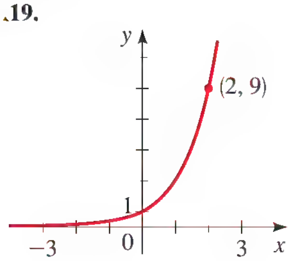
9. $f(x) = 2^x$
10. $g(x) = 8^x$
11. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
12. $h(x) = (1.1)^x$
13. $g(x) = 3(1.3)^x$
14. $h(x) = 2(\frac{1}{4})^x$

**15-18** ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

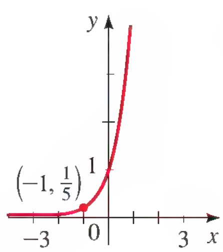
15. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$
16. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$
17. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$
18. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

**19-22** ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

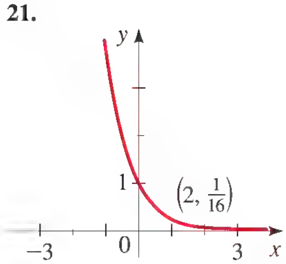
19.



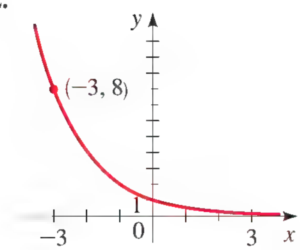

20.




21.



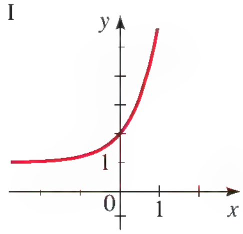

22.



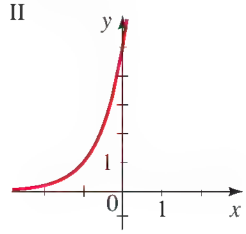

**23-24** ■ Relacione la función exponencial con una de las gráficas marcadas I o II.

23. $f(x) = 5^{x+1}$
24. $f(x) = 5^x + 1$

I




II




**25-36** ■ Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas de la Figura 2. Exprese el dominio, rango y asíntota.

25. $f(x) = -3^x$
26. $f(x) = 10^{\ x}$
27. $g(x) = 2^x\ \ 3$
28. $g(x) = 2^{x\ 3}$
29. $h(x) = 4 + (\frac{1}{2})^x$
30. $h(x) = 6 - 3^x$
31. $f(x) = 10^{x+3}$
32. $f(x) = -(\frac{1}{5})^x$
33. $y = 5^{\ x} + 1$
34. $g(x) = 1 - 3^{\ x}$
35. $y = 3 - 10^{x\ 1}$
36. $h(x) = 2^{x\ 4} + 1$

37. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
    **(b)** ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

38. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$.
    **(b)** Use las Leyes de Exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

39. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ al evaluarlas ambas para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$, y 20. A continuación trace las gráficas de $f$ y $g$ en el mismo conjunto de ejes.

40. Si $f(x) = 10^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right).$$

41. **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ al trazar las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de observación.
    (i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$
    (ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
    (iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$
    **(b)** Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, redondeadas a un lugar decimal.

**42.** **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista:

(i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$
(iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$

**(b)** Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = 4$, redondeada a dos lugares decimales.

**43-44** ■ Trace dos gráficas de la familia de funciones dada para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

**43.** $f(x) = c2^x$ **44.** $f(x) = 2^{cx}$

**45-46** ■ Encuentre, redondeados a dos lugares decimales, **(a)** los intervalos en los que la función es creciente o decreciente y **(b)** el rango de la función.

**45.** $y = 10^{x \quad x^2}$ **46.** $y = x2^x$

## APLICACIONES

**47. Crecimiento de bacterias** Un cultivo de bacterias contiene 1500 bacterias inicialmente y se duplica en cada hora.
**(a)** Encuentre una función que modele el número de bacterias después de $t$ horas.
**(b)** Encuentre el número de bacterias después de 24 horas.

**48. Población de ratones** Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla, con una población inicial de 320 ratones, y los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año.
**(a)** Encuentre una función que modele el número de ratones después de $t$ años.
**(b)** Estime la población de ratones después de 8 años.

**49-50** ■ **Interés compuesto** Una inversión de \$5000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o tasas de interés.

**49.** $r = 4\%$

| Tiempo (años) | Cantidad |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

**50.** $t = 5$ años

| Tasa por año | Cantidad |
|---|---|
| 1% | |
| 2% | |
| 3% | |
| 4% | |
| 5% | |
| 6% | |

**51. Interés compuesto** Si se invierten \$10,000 a una tasa de interés del 3% al año, capitalizada semestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
**(a)** 5 años **(b)** 10 años **(c)** 15 años

**52. Interés compuesto** Si se invierten \$2500 a una tasa de interés del 2.5% por año, capitalizado a diario, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
**(a)** 2 años **(b)** 3 años **(c)** 6 años

**53. Interés compuesto** Si se invierten \$500 a una tasa de interés del 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
**(a)** 1 año **(b)** 2 años **(c)** 10 años

**54. Interés compuesto** Si se invierten \$4000 a una tasa de interés del 5.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre la cantidad adeudada al término del número dado de años.
**(a)** 4 años **(b)** 6 años **(c)** 8 años

**55-56** ■ **Valor presente** El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe ser invertida ahora, a una tasa de interés dada, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

**55.** Encuentre el valor presente de \$10,000 si se paga interés a razón de 9% al año, capitalizado semestralmente, durante 3 años.

**56.** Encuentre el valor presente de \$10,000 si se paga interés a razón de 8% al año, capitalizado mensualmente, durante 5 años.

**57. Rendimiento en porcentaje anual** Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana 8% por año, capitalizado mensualmente.

**58. Rendimiento en porcentaje anual** Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizado trimestralmente.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**59. Crecimiento de una función exponencial** Supongamos que al lector le ofrecen un trabajo que dura un mes, y que estará muy bien pagado. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago es más rentable para él?
**(a)** Un millón de dólares al final del mes.
**(b)** Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día, y en general, $2^n$ centavos en el $n$ día.

**60. Altura de la gráfica de una función exponencial** El profesor de matemáticas pide al lector que trace una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

para $x$ entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades a 1 pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Explosión exponencial**

En este proyecto exploramos un ejemplo acerca de cómo monedas de a centavo que nos ayudan a ver cómo funciona el crecimiento exponencial. Se puede ver el proyecto en el sitio web del libro acompañante: **www.stewartmath.com**

# 4.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

**El número *e* ▶ La función exponencial natural ▶ Interés capitalizado continuamente**

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial. En esta sección estudiamos la base especial $e$, que es conveniente para aplicaciones donde interviene Cálculo.

## ▼ El número *e*

El número $e$ se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando $n$ se hace grande. (En Cálculo, esta idea se hace más precisa por medio del concepto de un límite. Vea el Capítulo 13.) La tabla siguiente muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores cada vez más grandes de $n$.

| $n$ | $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ |
|---:|---|
| 1 | 2.00000 |
| 5 | 2.48832 |
| 10 | 2.59374 |
| 100 | 2.70481 |
| 1000 | 2.71692 |
| 10,000 | 2.71815 |
| 100,000 | 2.71827 |
| 1,000,000 | 2.71828 |

El **Gateway Arch** (Arco de Entrada) en St. Louis, Missouri, tiene la forma de la gráfica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer al principio). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{\ bx})$$

(vea Ejercicio 17). Esta forma se escogió porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes telefónicos) cuelgan en forma de catenaria.

Es evidente que, aproximado a cinco lugares decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que $e$ es un número irracional, de modo que no podemos escribir su valor exacto en forma decimal.

## ▼ La función exponencial natural

La notación fue escogida por Leonhard Euler (vea página 266), probablemente por es la primera letra de la palabra *exponencial*.

El número $e$ es la base para la función exponencial natural. ¿Por qué usamos una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer que con una base como el 10 es más fácil trabajar. Veremos, no obstante, que en ciertas aplicaciones el número $e$ es la mejor base posible. En esta sección estudiamos cómo se presenta el número $e$ en la descripción de interés compuesto.

> **LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL**
>
> La **función exponencial natural** es la función exponencial
>
> $$f(x) = e^x$$
>
> Con base $e$. Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

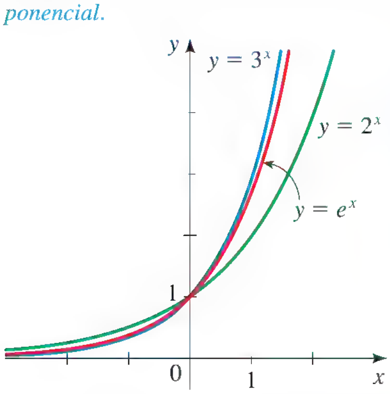




**FIGURA 1** Gráfica de la función exponencial natural

Como $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se ve en la Figura 1.

Innumerables calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. Usamos esta tecla en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 1 | Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales.

**(a)** $e^3$ **(b)** $2e^{-0.53}$ **(c)** $e^{4.8}$

**SOLUCIÓN** Usamos la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora para evaluar la función exponencial.

**(a)** $e^3 \approx 20.08554$ **(b)** $2e^{-0.53} \approx 1.17721$ **(c)** $e^{4.8} \approx 121.51042$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Transformaciones de la función exponencial

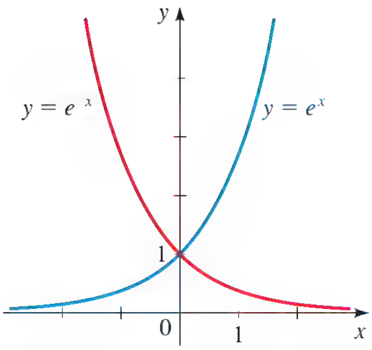



**FIGURA 2**

Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $f(x) = e^{\ x}$ **(b)** $g(x) = 3e^{0.5x}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y reflejamos en el eje $y$ para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la Figura 2.

**(b)** Calculamos varios valores, localizamos los puntos resultantes y luego enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades. La gráfica se ilustra en la Figura 3.

| $x$ | $f(x) = 3e^{0.5x}$ |
|---|---|
| −3 | 0.67 |
| −2 | 1.10 |
| 1 | 1.82 |
| 0 | 3.00 |
| 1 | 4.95 |
| 2 | 8.15 |
| 3 | 13.45 |

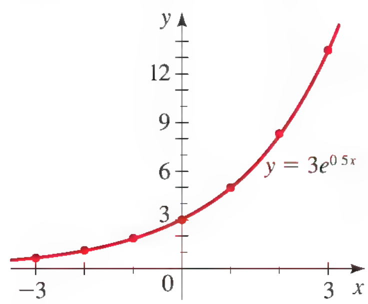



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **7**

## EJEMPLO 3 | Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10,000 habitantes. Después de $t$ días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{\ 0.97t}}$$

**(a)** ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

**(b)** Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.

**(c)** Grafique la función $v$ y describa su comportamiento.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $v(0) = 10,000/(5 + 1245e^0) = 10,000/1250 = 8$, concluimos que 8 personas inicialmente tienen la enfermedad.

**(b)** Usando calculadora, evaluamos $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$ y a continuación redondeamos para obtener los siguientes valores.

| Días | Personas infectadas |
|---|---|
| 1 | 21 |
| 2 | 54 |
| 5 | 678 |

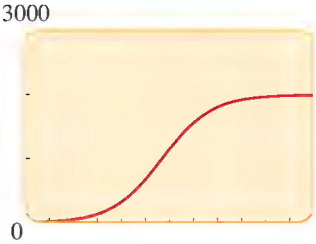



**FIGURA 4**

$$v(t) = \frac{10{,}000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

**(c)** De la gráfica de la Figura 4 vemos que el número de personas infectadas primero sube lentamente, luego sube con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2000 personas están infectadas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

La gráfica de la Figura 4 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como ésta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional. (Vea Ejercicios 25-28.)

## Interés capitalizado continuamente

En el Ejemplo 6 de la Sección 4.1 vimos que el interés pagado aumenta cuando aumenta el número $n$ de períodos de capitalización. Veamos qué ocurre cuando $n$ aumenta indefinidamente. Si hacemos $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando $m$ se hace grande, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número $e$. Entonces, la cantidad se aproxima a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se capitaliza "a cada instante".

### INTERÉS CAPITALIZADO CONTINUAMENTE

El **interés capitalizado continuamente** se calcula con la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Donde $A(t)$ = cantidad después de $t$ años
$P$ = principal
$r$ = tasa de interés por año
$t$ = número de años

### EJEMPLO 4 | Calcular interés capitalizado continuamente

Encuentre la cantidad después de 3 años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado continuamente.

**SOLUCIÓN** Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del Ejemplo 6 de la Sección 4.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## 4.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial _____. El número $e$ es aproximadamente igual a _____.

**2.** En la fórmula $A(t) = Pe^{rt}$ para interés capitalizado continuamente, las letras $P$, $r$ y $t$ representan _____, _____ y _____, respectivamente, y $A(t)$ representa _____. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés del 6% capitalizado continuamente, entonces la cantidad después de 2 años es _____.

## HABILIDADES

**3-4** ■ Use calculadora para evaluar la función a los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres lugares decimales.

**3.** $h(x) = e^x$;  $h(3), h(0.23), h(1), h(-2)$

**4.** $h(x) = e^{-2x}$;  $h(1), h(\sqrt{2}), h(-3), h(\frac{1}{2})$

**5-6** ■ Complete la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace una gráfica de la función.

**5.**

| $x$ | $f(x) = 3e^x$ |
|---|---|
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $-0.5$ | |
| $0$ | |
| $0.5$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |

**6.**

| $x$ | $f(x) = 2e^{-0.5x}$ |
|---|---|
| $-3$ | |
| $-2$ | |
| $-1$ | |
| $0$ | |
| $1$ | |
| $2$ | |
| $3$ | |

**7-14** ■ Grafique la función, no localizando los puntos sino empezando desde la gráfica de $y = e^x$. Exprese el dominio, rango y asíntota.

**7.** $f(x) = -e^x$

**8.** $y = 1 - e^x$

**9.** $y = e^{-x} - 1$

**10.** $f(x) = -e^{-x}$

**11.** $f(x) = e^{x-2}$

**12.** $y = e^{x-3} + 4$

**13.** $h(x) = e^{x+1} - 3$

**14.** $g(x) = -e^{x-1} - 2$

**15.** La *función coseno hiperbólico* está definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**(a)** Trace las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes, y use adición gráfica (vea Sección 2.6) para trazar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

**(b)** Use la definición para demostrar que $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

**16.** La *función seno hiperbólico* está definida por

$$\text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**(a)** Trace la gráfica de esta función usando adición gráfica como en el Ejercicio 15.

**(b)** Use la definición para demostrar que $\text{senh}(-x) = -\text{senh}(x)$

**17. (a)** Trace las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5, 1, 1.5$ y $2$.

**(b)** ¿En qué forma un valor grande de $a$ afecta a la gráfica?

**18-19** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de $x$ en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

**18.** $g(x) = x^x \quad (x > 0)$

**19.** $g(x) = e^x + e^{-3x}$

## APLICACIONES

**20. Drogas médicas** Cuando cierta droga médica se administra a un paciente, el número de miligramos restante en el torrente sanguíneo del paciente después de $t$ horas se modela con

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos de la droga quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

**21. Desintegración radiactiva** Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de $t$ días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

**(a)** Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

**(b)** ¿Cuánto de la masa resta después de 45 días?

**22. Desintegración radiactiva** Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de $t$ días está dada por la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

**(a)** Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

**(b)** ¿Cuánta masa resta después de 20 días?

**23. Paracaidismo** Una paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de ella, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad hacia abajo de la paracaidista en el tiempo $t$ está dada por

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

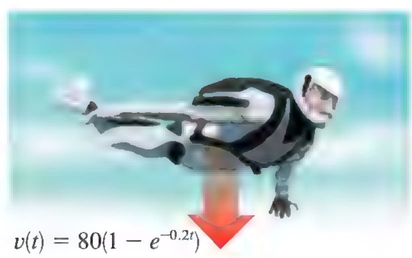
donde $t$ se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

**(a)** Encuentre la velocidad inicial de la paracaidista.

**(b)** Encuentre la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

**(c)** Trace una gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

**(d)** La velocidad máxima de un cuerpo en caída con resistencia del viento se denomina *velocidad terminal*. De la gráfica de la parte (c), encuentre la velocidad terminal de esta paracaidista.




**24. Mezclas y concentraciones** Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura y, a continuación, se le bombea agua salada con concentración de 0.3 lb/gal al barril, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo $t$ está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde $t$ se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

**(a)** ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

**(b)** ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

**(c)** Trace una gráfica de la función $Q(t)$.

**(d)** Use la gráfica de la parte (c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal del barril cuando $t$ se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

**25. Crecimiento logístico** Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

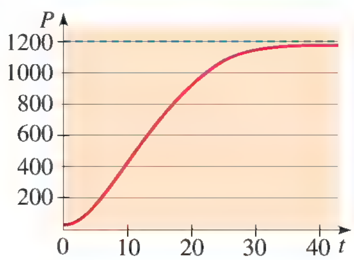
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde $c$, $d$ y $k$ son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y $t$ se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

**(a)** ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

**(b)** Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

**(c)** Evalúe $P(t)$ para valores grandes de $t$. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?




**26. Población de aves** La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo logístico de crecimiento siguiente

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde $t$ se mide en años.

**(a)** Encuentre la población inicial de aves.

**(b)** Trace una gráfica de la función $n(t)$.

**(c)** ¿A qué dimensiones se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

**27. Población mundial** La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará por último en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

donde $t = 0$ es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

**(a)** ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?

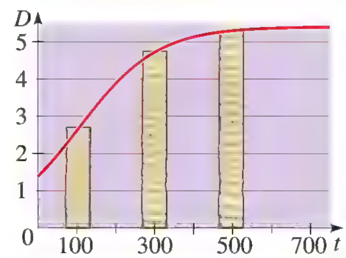
**(b)** Trace una gráfica de la función $P$ para los años 2000 a 2500.

**(c)** De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial a medida que pasa el tiempo?

**28. Diámetro de un árbol** Para cierto tipo de árboles, el diámetro $D$ (en pies) depende de la edad $t$ del árbol (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico siguiente:

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Encuentre el diámetro de un árbol de 20 años de edad.




**29-30 ■ Interés compuesto** Una inversión de $7000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza continuamente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos o tasas de interés indicados.

**29.** $r = 3\%$

| Tiempo (años) | Cantidad |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

**30.** $t = 10$ años

| Tasa por año | Cantidad |
|---|---|
| 1% | |
| 2% | |
| 3% | |
| 4% | |
| 5% | |
| 6% | |

**31. Interés compuesto** Si se invierten $2000 a una tasa de interés del 3.5% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
**(a)** 2 años **(b)** 4 años **(c)** 12 años

**32. Interés compuesto** Si se invierten $3500 a una tasa del 6.25% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
**(a)** 3 años **(b)** 6 años **(c)** 9 años

**33. Interés compuesto** Si se invierten $600 a una tasa del 2.5% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 10 años para los siguientes métodos de capitalización.
**(a)** Anualmente **(b)** Semestralmente
**(c)** Trimestralmente **(d)** Continuamente

**34. Interés compuesto** Si se invierte $8000 en una cuenta para la cual el interés se capitaliza continuamente, encuentre la cantidad de la inversión al término de 12 años para las siguientes tasas de interés.

**(a)** 2% **(b)** 3% **(c)** 4.5% **(d)** 7%

**35. Interés compuesto** ¿Cuál de las tasas dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

**(a)** $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente
**(b)** $2\frac{1}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente
**(c)** $2\%$ al año, capitalizado continuamente

**36. Interés compuesto** ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

**(a)** $5\frac{1}{8}\%$ al año, capitalizado semestralmente
**(b)** $5\%$ al año, capitalizado continuamente

**37. Inversión** Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 9% al año, capitalizado continuamente.

**(a)** Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de $t$ años.
**(b)** Trace una gráfica de $A(t)$.
**(c)** Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión ascenderá a \$25,000.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**38. La definición de *e*** Ilustre la definición del número $e$ al graficar la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e^x$ en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

# 4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ▶ Gráficas de funciones logarítmicas ▶ Logaritmos comunes ▶ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

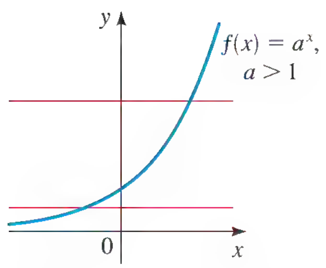



**FIGURA 1** $f(x) = a^x$ es biunívoca.

## ▼ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa $f^{-1}$ se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que $f^{-1}$ está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

> **DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA**
>
> Sea $a$ un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base *a***, denotada por $\mathbf{log}_a$, está definida por
>
> $$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$
>
> Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base $a$ debe ser elevado para obtener $x$.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base $a$ de $x$ es $y$".

Por tradición el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

| **Forma logarítmica** | **Forma exponencial** |
|---|---|
| Exponente | Exponente |
| $\log_a x = y$ | $a^y = x$ |
| Base | Base |

## EJEMPLO 1 | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_{10} 100{,}000 = 5$ | $10^5 = 100{,}000$ |
| $\log_2 8 = 3$ | $2^3 = 8$ |
| $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ | $2^{-3} = \frac{1}{8}$ |
| $\log_5 s = r$ | $5^r = s$ |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

| $x$ | $\log_{10} x$ |
|---|---|
| $10^4$ | 4 |
| $10^3$ | 3 |
| $10^2$ | 2 |
| 10 | 1 |
| 1 | 0 |
| $10^{-1}$ | $-1$ |
| $10^{-2}$ | $-2$ |
| $10^{-3}$ | $-3$ |
| $10^{-4}$ | $-4$ |

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 2 | Evaluación de logaritmos

**(a)** $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

**(b)** $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

**(c)** $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

**(d)** $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **9**

Propiedad de la Función Inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la Propiedad de la Función Inversa descrita en la página 201 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, obtenemos

$$\log_a(a^x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad x > 0$$

Hacemos una lista de éstas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

### PROPIEDADES DE LOGARITMOS

| Propiedad | Razón |
|---|---|
| **1.** $\log_a 1 = 0$ | Debemos elevar $a$ a la potencia 0 para obtener 1. |
| **2.** $\log_a a = 1$ | Debemos elevar $a$ a la potencia 1 para obtener $a$. |
| **3.** $\log_a a^x = x$ | Debemos elevar $a$ a la potencia $x$ para obtener $a^x$. |
| **4.** $a^{\log_a x} = x$ | $\log_a x$ es la potencia a la que $a$ debe elevarse para obtener $x$. |

## EJEMPLO 3 | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\log_5 1 = 0$ | Propiedad 1 | $\log_5 5 = 1$ | Propiedad 2 |
| $\log_5 5^8 = 8$ | Propiedad 3 | $5^{\log_5 12} = 12$ | Propiedad 4 |

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **25**

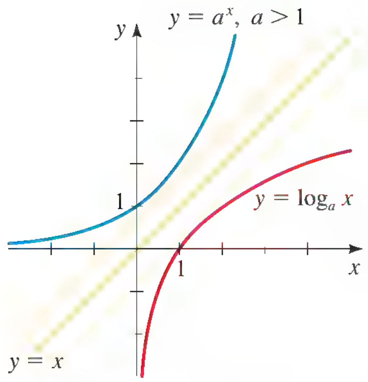



**FIGURA 2** Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

## ▼ Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca $f$ tiene dominio $A$ y rango $B$, entonces su función inversa $f^{-1}$ tiene dominio $B$ y rango $A$. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La Figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea Ejercicio 92).

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección $x$ de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje $y$ es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

### EJEMPLO 4 | Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

**SOLUCIÓN** Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores $x$ que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

| $x$ | $\log_2 x$ |
|---|---|
| $2^3$ | 3 |
| $2^2$ | 2 |
| 2 | 1 |
| 1 | 0 |
| $2^{-1}$ | $-1$ |
| $2^{-2}$ | $-2$ |
| $2^{-3}$ | $-3$ |
| $2^{-4}$ | $-4$ |

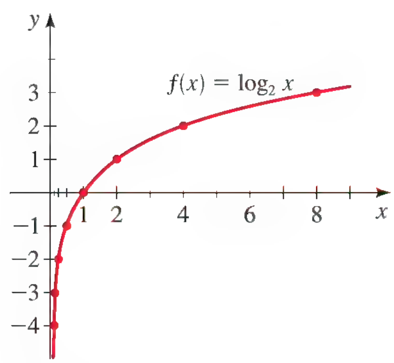



**FIGURA 3**

✎ AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **41**

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.

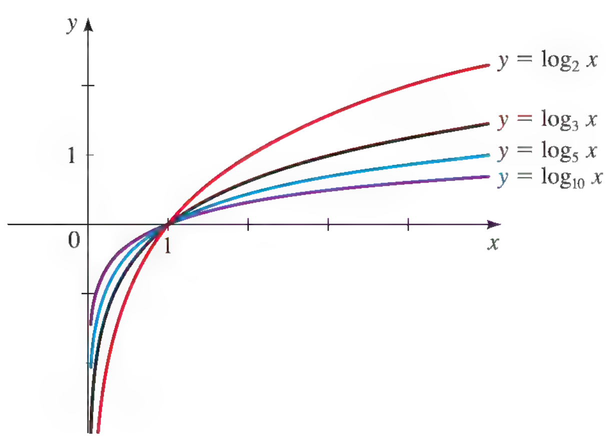



**FIGURA 4** Familia de funciones logarítmicas

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

© Bettmann/CORBIS

© Hulton-Deutsch Collection/CORBIS

**Aplicación de la ley**

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde la reconstrucción de trayectorias de balas hasta determinar el tiempo de una muerte, para calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una persona en particular. Un uso interesante está en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona que haya estado desaparecida durante años podría verse muy diferente respecto de su más reciente fotografía disponible. Esto es particularmente cierto si la persona desaparecida es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado usted cómo se verá dentro de 5, 10 o 15 años?

Unos investigadores han hallado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la cabeza de un adulto. Como otro ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y la estatura de ésta es $\frac{1}{3}$ en un niño pero alrededor de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Al recolectar datos y analizar gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud $l$ de un brazo con la estatura $h$ es $l = ae^{kh}$ donde $a$ y $k$ son constantes. Estudiando varias características físicas de una persona, biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo cambia con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a departamentos de aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.

En los siguientes dos ejemplos graficamos funciones logarítmicas empezando con las gráficas básicas de la Figura 4 y usando las transformaciones de la Sección 2.5.

## EJEMPLO 5 | Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función.

**(a)** $g(x) = -\log_2 x$

**(b)** $h(x) = \log_2(-x)$

### SOLUCIÓN

**(a)** Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje $x$ para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la Figura 5(a).

**(b)** Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje $y$ para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la Figura 5(b).

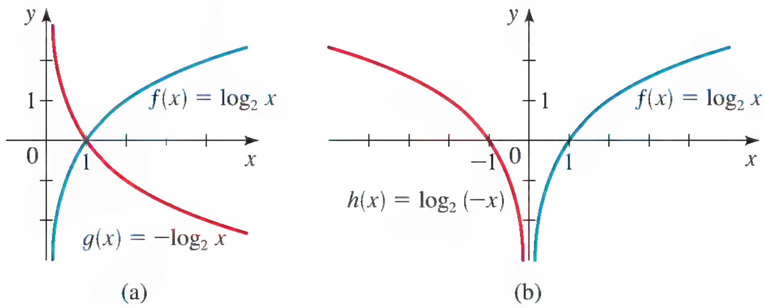



**FIGURA 5**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

## EJEMPLO 6 | Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

**(a)** $g(x) = 2 + \log_5 x$

**(b)** $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

### SOLUCIÓN

**(a)** La gráfica de $g$ se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de $f$ es $(0, \infty)$.

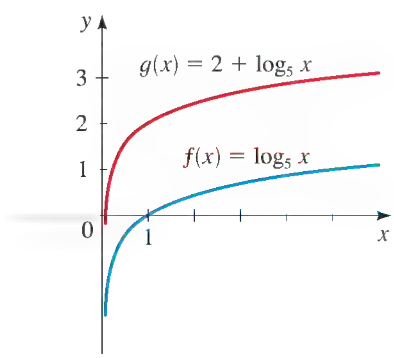



**FIGURA 6**

**(b)** La gráfica de $h$ se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Como $\log_{10} x$ está definido sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

Library of Congress

**JOHN NAPIER** (1550-1617) fue un terrateniente escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que él publicó en 1614 bajo el título de *A description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes, los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57{,}783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261{,}872{,}564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

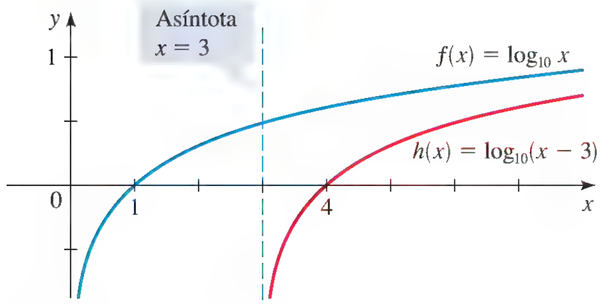



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57**

## Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

**LOGARITMO COMÚN**

El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos log 50? Necesitamos hallar el exponente $y$ tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, podemos experimentar para hallar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que directamente da valores de logaritmos comunes.

### EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

**SOLUCIÓN** Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de $x$ que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

| $x$ | $\log x$ |
|---|---|
| 0.01 | −2 |
| 0.1 | −1 |
| 0.5 | −0.301 |
| 1 | 0 |
| 4 | 0.602 |
| 5 | 0.699 |
| 10 | 1 |

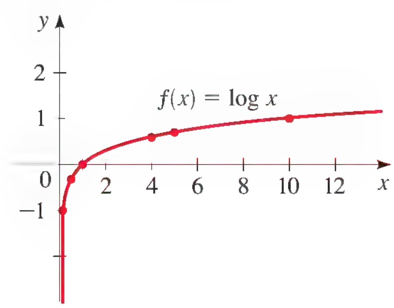



**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

La respuesta humana al sonido e intensidad luminosa es logarítmica.

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) usando funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe ser aumentado muchas veces antes que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde $S$ es la intensidad subjetiva del estímulo, $I$ es la intensidad física del estímulo, $I_0$ representa el umbral de intensidad física y $k$ es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

## EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad $B$ (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física $I$ (en $W/m^2$) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Estudiamos la escala de decibeles en más detalle en la Sección 4.6.

donde $I_0$ es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física $I$ es 100 veces la de $I_0$.

**SOLUCIÓN** Encontramos el nivel de decibeles $B$ usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancele } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

## Logaritmos naturales

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis.*

De todas las posibles bases $a$ para logaritmos, resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número $e$, que definimos en la Sección 4.2.

**LOGARITMO NATURAL**

El logaritmo con base $e$ se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln:**

$$\ln x = \log_e x$$

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

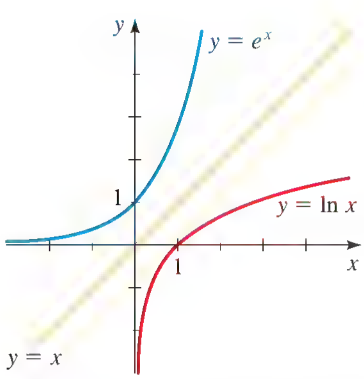



**FIGURA 9** Gráfica de la función de logaritmo natural

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

### PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

| Propiedad | Razón |
|---|---|
| **1.** $\ln 1 = 0$ | Debemos elevar $e$ a la potencia 0 para obtener 1. |
| **2.** $\ln e = 1$ | Debemos elevar $e$ a la potencia 1 para obtener $e$. |
| **3.** $\ln e^x = x$ | Debemos elevar $e$ a la potencia $x$ para obtener $e^x$. |
| **4.** $e^{\ln x} = x$ | $\ln x$ es la potencia a la que $e$ debe elevarse para obtener $x$. |

Las calculadoras están equipadas con una tecla [LN] que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

## EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

**(a)** $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

**(b)** $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{\ 2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

**(c)** $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla [LN] de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

**SOLUCIÓN** Igual que con cualquier función logarítmica, $\ln x$ está definida cuando $x > 0$. Entonces, el dominio de $f$ es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

## EJEMPLO 11 | Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función $y = x\ln(4 - x^2)$, y úsela para hallar las asíntotas y valores máximo y mínimo locales.

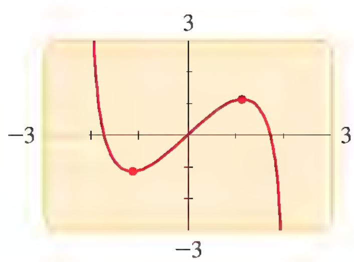



**FIGURA 10**
$y = x\ln(4 - x^2)$

**SOLUCIÓN** Como en el Ejemplo 10, el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, de modo que escogemos el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la Figura 10, y de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer acercamiento (zoom) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor, encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. Del mismo modo (o al observar que la función es impar), encontramos que el valor mínimo local es alrededor de $-1.13$ y se presenta cuando $x \approx -1.15$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

## 4.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** log $x$ es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para log $x$.

| $x$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{1/2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **log $x$** | | | | | | | | |

**2.** La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9)$ = ________, $f(1)$ = ________, $f(\frac{1}{9})$ = ________, y $f(3)$ = ________.

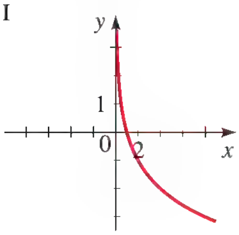
**3. (a)** $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

**(b)** $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

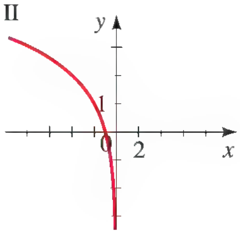
**4.** Relacione la función logarítmica con su gráfica.

**(a)** $f(x) = \log_2 x$ **(b)** $f(x) = \log_2(-x)$
**(c)** $f(x) = -\log_2 x$ **(d)** $f(x) = -\log_2(-x)$

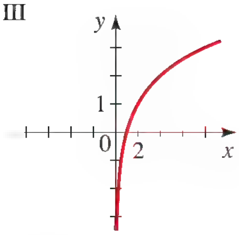
I



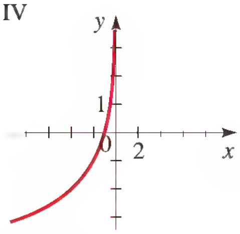

II




III




IV




### HABILIDADES

**5-6** ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

**5.**

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_8 8 = 1$ | |
| $\log_8 64 = 2$ | |
| | $8^{2/3} = 4$ |
| | $8^3 = 512$ |
| $\log_8(\frac{1}{8}) = -1$ | |
| | $8^{-2} = \frac{1}{64}$ |

**6.**

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| | $4^3 = 64$ |
| $\log_4 2 = \frac{1}{2}$ | |
| | $4^{3/2} = 8$ |
| $\log_4(\frac{1}{16}) = -2$ | |
| $\log_4(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ | |
| | $4^{-5/2} = \frac{1}{32}$ |

**7-12** ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

**7. (a)** $\log_5 25 = 2$ **(b)** $\log_5 1 = 0$

**8. (a)** $\log_{10} 0.1 = -1$ **(b)** $\log_8 512 = 3$

**9. (a)** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **(b)** $\log_2(\frac{1}{8}) = -3$

**10. (a)** $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

**11. (a)** $\ln 5 = x$ **(b)** $\ln y = 5$

**12. (a)** $\ln(x + 1) = 2$ **(b)** $\ln(x - 1) = 4$

**13-18** ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

**13. (a)** $5^3 = 125$ **(b)** $10^{-4} = 0.0001$

**14. (a)** $10^3 = 1000$ **(b)** $81^{1/2} = 9$

**15. (a)** $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

**16. (a)** $4^{-3/2} = 0.125$ **(b)** $7^3 = 343$

**17. (a)** $e^x = 2$ **(b)** $e^3 = y$

**18. (a)** $e^{x+1} = 0.5$ **(b)** $e^{0.5x} = t$

**19-28** ■ Evalúe la expresión.

**19. (a)** $\log_3 3$ **(b)** $\log_3 1$ **(c)** $\log_3 3^2$

**20. (a)** $\log_5 5^4$ **(b)** $\log_4 64$ **(c)** $\log_3 9$

**21. (a)** $\log_6 36$ **(b)** $\log_9 81$ **(c)** $\log_7 7^{10}$

**22. (a)** $\log_2 32$ **(b)** $\log_8 8^{17}$ **(c)** $\log_6 1$

**23. (a)** $\log_3(\frac{1}{27})$ **(b)** $\log_{10} \sqrt{10}$ **(c)** $\log_5 0.2$

**24. (a)** $\log_5 125$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_9 \sqrt{3}$

**25. (a)** $2^{\log_2 37}$ **(b)** $3^{\log_3 8}$ **(c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

**26. (a)** $e^{\ln \pi}$ **(b)** $10^{\log 5}$ **(c)** $10^{\log 87}$

**27. (a)** $\log_8 0.25$ **(b)** $\ln e^4$ **(c)** $\ln(1/e)$

**28. (a)** $\log_4 \sqrt{2}$ **(b)** $\log_4(\frac{1}{2})$ **(c)** $\log_4 8$

**29-36** ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar $x$.

**29. (a)** $\log_2 x = 5$ **(b)** $\log_2 16 = x$

**30. (a)** $\log_5 x = 4$ **(b)** $\log_{10} 0.1 = x$

**31. (a)** $\log_3 243 = x$ **(b)** $\log_3 x = 3$

**32. (a)** $\log_4 2 = x$ **(b)** $\log_4 x = 2$

**33. (a)** $\log_{10} x = 2$ **(b)** $\log_5 x = 2$

**34.** **(a)** $\log_x 1000 = 3$ **(b)** $\log_x 25 = 2$

**35.** **(a)** $\log_x 16 = 4$ **(b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

**36.** **(a)** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **(b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

**37-40** ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

**37.** **(a)** $\log 2$ **(b)** $\log 35.2$ **(c)** $\log(\frac{2}{3})$

**38.** **(a)** $\log 50$ **(b)** $\log \sqrt{2}$ **(c)** $\log(3\sqrt{2})$

**39.** **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln 25.3$ **(c)** $\ln(1 + \sqrt{3})$

**40.** **(a)** $\ln 27$ **(b)** $\ln 7.39$ **(c)** $\ln 54.6$

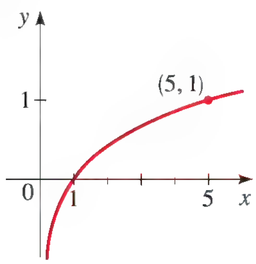
**41-44** ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

**41.** $f(x) = \log_3 x$ **42.** $g(x) = \log_4 x$

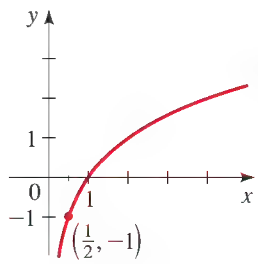
**43.** $f(x) = 2 \log x$ **44.** $g(x) = 1 + \log x$

**45-48** ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

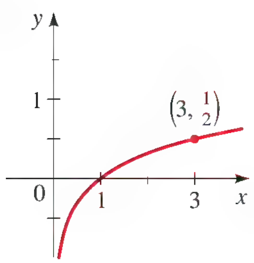
**45.**



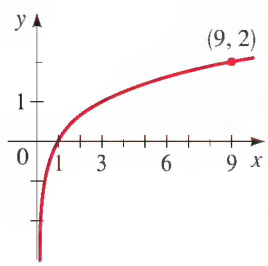

**46.**




**47.**



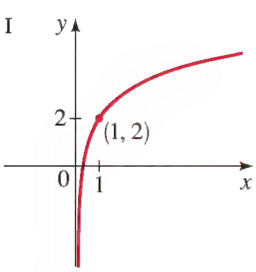

**48.**



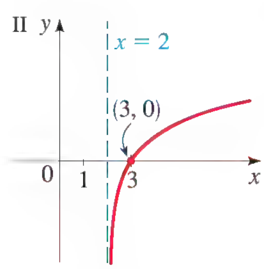

**49-50** ■ Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

**49.** $f(x) = 2 + \ln x$ **50.** $f(x) = \ln(x - 2)$

I




II




**51.** Trace la gráfica de $y = 4^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

**52.** Trace la gráfica de $y = 3^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

**53-62** ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

**53.** $f(x) = \log_2(x - 4)$ **54.** $f(x) = -\log_{10} x$

**55.** $g(x) = \log_5(-x)$ **56.** $g(x) = \ln(x + 2)$

**57.** $y = 2 + \log_3 x$ **58.** $y = \log_3(x - 1) - 2$

**59.** $y = 1 - \log_{10} x$ **60.** $y = 1 + \ln(-x)$

**61.** $y = |\ln x|$ **62.** $y = \ln |x|$

**63-68** ■ Encuentre el dominio de la función.

**63.** $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **64.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

**65.** $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **66.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

**67.** $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

**68.** $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

**69-74** ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

**69.** $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **70.** $y = \ln(x^2 - x)$

**71.** $y = x + \ln x$ **72.** $y = x(\ln x)^2$

**73.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **74.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

**75-78** ■ Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

**75.** $f(x) = 2^x$, $g(x) = x + 1$

**76.** $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2 + 1$

**77.** $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = x - 2$

**78.** $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2$

**79.** Compare las rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

**80.** **(a)** Trazando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

**(b)** Encuentre, aproximadas a dos lugares decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

**81-82** ■ Nos dan una familia de funciones. **(a)** Trace gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y $4$. **(b)** ¿Cómo están relacionadas las gráficas de la parte (a)?

**81.** $f(x) = \log(cx)$ **82.** $f(x) = c \log x$

**83-84** ■ Nos dan una función $f(x)$. **(a)** Encuentre el dominio de la función $f$. **(b)** Encuentre la función inversa de $f$.

**83.** $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$ **84.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

**85.** **(a)** Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

**(b)** ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

## APLICACIONES

**86. Absorción de luz** Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde $I_0$ es la intensidad de la luz incidente e $I$ es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad $I$ es 70% de $I_0$.

**87. Determinación de la edad por carbono** La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si $D_0$ es la cantidad original de carbono 14 y $D$ es la cantidad restante, entonces la edad $A$ del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad $D$ de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original $D_0$.

**88. Colonia de bacterias** Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo $t$ (en horas) necesario para que la colonia crezca a $N$ bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

**89. Inversión** El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés $r$ capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6%, 7% y 8%.

**90. Carga de una batería** La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima $C_0$. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga $C$ está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde $k$ es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima $C_0$?

**91. Dificultad de una tarea** La dificultad en "alcanzar un objetivo" (por ejemplo usar el ratón para hacer clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la Ley de Fitts, el índice de dificultad (ID) está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde $W$ es el ancho del objetivo y $A$ es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un icono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**92. Altura de la gráfica de una función logarítmica** Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

**(a)** Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de unas 265 millas.

**(b)** Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes que la altura de la curva llegue a 2 pies?

**93. El Googolplex** Un **googol** es $10^{100}$, y un **googolplex** es $10^{\text{googol}}$. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

**94. Comparación de logaritmos** ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

**95. Número de dígitos de un entero** Compare log 1000 con el número de dígitos de 1000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10,000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo $x$ es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función entero mayor definida en la Sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número $2^{100}$?

# 4.4 Leyes de logaritmos

Leyes de logaritmos ▶ Expansión y combinación de expresiones logarítmicas ▶ Fórmula para cambio de base

En esta sección estudiamos propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como veremos en la Sección 4.6.

## ▼ Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

### LEYES DE LOGARITMOS

Sea $a$ un número positivo, con $a \neq 1$. Sean $A$, $B$ y $C$ cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

| Ley | Descripción |
|---|---|
| **1.** $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$ | El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números. |
| **2.** $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$ | El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números. |
| **3.** $\log_a(A^C) = C\log_a A$ | El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número. |

**DEMOSTRACIÓN** Hacemos uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la Sección 4.3.

**Ley 1** Sean $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Por lo tanto,

$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$
$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

**Ley 2** Usando la Ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

Así

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

**Ley 3** Sean $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A$$

## EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

**(a)** $\log_4 2 + \log_4 32$

**(b)** $\log_2 80 - \log_2 5$

**(c)** $-\frac{1}{3}\log 8$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$    Ley 1

$= \log_4 64 = 3$    Porque $64 = 4^3$

**(b)** $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$    Ley 2

$= \log_2 16 = 4$    Porque $16 = 2^4$

**(c)** $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$    Ley 3

$= \log\left(\frac{1}{2}\right)$    Propiedad de exponentes negativos

$\approx -0.301$    Calculadora

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 9** Y **11**

## Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

**(a)** $\log_2(6x)$    **(b)** $\log_5(x^3y^6)$    **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$    Ley 1

**(b)** $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$    Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$    Ley 3

**(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$    Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$    Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$    Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19, 21** Y **33**

Las Leyes de Logaritmos también nos permiten invertir el proceso de expansión que se hizo en el Ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, está ilustrado en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

**SOLUCIÓN**

$3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{1/2}$    Ley 3

$= \log(x^3(x+1)^{1/2})$    Ley 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

### EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

**SOLUCIÓN**

$$
\begin{aligned}
3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 3}\\
&= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 && \text{Ley 1}\\
&= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) && \text{Ley 2}
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

---

**Advertencia** Aun cuando las Leyes de Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia.* Por ejemplo,

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Del mismo modo, no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \neq 3\log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano. Uno de éstos es la rapidez con la que olvidamos cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% en un examen) y no usa álgebra durante un tiempo, ¿cuánto retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el ejemplo siguiente.

## EJEMPLO 5 | La ley de olvido

Si una tarea se aprende a cierto nivel $P_0$, después de cierto tiempo $t$ el nivel de recordatorio $P$ satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c\log(t+1)$$

donde $c$ es una constante que depende del tipo de tarea y $t$ se mide en meses.

**(a)** Despeje $P$.

**(b)** Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero combinamos el lado derecho.

$$
\begin{aligned}
\log P &= \log P_0 - c\log(t+1) && \text{Ecuación dada}\\
\log P &= \log P_0 - \log(t+1)^c && \text{Ley 3}\\
\log P &= \log\frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Ley 2}\\
P &= \frac{P_0}{(t+1)^c} && \text{Porque log es biunívoco}
\end{aligned}
$$

**(b)** Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$ y $t$ se mide en meses.

En dos meses: $t = 2$ y $P = \dfrac{90}{(2+1)^{0.2}} \approx 72$

En un año: $t = 12$ y $P = \dfrac{90}{(12+1)^{0.2}} \approx 54$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

## ▼ Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan $\log_a x$ y deseamos hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base $a$, de cada lado.

$$b^y = x \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$\log_a(b^y) = \log_a x \qquad \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado}$$

$$y \log_a b = \log_a x \qquad \text{Ley 3}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \text{Divida entre } \log_a b$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la Fórmula para Cambio para Base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Entonces $\log_a x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\frac{1}{\log_a b}$.

**FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE**

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos $x = a$, entonces $\log_a a$, y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier* base con el uso de la Fórmula para Cambio de Base, para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar calculadora.

### EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

**(a)** $\log_8 5$ **(b)** $\log_9 20$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

**(b)** Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

### EJEMPLO 7 | Usar la Fórmula para Cambio de Base para graficar una función logarítmica

Use calculadora graficadora para graficar $f(x) = \log_6 x$.

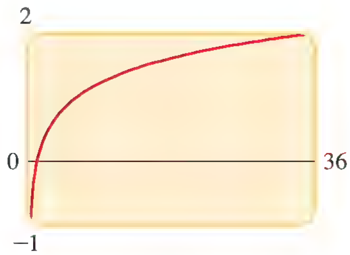



**FIGURA 1** $f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

**SOLUCIÓN** Las calculadoras no tienen tecla para $\log_6$, de modo que usamos la Fórmula para Cambio de Base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Como las calculadoras tienen una tecla LN, podemos ingresar esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63** ■

## 4.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$___+____.
2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(\frac{25}{125}) =$ ________ − _________.
3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia _____ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$_______.
4. **(a)** Podemos expandir $\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$ para obtener _______.
   **(b)** Podemos combinar $2 \log x + \log y - \log z$ para obtener _______.
5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base ____ y base ___. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula _____. Para Hallar $\log_7 12$, escribimos

$$\log_7 12 = \frac{\log \square}{\log \square} = ________$$

6. *¿Verdadero o falso?* Obtenemos la misma respuesta si hacemos el cálculo del Ejercicio 5 usando ln en lugar de log.

### HABILIDADES

**7-18** ■ Evalúe la expresión.

7. $\log_3 \sqrt{27}$
8. $\log_2 160 - \log_2 5$
9. $\log 4 + \log 25$
10. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$
11. $\log_4 192 - \log_4 3$
12. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$
13. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
14. $\log_3 100 \quad \log_3 18 - \log_3 50$
15. $\log_4 16^{100}$
16. $\log_2 8^{33}$
17. $\log(\log 10^{10,000})$
18. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

**19-44** ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19. $\log_2(2x)$
20. $\log_3(5y)$
21. $\log_2(x(x-1))$
22. $\log_5 \dfrac{x}{2}$
23. $\log 6^{10}$
24. $\ln \sqrt{z}$
25. $\log_2(AB^2)$
26. $\log_6 \sqrt[4]{17}$
27. $\log_3(x\sqrt{y})$
28. $\log_2(xy)^{10}$
29. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$
30. $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$
31. $\ln \sqrt{ab}$
32. $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$
33. $\log\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$
34. $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$
35. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
36. $\log_5 \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
37. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$
38. $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$
39. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$
40. $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$
41. $\log \sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$
42. $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$
43. $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$
44. $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

**45-54** ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45. $\log_3 5 + 5 \log_3 2$
46. $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$
47. $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$
48. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$
49. $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2+1) + 2 \log(x-1)$
50. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2 \ln c$
51. $\ln 5 + 2 \ln x + 3 \ln(x^2+5)$
52. $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

**53.** $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

**54.** $\log_a b + c \log_a d - r \log_a s$

**55-62** ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

**55.** $\log_2 5$ **56.** $\log_5 2$

**57.** $\log_3 16$ **58.** $\log_6 92$

**59.** $\log_7 2.61$ **60.** $\log_6 532$

**61.** $\log_4 125$ **62.** $\log_{12} 2.5$

**63.** Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

A continuación use este dato para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

**64.** Trace gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2$, $e$, 5 y 10 en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

**65.** Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

**66.** Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

**67.** Demuestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

## APLICACIONES

**68. Olvido** Use la Ley de Olvido (Ejemplo 5) para estimar la calificación de un estudiante, en un examen de biología, dos años después que obtuvo una calificación de 80 en un examen sobre el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y $t$ se mide en meses.

**69. Distribución de riqueza** Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **Principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k \log W$$

donde $W$ es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y $P$ es el número de personas de la población que tiene ese dinero.

**(a)** De esa ecuación, despeje $P$.

**(b)** Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$, y $W$ se mide en millones de dólares. Use la parte (a) para hallar el número de personas que tienen \$2 millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen \$10 millones de dólares o más?

**70. Diversidad** Algunos biólogos modelan el número de especies $S$ en un área fija $A$ (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde $c$ y $k$ son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

**(a)** De la ecuación, despeje $S$.

**(b)** Use la parte (a) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.

**71. Magnitud de estrellas** La magnitud $M$ de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde $B$ es el brillo real de la estrella y $B_0$ es una constante.

**(a)** Expanda el lado derecho de la ecuación.

**(b)** Use la parte (a) para demostrar que cuanto más brillante sea una estrella, menor es su magnitud.

**(c)** Betelgeuse es unas 100 veces más brillante que Albiero. Use la parte (a) para demostrar que Betelgeuse es 5 magnitudes menos brillante que Albiero.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**72. ¿Verdadero o falso?** Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

**(a)** $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

**(b)** $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

**(c)** $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

**(d)** $\log 2^z = z \log 2$

**(e)** $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

**(f)** $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

**(g)** $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

**(h)** $\log_a a^a = a$

**(i)** $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

**(j)** $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

**73. Encuentre el error** ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

**74. Desplazamiento, contracción y alargamiento de gráficas de funciones** Sea $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique la forma en que esto demuestra que la contracción de la gráfica de $f$, horizontalmente, tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. A continuación use las identidades $e^{2+x} = e^2e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$ un desplazamiento horizontal es igual que un alargamiento vertical y para $h(x) = \ln x$ una contracción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

# 4.5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuaciones exponenciales ▶ Ecuaciones logarítmicas ▶ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

## ▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable $x$ presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar $x$" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que $\log_a A^c = C \log_a A$.

El método que usamos para resolver $2^x = 7$ es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

### GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

### EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

**SOLUCIÓN** Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

| | |
|---|---|
| $3^{x+2} = 7$ | Ecuación dada |
| $\log(3^{x+2}) = \log 7$ | Tome log de cada lado |
| $(x + 2)\log 3 = \log 7$ | Ley 3 (bajar exponente) |
| $x + 2 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$ | Divida entre log 3 |
| $x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$ | Reste 2 |
| $\approx -0.228756$ | Calculadora |

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(\ 0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

## EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

**SOLUCION** Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

| | |
|---|---|
| $8e^{2x} = 20$ | Ecuación dada |
| $e^{2x} = \frac{20}{8}$ | Divida entre 8 |
| $\ln e^{2x} = \ln 2.5$ | Tome ln de cada lado |
| $2x = \ln 2.5$ | Propiedad de ln |
| $x = \dfrac{\ln 2.5}{2}$ | Divida entre 2 |
| $\approx 0.458$ | Calculadora |

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de manera algebraica y gráfica.

**SOLUCIÓN 1:** Algebraica

Como la base del término exponencial es $e$, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

| | |
|---|---|
| $e^{3\ \ 2x} = 4$ | Ecuación dada |
| $\ln(e^{3\ \ 2x}) = \ln 4$ | Tome ln de cada lado |
| $3 - 2x = \ln 4$ | Propiedad de ln |
| $2x = -3 + \ln 4$ | Reste 3 |
| $x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807$ | Multiplique por $-\frac{1}{2}$ |

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

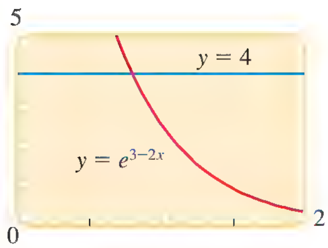



**FIGURA 1**

**SOLUCIÓN 2:** Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que $x \approx 0.81$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

## EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

**SOLUCIÓN** Para aislar el término exponencial, factorizamos.

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de Exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice (un cuadrático en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda $x$. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29** ■

## EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

**SOLUCIÓN** Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0)$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33** ■

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✔

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✔

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 ($^{14}C$), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre $^{14}C$ y $^{12}C$ no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar $^{14}C$ y la cantidad de $^{14}C$ en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de $^{14}C$ que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace $t$ años contiene 73% del $^{14}C$ que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

## ▼ Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar $x$, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

### GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

### EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje $x$.

**(a)** $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

**SOLUCIÓN**

**(a)**

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

**(b)** El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 \quad x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **41**

## EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

**SOLUCIÓN** Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$\begin{aligned} 4 + 3\log(2x) &= 16 && \text{Ecuación dada} \\ 3\log(2x) &= 12 && \text{Reste 4} \\ \log(2x) &= 4 && \text{Divida entre 3} \\ 2x &= 10^4 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x &= 5000 && \text{Divida entre 2} \end{aligned}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

Si $x = 5000$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

## EJEMPLO 8 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

**SOLUCIÓN 1:** Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$\begin{aligned} \log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Ley 1} \\ (x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\ x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Expanda lado izquierdo} \\ x^2 + x - 12 &= 0 && \text{Reste 10} \\ (x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 3 \end{aligned}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = -4$:

$$\begin{aligned} &\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1) \\ &\quad = \log(-2) + \log(-5) \\ &\quad\quad \text{no definido} \quad ✘ \end{aligned}$$

$x = 3$:

$$\begin{aligned} &\log(3 + 2) + \log(3 - 1) \\ &\quad = \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2) \\ &\quad = \log 10 = 1 \quad ✔ \end{aligned}$$

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas.*)

**SOLUCIÓN 2:** Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección $x$ de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

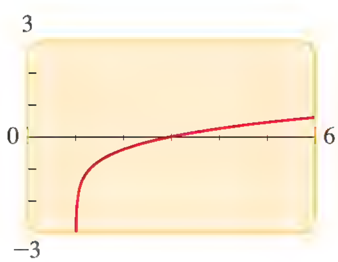



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

En el Ejemplo 9 no es posible aislar $x$ algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

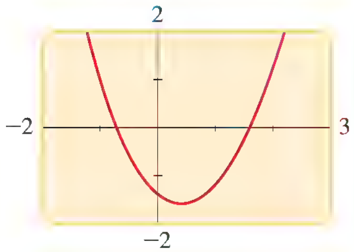



**FIGURA 3**

## EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2\ln(x+2)$.

**SOLUCIÓN** Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2\ln(x+2) = 0$$

Entonces graficamos

$$y = x^2 - 2\ln(x+2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección $x$ de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección $x$, vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.

La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

## EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si $I_0$ e $I$ denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y $x$ es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde $k$ es una constante que depende del tipo de material.

**(a)** Despeje $I$ de la ecuación

**(b)** Para cierto lago, $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero aislamos el término logarítmico.

| | |
|---|---|
| $-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$ | Ecuación dada |
| $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx$ | Multiplique por $-k$ |
| $\frac{I}{I_0} = e^{kx}$ | Forma exponencial |
| $I = I_0 e^{kx}$ | Multiplique por $I_0$ |

**(b)** Encontramos $I$ usando la fórmula de la parte (a).

| | |
|---|---|
| $I = I_0 e^{-kx}$ | De la parte (a) |
| $= 14e^{(-0.025)(20)}$ | $I_0 = 14$, $k = 0.025$, $x = 20$ |
| $\approx 8.49$ | Calculadora |

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

## Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal $P$ se invierte a una tasa de interés $r$ durante un tiempo de $t$ años, entonces la cantidad $A$ de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

### EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

**(a)** Semestralmente **(b)** Continuamente

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$, $r = 0.05$ y $n = 2$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$.

$$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10{,}000 \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A$$

$$(1.025)^{2t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\log 1.025^{2t} = \log 2 \qquad \text{Tome log de cada lado}$$

$$2t \log 1.025 = \log 2 \qquad \text{Ley 3 (baje el exponente)}$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.025} \qquad \text{Divida entre 2 log 1.025}$$

$$t \approx 14.04 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

**(b)** Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$.

$$5000e^{0.05t} = 10{,}000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.05t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\ln e^{0.05t} = \ln 2 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$0.05t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05} \qquad \text{Divida entre 0.05}$$

$$t \approx 13.86 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

### EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

**SOLUCIÓN** Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja $t$.

$$\begin{aligned} 1000e^{0.04t} &= 4000 && Pe^{rt} = A \\ e^{0.04t} &= 4 && \text{Divida entre 1000} \\ 0.04t &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln 4}{0.04} && \text{Divida entre 0.04} \\ t &\approx 34.66 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La cantidad será \$4000 en 34 años y 8 meses.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

## 4.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.
   (a) Primero, aislamos $e^x$ para obtener la ecuación equivalente___.
   (b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.
   (c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.
2. Resolvamos la ecuación logarítmica
   $\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.
   (a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.
   (b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.
   (c) Ahora encontramos $x =$ _______.

### HABILIDADES

**3-28** ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$
4. $10^{-x} = 4$
5. $e^{-2x} = 7$
6. $e^{3x} = 12$
7. $2^{1-x} = 3$
8. $3^{2x-1} = 5$
9. $3e^x = 10$
10. $2e^{12x} = 17$
11. $e^{1-4x} = 2$
12. $4(1 + 10^{5x}) = 9$
13. $4 + 3^{5x} = 8$
14. $2^{3x} = 34$
15. $8^{0.4x} = 5$
16. $3^{x/14} = 0.1$
17. $5^{-x/100} = 2$
18. $e^{3-5x} = 16$
19. $e^{2x+1} = 200$
20. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$
21. $5^x = 4^{x+1}$
22. $10^{1-x} = 6^x$
23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$
24. $7^{x/2} = 5^{1-x}$
25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$
26. $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$
27. $100(1.04)^{2t} = 300$
28. $(1.00625)^{12t} = 2$

**29-36** ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
30. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$
32. $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$
33. $x^2 2^x - 2^x = 0$
34. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$
35. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$
36. $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

**37-54** ■ De la ecuación logarítmica despeje $x$.

37. $\ln x = 10$
38. $\ln(2 + x) = 1$
39. $\log x = -2$
40. $\log(x - 4) = 3$
41. $\log(3x + 5) = 2$
42. $\log_3(2 - x) = 3$
43. $4 - \log(3 - x) = 3$
44. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$
45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$
46. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$
47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$
48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$
49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$
50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$
51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$
52. $\log x + \log(x - 3) = 1$
53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$
54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$
55. ¿Para qué valor de $x$ es verdadero lo siguiente?
    $$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$
56. ¿Para qué valor de $x$ es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?
57. Despeje $x$: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$
58. Despeje $x$: $\log_2(\log_3 x) = 4$

**59-66** ■ Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

**59.** $\ln x = 3 - x$

**60.** $\log x = x^2 - 2$

**61.** $x^3 - x = \log(x + 1)$

**62.** $x = \ln(4 - x^2)$

**63.** $e^x = -x$

**64.** $2^{-x} = x - 1$

**65.** $4^{\ x} = \sqrt{x}$

**66.** $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

**67-70** ■ Resuelva la desigualdad.

**67.** $\log(x - 2) + \log(9 \quad x) < 1$

**68.** $3 \le \log_2 x \le 4$

**69.** $2 < 10^x < 5$

**70.** $x^2e^x \quad 2e^x < 0$

**71-74** ■ Encuentre la función inversa de $f$.

**71.** $f(x) = 2^{2x}$

**72.** $f(x) = 3^{x+1}$

**73.** $f(x) = \log_2(x - 1)$

**74.** $f(x) = \log 3x$

## APLICACIONES

**75. Interés compuesto** Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
**(a)** Encuentre la cantidad después de 3 años.
**(b)** ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

**76. Interés compuesto** Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
**(a)** ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
**(b)** ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?

**77. Interés compuesto** Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

**78. Interés compuesto** Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de \$5000?

**79. Duplicar una inversión** ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

**80. Tasa de interés** Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

**81. Desintegración radiactiva** Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de $t$ días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

**82. Paracaidismo** La velocidad de un paracaidista $t$ segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

**83. Población de peces** En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{\ 0.8t}}$$

donde $P$ es el número de peces en miles y $t$ se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
**(a)** Encuentre la población de peces después de 3 años.
**(b)** ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

**84. Transparencia de un lago** Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad $x$ está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde $I$ se mide en lumen y $x$ en pies.
**(a)** Encuentre la intensidad $I$ a una profundidad de 30 pies.
**(b)** ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

**85. Presión atmosférica** La presión atmosférica $P$ (en kilopascals, kPa) a una altitud $h$ (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

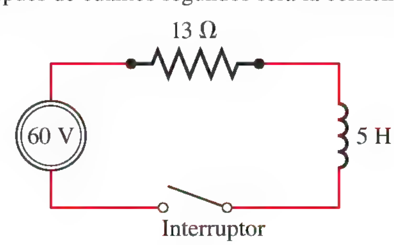
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
**(a)** De la ecuación, despeje $P$.
**(b)** Use la parte (a) para hallar la presión $P$ a una altitud de 4 km.

**86. Enfriamiento de un motor** Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura $T$ del motor $t$ minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

**(a)** De la ecuación, despeje $T$.
**(b)** Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos ($t = 20$).

**87. Circuitos eléctricos** Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) $t$ segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{\ 13t/5})$.
**(a)** Use la ecuación para expresar el tiempo $t$ como función de la corriente $I$.
**(b)** ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



**88. Curva de aprendizaje** Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo $t$ de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo $M$, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde $k$ y $C$ son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

**(a)** Exprese el tiempo de aprendizaje $t$ como función del nivel de rendimiento $P$.

**(b)** Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de $t$ meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

**(c)** Trace una gráfica de la curva de aprendizaje de la parte (b).

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**89. Estimar una solución** Sin resolver realmente la ecuación, encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

**90. Una ecuación sorprendente** Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de $k$ tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k?$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

**91. Ecuaciones disfrazadas** Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

**(a)** $(x-1)^{\log(x-1)} = 100(x-1)$ [Tome log de cada lado.]

**(b)** $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie todos los log a base 2.]

**(c)** $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como cuadrática en $2^x$.]

# 4.6 MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación) ▶ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa) ▶ Desintegración radiactiva ▶ Ley de Newton de Enfriamiento ▶ Escalas logarítmicas

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos, se pueden modelar usando funciones exponenciales. Se usan funciones logarítmicas en modelos para la intensidad de sonidos, la intensidad de terremotos y otros numerosos fenómenos. En esta sección estudiamos modelos exponenciales y logarítmicos.

## ▼ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Supóngase que empezamos con una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos $2^2$ o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos $2^3$ o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea Figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de $t$ horas, por medio de $f(t) = 2^t$.

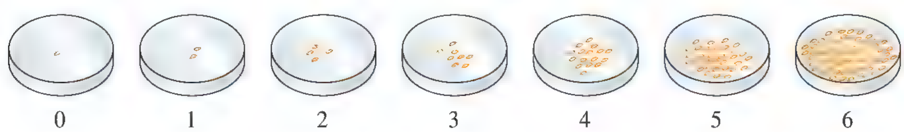



**FIGURA 1** Población de bacterias

Si empezamos con 10 de estas bacterias, entonces la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^t$. Una especie de bacteria, de crecimiento más lento, se duplica cada 3 horas; en este caso la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^{t/3}$. En general, tenemos lo siguiente.

**CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TIEMPO DE DUPLICACIÓN)**

Si el tamaño inicial de una población es $n_0$ y el tiempo de duplicación es $a$, entonces el tamaño de la población en el tiempo $t$ es

$$n(t) = n_0 2^{t/a}$$

donde $a$ y $t$ se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

## EJEMPLO 1 | Población de bacterias

Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.

**(a)** Encuentre un modelo para la población de bacterias después de $t$ horas.

**(b)** ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?

**(c)** ¿Cuándo llegará a 100,000 el número de bacterias?

**SOLUCIÓN**

**(a)** La población en el tiempo $t$ está modelada por

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

donde $t$ se mide en horas.

**(b)** Después de 15 horas el número de bacterias es

$$n(15) = 1000 \cdot 2^{15/3} = 32,000$$

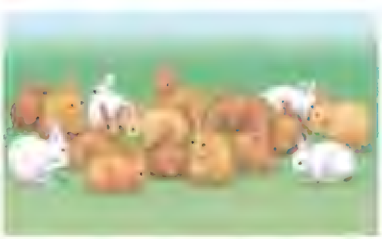
**(c)** Hacemos $n(t) = 100,000$ en el modelo que encontramos en la parte (a) y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$.

$$\begin{aligned} 100,000 &= 1000 \cdot 2^{t/3} && n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3} \\ 100 &= 2^{t/3} && \text{Divida entre 1000} \\ \log 100 &= \log 2^{t/3} && \text{Tome log de cada lado} \\ 2 &= \frac{t}{3} \log 2 && \text{Propiedades de log} \\ t &= \frac{6}{\log 2} \approx 19.93 && \text{Despeje } t \end{aligned}$$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

El nivel de bacterias llega a 100,000 en unas 20 horas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 1



## EJEMPLO 2 | Población de conejos

Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100 y se duplica cada 3 meses.

**(a)** ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

**(b)** Estime la población a un año después que los conejos fueron introducidos en la isla.

**(c)** Trace una gráfica de la población de conejos.

**SOLUCIÓN**

**(a)** El tiempo de duplicación es $a = 3$, de modo que la población en el tiempo $t$ es

$$n(t) = n_0 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

donde $n_0$ es la población inicial. Como la población es 4100 cuando $t$ es 8 meses, tenemos

$$\begin{aligned} n(8) &= n_0 2^{8/3} && \text{Del modelo} \\ 4100 &= n_0 2^{8/3} && \text{Porque } n(8) = 4100 \\ n_0 &= \frac{4100}{2^{8/3}} && \text{Divida entre } 2^{8/3} \text{ e intercambie lados} \\ n_0 &\approx 645 && \text{Calcule} \end{aligned}$$

Entonces estimamos que 645 conejos fueron introducidos en la isla.

**(b)** De la parte (a) sabemos que la población inicial es $n_0 = 645$, de modo que podemos modelar la población después de $t$ meses por medio de

$$n(t) = 645 \cdot 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

Después de un año $t = 12$, y entonces

$$n(12) = 645 \cdot 2^{12/3} \approx 10{,}320$$

Por lo tanto, después de un año, habría unos 10,000 conejos.

**(c)** Primero observamos que el dominio es $t \geq 0$. La gráfica se muestra en la Figura 2.

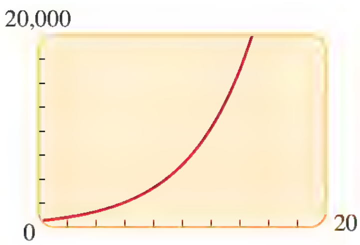



**FIGURA 2** $n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa)

Hemos utilizado una función exponencial con base 2 para modelar el crecimiento poblacional (en términos del tiempo de duplicación). También modelaríamos la misma población con una función exponencial con base 3 (en términos del tiempo de triplicación). De hecho, podemos hallar un modelo exponencial con cualquier base. Si usamos la base $e$, obtenemos el siguiente modelo de una población en términos de la **tasa de crecimiento relativa** $r$: la tasa de crecimiento poblacional expresada como una proporción de la población en cualquier momento. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier tiempo $t$ la tasa de crecimiento es 2% de la población en el tiempo $t$.

### CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde $n(t) =$ población en el tiempo $t$

$n_0 =$ tamaño inicial de la población

$r =$ tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)

$t =$ tiempo

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para interés capitalizado continuamente. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por período es proporcional al tamaño de la

población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1,000,000 aumentará más en un año que una población de 1000; en exactamente la misma forma, una inversión de \$1,000,000 aumentará más en un año que una inversión de \$1000.

En los siguientes ejemplos suponemos que las poblaciones crecen exponencialmente.

## EJEMPLO 3 | Predicción del tamaño de una población

La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

**(a)** Encuentre una función que modele el número de bacterias después de $t$ horas.

**(b)** ¿Cuál es la cantidad estimada después de 10 horas?

**(c)** ¿Cuándo llegará a 80,000 la cantidad de bacterias?

**(d)** Trace la gráfica de la función $n(t)$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Usamos el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde $t$ se mide en horas.

**(b)** Usando la función de la parte (a), encontramos que la cantidad de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27,300$$

**(c)** Hacemos $n(t) = 80,000$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$:

$$80,000 = 500 \cdot e^{0.4t} \qquad n(t) = 500 \cdot e^{0.4t}$$

$$160 = e^{0.4t} \qquad \text{Divida entre 500}$$

$$\ln 160 = 0.4t \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 160}{0.4} \approx 12.68 \qquad \text{Despeje } t$$

El nivel de bacterias llega a 80,000 en unas 12.7 horas.

**(d)** La gráfica se muestra en la Figura 3.

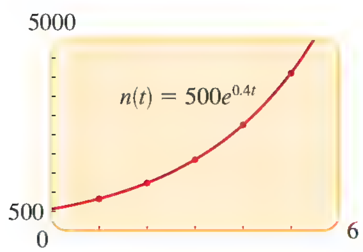



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

El crecimiento relativo de la población mundial ha estado bajando en las últimas décadas, de 2% en 1995 a 1.3% en 2006.

**Únicamente de pie**

La población mundial era aproximadamente de 6100 millones en 2000 y estaba creciendo 1.4% al año. Suponiendo que cada persona ocupe un promedio de 4 pies$^2$ de la superficie terrestre, el modelo exponencial para crecimiento poblacional proyecta que para el año 2801 habrá espacio únicamente para estar de pie. (El área total de superficie terrestre del mundo es alrededor de $1.8 \times 10^{15}$ pies$^2$.)

## EJEMPLO 4 | Comparación de diferentes tasas de crecimiento poblacional

En el año 2000 la población mundial era de 6100 millones, y la tasa de crecimiento relativa era de 1.4% por año. Se dice que una tasa del 1.0% haría una diferencia importante en la población total en sólo unas pocas décadas. Pruebe esta frase estimando la población mundial del año 2050 usando una tasa de crecimiento relativa de (a) 1.4% al año y (b) 1.0% al año.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento relativas en el mismo rectángulo de observación.

### SOLUCIÓN

**(a)** Con el modelo de crecimiento exponencial tenemos

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y $t$ se mide en años desde 2000. Como el año 2050 es 50 años después del 2000, encontramos que

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es 12,300 millones.

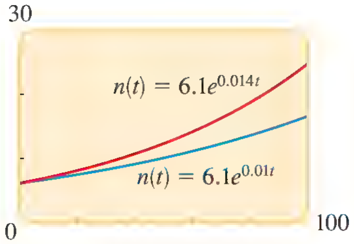



**FIGURA 4**

**(b)** Usamos la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y encontramos

$$n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$$

La población estimada en el año 2050 es alrededor de 10,100 millones.

Las gráficas de la Figura 4 muestran que un pequeño cambio en la tasa de crecimiento relativa hará, con el tiempo, una gran diferencia en el tamaño de la población.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

## EJEMPLO 5 | Expresar el modelo en términos de *e*

Un cultivo se inicia con 10,000 bacterias, y el número se duplica a cada 40 minutos.

**(a)** Encuentre una función $n(t) = n_0 2^{t/a}$ que modele el número de bacterias después de $t$ minutos.

**(b)** Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele el número de bacterias después de $t$ minutos.

**(c)** Trace una gráfica del número de bacterias en el tiempo $t$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. El tiempo de duplicación es $a = 40$ min $= 2/3$ h. Como $1/a = 3/2 = 1.5$, el modelo es

$$n(t) = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$$

**(b)** La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. Necesitamos hallar la tasa de crecimiento relativa $r$. Como hay 20,000 bacterias cuando $t = 2/3$ h, tenemos

| | |
|---|---|
| $20{,}000 = 10{,}000e^{r(2/3)}$ | $n(t) = 10{,}000e^{rt}$ |
| $2 = e^{r(2/3)}$ | Divida entre 10,000 |
| $\ln 2 = \ln e^{r(2/3)}$ | Tome ln de cada lado |
| $\ln 2 = r(2/3)$ | Propiedad de ln |
| $r = \dfrac{3 \ln 2}{2} \approx 1.0397$ | Despeje $r$ |

Ahora que sabemos la tasa de crecimiento relativa $r$, podemos hallar el modelo:

$$n(t) = 10{,}000e^{1.0397t}$$

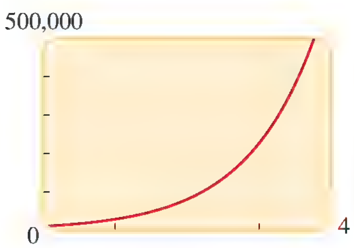



**FIGURA 5** Gráficas de $y = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$ y $y = 10{,}000e^{1.0397t}$

**(c)** Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional excepto que la masa *decrece*. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**. Por ejemplo, la vida media del radio 226 es 1600 años, de modo que una muestra de 100 g se desintegra a 50 g (o $\frac{1}{2} \times 100$ g) en 1600 años, entonces 25 g (o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100$ g) en 3200 años, y así sucesivamente. En general, para una

Las vidas medias de **elementos radiactivos varían** de muy largas a muy cortas. A continuación veamos unos ejemplos.

| Elemento | Vida media |
|---|---|
| Torio-23 | 14.5 mil millones de años |
| Uranio-235 | 4.5 mil millones de años |
| Torio-230 | 80,000 años |
| Plutonio-239 | 24,360 años |
| Carbono-1 | 5,730 años |
| Radio-226 | 1,600 años |
| Cesio-137 | 30 años |
| Estroncio -90 | 28 años |
| Polonio-210 | 140 días |
| Torio-234 | 25 días |
| Yodo-135 | 8 días |
| Radón-222 | 3.8 días |
| Plomo-211 | 3.6 minutos |
| Criptón-91 | 10 segundos |

sustancia radiactiva con masa $m_0$ y vida media $h$, la cantidad restante en el tiempo $t$ está modelada por

$$m(t) = m_0 2^{\ t/h}$$

donde $h$ y $t$ se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Para expresar este modelo en la forma $m(t) = m_0 e^{rt}$, necesitamos hallar la tasa relativa de desintegración $r$. Como $h$ es la vida media, tenemos

$$m(t) = m_0 e^{-rt} \qquad \text{Modelo}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-rh} \qquad h \text{ es la vida media}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-rh} \qquad \text{Divida entre } m_0$$

$$\ln\frac{1}{2} = -rh \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \text{Despeje } r$$

Esta última ecuación nos permite hallar la tasa $r$ a partir de la vida media $h$.

**MODELO DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA**

Si $m_0$ es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media $h$, entonces la masa restante en el tiempo $t$ está modelada por la función

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

## EJEMPLO 6 | Desintegración radiactiva

El polonio 210 ($^{210}$Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

**(a)** Encuentre una función $m(t)= m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de $t$ días.

**(b)** Encuentre una función $m(t)= m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de $t$ días.

**(c)** Encuentre la masa restante después de un año.

**(d)** ¿Cuánto tiempo tomará la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

**(e)** Trace una gráfica de la masa de la muestra como función del tiempo.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Tenemos $m_0 = 300$ y $h = 140$, de modo que la cantidad restante después de $t$ días es

$$m(t) = 300 \cdot 2^{\ t/140}$$

**(b)** Tenemos $m_0 = 300$ y $r = \ln 2/140 \approx -0.00495$, de modo que la cantidad restante después de $t$ días es

$$m(t) = 300 \cdot e^{\ 0.00495t}$$

En las partes (c) y (d) también podemos usar el modelo encontrado en la parte (a). Compruebe que el resultado sea el mismo usando cualquiera de estos dos modelos.

**(c)** Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 365$ (un año)

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Entonces, aproximadamente 49 mg de $^{210}$Po quedarán después de un año.

**(d)** Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $m(t) = 200$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$.

$$\begin{aligned}
300e^{0.00495t} &= 200 && m(t) = m_0e^{rt} \\
e^{0.00495t} &= \tfrac{2}{3} && \text{Divida entre 300} \\
\ln e^{-0.00495t} &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Tome ln de cada lado} \\
-0.00495t &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Propiedad de ln} \\
t &= -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} && \text{Despeje } t \\
t &\approx 81.9 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El tiempo necesario para que la muestra se desintegre a 200 mg es de unos 82 días.

**(e)** Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea Figura 6.

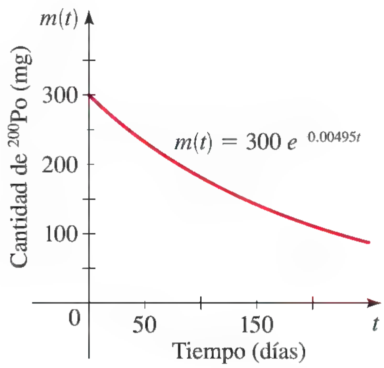



**FIGURA 6**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## Ley de Newton de Enfriamiento

La Ley de Newton de Enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo, el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

### LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO

Si $D_0$ es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno, y si su entorno tiene temperatura $T_s$, entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo $t$ está modelada por la función

$$T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$$

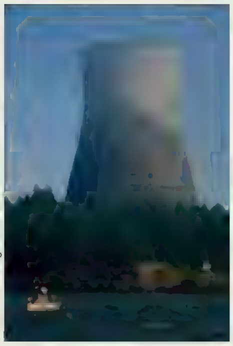
donde $k$ es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

## EJEMPLO 7 | Ley de Newton de Enfriamiento

Una taza de café tiene una temperatura de 200°F y se coloca en un cuarto que tiene una temperatura de 70°F. Después de 10 minutos, la temperatura del café es 150°F.

**(a)** Encuentre una función que modele la temperatura del café en el tiempo $t$.

**(b)** Encuentre la temperatura del café después de 15 minutos.



© Joel W. Rogers/CORBIS

**Desechos radiactivos**

Se producen peligrosos isótopos radiactivos siempre que ocurre una reacción nuclear, ya sea como resultado de una prueba de una bomba atómica, un accidente nuclear como el de Chernobyl en 1986, o la producción sin incidentes de electricidad en una planta generadora nuclear.

Un material que se produce en bombas atómicas es el isótopo estroncio 90 ($^{90}$Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como el calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros tipos de cáncer. No obstante, en las décadas transcurridas desde que dejaron de realizarse pruebas atmosféricas de armas nucleares, los niveles del $^{90}$S en el ambiente han bajado a un nivel que ya no plantea una amenaza para la salud.

Las plantas nucleares para generación de energía eléctrica producen plutonio radiactivo 239 ($^{239}$Pu), que tiene una vida media de 24,360 años. Debido a su larga vida media, el $^{239}$Pu podría representar una amenaza para el ambiente durante miles de años, por lo cual debe tenerse gran cuidado para eliminarlo en forma apropiada. La dificultad de garantizar la seguridad del desecho radiactivo eliminado es una razón por la que las plantas nucleares para generación de electricidad siguen siendo controvertidas.

**(c)** ¿Cuándo se habrá enfriado el café a 100ºF?

**(d)** Haga una gráfica de la función de temperatura.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La temperatura del cuarto es $T_s = 70$ºF, y la diferencia inicial de temperatura es

$$D_0 = 200 - 70 = 130\text{ºF}$$

Entonces, por la Ley de Newton de Enfriamiento, la temperatura después de $t$ minutos está modelada con la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Necesitamos hallar la constante $k$ asociada con esta taza de café. Para hacer esto, usamos el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura $T(10) = 150$. Por lo tanto, tenemos

| | |
|---|---|
| $70 + 130e^{10k} = 150$ | $T_s + D_0e^{kt} = T(t)$ |
| $130e^{10k} = 80$ | Reste 70 |
| $e^{10k} = \frac{8}{13}$ | Divida entre 130 |
| $-10k = \ln \frac{8}{13}$ | Tome ln de cada lado |
| $k = -\frac{1}{10} \ln \frac{8}{13}$ | Despeje $k$ |
| $k \approx 0.04855$ | Calculadora |

Sustituyendo este valor de $k$ en la expresión para $T(t)$, obtenemos

$$T(t) = 70 + 130e^{0.04855t}$$

**(b)** Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{0.04855(15)} \approx 133°\text{F}$$

**(c)** Usamos la función que hallamos en la parte (a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos $t$.

| | |
|---|---|
| $70 + 130e^{-0.04855t} = 100$ | $T_s + D_0e^{-kt} = T(t)$ |
| $130e^{-0.04855t} = 30$ | Reste 70 |
| $e^{-0.04855t} = \frac{3}{13}$ | Divida entre 130 |
| $-0.04855t = \ln \frac{3}{13}$ | Tome ln de cada lado |
| $t = \dfrac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855}$ | Despeje $t$ |
| $t \approx 30.2$ | Calculadora |

El café se habrá enfriado a 100ºF después de media hora.

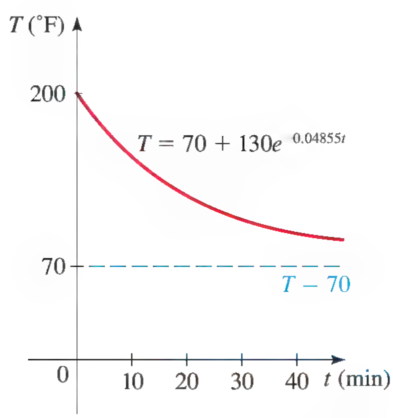



**FIGURA 7** Temperatura del café después de 7 minutos

**(d)** La gráfica de la función de temperatura aparece en la Figura 7. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## Escalas logarítmicas

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. Estudiamos tres de estas situa-

ciones: la escala pH, que mide acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad de luz, capacidad de información, y radiación.

**pH para algunas sustancias comunes**

| Sustancia | pH |
|---|---|
| Leche de magnesia | 10.5 |
| Agua de mar | 8.0–8.4 |
| Sangre humana | 7.3–7.5 |
| Galletas | 7.0–8.5 |
| Maíz molido | 6.9–7.9 |
| Leche de vaca | 6.4–6.8 |
| Espinacas | 5.1–5.7 |
| Tomates | 4.1–4.4 |
| Naranjas | 3.0–4.0 |
| Manzanas | 2.9–3.3 |
| Limones | 1.3–2.0 |
| Ácido de batería | 1.0 |

**La escala pH** Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Soren Peter Lauritz Sorensen, en 1909, propuso una medida más cómoda. Él definió

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$$

donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad [\mathrm{H}^+] = 10^{-4}\,\mathrm{M}, \quad \text{entonces} \quad \mathrm{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las soluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH $< 7$ son *ácidas*, y las que tengan pH $> 7$ son *básicas*. Observe que cuando el pH aumenta en una unidad, el $[\mathrm{H}^+]$ disminuye en un factor de 10.

## EJEMPLO 8 | Escala de pH y concentración de iones de hidrógeno

**(a)** La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió y resultó ser $[\mathrm{H}^+] = 3.16 \times 10^{-18}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

**(b)** La lluvia más ácida jamás medida ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue de 2.4. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Una calculadora da

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Como esto es mayor a 7, la sangre es básica.

**(b)** Para hallar la concentración de iones de hidrógeno, necesitamos despejar $[\mathrm{H}^+]$ de la ecuación logarítmica

$$\log[\mathrm{H}^+] = -\mathrm{pH}$$

Por lo tanto, la escribimos en forma exponencial.

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

En este caso pH $= 2.4$, por lo cual

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{M}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

**Terremotos más fuertes**

| Lugar | Fecha | Magnitud |
|---|---|---|
| Chile | 1960 | 9.5 |
| Alaska | 1964 | 9.2 |
| Sumatra | 2004 | 9.1 |
| Alaska | 1957 | 9.1 |
| Kamchatka | 1952 | 9.0 |
| Chile | 2010 | 8.8 |
| Ecuador | 1906 | 8.8 |
| Alaska | 1965 | 8.7 |
| Sumatra | 2005 | 8.7 |
| Tibet | 1950 | 8.6 |
| Kamchatka | 1923 | 8.5 |
| Indonesia | 1938 | 8.5 |
| Islas Kuriles | 1963 | 8.5 |

**La escala Richter** En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud $M$ de un terremoto como

$$M = \log \frac{I}{S}$$

donde $I$ es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto, y $S$ es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micrón $= 10^{-4}$ cm). La magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y, el más pequeño, tuvo magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800,000,000, de modo que la escala de Richter da números más manejables para trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

## EJEMPLO 9 | Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue cuatro veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

**SOLUCIÓN** Si $I$ es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces por la definición de magnitud tenemos

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto entre Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

## EJEMPLO 10 | Intensidad de terremotos

El terremoto de 1989 de Loma Prieta que sacudió San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el temblor de 1906 (vea Ejemplo 9) que el evento de 1989?

**SOLUCIÓN** Si $I_1$ e $I_2$ son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces nos piden hallar $I_1/I_2$. Para relacionar esto con la definición de magnitud, dividimos el numerador y el denominador entre $S$.

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } S$$

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} \qquad \text{Ley 2 de logaritmos}$$

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2 \qquad \text{Definición de magnitud de terremotos}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 fue unas 16 veces más intenso que el de 1989.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

**Escala de decibeles** Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W/m$^2$ (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (Ley de Weber-Fechner), de modo que el **nivel de intensidad** $B$, medido en decibeles, está definido como

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Los **niveles de intensidad de sonidos** que podemos oír varían de muy fuertes a muy débiles. A continuación veamos algunos ejemplos de niveles en decibeles de sonidos que se escuchan comúnmente.

| Fuente de sonido | $B$ (dB) |
|---|---|
| Despegue de un jet | 140 |
| Martillo neumático | 130 |
| Concierto de rock | 120 |
| Tren subterráneo | 100 |
| Tránsito intenso | 80 |
| Tránsito ordinario | 70 |
| Conversación normal | 50 |
| Susurro | 30 |
| Hojas que caen | 10–20 |
| Umbral de escucha | 0 |

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

**EJEMPLO 11 | Intensidad de sonido del despegue de un avión jet**

Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de un motor de jet durante el despegue, si la intensidad se mide a 100 W/m$^2$.

**SOLUCIÓN** De la definición de nivel de intensidad vemos que

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41** ■

La tabla del margen es una lista de niveles de intensidad en decibeles para algunos sonidos comunes que van desde el umbral de escucha humana hasta el despegue de aviones jet del Ejemplo 11. El umbral del dolor es de unos 120 dB.

## 4.6 EJERCICIOS

### APLICACIONES

**1-16** ■ Estos ejercicios usan el modelo de crecimiento poblacional.

**1. Cultivo de bacterias** Cierto cultivo de la bacteria *Streptococcus A* inicialmente tiene 10 bacterias y se observa que se duplica cada 1.5 horas.

**(a)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias en el cultivo después de $t$ horas.

**(b)** Estime el número de bacterias después de 35 horas.

**(c)** ¿Cuándo llegará a 10,000 el número de bacterias?

© 2009 Sebastian Kaulitzki
Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

*Streptococcus A*
(12,000 × aumentos)

**2. Cultivo de bacterias** Cierto cultivo de la bacteria *Rhodobacter sphaeroides* inicialmente tiene 25 bacterias y se observa que se duplica cada 5 horas.

**(a)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para el número de bacterias del cultivo después de $t$ horas.

**(b)** Estime el número de bacterias después de 18 horas.

**(c)** ¿Después de cuántas horas llegará el número de bacterias a un millón?

**3. Población de ardillas** Una población de arcillas grises fue introducida en cierto condado de la Gran Bretaña, hace 30 años. Unos biólogos observaron que la población se duplica cada 6 años, y ahora la población es de 100,000.

**(a)** ¿Cuál es el tamaño inicial de la población de ardillas?

**(b)** Estime la población de ardillas a 10 años a partir de ahora.

**(c)** Trace una gráfica de la población de ardillas.

**4. Población de aves** Cierta especie de aves fue introducida en un condado hace 25 años. Unos biólogos observan que la población se duplica cada 10 años, y ahora la población es de 13,000.

**(a)** ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de aves?

**(b)** Estime la población de aves a 5 años a partir de ahora.

**(c)** Trace una gráfica de la población de aves.

**5. Población de zorros** La población de zorros en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2005 era de 18,000.

**(a)** Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele la población en $t$ años después de 2005.

**(b)** Use la función de la parte (a) para estimar la población de zorros en el año 2013.

**(c)** Trace una gráfica de la función de población de zorros para los años 2005-2013.

**6. Población de peces** La población de cierta especie de peces tiene una tasa de crecimiento relativa de 1.2% por año. Se estima que la población en 2000 era de 12 millones.

**(a)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población $t$ años después de 2000.

**(b)** Estime la población de peces en el año 2005.

**(c)** Trace una gráfica de la población de peces.

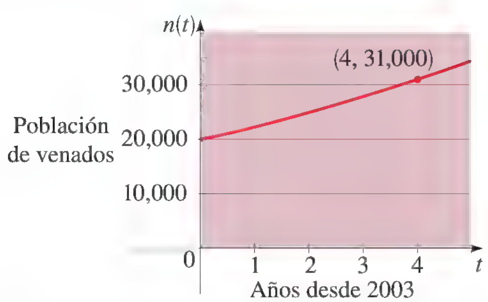
7. **Población de un condado** La población de un condado tiene una tasa de crecimiento relativa de 3% por año. El gobierno está tratando de reducir la tasa de crecimiento al 2%. La población en 1995 era de aproximadamente 110 millones. Encuentre la población proyectada para el año 2020 para las siguientes condiciones.
   **(a)** La tasa de crecimiento relativa permanece en 3% al año.
   **(b)** La tasa de crecimiento relativa se reduce a 2% al año.

8. **Cultivo de bacterias** Se observa que cierto cultivo de bacterias tiene una tasa de crecimiento relativa de 12% por hora pero, en presencia de un antibiótico, la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5% por hora. El número inicial en el cultivo es 22. Encuentre la población proyectada después de 24 horas para las siguientes condiciones.
   **(a)** No hay antibiótico presente, por lo cual la tasa de crecimiento relativa es 12%.
   **(b)** Está presente un antibiótico en el cultivo, por lo cual la tasa de crecimiento relativa se reduce a 5%.

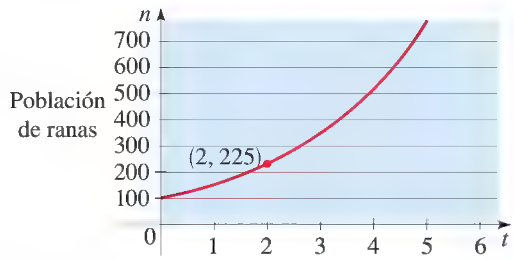
9. **Población de una ciudad** La población de cierta ciudad era de 12,000 en 2006; el tiempo de duplicación observado para la población es de 18 años.
   **(a)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, $t$ años después de 2006.
   **(b)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población, $t$ años después de 2006.
   **(c)** Trace una gráfica de la población en el tiempo $t$.
   **(d)** Estime cuándo llegará la población a 500,000.

10. **Población de murciélagos** La población de murciélagos en cierto condado del oeste medio era de 350,000 en 2009, y el tiempo de duplicación observado para la población es de 25 años.
   **(a)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 2^{t/a}$ para la población, $t$ años después de 2006.
   **(b)** Encuentre un modelo exponencial $n(t) = n_0 e^{rt}$ para la población, $t$ años después de 2006.
   **(c)** Trace una gráfica de la población en el tiempo $t$.
   **(d)** Estime cuándo llegará la población a 2 millones.

11. **Población de venados** La gráfica muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 2003 y 2007. Suponga que la población crece exponencialmente.
   **(a)** ¿Cuál era la población de venados en 2003?
   **(b)** Encuentre una función que modele la población de venados $t$ años después de 2003.
   **(c)** ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2011?
   **(d)** ¿En qué año la población de venados llegará a 100,000?




12. **Población de ranas** Se introdujeron algunas ranas mugidoras en un pequeño estanque. La gráfica muestra la población de estas ranas para los siguientes pocos años. Suponga que la población crece exponencialmente.
   **(a)** ¿Cuál era la población inicial de ranas mugidoras?
   **(b)** Encuentre una función que modele la población de estas ranas $t$ años desde que las ranas fueron puestas en el estanque.
   **(c)** ¿Cuál es la población proyectada de ranas mugidoras después de 15 años?
   **(d)** Estime cuánto tiempo tomará a la población llegar a 75,000.




13. **Cultivo de bacterias** Un cultivo empieza con 8600 bacterias. Después de una hora la cantidad es 10,000.
   **(a)** Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de $t$ horas.
   **(b)** Encuentre el número de bacterias después de 2 horas.
   **(c)** ¿Después de cuántas horas se duplicará el número de bacterias?

14. **Cultivo de bacterias** La cantidad en un cultivo de bacterias era de 400 después de 2 horas y de 25,600 después de 6 horas.
   **(a)** ¿Cuál es la tasa de crecimiento relativa de la población de bacterias? Exprese su respuesta como porcentaje.
   **(b)** ¿Cuál era el tamaño inicial del cultivo?
   **(c)** Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de $t$ horas.
   **(d)** Encuentre el número de bacterias después de 4.5 horas.
   **(e)** ¿Cuándo será de 50,000 el número de bacterias?

15. **Población de California** La población de California era de 29.76 millones en 1990 y 33.87 en 2000. Suponga que la población crece exponencialmente.
   **(a)** Encuentre la función que modele la población $t$ años después de 1990.
   **(b)** Encuentre el tiempo necesario para que la población se duplique
   **(c)** Use la función de la parte (a) para predecir la población de California en el año 2010. Busque en su biblioteca la población real de California en 2010 y compare.

16. **Población mundial** La población mundial era de 5700 millones en 1995, y la tasa de crecimiento observada relativa era de 2% al año.
   **(a)** ¿En qué año se habrá duplicado la población?
   **(b)** ¿En qué año se habrá triplicado la población?

**17-24** ■ Estos ejercicios usan el modelo de desintegración radiactiva.

17. **Radio radiactivo** La vida media del radio 226 es de 1600 años. Suponga que tenemos una muestra de 22 mg.
   **(a)** Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de $t$ años.
   **(b)** Encuentre una función $m(t) = m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de $t$ años.
   **(c)** ¿Cuánto de la muestra habrá después de 4000 años?
   **(d)** ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 18 mg de la muestra?

18. **Cesio radiactivo** La vida media del cesio 137 es de 30 años. Suponga que tenemos una muestra de 10 gramos.
   **(a)** Encuentre una función $m(t) = m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de $t$ años.

(b) Encuentre una función $m(t) = m_0e^{-rt}$ que modele la masa restante después de $t$ años.
(c) ¿Cuánto de la muestra habrá después de 80 años?
(d) ¿Después de cuánto tiempo habrá sólo 2 mg de la muestra?

**19. Estroncio radiactivo** La vida media del estroncio 90 es de 28 años. ¿Cuánto tiempo tardará una muestra de 50 mg en desintegrarse a una masa de 32 mg?

**20. Radio radiactivo** El radio 221 tiene una vida media de 30 s. ¿Cuánto tiempo tomará que el 95% de la muestra se desintegre?

**21. Hallar vida media** Si 250 mg de un elemento radiactivo se desintegran a 200 mg en 48 horas, encuentre la vida media del elemento.

**22. Radón radiactivo** Después de 3 días, una muestra de radón 222 se ha desintegrado a 58% de su cantidad original.
(a) ¿Cuál es la vida media del radón 222?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la muestra se desintegre al 20% de su cantidad original?

**23. Determinación de antigüedad por carbono 14** Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% del carbono 14 que está presente en árboles vivos. ¿Cuánto tiempo hace que se construyó el artefacto? (La vida media del carbono 14 es de 5370 años.)

**24. Determinación de antigüedad por carbono 14** Se estima que la tela para el entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Cuánto tiempo hace que la momia fue enterrada? (La vida media del carbono 14 es de 5730 años.)

**25-28** ■ Estos ejercicios usan la Ley de Newton de Enfriamiento.

**25. Sopa que se enfría** Un tazón de sopa caliente se sirve en una fiesta. Empieza a enfriarse de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento, de modo que la temperatura en el tiempo $t$ está dada por

$$T(t) = 65 + 145e^{0.05t}$$

donde $t$ se mide en minutos y $T$ se mide en °F.
(a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?
(b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 minutos?
(c) ¿Después de cuánto tiempo será de 100°F la temperatura?

**26. Tiempo de fallecimiento** La Ley de Newton de Enfriamiento se utiliza en investigaciones de homicidios para determinar el tiempo de un fallecimiento. La temperatura normal del cuerpo es de 98.6°F. Inmediatamente después de la muerte, el cuerpo empieza a enfriarse. Se ha determinado en forma experimental que la constante de la Ley de Newton de Enfriamiento es aproximadamente $k = 0.1947$, suponiendo que el tiempo se mida en horas. Suponga que la temperatura del entorno es de 60°F.
(a) Encuentre la función $T(t)$ que modele la temperatura $t$ horas después del fallecimiento.
(b) Si la temperatura del cuerpo es ahora de 72°F, ¿cuánto tiempo transcurrió desde la muerte?

**27. Enfriamiento de un pavo** Un pavo rostizado se saca de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca en una mesa en un cuarto donde la temperatura es de 75°F.
(a) Si la temperatura del pavo es 150°F después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 minutos?
(b) ¿Cuándo se enfriará el pavo a 100°F?

**28. Ebullición del agua** Una tetera llena de agua se pone a hervir en un cuarto con temperatura de 20°C. Después de 15 minutos, la temperatura del agua ha bajado de 100°C a 75°C. Encuentre la temperatura después de otros 10 minutos. Ilustre con una gráfica de la función de temperatura.

**29-43** ■ Estos ejercicios se refieren a escalas logarítmicas.

**29. Hallar el pH** Nos dan la concentración de un ion de hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.
(a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M
(b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M
(c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M

**30. Hallar el pH** Una sustancia desconocida tiene una concentración de iones de hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

**31. Concentración de iones** Nos dan la lectura de pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones de hidrógeno de la sustancia.
(a) Vinagre: pH = 3.0
(b) Leche: pH = 6.5

**32. Concentración de iones** Nos dan la lectura de pH de un vaso de líquido. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno del líquido.
(a) Cerveza: pH = 4.6
(b) Agua: pH = 7.3

**33. Hallar el pH** Las concentraciones de iones de hidrógeno en quesos van de $4.0 \times 10^{-7}$ M a $1.6 \times 10^{-5}$ M. Encuentre la variación correspondiente de lecturas de pH.

**34. Concentración de iones en vino** Las lecturas de pH para vinos varían de 2.8 a 3.8. Encuentre la variación correspondiente de concentraciones de iones de hidrógeno.

**35. Magnitudes de terremotos** Si un terremoto es 20 veces más intenso que otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala de Richter?

**36. Magnitudes de terremotos** El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo, en Japón, un terremoto con magnitud 4.9 causó sólo daños de menor importancia. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco que el de Japón?

**37. Magnitudes de terremotos** El terremoto de Alaska de 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue esto que el terremoto de San Francisco? (Vea Ejercicio 36.)

38. **Magnitudes de terremotos** El terremoto de 1994 en Northridge, California, tuvo una magnitud de 6.8 en la escala de Richter. Un año después, un terremoto de magnitud 7.2 destruyó Kobe, Japón. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Kobe que el de Northridge?

39. **Magnitudes de terremotos** El terremoto de 1985 de la ciudad de México tuvo una magnitud de 8.1 en la escala de Richter. El terremoto de 1976 en Tangshan, China, fue 1.26 más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Tangshan?

40. **Ruido en el Metro** La intensidad del sonido en un tren del Metro se midió en 98 dB. Encuentre la intensidad en $W/m^2$.

41. **Ruido de tránsito** La intensidad del sonido de tránsito en un crucero de mucho movimiento se midió en $2.0 \times 10^{-5}\ W/m^2$. Encuentre el nivel de intensidad en decibeles.

42. **Comparación de niveles de decibeles** El ruido de una podadora de motor se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de *rock* se midió en 120 dB. Encuentre la relación entre la intensidad de la música de *rock* y la de la podadora de motor.

43. **Ley del Cuadrado Inverso para Sonido** Una ley de física dice que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia $d$ desde la fuente: $I = k/d^2$.
   **(a)** Use este modelo y la ecuación

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

   (descrita en esta sección) para mostrar que los niveles $B_1$ y $B_2$ en decibeles, a distancias $d_1$ y $d_2$ desde la fuente, están relacionados por la ecuación

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

   **(b)** El nivel de intensidad en un concierto de *rock* es 120 dB a una distancia de 2 m de los altavoces. Encuentre el nivel de intensidad a una distancia de 10 metros.

# CAPÍTULO 4 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. **(a)** Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a$.
   **(b)** ¿Cuál es el dominio de esta función?
   **(c)** ¿Cuál es el rango de esta función?
   **(d)** Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada caso.
   (i) $a > 1$ (ii) $0 < a < 1$
2. Si $x$ es grande, ¿cuál función crece más rápido, $y = 2^x$ o $y = x^2$?
3. **(a)** ¿Cómo está definido el número $e$?
   **(b)** ¿Cuál es la función exponencial natural?
4. **(a)** ¿Cómo está definida la función logarítmica $y = \log_a x$?
   **(b)** ¿Cuál es el dominio de esta función?
   **(c)** ¿Cuál es el rango de esta función?
   **(d)** Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.
   **(e)** ¿Cuál es el logaritmo natural?
   **(f)** ¿Cuál es el logaritmo común?
5. Exprese las tres Leyes de Logaritmos.
6. Exprese la Fórmula para Cambio de Base.
7. **(a)** ¿Cómo resuelve una ecuación exponencial?
   **(b)** ¿Cómo resuelve una ecuación logarítmica?
8. Supoga que se invierte una cantidad $P$ a una tasa $r$ y que $A$ es la cantidad después de $t$ años.
   **(a)** Escriba una expresión para $A$ si el interés es compuesto $n$ veces por año.
   **(b)** Escriba una expresión para $A$ si el interés es compuesto continuamente.
9. El tamaño inicial de una población es $n_0$ y la población crece exponencialmente.
   **(a)** Escriba una expresión para la población en términos del tiempo de duplicación $a$.
   **(b)** Escriba una expresión para la población en términos de la tasa de crecimiento relativo $r$.
10. **(a)** ¿Cuál es la vida media de una sustacia radiactiva?
    **(b)** Si una sustancia tiene una vida media $h$ y una masa inicial $m_0$ escriba una expresión para la masa restante en el tiempo $t$.
11. ¿Qué dice la Ley de Newton de enfriamiento?
12. ¿Qué tienen en común la escala de pH, la de Richter y la de decibeles? ¿Cómo se miden?

## EJERCICIOS

**1-4** ■ Use calculadora para hallar los valores indicados de la función exponencial, aproximada a tres lugares decimales.

1. $f(x) = 5^x$; $f(-1.5), f(\sqrt{2}), f(2.5)$
2. $f(x) = 3 \cdot 2^x$; $f(-2.2), f(\sqrt{7}), f(5.5)$
3. $g(x) = 4 \cdot (\frac{2}{3})^{x\ \ 2}$; $g(-0.7), g(e), g(\pi)$
4. $g(x) = \frac{7}{4}e^{x+1}$; $g(-2), g(\sqrt{3}), g(3.6)$

**5-16** ■ Trace la gráfica de la función. Expese el dominio, rango y asíntota.

5. $f(x) = 2^{\ \ x+1}$
6. $f(x) = 3^{x\ \ 2}$
7. $g(x) = 3 + 2^x$
8. $g(x) = 5^{\ \ x} - 5$

**9.** $f(x) = \log_3(x - 1)$ **10.** $g(x) = \log(\ \ x)$

**11.** $f(x) = 2 - \log_2 x$ **12.** $f(x) = 3 + \log_5(x + 4)$

**13.** $F(x) = e^x - 1$ **14.** $G(x) = \frac{1}{2}e^{x\ \ 1}$

**15.** $g(x) = 2 \ln x$ **16.** $g(x) = \ln(x^2)$

**17-20** ■ Encuentre el dominio de la función.

**17.** $f(x) = 10^{x^2} + \log(1 - 2x)$

**18.** $g(x) = \log(2 + x - x^2)$

**19.** $h(x) = \ln(x^2 - 4)$ **20.** $k(x) = \ln|x|$

**21-24** ■ Escriba la ecuación en forma exponencial.

**21.** $\log_2 1024 = 10$ **22.** $\log_6 37 = x$

**23.** $\log x = y$ **24.** $\ln c = 17$

**25-28** ■ Escriba la ecuación en forma logarítmica.

**25.** $2^6 = 64$ **26.** $49^{\ \ 1/2} = \frac{1}{7}$

**27.** $10^x = 74$ **28.** $e^k = m$

**29-44** ■ Evalúe la expresión sin usar calculadora.

**29.** $\log_2 128$ **30.** $\log_8 1$

**31.** $10^{\log 45}$ **32.** $\log 0.000001$

**33.** $\ln(e^6)$ **34.** $\log_4 8$

**35.** $\log_3(\frac{1}{27})$ **36.** $2^{\log_2 13}$

**37.** $\log_5 \sqrt{5}$ **38.** $e^{2\ln 7}$

**39.** $\log 25 + \log 4$ **40.** $\log_3 \sqrt{243}$

**41.** $\log_2 16^{23}$ **42.** $\log_5 250 \quad \log_5 2$

**43.** $\log_8 6 - \log_8 3 + \log_8 2$ **44.** $\log \log 10^{100}$

**45-50** ■ Expanda la expresión logarítmica.

**45.** $\log(AB^2C^3)$ **46.** $\log_2(x\sqrt{x^2 + 1})$

**47.** $\ln\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ **48.** $\log\left(\dfrac{4x^3}{y^2(x \quad 1)^5}\right)$

**49.** $\log_5\left(\dfrac{x^2(1 \quad 5x)^{3/2}}{\sqrt{x^3 - x}}\right)$ **50.** $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 12}}{(x + 16)\sqrt{x - 3}}\right)$

**51-56** ■ Combine en un solo logaritmo.

**51.** $\log 6 + 4 \log 2$ **52.** $\log x + \log(x^2y) + 3 \log y$

**53.** $\frac{3}{2}\log_2(x - y) - 2\log_2(x^2 + y^2)$

**54.** $\log_5 2 + \log_5(x + 1) - \frac{1}{3}\log_5(3x + 7)$

**55.** $\log(x - 2) + \log(x + 2) - \frac{1}{2}\log(x^2 + 4)$

**56.** $\frac{1}{2}[\ln(x - 4) + 5\ln(x^2 + 4x)]$

**57-68** ■ Resuelva la ecuación. Encuentre la solución exacta si es posible; de otro modo, use calculadora para aproximar a dos decimales.

**57.** $3^{2x\ \cdot 7} = 27$ **58.** $5^{4\ \ x} = \frac{1}{125}$

**59.** $2^{3x\ \ 5} = 7$ **60.** $10^{6\ \ 3x} = 18$

**61.** $4^{1\ \ x} = 3^{2x+5}$ **62.** $e^{3x/4} = 10$

**63.** $x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 8e^{2x}$ **64.** $3^{2x} - 3^x \quad 6 = 0$

**65.** $\log_2(1 - x) = 4$

**66.** $\log x + \log(x + 1) = \log 12$

**67.** $\log_8(x + 5) - \log_8(x - 2) = 1$

**68.** $\ln(2x - 3) + 1 = 0$

**69-72** ■ Use calculadora para hallar la solución de la ecuación, redondeada a seis lugares decimales.

**69.** $5^{\ \ 2x/3} = 0.63$ **70.** $2^{3x\ \ 5} = 7$

**71.** $5^{2x+1} = 3^{4x-1}$ **72.** $e^{-15k} = 10{,}000$

**73-76** ■ Trace una gráfica de la función y úsela para determinar las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

**73.** $y = e^{x/(x+2)}$ **74.** $y = 10^x - 5^x$

**75.** $y = \log(x^3 - x)$ **76.** $y = 2x^2 - \ln x$

**77-78** ■ Encuentre las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

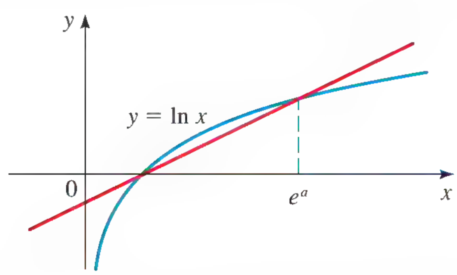
**77.** $3 \log x = 6 - 2x$ **78.** $4 - x^2 = e^{\ \ 2x}$

**79-80** ■ Resuelva gráficamente la desigualdad.

**79.** $\ln x > x - 2$ **80.** $e^x < 4x^2$

**81.** Use una gráfica de $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$ para hallar, aproximadamente, los intervalos en los que $f$ es creciente y en los que $f$ es decreciente.

**82.** Encuentre una ecuación de la recta mostrada en la figura.




**83-86** ■ Use la Fórmula para Cambio de Base para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales.

**83.** $\log_4 15$ **84.** $\log_7(\frac{3}{4})$

**85.** $\log_9 0.28$ **86.** $\log_{100} 250$

**87.** ¿Qué es mayor, $\log_4 258$ o $\log_5 620$

**88.** Encuentre la inversa de la función $f(x) = 2^{3^x}$ y exprese su dominio y rango.

**89.** Si \$12,000 se invierten a una tasa de interés de 10% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 3 años por cada uno de los métodos de capitalización.
**(a)** Semestralmente **(b)** Mensualmente
**(c)** Diario **(d)** Continuamente

**90.** Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de $8\frac{1}{2}$ al año, capitalizado semestralmente.
**(a)** Encuentre la cantidad de la inversión después de $1\frac{1}{2}$ años.

**(b)** ¿Después de qué tiempo la cantidad de la inversión será de $7000?

**(c)** Si el interés se capitalizara continuamente en lugar de semestralmente, ¿cuánto tiempo tardaría la cantidad en crecer a $7000?

**91.** Una cuenta de mercado de dinero paga 5.2% de interés anual, capitalizado diariamente. Si se invierten $100,000 en esta cuenta, ¿cuánto tardará la cuenta en acumular $10,000 en intereses?

**92.** Un plan de ahorros para el retiro paga 4.5% de interés, capitalizado continuamente. ¿Cuánto tiempo tomará en duplicarse una inversión en este plan?

**93-94** ■ Determine el porcentaje anual de ganancia (APY, por sus siglas en inglés) para la tasa de interés nominal anual y frecuencia compuesta dada

**93.** 4.25%; diariamente **94.** 3.2%; mensualmente

**95.** La población de gatos callejeros de una pequeña ciudad crece exponencialmente. En 1999 la ciudad tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% al año.

**(a)** Encuentre una función que modele la población $n(t)$ de gatos callejeros después de $t$ años.

**(b)** Encuentre la población proyectada después de 4 años.

**(c)** Encuentre el número de años necesario para que la población de gatos callejeros llegue a 500.

**96.** Un cultivo contiene 10,000 bacterias inicialmente. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 25,000.

**(a)** Encuentre el período de duplicación.

**(b)** Encuentre el número de bacterias después de 3 horas.

**97.** El uranio 234 tiene una vida media de $2.7 \times 10^5$ años.

**(a)** Encuentre la cantidad restante de una muestra de 10 mg después de mil años.

**(b)** ¿Cuánto tiempo tomará para que esta muestra se descomponga hasta que su masa sea de 7 mg?

**98.** Una muestra de bismuto 210 se desintegró a 33% de su masa original después de 8 días.

**(a)** Encuentre la vida media de este elemento.

**(b)** Encuentre la masa restante después de 12 días

**99.** La vida media del radio 226 es de 1590 años.

**(a)** Si una muestra tiene una masa de 150 mg, encuentre una función que modele la masa que resta después de $t$ años.

**(b)** Encuentre la masa que habrá después de 1000 años.

**(c)** ¿Después de cuántos años habrá sólo 50 mg?

**100.** La vida media del paladio 100 es 4 días. Después de 20 días, una muestra se ha reducido a una masa de 0.375 g.

**(a)** ¿Cuál era la masa inicial de la muestra?

**(b)** Encuentre una función que modele la masa restante después de $t$ días.

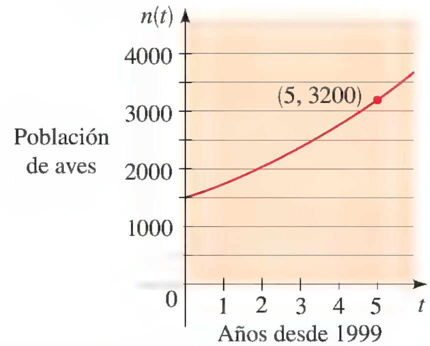
**(c)** ¿Cuál es la masa después de 3 días?

**(d)** Después de cuántos días habrá sólo 0.15 g?

**101.** La gráfica muestra la población de una rara especie de ave, donde $t$ representa años desde 1999 y $n(t)$ se mide en miles.

**(a)** Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo $t$ en la forma $n(t) = n_0 e^{rt}$.

**(b)** ¿Cuál se espera que sea la población de aves en el año 2010?




**102.** El motor de un auto funciona a una temperatura de 190ºF. Cuando el motor se apaga, se enfría de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento con una constante $k = 0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 90ºF si la temperatura circundante es de 60ºF.

**103.** La concentración de iones de hidrógeno de claras de huevo fresco se midió como

$$[H^+] = 1.3 \times 10^{-8}\ M$$

Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

**104.** El pH del jugo de limón es 1.9. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

**105.** Si un terremoto tiene magnitud de 6.5 en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud de otro terremoto que es 35 veces más intenso?

**106.** La operación de un martillo neumático se midió en 132 dB. El sonido de un susurro se midió en 28 dB. Encuentre la relación entre la intensidad del martillo y la del susurro.

# EXAMEN

1. Trace la gráfica de cada función y exprese su dominio, rango y asíntota. Demuestre que los puntos $x$ y $y$ intersectan la gráfica.
   **(a)** $f(x) = 2^{-x} + 4$ **(b)** $g(x) = \log_3(x + 3)$

2. **(a)** Escriba la ecuación $6^{2x} = 25$ en forma logarítmica.
   **(b)** Escriba la ecuación $\ln A = 3$ en forma exponencial.

3. Encuentre el valor exacto de cada expresión.
   **(a)** $10^{\log 36}$ **(b)** $\ln e^3$
   **(c)** $\log_3 \sqrt{27}$ **(d)** $\log_2 80 - \log_2 10$
   **(e)** $\log_8 4$ **(f)** $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión:
$$\log \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x^4(x^2 + 4)}}$$

5. Combine, en un solo logaritmo, lo siguiente: $\ln x - 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(3 - x^4)$

6. Encuentre la solución de la ecuación, aproximada a dos lugares decimales.
   **(a)** $2^{x-1} = 10$ **(b)** $5\ln(3 - x) = 4$
   **(c)** $10^{x+3} = 6^{2x}$ **(d)** $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacteria es 1000. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 8000.
   **(a)** Encuentre una función que modele la población después de $t$ horas.
   **(b)** Encuentre la población después de 1.5 horas.
   **(c)** ¿Cuándo llegará la población a 15,000?
   **(d)** Trace la gráfica de la función de población.

8. Suponga que se invierten \$12,000 en una cuenta de ahorros que paga 5.6% de interés al año.
   **(a)** Escriba la fórmula para la cantidad en la cuenta después de $t$ años si el interés se capitaliza mensualmente.
   **(b)** Encuentre la cantidad en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza diariamente.
   **(c)** ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad en la cuenta crezca a \$20,000 si el interés se capitaliza semestralmente?

9. La vida media del criptón 91 ($^{91}$Kr) es 10 segundos. En el tiempo $t = 0$ un recipiente de construcción robusta contiene 3 g de este gas radiactivo.
   **(a)** Encuentre la función que modele la cantidad $A(t)$ de $^{91}$Kr que queda en el recipiente después de $t$ segundos.
   **(b)** ¿Cuánto $^{91}$Kr habrá después de un minuto?
   **(c)** ¿Cuándo es que la cantidad de $^{91}$Kr restante se reducirá a 1 μg (1 microgramo, o $10^{-6}$ g)?

10. Un terremoto de 6.4 en la escala de Richter golpeó las costas de Japón, causando grandes daños. Antes, ese mismo año, un terremoto de menor importancia que midió 3.1 en la escala de Richter se sintió en algunos lugares de Pennsylvania. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Japón que el de Pennsylvania?

ENFOQUE SOBRE MODELADO

# Ajuste de datos a curvas exponenciales y potencia

En una sección previa de *Enfoque sobre modelado*, página 296, aprendimos que la forma de una gráfica de dispersión nos ayuda a escoger el tipo de curva a usar para modelar datos. La primera gráfica de la Figura 1 sugiere una recta que pase por en medio de los puntos, y la segunda apunta a un polinomio cúbico. Para la tercera gráfica es tentador ajustar un polinomio de segundo grado. Pero, ¿qué pasa si una curva exponencial se ajusta mejor? ¿Cómo determinamos esto? En esta sección aprendemos a ajustar curvas exponenciales y de potencia a datos y a determinar qué tipo de curva se ajusta mejor a los datos. También aprendemos que para gráficas de dispersión como las de las últimas dos gráficas de la Figura 1, los datos pueden ser modelados por medio de funciones logarítmicas o logísticas.

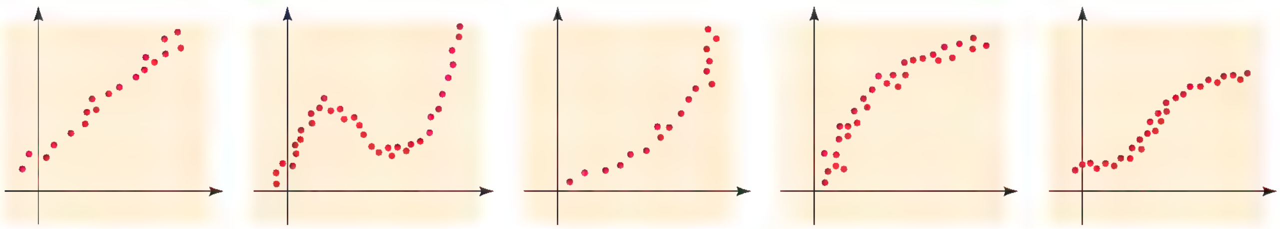


**FIGURA 1**

## Modelado con funciones exponenciales

Si una gráfica de dispersión muestra que los datos aumentan rápidamente, podríamos modelar los datos usando un *modelo exponencial*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = Ce^{kx}$$

donde $C$ y $k$ son constantes. En el primer ejemplo modelamos la población mundial mediante un modelo exponencial. Recuerde de la Sección 4.6 que la población tiende a aumentar exponencialmente.

**TABLA 1**
Población mundial

| Año ($t$) | Población mundial ($P$ en millones) |
|---|---|
| 1900 | 1650 |
| 1910 | 1750 |
| 1920 | 1860 |
| 1930 | 2070 |
| 1940 | 2300 |
| 1950 | 2520 |
| 1960 | 3020 |
| 1970 | 3700 |
| 1980 | 4450 |
| 1990 | 5300 |
| 2000 | 6060 |

### EJEMPLO 1 | Un modelo exponencial para la población mundial

La Tabla 1 da la población del mundo en el siglo XX.

**(a)** Trace una gráfica de dispersión y observe que un modelo lineal no es apropiado.

**(b)** Encuentre una función exponencial que modele el crecimiento poblacional.

**(c)** Trace una gráfica de la función que encontró junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

**(d)** Use el modelo que usted encontró para predecir la población mundial en el año 2020.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica de dispersión se muestra en la Figura 2. Los puntos localizados no parecen encontrarse a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

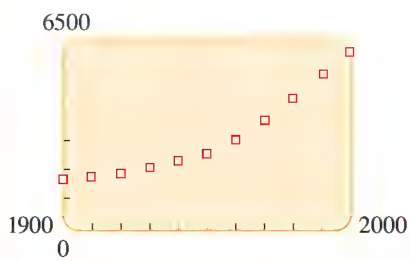



**FIGURA 2** Gráfica de dispersión de la población mundial

La población del mundo aumenta exponencialmente.

**(b)** Usando una calculadora graficadora y el comando `ExpReg` (vea Figura 3(a)), obtenemos el modelo exponencial

$$P(t) = (0.0082543) \cdot (1.0137186)^t$$

Éste es un modelo de la forma $y = Cb^t$. Para convertir esto a la forma $y = Ce^{kt}$, usamos las propiedades de exponenciales y logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned} 1.0137186^t &= e^{\ln 1.0137186^t} && A = e^{\ln A} \\ &= e^{t \ln 1.0137186} && \ln A^B = B \ln A \\ &= e^{0.013625t} && \ln 1.0137186 \approx 0.013625 \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir el modelo como

$$P(t) = 0.0082543e^{0.013625t}$$

**(c)** De la gráfica de la Figura 3(b) vemos que el modelo parece ajustarse muy bien a los datos. El período de crecimiento poblacional relativamente lento se explica con la depresión de la década de 1930 y las dos guerras mundiales.

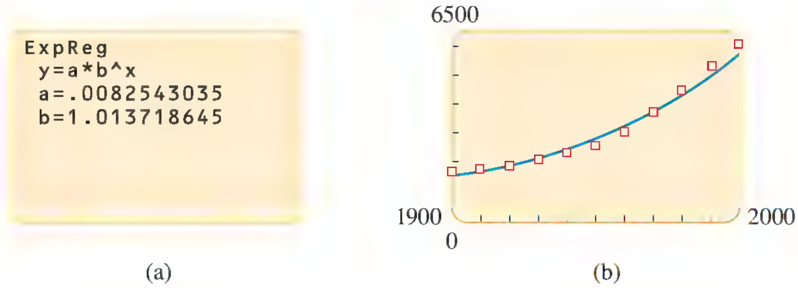



**FIGURA 3** Modelo exponencial para la población mundial

**(d)** El modelo predice que la población mundial en 2020 será

$$\begin{aligned} P(2020) &= 0.0082543e^{(0.013625)(2020)} \\ &\approx 7{,}405{,}400{,}000 \end{aligned}$$

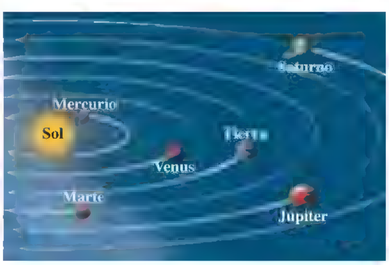
## Modelado con funciones potencia

Si la gráfica de dispersión de los datos que estamos estudiando se asemeja a la gráfica de $y = ax^2$, $y = ax^{1.32}$, o a alguna otra función potencia, entonces buscamos un *modelo potencia*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = ax^n$$

donde $a$ es una constante positiva y $n$ es cualquier número real.

En el siguiente ejemplo buscamos un modelo potencia para algunos datos astronómicos. En astronomía, la distancia en el sistema solar se mide con frecuencia en unidades astronómicas. Una *unidad astronómica* (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol. El *período* de un planeta es el tiempo que tarda el planeta en hacer una revolución completa alrededor del Sol (medido en años terrestres). En este ejemplo derivamos la relación sorprendente, descubierta primero por Johannes Kepler (vea página 754), entre la distancia media de un planeta desde el Sol y su período.




### EJEMPLO 2 | Un modelo potencia para períodos planetarios

La Tabla 2 da la distancia media $d$ de cada planeta desde el Sol en unidades astronómicas y su período $T$ en años.

**TABLA 2**
Distancia y períodos de los planetas

| Planeta | $d$ | $T$ |
|---|---|---|
| Mercurio | 0.387 | 0.241 |
| Venus | 0.723 | 0.615 |
| Tierra | 1.000 | 1.000 |
| Marte | 1.523 | 1.881 |
| Júpiter | 5.203 | 11.861 |
| Saturno | 9.541 | 29.457 |
| Urano | 19.190 | 84.008 |
| Neptuno | 30.086 | 164.784 |
| Plutón | 39.507 | 248.350 |

**(a)** Trace una gráfica de dispersión. ¿Un modelo lineal es apropiado?

**(b)** Encuentre una función potencia que modele los datos.

**(c)** Trace una gráfica de la función que encontró y la gráfica de dispersión sobre la misma gráfica. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

**(d)** Use el modelo que encontró para calcular el período de un asteroide cuya distancia media desde el Sol es 5 UA.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica de dispersión de la Figura 4 indica que los puntos localizados no se encuentran a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

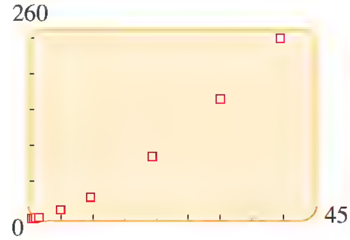



**FIGURA 4** Gráfica de dispersión de datos planetarios

**(b)** Usando calculadora graficadora y el comando `PwrReg` (vea Figura 5(a)), obtenemos el modelo potencia

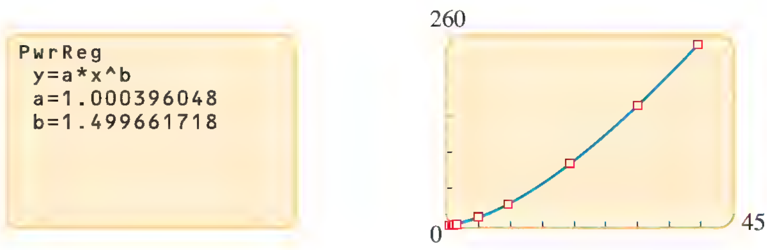
$$T = 1.000396d^{1.49966}$$

Si redondeamos ambos coeficientes y el exponente a tres cifras significativas, podemos escribir el modelo como

$$T = d^{1.5}$$

Ésta es la relación descubierta por Kepler (vea página 754). Sir Isaac Newton (página 852) usó posteriormente su Ley de Gravitación para derivar teóricamente esta relación, dando así una fuerte evidencia científica de que la Ley de Gravitación debe ser verdadera.

**(c)** La gráfica se muestra en la Figura 5(b). El modelo parece ajustar muy bien a los datos.




(a) (b)

**FIGURA 5** Modelo potencia para datos planetarios

**(d)** En este caso $d = 5$ UA, de modo que nuestro modelo da

$$T = 1.00039 \cdot 5^{1.49966} \approx 11.22$$

El período del asteroide es de unos 11.2 años. ■

## Alineación de datos

Hemos utilizado la forma de una gráfica de dispersión para determinar qué tipo de modelo usar: lineal, exponencial o potencia. Esto funciona bien si los puntos de datos se encuentran sobre una recta, pero es difícil distinguir una gráfica de dispersión que sea exponencial de una que requiera un modelo potencia. Por lo tanto, para ayudar a determinar qué modelo usar, podemos *alinear* los datos, es decir, aplicar una función que "enderece" la gráfica de dispersión. La inversa de la función de alineación es entonces un modelo apro-

piado. A continuación describimos cómo alinear datos que puedan ser modelados por funciones exponenciales o potencia.

## ▶ Alineación de datos exponenciales

Si sospechamos que los puntos de datos $(x, y)$ se encuentran sobre una curva exponencial $y = Ce^{kx}$, entonces los puntos

$$(x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln Ce^{kx} && \text{Suponga que } y = Ce^{kx} \text{ y tome ln} \\ &= \ln e^{kx} + \ln C && \text{Propiedad de ln} \\ &= kx + \ln C && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de $x$, sea $Y = \ln y$ y $A = \ln C$; entonces

$$Y = kx + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos de población mundial $(t, P)$ para obtener los puntos $(t, \ln P)$ en la Tabla 3. La gráfica de dispersión de $(t, \ln P)$ de la Figura 6, llamada **gráfica semi-log**, muestra que los datos alineados están aproximadamente sobre una recta, de modo que el modelo exponencial debe ser apropiado.

**TABLA 3**
Datos de la población mundial

| $t$ | Población $P$ (en millones) | $\ln P$ |
|---|---|---|
| 1900 | 1650 | 21.224 |
| 1910 | 1750 | 21.283 |
| 1920 | 1860 | 21.344 |
| 1930 | 2070 | 21.451 |
| 1940 | 2300 | 21.556 |
| 1950 | 2520 | 21.648 |
| 1960 | 3020 | 21.829 |
| 1970 | 3700 | 22.032 |
| 1980 | 4450 | 22.216 |
| 1990 | 5300 | 22.391 |
| 2000 | 6060 | 22.525 |

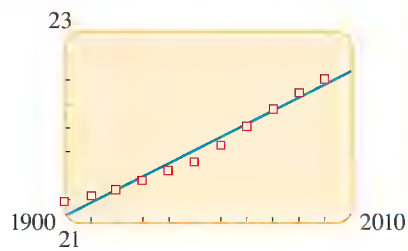



**FIGURA 6** Gráfica semi-log de la Tabla 3

## ▶ Alineación de datos potencia

Si sospechamos que los puntos de datos $(x, y)$ están sobre una curva potencia $y = ax^n$, entonces los puntos

$$(\ln x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^n && \text{Suponga que } y = ax^n \text{ y tome ln} \\ &= \ln a + \ln x^n && \text{Propiedad de ln} \\ &= \ln a + n \ln x && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de $\ln x$, sea $Y = \ln y$, $X = \ln x$ y $A = \ln a$; entonces

$$Y = nX + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos planetarios $(d, T)$ en la Tabla 2 para obtener los puntos $(\ln d, \ln T)$ en la Tabla 4. La gráfica de dispersión $(\ln d, \ln T)$ en la Figura 7, llamada **gráfica log-log**, muestra que los datos se encuentran sobre una recta, de modo que el modelo potencia parece apropiado.

**TABLA 4**
Tabla log-log

| $\ln d$ | $\ln T$ |
|---|---|
| 0.94933 | −1.4230 |
| −0.32435 | −0.48613 |
| 0 | 0 |
| 0.42068 | 0.6318 |
| 1.6492 | 2.4733 |
| 2.2556 | 3.3829 |
| 2.9544 | 4.4309 |
| 3.4041 | 5.1046 |
| 3.6765 | 5.5148 |

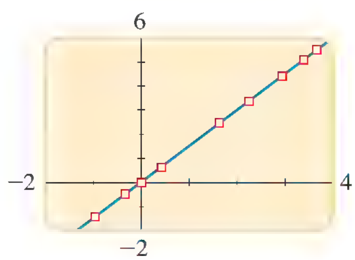



**FIGURA 7** Gráfica log-log de datos en la Tabla 4

## ¿Modelo exponencial o potencia?

Suponga que una gráfica de dispersión de los puntos de datos $(x, y)$ muestra un rápido aumento. ¿Debemos usar una función exponencial o una función potencia para modelar los datos? Para ayudarnos a determinarlo, trazamos dos gráficas de dispersión: una para los puntos $(x, \ln y)$ y la otra para los puntos $(\ln x, \ln y)$. Si la primera gráfica de dispersión parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo exponencial; si la segunda gráfica parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo de potencia.

### EJEMPLO 3 | ¿Modelo exponencial o potencia?

Los puntos de datos $(x, y)$ se muestran en la Tabla 5.

**(a)** Trace una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

**(c)** ¿Es apropiada una función exponencial o una función potencia para modelar esta información?

**(d)** Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

**TABLA 5**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 6 |
| 3 | 14 |
| 4 | 22 |
| 5 | 34 |
| 6 | 46 |
| 7 | 64 |
| 8 | 80 |
| 9 | 102 |
| 10 | 130 |

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica de dispersión de los datos se muestra en la Figura 8.

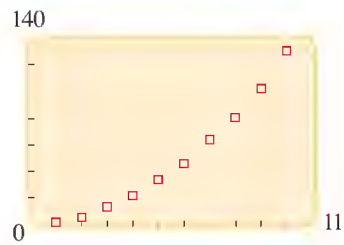



**FIGURA 8**

**(b)** Usamos los valores de la Tabla 6 para graficar las gráficas de dispersión en las Figuras 9 y 10.

**TABLA 6**

| $x$ | $\ln x$ | $\ln y$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0.7 |
| 2 | 0.7 | 1.8 |
| 3 | 1.1 | 2.6 |
| 4 | 1.4 | 3.1 |
| 5 | 1.6 | 3.5 |
| 6 | 1.8 | 3.8 |
| 7 | 1.9 | 4.2 |
| 8 | 2.1 | 4.4 |
| 9 | 2.2 | 4.6 |
| 10 | 2.3 | 4.9 |

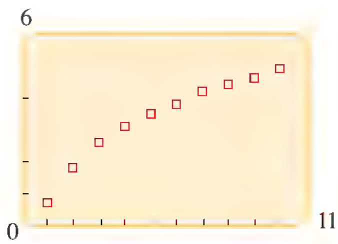



**FIGURA 9** Gráfica semi-log

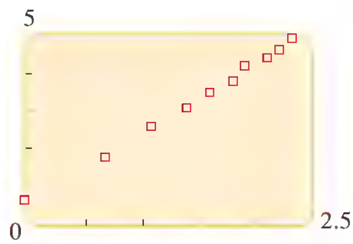



**FIGURA 10** Gráfica log-log

**(c)** La gráfica de dispersión de $(x, \ln y)$ de la figura 9 no parece ser lineal, por lo que el modelo exponencial no es apropiado. Por otra parte, la gráfica de dispersión de $(\ln x, \ln y)$ de la Figura 10 es muy cercanamente lineal, de modo que un modelo potencia es apropiado.

**(d)** Usando el comando `PwrReg` en una calculadora graficadora, encontramos que la función potencia que mejor ajusta el punto de datos es

$$y = 1.85x^{1.82}$$

La gráfica de esta función y los puntos de datos originales se muestran en la Figura 11. ■

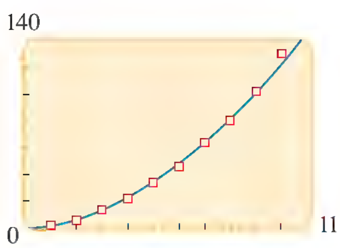



**FIGURA 11**

Antes que las calculadoras graficadoras y software de estadística se hicieran comunes, era frecuente que los modelos exponenciales y potencia para datos se construyeran al hallar primero un modelo lineal para los datos alineados. A continuación, se encontraba el modelo para los datos reales al tomar exponenciales. Por ejemplo, si encontramos que $\ln y = A \ln x + B$, entonces al tomar exponenciales obtenemos el modelo $y = e^B \cdot e^{A\ln x}$, o $y = Cx^A$ (donde $C = e^B$). Se usaba un papel de gráficas especial llamado "papel log" o "papel log-log" para facilitar este proceso.

## Modelado con funciones logísticas

Un modelo logístico de crecimiento es una función de la forma

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde $a$, $b$ y $c$ son constantes positivas. Se usan funciones logísticas para modelar poblaciones donde el crecimiento está restringido por recursos disponibles. (Vea Ejercicios 25-28 de la Sección 4.2.)

### EJEMPLO 4 | Abastecer de bagres un estanque

**TABLA 7**

| Semana | Bagres |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 15 | 1500 |
| 30 | 3300 |
| 45 | 4400 |
| 60 | 6100 |
| 75 | 6900 |
| 90 | 7100 |
| 105 | 7800 |
| 120 | 7900 |

Buena parte del pescado que se vende hoy en día en supermercados se cría en granjas piscícolas comerciales, no se pescan en estado silvestre. En un estanque en una de estas granjas se introducen inicialmente 1000 bagres, y la población de peces se muestrea entonces a intervalos de 15 semanas para estimar su tamaño. Los datos de la población se dan en la Tabla 7.

**(a)** Encuentre un modelo apropiado para los datos.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique, en la gráfica de dispersión, el modelo que encontró en la parte (a).

**(c)** ¿Cómo predice el modelo que la población de peces cambiará con el tiempo?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como la población de bagres está restringida por su hábitat (el estanque), un modelo logístico es apropiado. Usando el comando `Logistic` en una calculadora (vea Figura 12(a)), encontramos el siguiente modelo para la población $P(t)$ de bagres:

$$P(t) = \frac{7925}{1 + 7.7e^{-0.052t}}$$

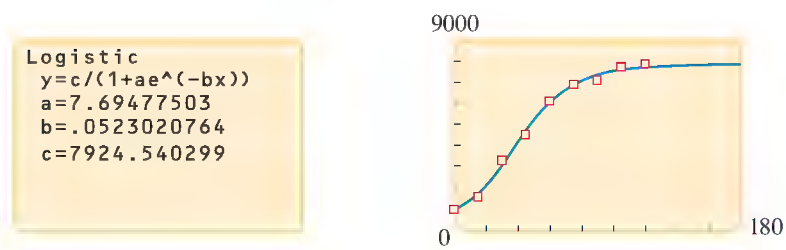



**FIGURA 12** (a) (b) Población de bagres $y = P(t)$

**(b)** La gráfica de dispersión y la curva logística se muestran en la Figura 12(b).

**(c)** De la gráfica de $P$ en la Figura 12(b), vemos que la población de bagres aumenta rápidamente hasta unas $t = 80$ semanas. A partir de ahí el crecimiento se reduce y, alrededor de $t = 120$ semanas, la población se nivela y queda más o menos constante en ligeramente más de 7900. ■

El comportamiento que es exhibido por la población de bagres en el Ejemplo 4 es típico de un crecimiento logístico. Después de una fase de crecimiento rápido, la población se aproxima a un nivel constante llamado **capacidad de sostenimiento** (o **de carga**) del entorno. Esto ocurre porque cuando $t \to \infty$ tenemos $e^{-bt} \to 0$ (vea Sección 4.2), y entonces

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \longrightarrow \frac{c}{1 + 0} = c$$

Por lo tanto, la capacidad de sostenimiento es $c$.

## PROBLEMAS

**1. Población de Estados Unidos** La constitución de Estados Unidos exige un censo cada 10 años. Los datos del censo para 1790-2000 se dan en la tabla siguiente.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

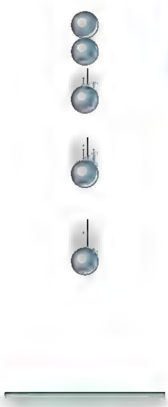
**(b)** Use calculadora para hallar un modelo exponencial para los datos.

**(c)** Use su modelo para predecir la población en el censo de 2010.

**(d)** Use su modelo para estimar la población en 1965.

**(e)** Compare sus respuestas de las partes (c) y (d) contra los valores de la tabla. ¿Piensa usted que un modelo exponencial es apropiado para estos datos?

| Año | Población (en millones) | Año | Población (en millones) | Año | Población (en millones) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1790 | 3.9 | 1870 | 38.6 | 1950 | 151.3 |
| 1800 | 5.3 | 1880 | 50.2 | 1960 | 179.3 |
| 1810 | 7.2 | 1890 | 63.0 | 1970 | 203.3 |
| 1820 | 9.6 | 1900 | 76.2 | 1980 | 226.5 |
| 1830 | 12.9 | 1910 | 92.2 | 1990 | 248.7 |
| 1840 | 17.1 | 1920 | 106.0 | 2000 | 281.4 |
| 1850 | 23.2 | 1930 | 123.2 | | |
| 1860 | 31.4 | 1940 | 132.2 | | |



| Tiempo (s) | Distancia (m) |
|---|---|
| 0.1 | 0.048 |
| 0.2 | 0.197 |
| 0.3 | 0.441 |
| 0.4 | 0.882 |
| 0.5 | 1.227 |
| 0.6 | 1.765 |
| 0.7 | 2.401 |
| 0.8 | 3.136 |
| 0.9 | 3.969 |
| 1.0 | 4.902 |

**2. Una pelota en caída** En un experimento de física se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Los estudiantes registran la distancia que cae la pelota a cada décimo de segundo. (Esto puede hacerse usando una cámara y una luz estroboscópica.)

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Use calculadora para hallar un modelo potencia.

**(c)** Use su modelo para predecir la distancia que caerá la pelota en 3 segundos

**3. Gastos en salud** Los gastos en salud en Estados Unidos para los años 1970-2001 se dan en la tabla siguiente, y una gráfica de dispersión de los datos se muestra en la figura.

**(a)** ¿La gráfica de dispersión mostrada sugiere un modelo exponencial?

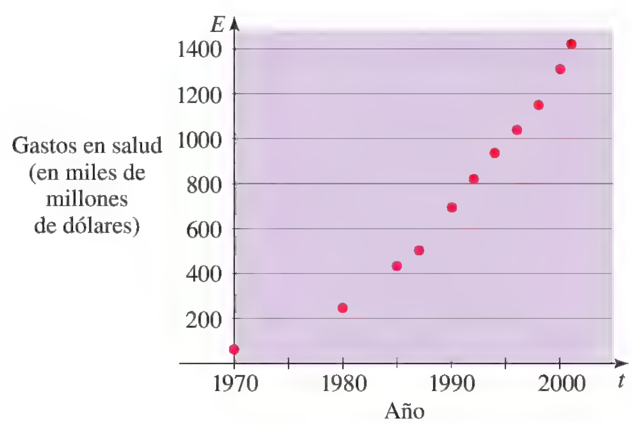
**(b)** Haga una tabla de valores $(t, \ln E)$ en una gráfica de dispersión. ¿La gráfica de dispersión parece ser lineal?

**(c)** Encuentre una recta de regresión para los datos de la parte (b).

**(d)** Use los resultados de la parte (c) para hallar un modelo exponencial para el crecimiento de gastos en salud.

**(e)** Use su modelo para predecir los gastos totales en salud en 2009.

| Año | Gastos en salud (en miles de millones de dólares) |
|---|---|
| 1970 | 74.3 |
| 1980 | 251.1 |
| 1985 | 434.5 |
| 1987 | 506.2 |
| 1990 | 696.6 |
| 1992 | 820.3 |
| 1994 | 937.2 |
| 1996 | 1039.4 |
| 1998 | 1150.0 |
| 2000 | 1310.0 |
| 2001 | 1424.5 |



| Tiempo (h) | Cantidad de $^{131}$I (g) |
|---|---|
| 0 | 4.80 |
| 8 | 4.66 |
| 16 | 4.51 |
| 24 | 4.39 |
| 32 | 4.29 |
| 40 | 4.14 |
| 48 | 4.04 |

**4. Vida media del yodo radiactivo** Un estudiante está tratando de determinar la vida media del yodo radiactivo 131. Él mide la cantidad de yodo 131 en una solución de muestra cada 8 horas. Sus datos se ilustran en la tabla del margen.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Use calculadora para hallar un modelo exponencial.

**(c)** Use su modelo para hallar la vida media del yodo 131.

**5. Ley de Beer-Lambert** Cuando pasa luz solar por las aguas de lagos y océanos, la luz es absorbida y, cuanto mayor sea la profundidad a la que penetre, más disminuye su intensidad. La intensidad $I$ de luz a una profundidad $x$ está dada por la Ley Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-kx}$$

donde $I_0$ es la intensidad de luz en la superficie y $k$ es una constante que depende de la oscuridad del agua (vea página 336). Un biólogo usa un fotómetro para investigar la penetración de luz en un lago del norte, obteniendo los datos de la tabla.

**(a)** Use una calculadora graficadora para hallar una función exponencial de la forma dada por la Ley de Beer-Lambert para modelar estos datos. ¿Cuál es la intensidad de luz $I_0$ en la superficie en este día, y cuál es la constante $k$ de "oscuridad" para este lago? [*Sugerencia*: Si su calculadora da una función de la forma $I = ab^x$, convierta esto a la forma que desee usando las identidades $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}$. Vea Ejemplo 1(b).]

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique la función que encontró en la parte (a) en su gráfica de dispersión.

**(c)** Si la intensidad de luz desciende por debajo de 0.15 lumen (lm), cierta especie de algas no puede sobrevivir porque la fotosíntesis es imposible. Use su modelo de la parte (a) para determinar la profundidad a la cual hay insuficiente luz para sostener estas algas.

La intensidad de luz disminuye exponencialmente con la profundidad.

| Profundidad (pies) | Intensidad de luz (lm) | Profundidad (pies) | Intensidad de luz (lm) |
|---|---|---|---|
| 5 | 13.0 | 25 | 1.8 |
| 10 | 7.6 | 30 | 1.1 |
| 15 | 4.5 | 35 | 0.5 |
| 20 | 2.7 | 40 | 0.3 |

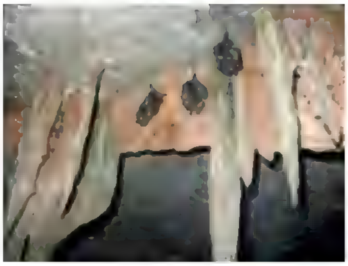
**6. Experimentos con curvas "de olvido"** Todos estamos familiarizados con el fenómeno de olvidar algo. Datos que con claridad entendimos en el momento en que los aprendimos primero a veces se desvanecen de la memoria cuando hacemos un examen final. Unos psicólogos han propuesto varias formas de modelar este proceso. Uno de estos modelos es la Ley de Ebbinghaus de Olvido, que se describe en la página 327. Otros modelos usan funciones exponenciales o logarítmicas. Para crear su propio modelo, una psicóloga realiza un experimento en un grupo de voluntarios a quien pide memorizar una lista de 100 palabras relacionadas. A continuación, ella prueba cuántas de estas palabras pueden recordar después de varios períodos. Los resultados promedio para el grupo se muestran en la tabla siguiente.

**(a)** Use calculadora graficadora para hallar una función de *potencia,* de la forma $y = at^b$, que modele el número promedio de palabras $y$ que los voluntarios recuerdan después de $t$ horas. A continuación, encuentre una función *exponencial* de la forma $y = ab^t$ para modelar los datos.

**(b)** Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique las dos funciones que encontró en la parte (a) en su gráfica de dispersión.

**(c)** ¿Cuál de las dos funciones parece dar el mejor modelo?

| Tiempo | Palabras recordadas |
|---|---|
| 15 min | 64.3 |
| 1 h | 45.1 |
| 8 h | 37.3 |
| 1 día | 32.8 |
| 2 días | 26.9 |
| 3 días | 25.6 |
| 5 días | 22.9 |





El número de especies diferentes de murciélagos en una cueva está relacionado con el tamaño de la cueva por una función de potencia.

**7. Modelar una relación entre especies y área** La tabla siguiente da las áreas de varias cuevas de la región central de México, y el número de especies de murciélagos que viven en cada cueva.*

**(a)** Encuentre una función potencia que modele los datos.

**(b)** Trace una gráfica de la función que encontró en la parte (a) y una gráfica de dispersión de los datos en la misma gráfica. ¿El modelo se ajusta bien a los datos?

**(c)** La cueva llamada El Sapo cerca de Puebla, México, tiene una superficie $A = 205\ \text{m}^2$. Use el modelo para estimar el número de especies de murciélagos que esperaría encontrar en esa cueva.

| Cueva | Área ($\text{m}^2$) | Número de especies |
|---|---|---|
| La Escondida | 18 | 1 |
| El Escorpión | 19 | 1 |
| El Tigre | 58 | 1 |
| Misión Imposible | 60 | 2 |
| San Martín | 128 | 5 |
| El Arenal | 187 | 4 |
| La Ciudad | 344 | 6 |
| Virgen | 511 | 7 |

**8. Emisiones de escapes de autos** Un estudio realizado por la U.S. Office of Science and Technology en 1972 estimó el costo de reducir emisiones de automóviles en ciertos porcentajes. Encuentre un modelo exponencial que capte la tendencia de "rendimientos de reducción" de estos datos mostrados en la tabla siguiente.

| Reducción en emisiones (%) | Costo por auto ($) |
|---|---|
| 50 | 45 |
| 55 | 55 |
| 60 | 62 |
| 65 | 70 |
| 70 | 80 |
| 75 | 90 |
| 80 | 100 |
| 85 | 200 |
| 90 | 375 |
| 95 | 600 |

**9. ¿Modelo exponencial o potencia?** En la tabla siguiente se muestran los puntos de datos $(x, y)$.

**(a)** Trace una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

**(c)** ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función potencia?

**(d)** Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 0.08 |
| 4 | 0.12 |
| 6 | 0.18 |
| 8 | 0.25 |
| 10 | 0.36 |
| 12 | 0.52 |
| 14 | 0.73 |
| 16 | 1.06 |

*A. K. Brunet y R. A. Medallin, "The Species-Area Relationship in Bat Assemblages of Tropical Caves." *Journal of Mammalogy*, *82*(4):1114-1122, 2001.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 29 |
| 20 | 82 |
| 30 | 151 |
| 40 | 235 |
| 50 | 330 |
| 60 | 430 |
| 70 | 546 |
| 80 | 669 |
| 90 | 797 |

**10. ¿Modelo exponencial o potencia?** Los puntos de datos $(x, y)$ se muestran en la tabla del margen.

**(a)** Trace una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

**(c)** ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función potencia?

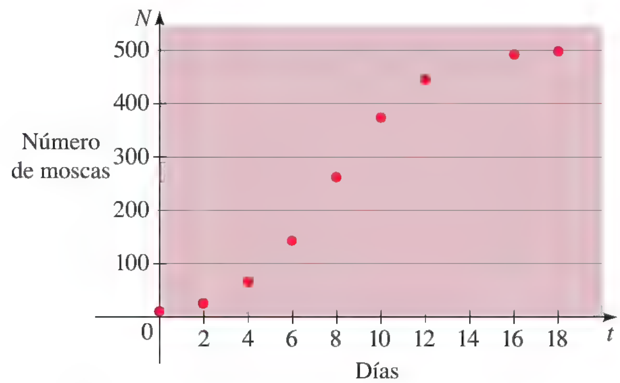
**(d)** Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

**11. Crecimiento logístico de la población** La tabla y gráfica de dispersión dan la población de moscas negras en un recipiente cerrado de laboratorio, en un período de 18 días.

**(a)** Use el comando `Logistic` de su calculadora para hallar un modelo logístico para estos datos.

**(b)** Use el modelo para estimar el tiempo cuando hubo 400 moscas en el recipiente.

| Tiempo (días) | Número de moscas |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 2 | 25 |
| 4 | 66 |
| 6 | 144 |
| 8 | 262 |
| 10 | 374 |
| 12 | 446 |
| 16 | 492 |
| 18 | 498 |




**12. Modelos logarítmicos** Un **modelo logarítmico** es una función de la forma

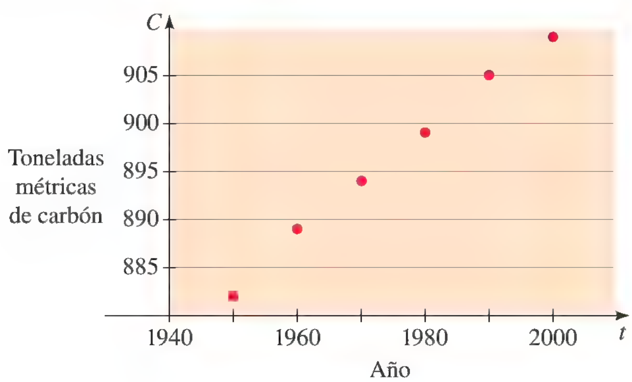
$$y = a + b \ln x$$

Numerosas relaciones entre variables en el mundo real pueden ser modeladas por este tipo de función. La tabla y gráfica de dispersión siguientes muestran la producción de carbón (en toneladas métricas) de una pequeña mina en el norte de la Columbia Británica.

**(a)** Use el comando `LnReg` de su calculadora para hallar un modelo logarítmico para estas cifras de producción.

**(b)** Use el modelo para predecir la producción de carbón extraído de esta mina en 2010.

| Año | Toneladas métricas de carbón |
|---|---|
| 1950 | 882 |
| 1960 | 889 |
| 1970 | 894 |
| 1980 | 899 |
| 1990 | 905 |
| 2000 | 909 |



**1.** Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = \sqrt{x + 4}$. Encuentre lo siguiente:

**(a)** El dominio de $f$

**(b)** El dominio de $g$

**(c)** $f(-2), f(0), f(4), g(0), g(8), g(-6)$

**(d)** $f(x + 2), g(x + 2), f(2 + h)$

**(e)** El promedio de rapidez de cambio de $g$ entre $x = 5$ y $x = 21$

**(f)** $f \circ g, g \circ f, f(g(12)), g(f(12))$

**(g)** La inversa de $g$

**2.** Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**(a)** Evalúe $f(0), f(1), f(2), f(3)$ y $f(4)$.

**(b)** Trace la gráfica de $f$.

**3.** Sea $f$ la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$.

**(a)** Exprese $f$ en forma estándar.

**(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de $f$.

**(c)** Trace la gráfica de $f$.

**(d)** Encuentre el intervalo en el que $f$ es creciente y el intervalo en el que $f$ es decreciente.

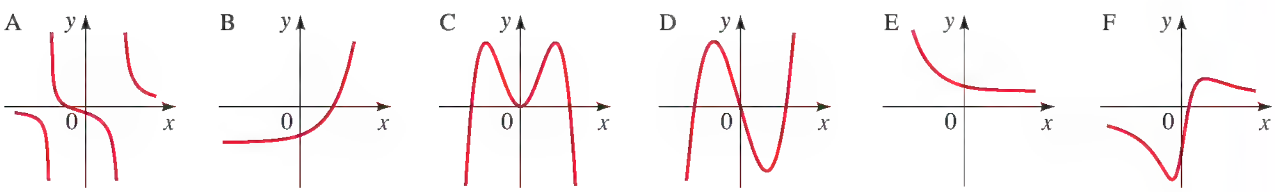
**(e)** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $g(x) = -2x^2 + 8x + 10$ a partir de la gráfica de $f$?

**(f)** ¿Cómo se obtiene la gráfica de $h(x) = -2(x + 3)^2 + 8(x + 3) + 5$ a partir de la gráfica de $f$?

**4.** Sin usar calculadora graficadora, relacione cada una de las siguientes funciones con las gráficas que aparecen a continuación. Dé razones para sus elecciones.

$$f(x) = x^3 - 8x \qquad g(x) = -x^4 + 8x^2 \qquad r(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 9}$$

$$s(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 9} \qquad h(x) = 2^x - 5 \qquad k(x) = 2^{-x} + 3$$




**5.** Sea $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$.

**(a)** Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de $P$.

**(b)** Determine cuáles de los números que citó usted en la parte (a) en realidad son ceros de $P$.

**(c)** Factorice $P$ completamente.

**(d)** Trace una gráfica de $P$.

**6.** Sea $Q(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 2$

**(a)** Encuentre todos los ceros de $Q$, reales y complejos, y exprese sus multiplicidades.

**(b)** Factorice $Q$ completamente.

**(c)** Factorice $Q$ en factores cuadráticos lineales e irreductibles.

**7.** Sea $r(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$. Encuentre los puntos de intersección $x$ y $y$ y las asíntotas horizontales y verticales. A continuación, trace la gráfica de $r$.

**8.** Trace gráficas de las siguientes funciones en el mismo plano de coordenadas.

**(a)** $f(x) = 2 - e^x$ **(b)** $g(x) = \ln(x + 1)$

**9.** **(a)** Encuentre el valor exacto de $\log_3 16 - 2 \log_3 36$.

**(b)** Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión

$$\log\left(\frac{x^5\sqrt{x-1}}{2x \quad 3}\right)$$

**10.** Resuelva las ecuaciones.

**(a)** $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$

**(b)** $2e^{3x} - 11e^{2x} + 10e^x + 8 = 0$ [*Sugerencia:* Compare con el polinomio del Problema 5.]

**11.** Una suma de $25,000 se deposita en una cuenta que paga 5.4% de interés al año, capitalizado diariamente.

**(a)** ¿Cuál será la cantidad en la cuenta después de 3 años?

**(b)** ¿Cuándo habrá crecido la cuenta a $35,000?

**(c)** ¿Cuánto tiempo tomará el depósito inicial en duplicarse?

**12.** Después de un naufragio, 129 ratas se las arreglan para nadar desde el naufragio a una isla desierta. La población de ratas en la isla crece exponencialmente, y después de 15 meses hay 280 ratas en la isla.

**(a)** Encuentre una función que modele la población $t$ meses después de la llegada de las ratas.

**(b)** ¿Cuál será la población 3 años después del naufragio?

**(c)** ¿Cuándo llegará la población a ser de 2000?

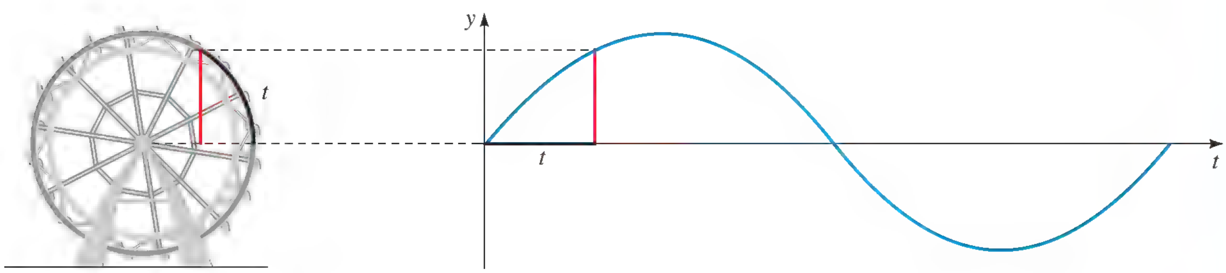
CAPÍTULO 5

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA



Si el lector ha subido a una rueda "de la fortuna" sabe de movimiento periódico, es decir, movimiento que se repite una y otra vez. El movimiento periódico es común en la naturaleza. Considere el diario amanecer y puesta de Sol (día, noche, día, noche, ...), la variación diaria de los niveles de mareas (alta, baja, alta, baja, ...), o las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha, ...). Para modelar tal movimiento necesitamos una función cuyos valores aumentan, después disminuyen, luego aumentan otra vez, y así sucesivamente. Para entender cómo definir tal función, veamos a una persona que disfruta de un paseo en una "rueda de la fortuna". La gráfica muestra la altura a la que se encuentra la persona sobre el centro de la rueda en el tiempo $t$. Observe que la gráfica sube y baja repetidamente.

La función trigonométrica *seno* se define en una forma similar, usando la circunferencia unitaria (en lugar de "rueda de la fortuna"). Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas diferentes pero equivalentes: como funciones de números reales (Capítulo 5) o como funciones de ángulos (Capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, de modo que ya sea el Capítulo 5 o el Capítulo 6 se pueden estudiar primero. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para aplicaciones diferentes.



# 5.1 LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La circunferencia unitaria ▶ Puntos terminales en la circunferencia unitaria ▶ El número de referencia

En esta sección exploramos algunas propiedades de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se usan en la siguiente sección para definir las funciones trigonométricas.

## ▼ La circunferencia unitaria

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1 (vea Figura 1). En la Sección 1.8 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

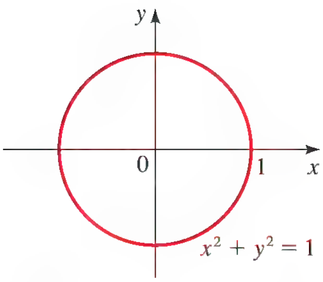



**FIGURA 1** La circunferencia unitaria

**LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA**

La **circunferencia unitaria** es de radio 1 con centro en el origen en el plano $xy$. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

### EJEMPLO 1 | Un punto en la circunferencia unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en la circunferencia unitaria.

**SOLUCIÓN** Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Como

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

$P$ está en la circunferencia unitaria.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3** ■

### EJEMPLO 2 | Localizar un punto sobre la circunferencia unitaria

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Encuentre su coordenada $y$.

**SOLUCIÓN** Como el punto está en la circunferencia unitaria, tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Como el punto está en el cuarto cuadrante, su coordenada $y$ debe ser negativa, de modo que $y = -\frac{1}{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9** ■

## ▼ Puntos terminales en la circunferencia unitaria

Suponga que $t$ es un número real. Marquemos una distancia $t$ a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj si $t$ es positiva y en el sentido de las manecillas si $t$ es negativa (Figura 2).

En esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ en la circunferencia. El punto $P(x, y)$ obtenido en esta forma se llama **punto terminal** determinado por el número real $t$.

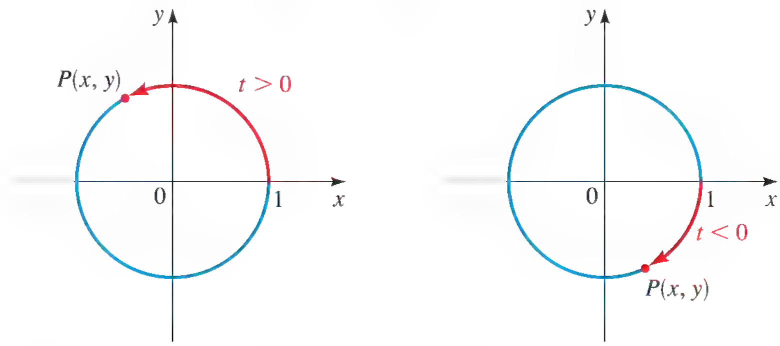



**FIGURA 2** (a) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$ (b) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en toda la vuelta del círculo unitario y regresa a $(1, 0)$, viaja una distancia de $2\pi$. Para moverse la mitad alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿Dónde termina el punto cuando viaja estas distancias a lo largo del círculo? De la Figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando viaja una distancia de $\pi$ iniciando en $(1, 0)$, su punto terminal es $(-1, 0)$.

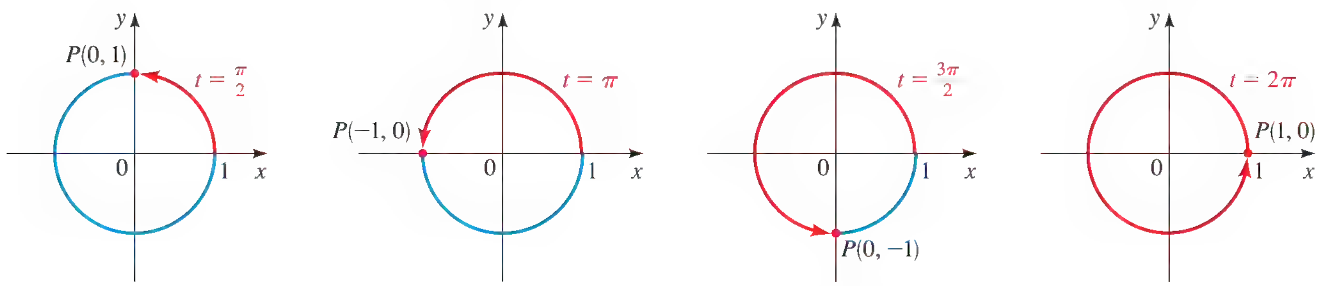



**FIGURA 3** Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y $2\pi$.

## EJEMPLO 3 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada número real $t$.

**(a)** $t = 3\pi$ **(b)** $t = -\pi$ **(c)** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

**SOLUCIÓN** De la Figura 4 obtenemos lo siguiente:

**(a)** El punto terminal determinado por $3\pi$ es $(-1, 0)$.

**(b)** El punto terminal determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

**(c)** El punto terminal determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

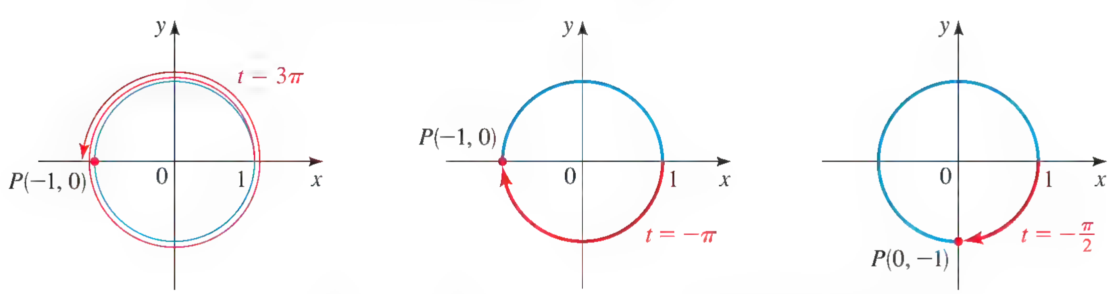



**FIGURA 4**

Observe que diferentes valores de $t$ pueden determinar el mismo punto terminal.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia de (1, 0) que (0, 1) a lo largo de la circunferencia unitaria (vea Figura 5).

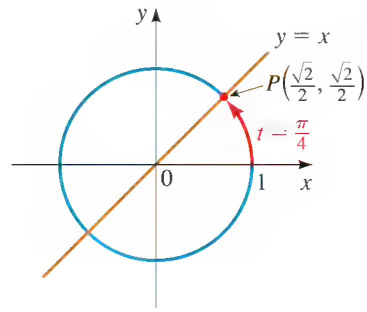



**FIGURA 5**

Como la circunferencia unitaria es simétrica con respecto a la recta $y = x$, se deduce que $P$ se encuentra sobre la recta $y = x$. Por lo tanto, $P$ es el punto de intersección (en el primer cuadrante) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Sustituyendo $x$ por $y$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como $P$ está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, tenemos $y = 1/\sqrt{2}$ también. Entonces, el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden usar métodos similares para hallar los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ (vea Ejercicios 57 y 58). La Tabla 1 y la Figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de $t$.

**TABLA 1**

| $t$ | Punto terminal determinado por $t$ |
|---|---|
| $0$ | $(1, 0)$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $(0, 1)$ |

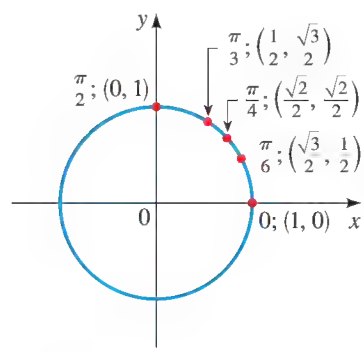



**FIGURA 6**

## EJEMPLO 4 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real $t$ dado.

**(a)** $t = -\dfrac{\pi}{4}$ **(b)** $t = \dfrac{3\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{5\pi}{6}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Sea $P$ el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea $Q$ el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(a) vemos que el punto $P$ tiene las mismas coordenadas que $Q$ excepto por el signo de la coordenada en $y$. Como $P$ está en el cuarto cuadrante, su coordenada $x$ es positiva y su coordenada $y$ es negativa. Entonces, el punto terminal es $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$.

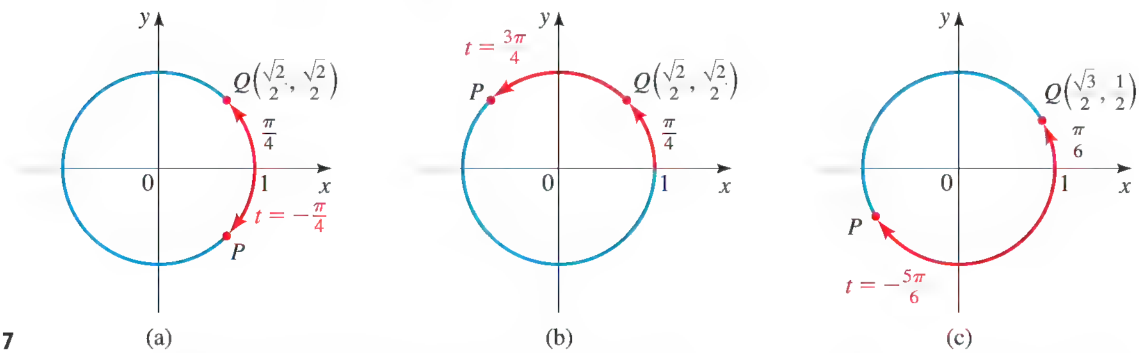



**FIGURA 7**

**(b)** Sea $P$ el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea $Q$ el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(b) vemos que el punto $P$ tiene las mismas coordenadas que $Q$ excepto por el signo de la coordenada en $x$. Como $P$ está en el segundo cuadrante, su coordenada $x$ es negativa y su coordenada $y$ es positiva. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

**(c)** Sea $P$ el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea $Q$ el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la Figura 7(c) vemos que el punto $P$ tiene las mismas coordenadas que $Q$ excepto por el signo. Como $P$ está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## El número de referencia

De los Ejemplos 3 y 4 vemos que para hallar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos saber el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos la idea del *número de referencia* para ayudarnos a hallar puntos terminales.

**NÚMERO DE REFERENCIA**

Sea $t$ un número real. El **número de referencia $\bar{t}$** asociado con $t$ es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por $t$ y el eje $x$.

La Figura 8 muestra que para hallar el número de referencia $\bar{t}$, es útil saber el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por $t$. Si el punto terminal se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, donde $x$ es positiva, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje $x$ *positivo*. Si se encuentra en los cuadrantes segundo o tercero, donde $x$ es negativa, encontramos $t$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje $x$ *negativo*.

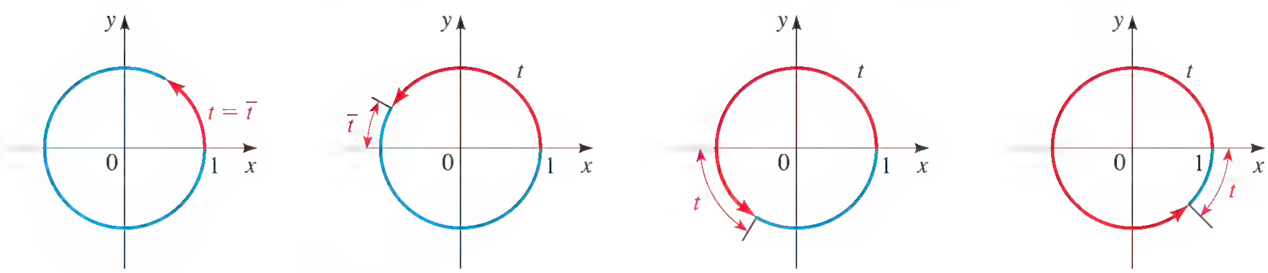


**FIGURA 8** El número de referencia $\bar{t}$ por $t$.

## EJEMPLO 5 | Hallar números de referencia

Encuentre el número de referencia para cada valor de $t$.

**(a)** $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **(d)** $t = 5.80$

**SOLUCIÓN** De la Figura 9 encontramos los números de referencia como sigue:

**(a)** $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

**(b)** $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

**(c)** $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

**(d)** $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

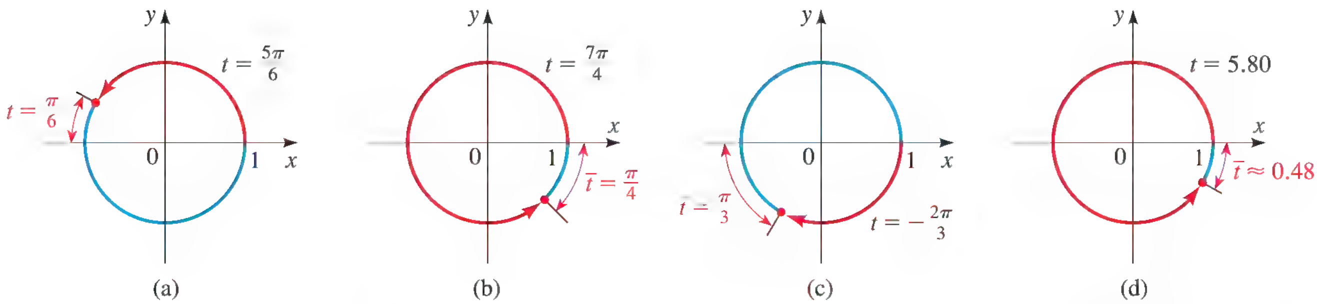



**FIGURA 9**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

### USO DE NÚMEROS DE REFERENCIA PARA HALLAR PUNTOS TERMINALES

Para hallar el punto terminal $P$ determinado por cualquier valor de $t$, usamos los pasos siguientes:

1. Encuentre el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encuentre el punto terminal $Q(a, b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por $t$ es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se escogen de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre este punto terminal.

## EJEMPLO 6 | Uso de números de referencia para hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real $t$ dado.

**(a)** $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

**SOLUCIÓN** Los números de referencia asociados con estos valores de $t$ se hallaron en el Ejemplo 5.

**(a)** El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, que determina el punto terminal $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal determinado por $t$ está en el segundo cuadrante, su coordenada $x$ es negativa y su coordenada $y$ es positiva. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

**(b)** El número de referencia es $t = \pi/4$, que determina el punto terminal $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está en el cuarto cuadrante, su coordenada $x$ es positiva y su coordenada $y$ es negativa. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**(c)** El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, que determina el punto terminal $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está determinado por $t$ en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Como el perímetro de la circunferencia unitaria es $2\pi$, el punto terminal determinado por $t$ es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar $2\pi$ cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por $t$. Usamos esta observación en el siguiente ejemplo para hallar puntos terminales para $t$ grandes.

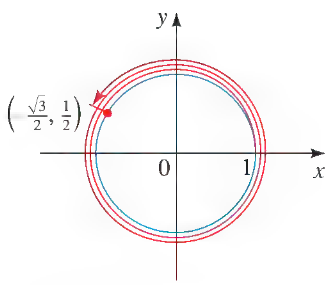



**FIGURA 10**

## EJEMPLO 7 | Hallar el punto terminal para $t$ grande

Encuentre el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

**SOLUCIÓN** Como

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de $t$ es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos $4\pi$). Por lo tanto, por el Ejemplo 6(a) el punto terminal es $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$. (Vea Figura 10.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

# 5.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1. (a)** La circunferencia unitaria es la circunferencia con centro en ____ con radio ____.

**(b)** La ecuación de la circunferencia unitaria es _______.

**(c)** Suponga que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre la coordenada faltante:

(i) $P(1, \quad)$ (ii) $P(\quad, 1)$

(iii) $P(-1, \quad)$ (iv) $P(\quad, -1)$

**2. (a)** Si marcamos una distancia $t$ a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, llegamos al punto ______ determinado por $t$.

**(b)** Los puntos terminales determinados por $\pi/2$, $\pi$, $-\pi/2$, $2\pi$ son ________, ________, ________, y ______, respectivamente.

## HABILIDADES

**3-8** ■ Demuestre que el punto está en la circunferencia unitaria.

**3.** $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **4.** $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **5.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

**6.** $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **7.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **8.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

**9-14** ■ Encuentre la coordenada faltante de $P$, usando el hecho de que $P$ se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

| Coordenadas | Cuadrante |
|---|---|
| **9.** $P(-\frac{3}{5}, \quad)$ | III |
| **10.** $P(\quad, -\frac{7}{25})$ | IV |
| **11.** $P(\quad, \frac{1}{3})$ | II |

| Coordenadas | Cuadrante |
|---|---|
| **12.** $P(\frac{2}{5},\ \ \ )$ | I |
| **13.** $P(\ \ \ , -\frac{2}{7})$ | IV |
| **14.** $P(-\frac{2}{3},\ \ \ )$ | II |

**15-20** ■ El punto $P$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información dada.

**15.** La coordenada $x$ de $P$ es $\frac{4}{5}$, y la coordenada $y$ es positiva.

**16.** La coordenada $y$ de $P$ es $-\frac{1}{3}$, y la coordenada $x$ es positiva.

**17.** La coordenada $y$ de $P$ es $\frac{2}{3}$, y la coordenada $x$ es negativa.

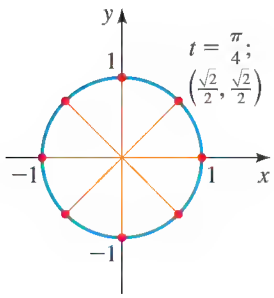
**18.** La coordenada $x$ de $P$ es positiva, y la coordenada $y$ de $P$ es $-\sqrt{5}/5$.

**19.** La coordenada $x$ de $P$ es $-\sqrt{2}/3$, y $P$ está abajo del eje $x$.

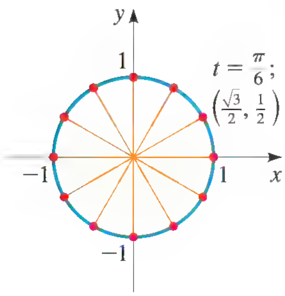
**20.** La coordenada $x$ de $P$ es $-\frac{2}{5}$, y $P$ está arriba del eje $x$.

**21-22** ■ Encuentre $t$ y el punto terminal determinado por $t$ para cada punto de la figura. En el Ejercicio 21, $t$ aumenta en incrementos de $\pi/4$; al igual que en el Ejercicio 22, $t$ aumenta en incrementos de $\pi/6$.

**21.**




**22.**




**23-32** ■ Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el valor dado de $t$.

**23.** $t = \dfrac{\pi}{2}$ **24.** $t = \dfrac{3\pi}{2}$

**25.** $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **26.** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

**27.** $t = -\dfrac{\pi}{3}$ **28.** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

**29.** $t = \dfrac{2\pi}{3}$ **30.** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

**31.** $t = -\dfrac{3\pi}{4}$ **32.** $t = \dfrac{11\pi}{6}$

**33.** Suponga que el punto terminal determinado por $t$ es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

**(a)** $\pi - t$ **(b)** $-t$
**(c)** $\pi + t$ **(d)** $2\pi + t$

**34.** Suponga que el punto terminal determinado por $t$ es el punto $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4\right)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

**(a)** $-t$ **(b)** $4\pi + t$
**(c)** $\pi - t$ **(d)** $t - \pi$

**35-38** ■ Encuentre el número de referencia para cada valor de $t$.

**35.** **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{4}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{3}$
**(c)** $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **(d)** $t = \dfrac{\pi}{6}$

**36.** **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{6}$
**(c)** $t = \dfrac{11\pi}{3}$ **(d)** $t = -\dfrac{7\pi}{4}$

**37.** **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{7}$ **(b)** $t = -\dfrac{7\pi}{9}$
**(c)** $t = -3$ **(d)** $t = 5$

**38.** **(a)** $t = \dfrac{11\pi}{5}$ **(b)** $t = -\dfrac{9\pi}{7}$
**(c)** $t = 6$ **(d)** $t = -7$

**39-52** ■ Encuentre **(a)** el número de referencia para cada valor de $t$ y **(b)** el punto terminal determinado por $t$.

**39.** $t = \dfrac{2\pi}{3}$ **40.** $t = \dfrac{4\pi}{3}$

**41.** $t = \dfrac{3\pi}{4}$ **42.** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

**43.** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **44.** $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

**45.** $t = \dfrac{13\pi}{4}$ **46.** $t = \dfrac{13\pi}{6}$

**47.** $t = \dfrac{7\pi}{6}$ **48.** $t = \dfrac{17\pi}{4}$

**49.** $t = -\dfrac{11\pi}{3}$ **50.** $t = \dfrac{31\pi}{6}$

**51.** $t = \dfrac{16\pi}{3}$ **52.** $t = -\dfrac{41\pi}{4}$

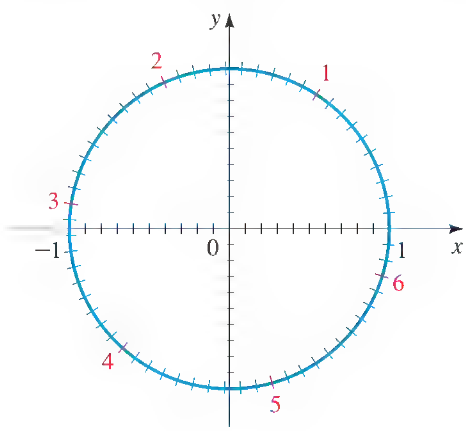
**53-56** ■ Use la figura para hallar el punto terminal determinado por el número real $t$, con coordenadas redondeadas a un lugar decimal.

**53.** $t = 1$

**54.** $t = 2.5$

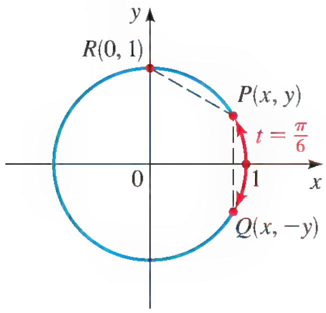
**55.** $t = -1.1$

**56.** $t = 4.2$

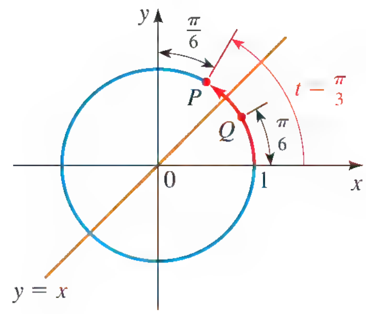


## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**57. Hallar el punto terminal para $\pi/6$** Suponga que el punto terminal determinado por $t = \pi/6$ es $P(x, y)$ y los puntos $Q$ y $R$ son como se ve en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias $PQ$ y $PR$? Use este dato, junto con la Fórmula de la Distancia, para demostrar que las coordenadas de $P$ satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para hallar $P(x, y)$.




**58. Hallar el punto terminal para $\pi/3$** Ahora que ya sabe usted el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use simetría para hallar el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (vea la figura). Explique su razonamiento.




# 5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Las funciones trigonométricas ▶ Valores de las funciones trigonométricas ▶ Identidades fundamentales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección precedente para definir las funciones trigonométricas.

## ▼ Las funciones trigonométricas

Recuerde que para hallar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado $t$, nos movemos una distancia $t$ a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj si $t$ es positiva y en la dirección de las manecillas si $t$ es negativa (vea Figura 1). A continuación usamos las coordenadas $x$ y $y$ del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real $t$ la coordenada $y$ del punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t$. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

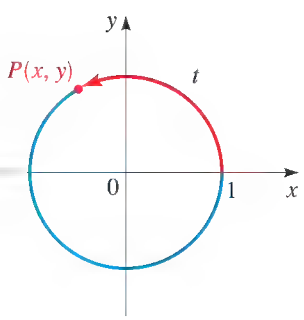



**FIGURA 1**

### DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea $t$ cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por $t$. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de **funciones circulares**.

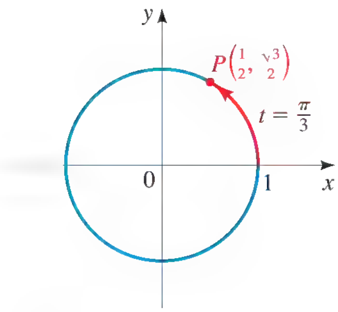



**FIGURA 2**

## EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real $t$ dado.

**(a)** $t = \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$

### SOLUCIÓN

**(a)** De la Tabla 1 de la página 372, vemos que el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$. (Vea Figura 2.) Como las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

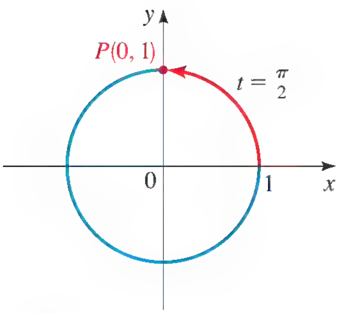



**FIGURA 3**

**(b)** El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea Figura 3.) Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidos porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la Tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la Tabla 1 de la Sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

**TABLA 1**
Valores especiales de las funciones trigonométricas

| $t$ | sen $t$ | cos $t$ | tan $t$ | csc $t$ | sec $t$ | cot $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | — | 1 | — |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | — | 1 | — | 0 |

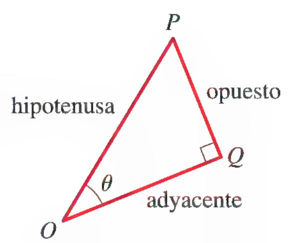
Podemos fácilmente recordar los senos y cosenos de los ángulos básicos si los escribimos en la forma $\sqrt{\phantom{x}}/2$:

| $t$ | sen $t$ | cos $t$ |
|---|---|---|
| 0 | $\sqrt{0}/2$ | $\sqrt{4}/2$ |
| $\pi/6$ | $\sqrt{1}/2$ | $\sqrt{3}/2$ |
| $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{1}/2$ |
| $\pi/2$ | $\sqrt{4}/2$ | $\sqrt{0}/2$ |

El Ejemplo 1 muestra que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales, por lo cual es necesario determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de $t$. Como las funciones cotangente y cosecante tienen $y$ en el denominador de sus definiciones, no están definidas siempre que la coordenada $y$ del punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t$ sea 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero $n$, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen $x$ en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas siempre que $x = 0$. Esto ocurre cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero $n$.

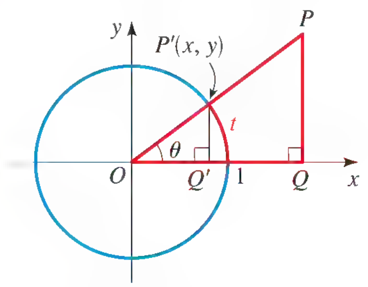
# Relación con las funciones trigonométricas de ángulos

Si ya usted ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos (Capítulo 6), es probable se pregunte cómo el seno y coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para ver cómo es esto, empecemos con un triángulo rectángulo, $\Delta OPQ$.




Triángulo rectángulo *OPQ*

Ponga el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo $\theta$ en posición normal.




$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por $t$.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco $t$. Observe que el triángulo $OPQ$ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes $x$ y $y$.

A continuación, por la definición de las funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

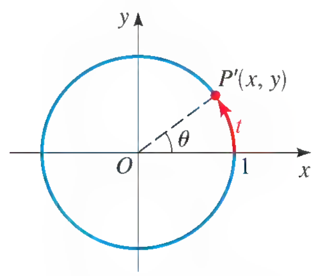
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* $t$, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

A continuación, si $\theta$ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por lo tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes $\theta$ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real $t$.




La medida en radianes del ángulo $\theta$ es $t$.

¿Por qué entonces estudiar trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Compare la Sección 5.6 con las Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

**DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

| Función | Dominio |
|---|---|
| sen $x$, cos $x$ | Todos los números reales |
| tan $x$, sec $x$ | Todos los números reales que no sean $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero $n$ |
| cot $x$, csc $x$ | Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero $n$ |

## Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de $t$. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t$ está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas ambas. En consecuencia, sen $t$, cos $t$, csc $t$ y sec $t$ son todas negativas, mientras que tan $t$ y cos $t$ son positivas. Se pueden comprobar las otras entradas del recuadro siguiente.

**SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

| Cuadrante | Funciones positivas | Funciones negativas |
|---|---|---|
| I | todas | ninguna |
| II | sen $x$, csc $x$ | cos $x$, sec $x$, tan $x$, cot $x$ |
| III | tan $x$, cot $x$ | sen $x$, csc $x$, cos $x$, sec $x$ |
| IV | cos $x$, sec $x$ | sen $x$, csc $x$, tan $x$, cot $x$ |

Por ejemplo, $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

En la Sección 5.1 utilizamos el número de referencia para hallar el punto terminal determinado por un número real $t$. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de puntos terminales, podemos usar el número de referencia para hallar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $t$ es el número de referencia para $t$. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo, como el punto terminal de $t$. Entonces, los valores de las funciones trigonométricas en $t$ son iguales, excepto posiblemente por el signo, como sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor de lo siguiente.

**(a)** $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(a)). Como el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

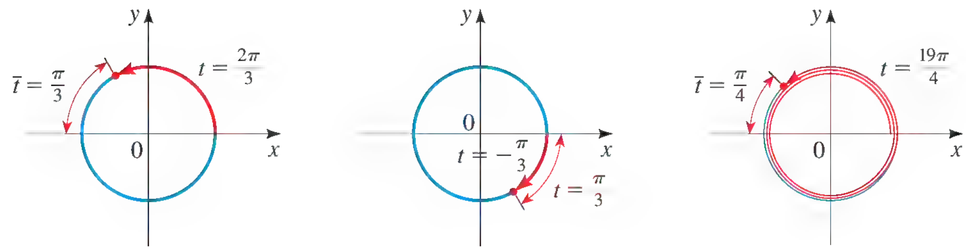



**FIGURA 4** (a) (b) (c)

**(b)** El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(b)). Como el punto terminal es $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

**(c)** Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea Figura 4(c)). Como el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\text{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\text{sen}\,\frac{19\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = +\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reste $4\pi$ | Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

Hasta este punto, hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de $t$. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que $t$ sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de $t$? Por ejemplo, ¿cómo podemos hallar sen 1.5? Una forma es trazando cuidadosamente un diagrama y leer el valor (vea Ejercicios 39-46), pero este método no es muy preciso. Por fortuna, programados directamente en calculadoras científicas son procedimientos matemáticos (vea nota al margen en la página 400) que encuentran los valores de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* redondeados al número de dígitos en la pantalla. La calculadora debe ser puesta en el *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para hallar valores de las funciones cosecante, secante y cotangente usando una calculadora, necesitamos usar las siguientes *relaciones recíprocas:*

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen}\,t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se siguen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\text{sen}\,t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\text{sen}\,t)$. Los otros se obtienen de un modo semejante.

## EJEMPLO 3 | Uso de calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurándonos que nuestra calculadora esté puesta en el modo de radianes y redondeando los resultados a seis lugares decimales, obtenemos:

**(a)** $\text{sen}\,2.2 \approx 0.808496$

**(b)** $\cos 1.1 \approx 0.453596$

**(c)** $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$

**(d)** $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\text{sen}\,0.98} \approx 1.204098$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **43**

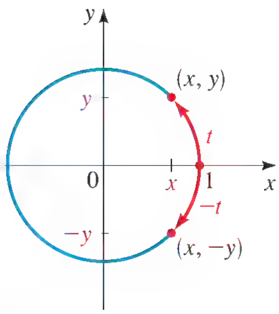



**FIGURA 5**

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de $t$ y las de $-t$. De la Figura 5 vemos que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este dato, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares están definidas en la Sección 2.5.

**PROPIEDADES PARES-IMPARES**

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

## EJEMPLO 4 | Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

**(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

**SOLUCIÓN** Por las propiedades pares-impares y la Tabla 1 tenemos

**(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Seno es impar

**(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

## Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí por medio de expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

**IDENTIDADES FUNDAMENTALES**

**Identidades recíprocas**

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

**Identidades de Pitágoras**

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

* Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ por todos los enteros $n$ excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la Sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

**DEMOSTRACIÓN** Las identidades recíprocas se siguen inmediatamente de las definiciones de la página 377. A continuación demostramos las identidades de Pitágoras. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde $x$ y $y$ son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. Análogamente, dividiendo ambos lados de la primera identidad de Pitágoras entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) nos da $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

Como sus nombres lo indican, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en $t$, entonces podemos hallar los valores de todas las otras en $t$.

## EJEMPLO 5 | Hallar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y $t$ está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en $t$.

**SOLUCIÓN** De las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como este punto está en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} t$ es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que conocemos $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, podemos hallar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

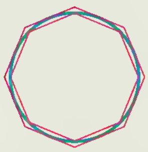
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

## EJEMPLO 6 | Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba $\tan t$ en términos de $\cos t$, donde $t$ está en el tercer cuadrante.

**El valor de $\pi$**

El número $\pi$ es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Desde la Antigüedad se ha sabido que esta relación es la misma para todos las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático para hallar una aproximación numérica para $\pi$ fue hecho por Arquímedes (hacia el año 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al hallar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos alrededor de la circunferencia.



Hacia el año 480 a.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \tfrac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta a seis lugares decimales. Esta estimación siguió siendo la más precisa de $\pi$ hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular $\pi$ correcto a 15 lugares decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en busca de $\pi$. El inglés William Shanks se pasó 15 años (1858-1873) usando estos métodos para calcular $\pi$ a 707 decimales, pero en 1946 se encontró que sus cifras estaban erróneas empezando con el decimal 528. En la actualidad, con ayuda de computadoras, de manera rutinaria los matemáticos determinan $\pi$ correcto a millones de lugares decimales. El récord actual es que $\pi$ ha sido calculado a 2,576,980,370,000 (más de dos billones, $10^{12}$) de lugares decimales por T. Daesuke y su equipo.

**SOLUCIÓN** Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, necesitamos escribir sen $t$ en términos de cos $t$. Por las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como sen $t$ es negativo en el tercer cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

## 5.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

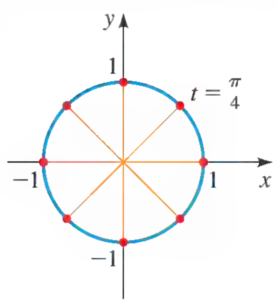
**1.** Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por $t$. Entonces sen $t$ = ____, cos $t$ = ____, y tan $t$ = _____.

**2.** Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2$ = _____. Entonces, para toda $t$ tenemos $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$ = ______.

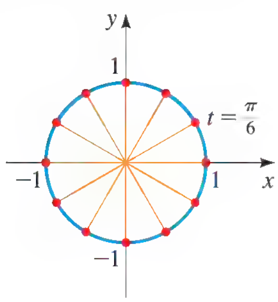
### HABILIDADES

**3–4** ■ Encuentre sen $t$ y cos $t$ para los valores de $t$ cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, $t$ crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, $t$ aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)

**3.**




**4.**




**5-24** ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

**5.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\tan\frac{2\pi}{3}$

**6.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{6}$

**7.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

**8.** **(a)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{3}$

**9.** **(a)** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{4}$

**10.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

**11.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{7\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{7\pi}{3}$

**12.** **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

**13.** **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

**14.** **(a)** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

**15.** **(a)** $\sec\frac{11\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{11\pi}{3}$ **(c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

**16.** **(a)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\sec\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\csc\frac{7\pi}{6}$

**17.** **(a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\tan\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{11\pi}{6}$

**18.** **(a)** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{5\pi}{3}$

**19.** **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

**20.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(b)** $\sec\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{4}$

**21.** **(a)** $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\csc\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\csc\frac{3\pi}{2}$

**22.** **(a)** $\sec(-\pi)$ **(b)** $\sec\pi$ **(c)** $\sec 4\pi$

**23.** **(a)** $\operatorname{sen} 13\pi$ **(b)** $\cos 14\pi$ **(c)** $\tan 15\pi$

**24.** **(a)** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ **(b)** $\cos\frac{25\pi}{2}$ **(c)** $\cot\frac{25\pi}{2}$

**25-28** ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si está definido) en el número real $t$ dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

**25.** $t = 0$ **26.** $t = \frac{\pi}{2}$ **27.** $t = \pi$ **28.** $t = \frac{3\pi}{2}$

| $t$ | sen $t$ | cos $t$ | tan $t$ | csc $t$ | sec $t$ | cot $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | | indefinido | | |
| $\frac{\pi}{2}$ | | | | | | |
| $\pi$ | | | 0 | | | indefinido |
| $\frac{3\pi}{2}$ | | | | | | |

**29-38** ■ Nos dan el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real $t$. Encuentre sen $t$, cos $t$ y tan $t$.

**29.** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **30.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

**31.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **32.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

**33.** $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **34.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

**35.** $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **36.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

**37.** $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **38.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

**39-46** ■ Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **(a)** la figura y **(b)** una calculadora. Compare los dos resultados.

**39.** sen 1

**40.** cos 0.8

**41.** sen 1.2

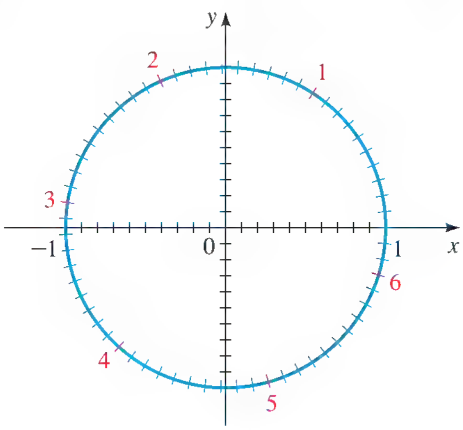
**42.** cos 5

**43.** tan 0.8

**44.** tan( 1.3)

**45.** cos 4.1

**46.** sen(−5.2)




**47-50** ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por $t$ está en el cuadrante dado.

**47.** sen $t$ cos $t$, Cuadrante II **48.** tan $t$ sec $t$, Cuadrante IV

**49.** $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III **50.** cos $t$ sec $t$, cualquier cuadrante

**51-54** ■ De la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por $t$.

**51.** sen $t > 0$ y cos $t < 0$ **52.** tan $t > 0$ y sen $t < 0$

**53.** csc $t > 0$ y sec $t < 0$ **54.** cos $t < 0$ y cot $t < 0$

**55-64** ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por $t$ está en el cuadrante dado.

**55.** sen $t$, cos $t$; Cuadrante II **56.** cos $t$, sen $t$; Cuadrante IV

**57.** tan $t$, sen $t$; Cuadrante IV **58.** tan $t$, cos $t$; Cuadrante III

**59.** sec $t$, tan $t$; Cuadrante II **60.** csc $t$, cot $t$; Cuadrante III

**61.** tan $t$, sec $t$; Cuadrante III **62.** sen $t$, sec $t$; Cuadrante IV

**63.** $\tan^2 t$, sen $t$; cualquier cuadrante

**64.** $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos $t$; cualquier cuadrante

**65-72** ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de $t$ a partir de la información dada.

**65.** sen $t = \frac{3}{5}$, el punto terminal de $t$ está en el cuadrante II

**66.** cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de $t$ está en el cuadrante III

**67.** sec $t = 3$, el punto terminal de $t$ está en el cuadrante IV

**68.** tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de $t$ está en el cuadrante III

**69.** tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

**70.** sec $t = 2$, sen $t < 0$

**71.** sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

**72.** tan $t = -4$, csc $t > 0$

**73-80** ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

**73.** $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ **74.** $f(x) = x^2 \cos 2x$

**75.** $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **76.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

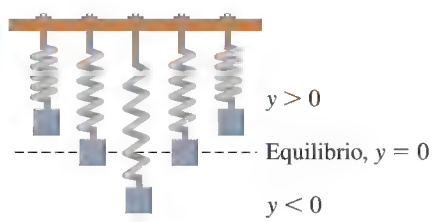
**77.** $f(x) = |x| \cos x$ **78.** $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

**79.** $f(x) = x^3 + \cos x$ **80.** $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

## APLICACIONES

**81. Movimiento armónico** El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde $y$ se mide en pulgadas y $t$ en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

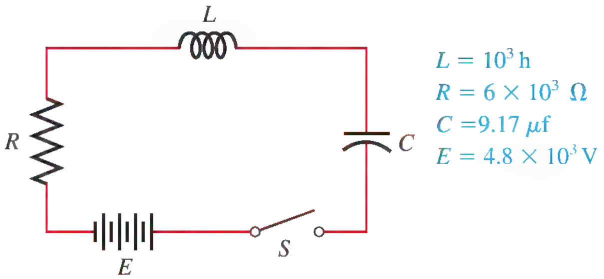
| $t$ | $y(t)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 0.25 | |
| 0.50 | |
| 0.75 | |
| 1.00 | |
| 1.25 | |




**82. Ritmos circadianos** Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica en reposo en el tiempo $t$ está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde $t$ se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las

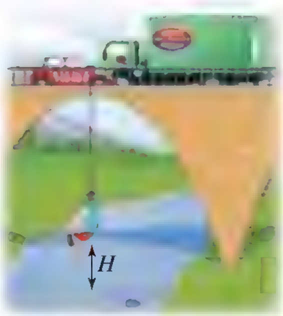
**(a)** 6:00 a.m. **(b)** 10:30 a.m. **(c)** Mediodía **(d)** 8:00 p.m.

**83. Circuito eléctrico** Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado, la corriente $t$ segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t}$ sen $10t$. Encuentre la corriente en los tiempos **(a)** $t = 0.1$ s y **(b)** $t = 0.5$ s.




**84. Salto en bungee** Una saltadora de cuerda elástica (llamada *bungee*) se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez. En el tiempo $t$ segundos después de su salto, su altura $H$ (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Encuentre la altura en que se encuentre ella en los tiempos indicados en la tabla.

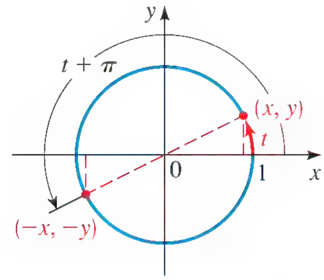
| $t$ | $H(t)$ |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 4 | |
| 6 | |
| 8 | |
| 12 | |




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

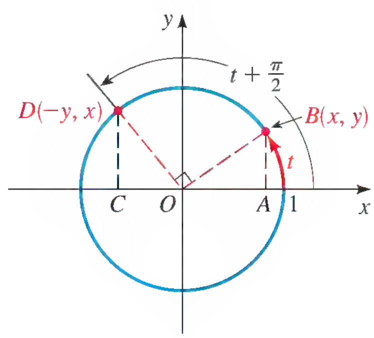
**85. Fórmulas de reducción** Una *fórmula de reducción* es aquella que se puede usar para "reducir" el número de términos en la entrada para una función trigonométrica. Explique usted la forma en que la figura muestra que son válidas las fórmulas de reducción siguientes:

$$\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$
$$\tan(t + \pi) = \tan t$$




**86. Más fórmulas de reducción:** Por el teorema de "ángulo-lado-ángulo" de geometría elemental, los triángulos $CDO$ y $AOB$ de la figura siguiente son congruentes. Explique la forma en que esto demuestra que si $B$ tiene coordenadas $(x, y)$, entonces $D$ tiene coordenadas $(-y, x)$. A continuación, explique cómo es que la figura muestra que las fórmulas de reducción siguientes son válidas:

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$
$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$$
$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$




# 5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones seno y coseno ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno ▶ Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Entonces, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones trigonométricas se grafican en la sección siguiente.

## ▼ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es $2\pi$. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real $t$ es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Como las

funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian con la adición de cualquier múltiplo entero de $2\pi$. En otras palabras,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: Una función $f$ es **periódica** si hay un número positivo $p$ tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda $t$. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **período** de $f$. Si $f$ tiene período $p$, entonces la gráfica de $f$ en cualquier intervalo de longitud $p$ se denomina **período completo** de $f$.

**PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO**

Las funciones seno y coseno tienen período $2\pi$:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

**TABLA 1**

| $t$ | sen $t$ | cos $t$ |
|---|---|---|
| $0 \to \frac{\pi}{2}$ | $0 \to 1$ | $1 \to 0$ |
| $\frac{\pi}{2} \to \pi$ | $1 \to 0$ | $0 \to -1$ |
| $\pi \to \frac{3\pi}{2}$ | $0 \to -1$ | $-1 \to 0$ |
| $\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$ | $-1 \to 0$ | $0 \to 1$ |

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud $2\pi$. Para trazar sus gráficas, primero graficamos un período. Para trazar las gráficas sobre el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla, veamos más de cerca las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen $t$ es la coordenada $y$ del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real $t$. ¿Cómo varía la coordenada $y$ de este punto cuando $t$ aumenta? Es fácil ver que la coordenada $y$ de $P(x, y)$ aumenta a 1, luego disminuye a $-1$ repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea Figura 1.) De hecho, cuando $t$ aumenta de 0 a $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1. Cuando $t$ aumenta de $\pi/2$ a $\pi$, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye de 1 a 0. La Tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para $t$ entre 0 y $2\pi$.

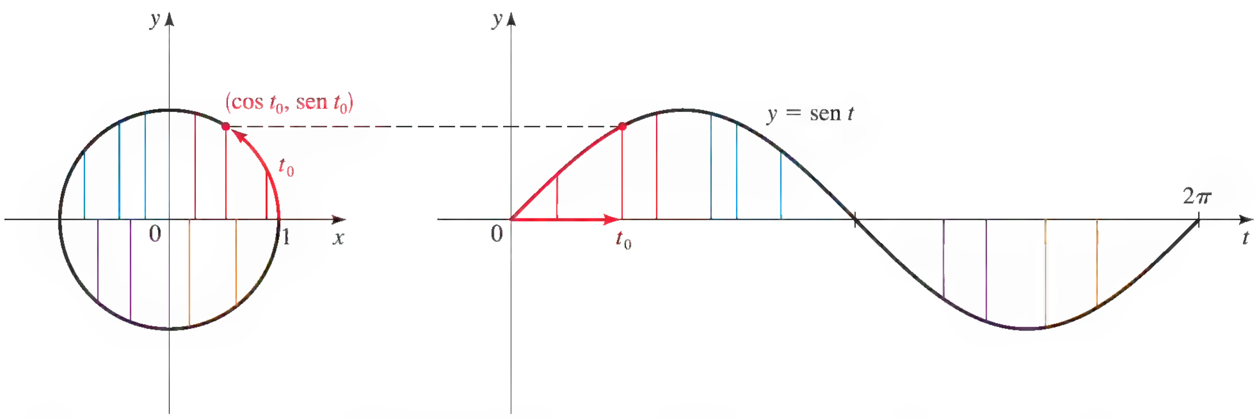



**FIGURA 1**

Para trazar las gráficas en forma más precisa, encontramos otros pocos valores de sen $t$ y cos $t$ en la Tabla 2. Podríamos también hallar otros valores con ayuda de una calculadora.

**TABLA 2**

| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sen $t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 |
| cos $t$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

A continuación usamos esta información para graficar las funciones sen $t$ y cos $t$ para $t$ entre 0 y $2\pi$ en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período $2\pi$, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud $2\pi$.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje $y$.

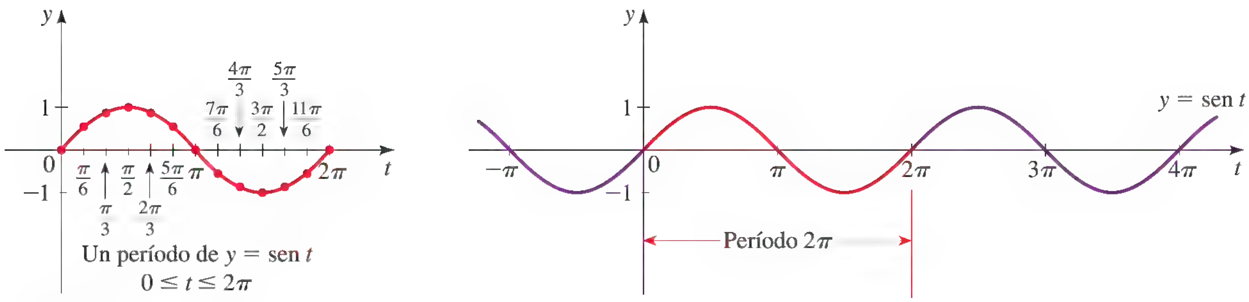



**FIGURA 2** Gráfica de sen $t$

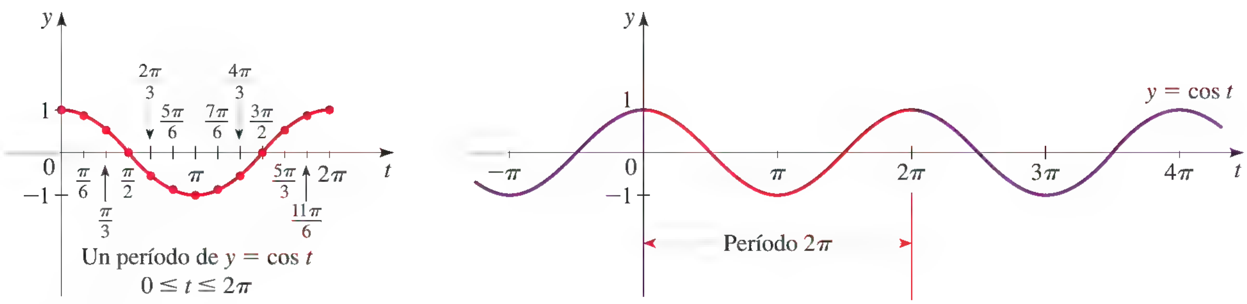



**FIGURA 3** Gráfica de cos $t$

## ▼ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra $x$ para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra $x$ y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

### EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función siguiente.

**(a)** $f(x) = 2 + \cos x$ **(b)** $g(x) = -\cos x$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).

**(b)** La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje $x$.

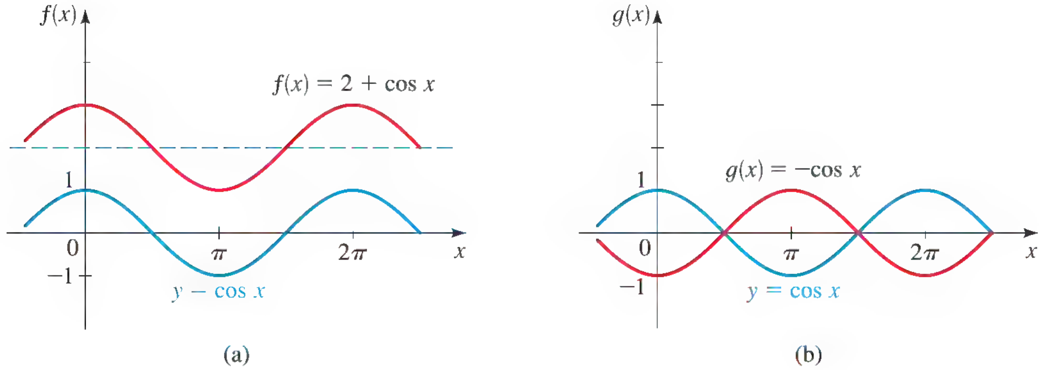



**FIGURA 4**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 3 Y 5

Grafiquemos $y = 2$ sen $x$. Empezamos con la gráfica de $y =$ sen $x$ y multiplicamos por 2 la coordenada $y$ de cada punto. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2}$ sen $x$, empezamos con la gráfica de $y =$ sen $x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada $y$ de cada punto. Esto tiene el efecto de contraer verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea Figura 5).

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

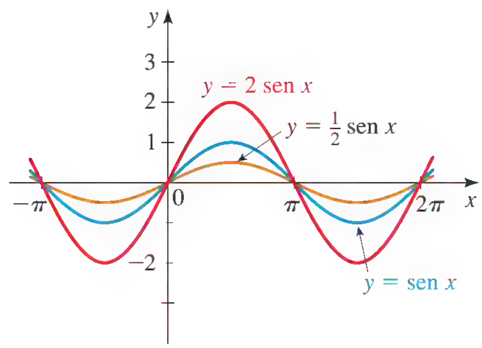



**FIGURA 5**

En general, para las funciones

$$y = a \text{ sen } x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la Figura 6 se ilustran gráficas de $y = a$ sen $x$ para varios valores de $a$.

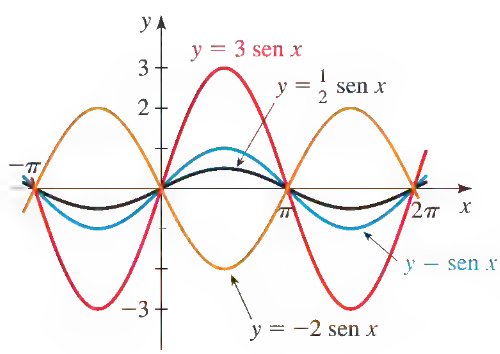



**FIGURA 6**

## EJEMPLO 2 | Alargar una curva coseno

Encuentre la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** La amplitud es $|-3| = 3$, de modo que el valor más grande que la gráfica alcanza es 3 y el valor más pequeño es $-3$. Para trazar la gráfica, empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, alargamos verticalmente la gráfica en un factor de 3 y reflejamos en el eje $x$, llegando a la gráfica de la Figura 7.

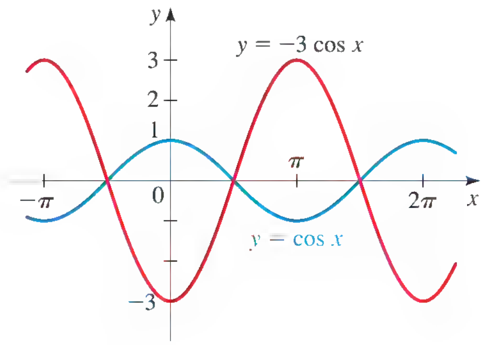



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

Como las funciones seno y coseno tienen períodos $2\pi$, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando $kx$ varía de 0 a $2\pi$, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$ o para $0 \le x \le 2\pi/k$. Entonces estas funciones completan un período cuando $x$ varía entre 0 y $2\pi/k$ y por lo tanto tienen período $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se denominan **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. (En forma colectiva, las curvas sinusoidales y las cosenoidales se conocen como curvas **sinusoidales**.

### CURVAS SENO Y COSENO

Las curvas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$ y **período** $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

Para ver cómo afecta el valor de $k$ a la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Como el período es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea Figura 8(a)). Para la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, de modo que la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea Figura 8(b)). Vemos que el efecto es *contraer* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

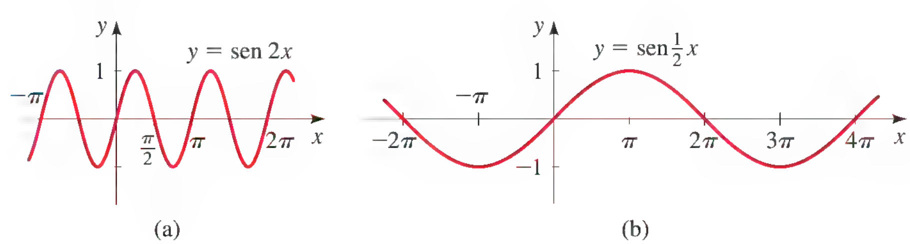



**FIGURA 8**

Por comparación, en la Figura 9 mostramos las gráficas de un período de la curva seno $y = a \text{ sen } kx$ para varios valores de $k$.

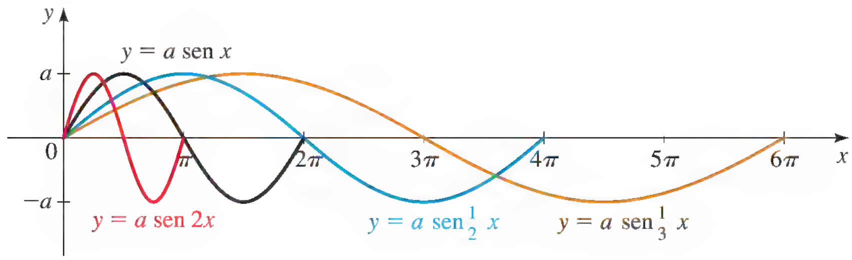



FIGURA 9

## EJEMPLO 3 | Amplitud y período

Encuentre la amplitud y período de cada función y trace su gráfica.

**(a)** $y = 4 \cos 3x$ **(b)** $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

### SOLUCIÓN

**(a)** Obtenemos la amplitud y período a partir de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$y = 4 \cos 3x$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$$

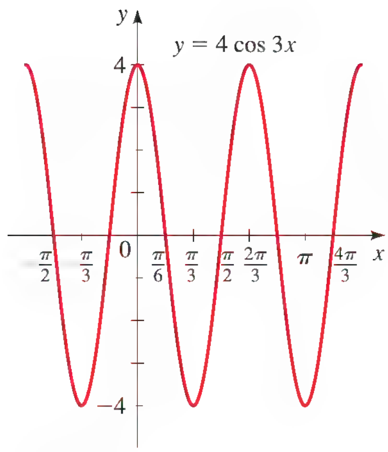



FIGURA 10

La amplitud es 4 y el período es $2\pi/3$. La gráfica se ilustra en la Figura 10.

**(b)** Para $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

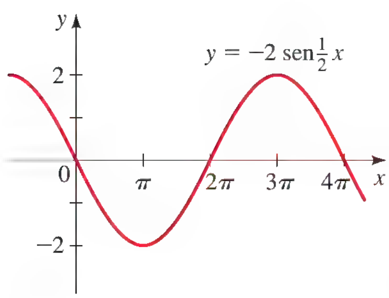



FIGURA 11

La gráfica está en la Figura 11.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **21**

Las gráficas de funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas horizontalmente en una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$ o a la izquierda si $b < 0$. El número $b$ es el *desfase*. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

### CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **período** $2\pi/k$, y **desfase** $b$.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ se muestran en la Figura 12.

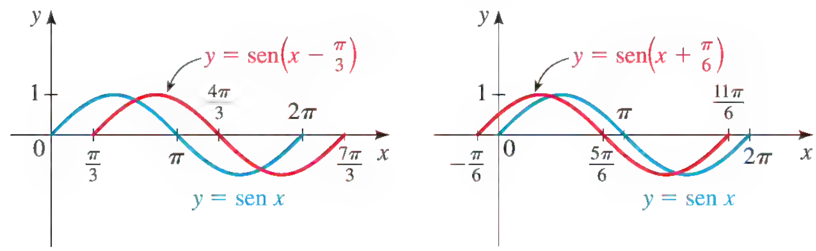



**FIGURA 12**

## EJEMPLO 4 | Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y grafique un período completo.

**SOLUCIÓN** Obtenemos la amplitud, período y desfase de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 3, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{desfase} = \frac{\pi}{4} \text{ (a la derecha)}$$

Como el desfase es $\pi/4$ y el período es $\pi$, un período completo ocurre sobre el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y a continuación graficamos una curva seno con amplitud 3, como en la Figura 13.

Veamos ahora otra forma de hallar un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo. Como el período de $y = \operatorname{sen} x$ es $2\pi$, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ pasará por un período completo a medida que $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe de 0 a $2\pi$.

| Inicio de período | Fin de período: |
|---|---|
| $2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$ | $2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$ |
| $x - \frac{\pi}{4} = 0$ | $x - \frac{\pi}{4} = \pi$ |
| $x = \frac{\pi}{4}$ | $x = \frac{5\pi}{4}$ |

Entonces, graficamos un período sobre el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$..

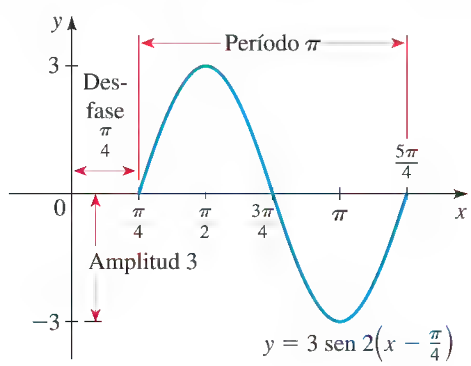



**FIGURA 13**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

## EJEMPLO 5 | Curva coseno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de

$$y = \frac{3}{4}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un período completo.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para hacer esto, factorizamos 2 de la expresión $2x + \frac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desfase } \frac{\pi}{3} \text{ a la } \textit{izquierda}$$

Podemos encontrar un período completo, como sigue:

Inicio del período: Fin del período:

$2x + \frac{2\pi}{3} = 0 \qquad 2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$

$2x = -\frac{2\pi}{3} \qquad 2x = \frac{4\pi}{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} \qquad x = \frac{2\pi}{3}$

De este modo podemos graficar un período sobre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

A partir de esta información tenemos que un período de esta curva coseno comienza y termina en $-\pi/3$. Para trazar la gráfica sobre el intervalo, éste lo dividimos en cuatro partes iguales y graficamos la curva coseno con amplitud como se muestra en la Figura 14.

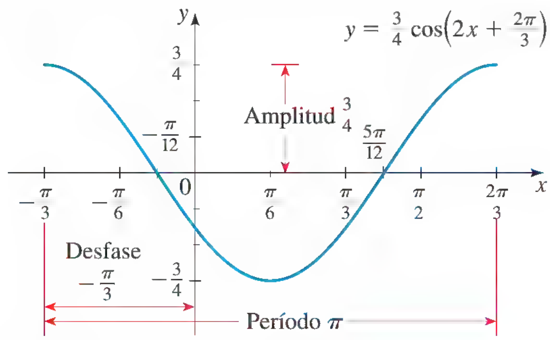



**FIGURA 14**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

## Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

Cuando use una calculadora graficadora o computadora para graficar una función, es importante escoger cuidadosamente el rectángulo de vista para producir una gráfica razonable de la función. Esto es en especial verdadero para funciones trigonométricas; el siguiente ejemplo muestra que, si no se tiene cuidado, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

Vea en la Sección 1.9 las guías sobre cómo seleccionar un rectángulo de vista apropiado.

### EJEMPLO 6 | Selección de un rectángulo de vista

Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

**SOLUCIÓN** La Figura 15(a) muestra la gráfica de $f$ producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de vista $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece ser razonable, pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que aparecen en la Figura 15, las gráficas se verán muy diferentes. Algo extraño está pasando.

El aspecto de las gráficas de la Figura 15 depende de la máquina que se use. Las gráficas que el lector obtenga con su calculadora graficadora podrían no parecerse a estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

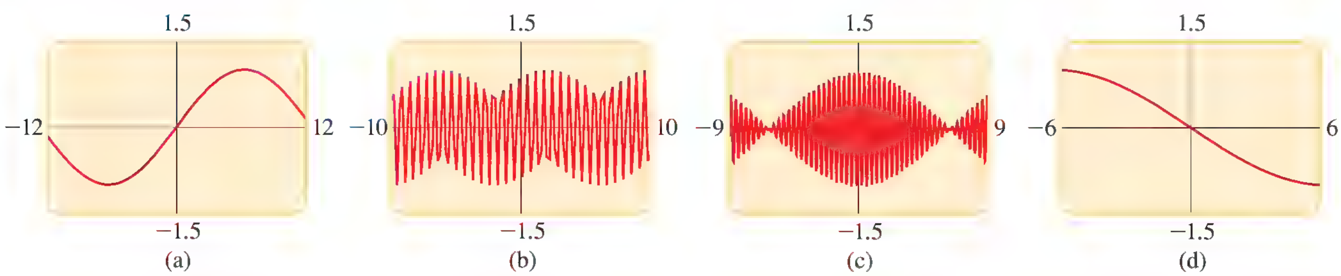



**FIGURA 15** Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de vista.

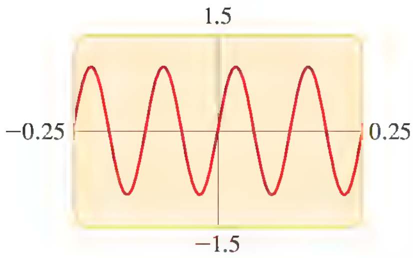



**FIGURA 16** $f(x) = \text{sen } 50x$

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de vista apropiado, necesitamos hallar el período de la función $y = \text{sen } 50x$:

$$\text{período} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos trabajar con pequeños valores de $x$ para mostrar sólo unas pocas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se ilustra en la Figura 16.

Ahora vemos lo que estaba mal en la Figura 15. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora localiza puntos y los enlaza, se pierden la mayor parte de los puntos máximo y mínimo y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

La función $h$ del Ejemplo 7 es **periódica** con período $2\pi$. En general, las funciones que son sumas de funciones de la siguiente lista son periódicas:

$1, \cos kx, \cos 2kx, \cos 3kx, \ldots$

$\text{sen } kx, \text{sen } 2kx, \text{sen } 3kx, \ldots$

Aun cuando estas funciones parecen ser especiales (notables), son en realidad fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (vea página 501) descubrió que casi toda función periódica se puede escribir como una suma (por lo general una suma infinita) de estas funciones. Esto es notable porque significa que cualquier situación, en la que se presente una variación periódica, se puede describir matemáticamente usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en discos compactos.

## EJEMPLO 7 | Una suma de curvas seno y coseno

Grafique $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = \text{sen } 2x$, y $h(x) = 2 \cos x + \text{sen } 2x$ en una pantalla común para ilustrar el método de adición gráfica.

**SOLUCIÓN** Observe que $h = f + g$, de modo que su gráfica se obtiene sumando las coordenadas $y$ correspondientes de las gráficas de $f$ y $g$. Las gráficas de $f$, $g$ y $h$ se muestran en la Figura 17.

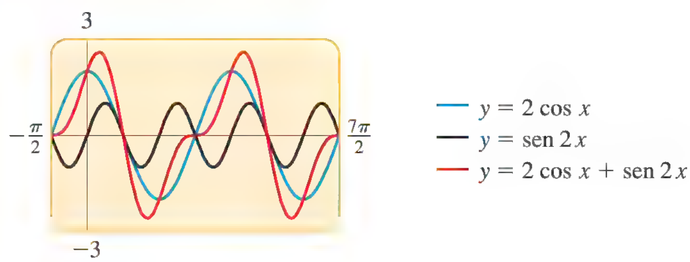



**FIGURA 17**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

## EJEMPLO 8 | Una curva coseno con amplitud variable

Grafique las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una pantalla común. Comente y explique sobre la relación entre las gráficas.

**SOLUCIÓN** La Figura 18 muestra las tres gráficas en el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Parece que la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi$ se encuentra entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

Para entender esto, recuerde que los valores de cos $6x$ están entre $-1$ y 1, es decir,

$$-1 \leq \cos 6\pi x \leq 1$$

para todos los valores de $x$. Multiplicando las desigualdades por $x^2$ y observando que $x^2 \geq 0$, obtenemos

$$x^2 \leq x^2 \cos 6\pi x \leq x^2$$

Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ forman una frontera para la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. (Observe que las gráficas se tocan cuando $6\pi x = \pm 1$.)

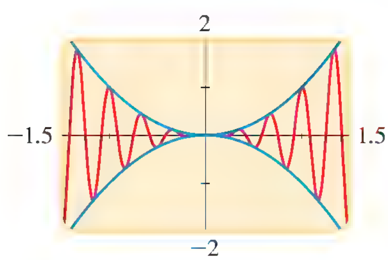
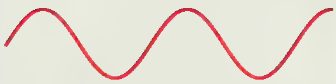



**FIGURA 18** $y = x^2 \cos 6\pi x$

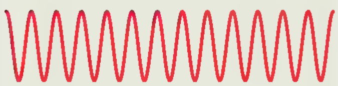
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

El Ejemplo 8 muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x) \cos kx$, la función $a$ determina cómo varía la amplitud de $f$, y la gráfica de $f$ está entre las gráficas de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. A continuación veamos otro ejemplo.

**Radio AM y FM**
Las transmisiones de radio están formadas por ondas de sonido sobrepuestas en una forma de onda electromagnética llamada **señal portadora**.

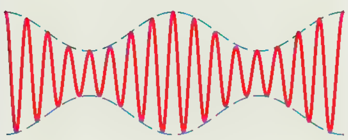


Onda de sonido



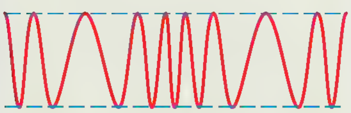
Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, llamadas **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En emisoras de AM, la onda de sonido cambia, o **modula**, la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin cambio.



Señal de AM.

En emisoras de FM, la onda de sonido modula la frecuencia, pero la amplitud permanece igual.



Señal de FM.

## EJEMPLO 9 | Curva coseno con amplitud variable

Grafique la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

**SOLUCIÓN** La gráfica aparece en la Figura 19. Aun cuando está trazada por una computadora, podríamos haberla hecho manualmente trazando primero las curvas de frontera $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de $f$ es una curva coseno que está entre las gráficas de estas dos funciones.

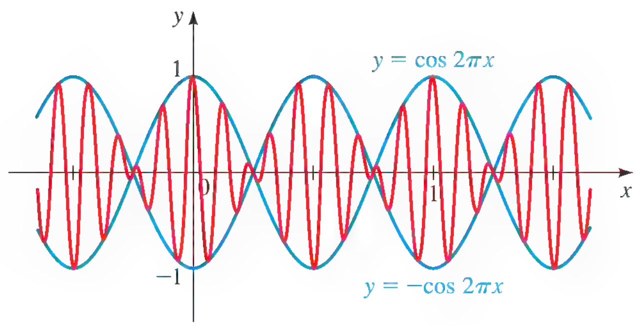


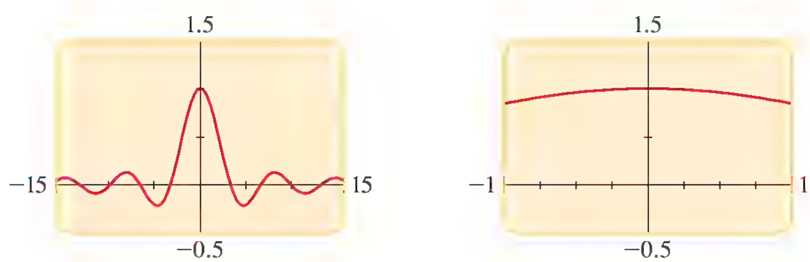

**FIGURA 19** $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

## EJEMPLO 10 | Una curva seno con amplitud amortiguada

La función $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ es importante en cálculo. Grafique esta función y comente sobre su comportamiento cuando $x$ es cercana a 0.

**SOLUCIÓN** El rectángulo de vista $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ que se ilustra en la Figura 20(a) da una buena vista general de la gráfica de $f$. El rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la Figura 20(b) se enfoca en el comportamiento de $f$ cuando $x \approx 0$. Observe que aun cuando $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ (en otras palabras, 0 no está en el dominio de $f$), los valores de $f$ parecen aproximarse a 1 cuando $x$ se acerca a 0. Este dato es crucial en cálculo.




(a) (b)

**FIGURA 20** $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

La función del Ejemplo 10 se puede escribir como

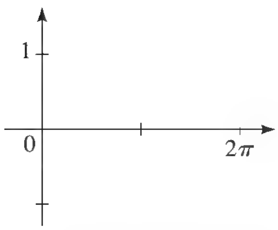
$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ sen } x$$

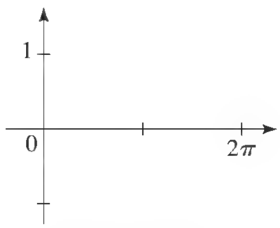
y puede entonces verse como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

## 5.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Las funciones trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ tienen amplitud ____y período _____. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $|2\pi|$.




2. La función trigonométrica $y = 3\,\text{sen}\, 2x$ tiene amplitud______ y período _______.

### HABILIDADES

**3-16** ■ Grafique la función.

3. $f(x) = 1 + \cos x$
4. $f(x) = 3 + \text{sen}\, x$
5. $f(x) = -\text{sen}\, x$
6. $f(x) = 2 - \cos x$
7. $f(x) = -2 + \text{sen}\, x$
8. $f(x) = -1 + \cos x$
9. $g(x) = 3\cos x$
10. $g(x) = 2\,\text{sen}\, x$
11. $g(x) = -\frac{1}{2}\,\text{sen}\, x$
12. $g(x) = -\frac{2}{3}\cos x$
13. $g(x) = 3 + 3\cos x$
14. $g(x) = 4 - 2\,\text{sen}\, x$
15. $h(x) = |\cos x|$
16. $h(x) = |\text{sen}\, x|$

**17-28** ■ Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

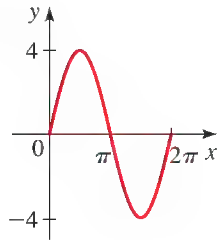
17. $y = \cos 2x$
18. $y = -\text{sen}\, 2x$
19. $y = -3\,\text{sen}\, 3x$
20. $y = \frac{1}{2}\cos 4x$
21. $y = 10\,\text{sen}\, \frac{1}{2}x$
22. $y = 5\cos \frac{1}{4}x$
23. $y = -\frac{1}{3}\cos \frac{1}{3}x$
24. $y = 4\,\text{sen}(\quad 2x)$
25. $y = -2\,\text{sen}\, 2\pi x$
26. $y = -3\,\text{sen}\, \pi x$
27. $y = 1 + \frac{1}{2}\cos \pi x$
28. $y = -2 + \cos 4\pi x$

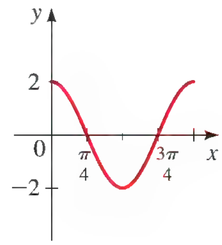
**29-42** ■ Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completo.

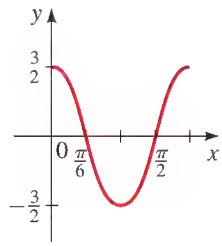
29. $y = \cos\left(x \quad \frac{\pi}{2}\right)$
30. $y = 2\,\text{sen}\left(x \quad \frac{\pi}{3}\right)$
31. $y = -2\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
32. $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
33. $y = -4\,\text{sen}\, 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
34. $y = \text{sen}\, \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
35. $y = 5\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
36. $y = 2\,\text{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$
37. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
38. $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$
39. $y = 3\cos \pi(x + \frac{1}{2})$
40. $y = 3 + 2\,\text{sen}\, 3(x + 1)$
41. $y = \text{sen}(\pi + 3x)$
42. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

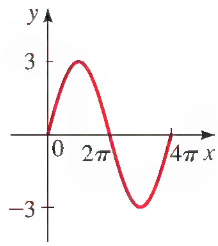
**43-50** ■ Nos dan la gráfica de un período completo de una curva seno o coseno.
**(a)** Encuentre la amplitud, período y desfase.
**(b)** Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

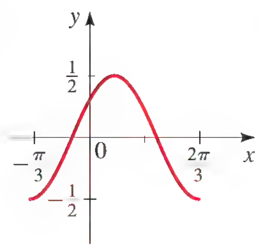
$$y = a\,\text{sen}\, k(x \quad b) \qquad \text{o} \qquad y = a\cos k(x \quad b)$$

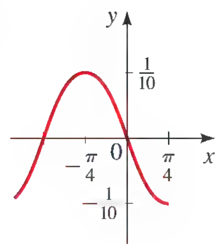
43.


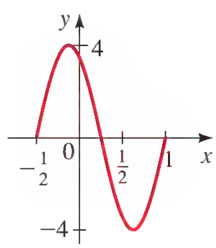

44.


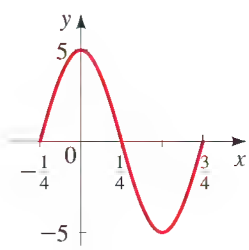

45.



46.



47.



48.



49.



50.



**51-58** ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para cada función, y úselo para trazar la gráfica.

51. $f(x) = \cos 100x$
52. $f(x) = 3\,\text{sen}\, 120x$
53. $f(x) = \text{sen}(x/40)$
54. $f(x) = \cos(x/80)$
55. $y = \tan 25x$
56. $y = \csc 40x$
57. $y = \text{sen}^2 20x$
58. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

**59-60** ■ Grafique $f$, $g$ y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

**59.** $f(x) = x, \quad g(x) = \text{sen } x$

**60.** $f(x) = \text{sen } x, \quad g(x) = \text{sen } 2x$

**61-66** ■ Grafique las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

**61.** $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2 \text{sen } x$

**62.** $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

**63.** $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} \text{ sen } 5\pi x$

**64.** $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

**65.** $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

**66.** $y = \text{sen } 2\pi x, \quad y = -\text{sen } 2\pi x, \quad y = \text{sen } 2\pi x \text{ sen } 10\pi x$

**67-70** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

**67.** $y = \text{sen } x + \text{sen } 2x$

**68.** $y = x - 2 \text{ sen } x, 0 \leq x \leq 2\pi$

**69.** $y = 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x$

**70.** $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen } x}$

**71-74** ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación que estén sobre el intervalo $[0, \pi]$. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

**71.** $\cos x = 0.4$

**72.** $\tan x = 2$

**73.** $\csc x = 3$

**74.** $\cos x = x$

**75-76** ■ Nos dan una función $f$.

**(a)** ¿$f$ es par, impar o ninguna de éstas?

**(b)** Encuentre los puntos de intersección $x$ de la gráfica de $f$.

**(c)** Grafique $f$ en un rectángulo de vista apropiado.

**(d)** Describa el comportamiento de la función a medida que $x \to \pm\infty$.

**(e)** Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando $x$ se aproxima a 0?

**75.** $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

**76.** $f(x) = \dfrac{\text{sen } 4x}{2x}$

## APLICACIONES

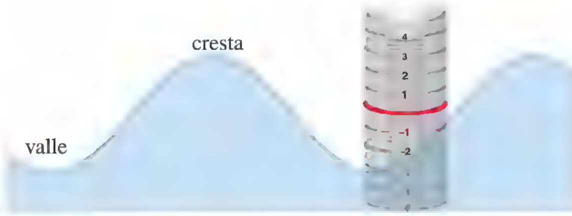
**77. Altura de una ola** Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo $t$ segundos.

**(a)** Encuentre el período de la ola.

**(b)** Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.




**78. Vibraciones de sonido** Se pulsa un diapasón, produciendo un tono puro cuando vibran sus puntas. Las vibraciones son modeladas por la función

$$v(t) = 0.7 \text{ sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo $t$ segundos.

**(a)** Encuentre el período de la vibración.

**(b)** Encuentre la frecuencia de la vibración, es decir, el número de veces que la punta vibra por segundo.

**(c)** Grafique la función $v$.

**79. Presión sanguínea** Cada vez que pulsa nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las *lecturas de presión sanguínea* se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \text{ sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo $t$ medida en minutos.

**(a)** Encuentre el período de $p$.

**(b)** Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

**(c)** Grafique la función $p$.

**(d)** Encuentre la lectura de presión sanguínea. ¿Cómo se compara esto contra la presión sanguínea normal?

**80. Estrellas variables** Las estrellas variables son aquellas cuyo brillo varía periódicamente. Una de las más visibles es R Leonis; su brillo está modelada por la función

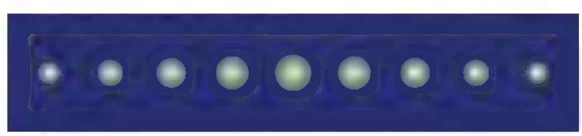
$$b(t) = 7.9 - 2.1 \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right)$$

donde $t$ se mide en días.

**(a)** Encuentre el período de R Leonis.

**(b)** Encuentre el brillo máximo y mínimo.

**(c)** Grafique la función $b$.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

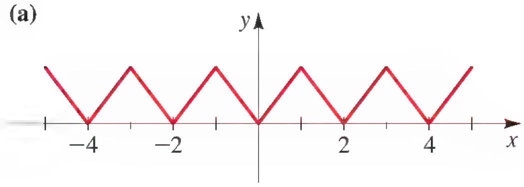
**81. Composiciones que contienen funciones trigonométricas** Este ejercicio explora el efecto de la función interior $g$ en una función compuesta $y = f(g(x))$.

**(a)** Grafique la función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de vista $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

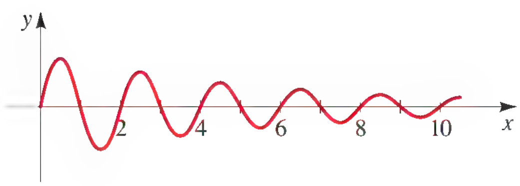
**(b)** Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

**82. Funciones periódicas I** Recuerde que una función $f$ es *periódica* si hay un número positivo $p$ tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda $t$, y la más pequeña $p$ (si existe) es el *período* de $f$. La gráfica de una función de período $p$ se ve igual en cada intervalo de longitud $p$, de modo que podemos fácilmente determinar el período a partir de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica; si es periódica, encuentre el período.

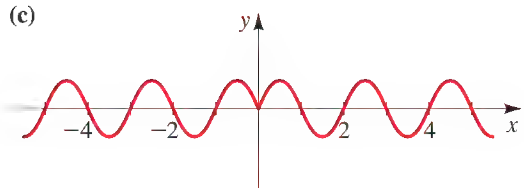
**(a)**



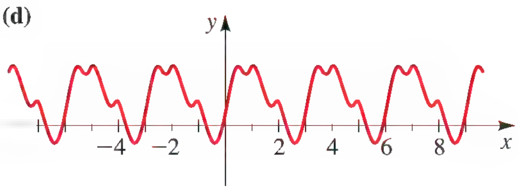

**(b)**




**(c)**




**(d)**




**83. Funciones periódicas II** Use calculadora graficadora para graficar las siguientes funciones. De la gráfica, determine si la función es periódica; si es periódica, encuentre el período. (Vea página 156 para la definición de $[\![x]\!]$.)

**(a)** $y = |\operatorname{sen} x|$

**(b)** $y = \operatorname{sen}|x|$

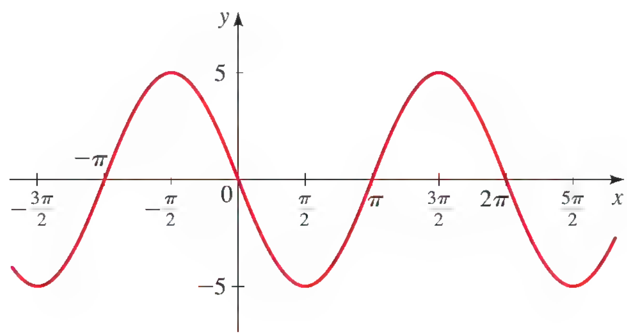
**(c)** $y = 2^{\cos x}$

**(d)** $y = x - [\![x]\!]$

**(e)** $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

**(f)** $y = \cos(x^2)$

**84. Curvas sinusoidales** La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \operatorname{sen} x$ es también al mismo tiempo una curva coseno: $y = \cos(x - \pi/2)$. De hecho, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desfase diferente, y cualquier curva coseno también es una curva seno. Las curvas seno y coseno se conocen en forma colectiva como *sinusoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las formas posibles de expresarla como curva seno $y = a\operatorname{sen}(x - b)$ o como curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa usted que ha encontrado todas las opciones posibles para $a$ y $b$ en cada caso.




**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Modelos depredador/presa**

En este proyecto exploramos el uso de funciones sinusoidales al modelar la población de un depredador y su presa. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 5.4 MÁS GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

En esta sección graficamos las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, y transformaciones de estas funciones.

## ▼ Gráficas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Empezamos por expresar las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que las funciones seno y coseno tienen período $2\pi$. Como las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno, respectivamente, también tienen período $2\pi$ (vea Ejercicio 55). Las funciones tangente y cotangente, sin embargo, tienen período $\pi$ (vea Ejercicio 85 de la Sección 5.2).

**PROPIEDADES PERIÓDICAS**

Las funciones tangente y cotangente tienen período $\pi$:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen período $2\pi$:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

| $x$ | $\tan x$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $\pi/6$ | 0.58 |
| $\pi/4$ | 1.00 |
| $\pi/3$ | 1.73 |
| 1.4 | 5.80 |
| 1.5 | 14.10 |
| 1.55 | 48.08 |
| 1.57 | 1,255.77 |
| 1.5707 | 10,381.33 |

Primero trazamos la gráfica de la función tangente. Como tiene período $\pi$, necesitamos sólo trazar la gráfica sobre cualquier intervalo de longitud $\pi$ y luego repetir la configuración a izquierda y derecha. Trazamos la gráfica sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Como $\tan(\pi/2)$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidas, es necesario tener cuidado trazar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y $-\pi/2$. A medida que $x$ se acerca a $\pi/2$ por medio de valores menores a $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se hace grande. Para ver esto, observe que cuando $x$ se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ se aproxima a 0 y $\operatorname{sen} x$ se aproxima a 1 y, por lo tanto, $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ es grande. Al margen se muestra una tabla de valores de $\tan x$ para $x$ cercana a $\pi/2$ ($\approx 1.570796$).

Entonces, al escoger $x$ cercana lo suficiente a $\pi/2$ hasta valores menores a $\pi/2$, podemos hacer el valor de $\tan x$ mayor a cualquier número positivo dado. Expresamos esto escribiendo

$$\tan x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

Esto se lee "tan $x$ se aproxima al infinito cuando $x$ se aproxima a $\pi/2$ por la izquierda".

Análogamente, al escoger $x$ cercana a $-\pi/2$ hasta valores mayores a $-\pi/2$, podemos hacer $\tan x$ más pequeña que cualquier número negativo dado. Escribimos esto como

La notación de flecha se estudia en la Sección 3.7.

$$\tan x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$$

Esto se lee "tan $x$ se aproxima al infinito negativo cuando $x$ se aproxima a $-\pi/2$ por la derecha".

Las asíntotas se estudian en la Sección 3.7.

Entonces, la gráfica de $y = \tan x$ se aproxima a las rectas verticales $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Por lo tanto, estas rectas son **asíntotas verticales**. Con la información que tenemos hasta ahora, trazamos la gráfica de $y = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ en la Figura 1. La gráfica

completa de tangente (vea Figura 5(a) en la página siguiente) se obtiene ahora usando el dato de que la tangente es periódica con período $\pi$.

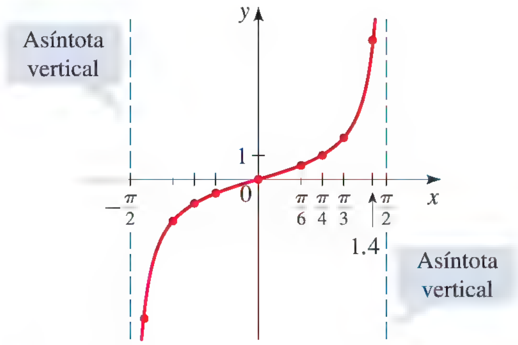



**FIGURA 1**
Un período de $y = \tan x$

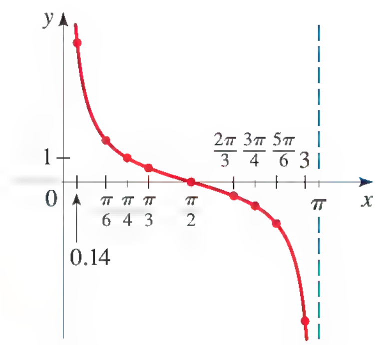



**FIGURA 2**
Un período de $y = \cot x$

La función $y = \cot x$ está graficada sobre el intervalo $(0, \pi)$ por un análisis similar (vea Figura 2). Como $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$ con $n$ un entero, su gráfica completa (en la Figura 5(b) en la página siguiente) tiene asíntotas verticales en estos valores.

Para graficar las funciones cosecante y secante, usamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por lo tanto, para graficar $y = \csc x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas $y$ de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$. (Vea Figura 3.) Análogamente, para graficar $y = \sec x$, tomamos las recíprocas de las coordenadas $y$ de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$. (Vea Figura 4.)

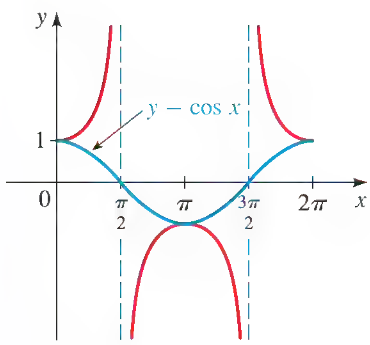



**FIGURA 3**
Un período de $y = \sec x$

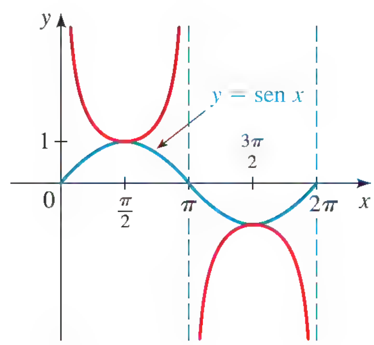



**FIGURA 4**
Un período de $y = \csc x$

Consideremos más cercanamente la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Necesitamos examinar los valores de la función cerca de 0 y $\pi$, porque en estos valores $\operatorname{sen} x = 0$ y $\csc x$ está así indefinido. Vemos que

$$\csc x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \pi^-$$

Por lo tanto, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. Sobre el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza en la misma forma. Los valores de $\csc x$ sobre ese intervalo son los mismos que los del intervalo $0 < x < \pi$ excepto por el signo (vea Figura 3). La gráfica completa de la Figura 5(c) se obtiene ahora del hecho de que la función cosecante es perió-

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**Evaluación de funciones en una calculadora**

¿En qué forma su calculadora evalúa sen $t$, cos $t$, $e^t$, ln $t$, $\sqrt{t}$ y otras funciones como éstas? Un método es aproximar estas funciones por medio de polinomiales, porque las polinomiales son fáciles de evaluar. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

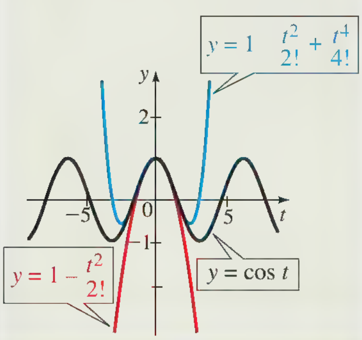
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Estas notables fórmulas fueron encontradas por el matemático inglés Brook Taylor (1685-1731). Por ejemplo, si usamos los primeros tres términos de la serie de Taylor para hallar cos(0.4), obtenemos

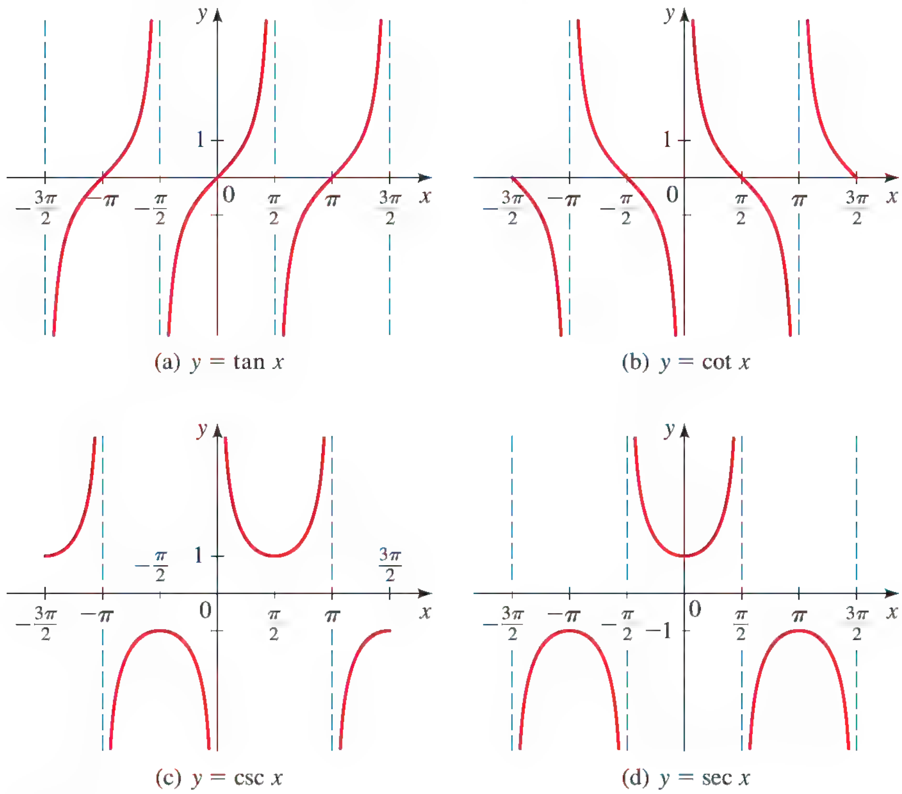
$$\cos 0.4 \approx 1 - \frac{(0.4)^2}{2!} + \frac{(0.4)^4}{4!}$$

$$\approx 0.92106667$$

(Compare esto con el valor que usted obtiene en su calculadora.) La gráfica muestra que cuantos más términos de la serie utilicemos, las polinomiales se aproximan más cercanamente a la función cos $t$.



dica con período $2\pi$. Observe que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde sen $x = 0$, es decir, en $x = n\pi$, para $n$ un entero.



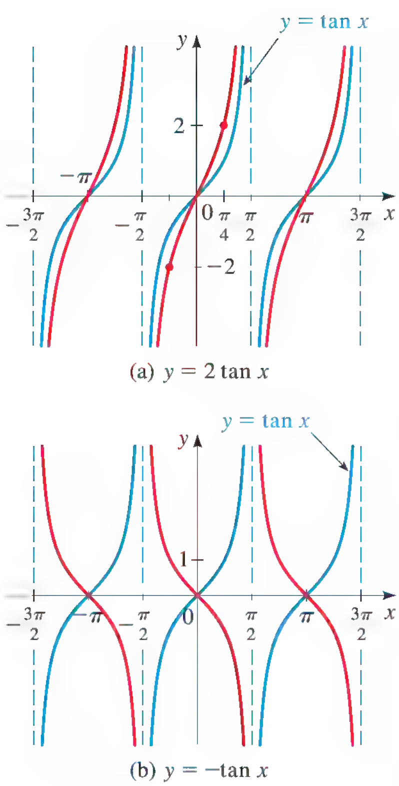
(a) $y = \tan x$ (b) $y = \cot x$

(c) $y = \csc x$ (d) $y = \sec x$

**FIGURA 5**

La gráfica de $y = \sec x$ se traza de un modo semejante. Observe que el dominio de $\sec x$ es el conjunto de todos los números reales que no sean $x = (\pi/2) + n\pi$, para $n$ un entero, de modo que la gráfica tiene asíntotas verticales en esos puntos. La gráfica completa se muestra en la Figura 5(d).

Es evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, y $y = \csc x$ son simétricas respecto del origen, mientras que la de $y = \sec x$ es simétrica respecto del eje $y$. Esto es porque las funciones tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que la función secante es una función par.




(a) $y = 2 \tan x$

(b) $y = -\tan x$

**FIGURA 6**

## ▼ Gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente

A continuación consideramos gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

### EJEMPLO 1 | Graficar curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = 2 \tan x$ **(b)** $y = -\tan x$

**SOLUCIÓN** Primero graficamos $y = \tan x$ y luego la transformamos según sea necesario.

**(a)** Para graficar $y = 2 \tan x$, multiplicamos la coordenada $y$ de cada punto en la gráfica de $y = \tan x$ por 2. La gráfica resultante se muestra en la Figura 6(a).

**(b)** La gráfica de $y = -\tan x$ en la Figura 6(b) se obtiene de la de $y = \tan x$ por reflexión en el eje $x$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9** Y **11**

Como las funciones tangente y cotangente tienen período $\pi$, las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando $kx$ varía de 0 a $\pi$, es decir, para $0 \le kx \le \pi$. Resolviendo esta desigualdad, obtenemos $0 \le x \le \pi/k$. Por lo tanto, cada una de ellas tiene período $\pi/k$.

**CURVAS TANGENTE Y COTANGENTE**

Las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

tienen período $\pi/k$.

Por lo tanto, un período completo de las gráficas de estas funciones se presentan sobre cualquier intervalo de longitud $\pi/k$. Para trazar un período completo de estas gráficas, es conveniente seleccionar un intervalo entre asíntotas verticales:

Para graficar un período de $y = a \tan kx$, un intervalo apropiado es $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para graficar un período de $y = a \cot kx$, un intervalo apropiado es $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

## EJEMPLO 2 | Graficar curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = \tan 2x$ **(b)** $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El período es $\pi/2$ y un intervalo apropiado es $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos extremos $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. De esta manera, graficamos un período completo de la función en $(-\pi/4, \pi/4)$. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está contraída horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$. A continuación repetimos esa porción de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Vea Figura 7(a).

**(b)** La gráfica es la misma que la del inciso (a), pero está desplazada a la derecha $\pi/4$, como se ve en la Figura 7(b).

Como $y = \tan x$ completa un período entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, la función $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ completa un período cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varía de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.
Inicio de período: Fin de período

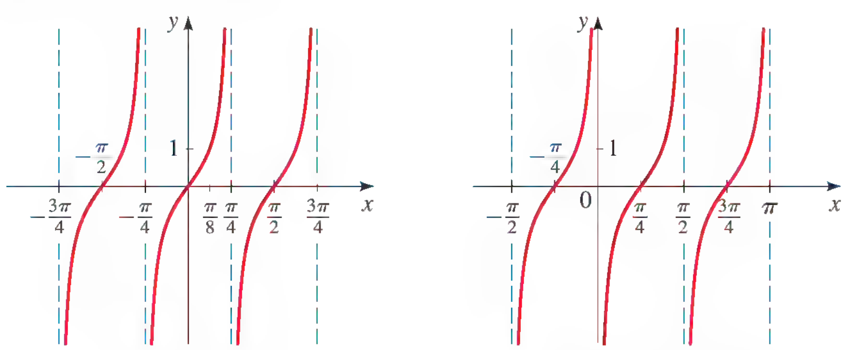
Inicio de período: Fin de período

$2(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

$x = 0$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2}$

Entonces graficamos un período sobre el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.




(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **39**

## EJEMPLO 3 | Un desplazamiento de una curva cotangente

Grafique $y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$.

**SOLUCIÓN** Primero ponemos esto en la forma $y = a\cot k(x - b)$ al factorizar 3 de la expresión $3x - \frac{\pi}{2}$:

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Como $y = \cot x$ completa un período entre $x = 0$ y $x = \pi$, la función $y = 2\cot(3x - \frac{\pi}{2})$ completa un período cuando $3x - \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a $\pi$.

| Inicio de período: | Fin de período |
|---|---|
| $3x - \frac{\pi}{2} = 0$ | $3x - \frac{\pi}{2} = \pi$ |
| $3x = \frac{\pi}{2}$ | $3x = \frac{3\pi}{2}$ |
| $x = \frac{\pi}{6}$ | $x = \frac{\pi}{2}$ |

Entonces graficamos un período sobre el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

Así, la gráfica es la misma que la de $y = 2\cot 3x$ pero está desplazada a la derecha $\pi/6$. El período de $y = 2\cot 3x$ es $\pi/3$, y un intervalo apropiado es $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente para la gráfica deseada, desplazamos este intervalo a la derecha $\pi/6$. Esto da

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Finalmente, graficamos un período en la forma de cotangente sobre el intervalo $(\pi/6, \pi/2)$ y repetimos la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. (Vea Figura 8.)

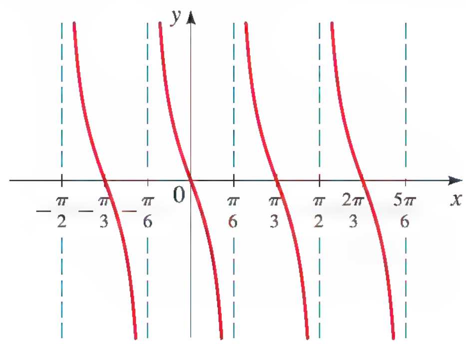



**FIGURA 8**
$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

## Gráficas de transformaciones de las funciones cosecante y secante

Ya hemos observado que las funciones cosecante y secante son las recíprocas de las funciones seno y coseno. Entonces, el siguiente resultado es similar del resultado para curvas seno y coseno en la Sección 5.3.

### CURVAS COSECANTE Y SECANTE

Las funciones

$$y = a\csc kx \qquad \text{y} \qquad y = a\sec kx \qquad (k > 0)$$

tienen período $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

## EJEMPLO 4 | Graficar curvas cosecantes

Grafique cada una de las funciones siguientes.

**(a)** $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ **(b)** $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El período es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo apropiado es $[0, \pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo siempre que sen $2\pi = 0$. Entonces las asíntotas sobre este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. Con esta información trazamos sobre el intervalo $[0, \pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un período de la función cosecante. La gráfica completa de la Figura 9(a) se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

**(b)** Primero escribimos

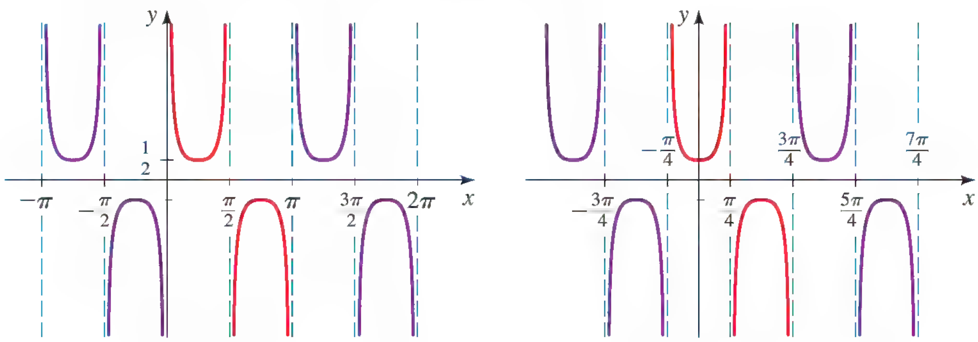
$$y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

De esto vemos que la gráfica es la misma que la del inciso (a) pero desplazada a la izquierda $\pi/4$. La gráfica se ilustra en la figura 9(b).

Como $y = \csc x$ completa un período entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, la función $y = \frac{1}{2}\csc(2x + \frac{\pi}{2})$ completa un período cuando $2x + \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a $2\pi$.

| Inicio de período: | Fin de período: |
|---|---|
| $2x + \frac{\pi}{2} = 0$ | $2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ |
| $2x = -\frac{\pi}{2}$ | $2x = \frac{3\pi}{2}$ |
| $x = -\frac{\pi}{4}$ | $x = \frac{3\pi}{4}$ |

Entonces graficamos un período sobre el intervalo ( $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$).




(a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ (b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

**FIGURA 9**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **45**

## EJEMPLO 5 | Graficar una curva secante

Grafique $y = 3 \sec \frac{1}{2}x$.

**SOLUCIÓN** El período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo apropiado es $[0, 4\pi]$ y las asíntotas se presentan sobre este intervalo en donde $\cos \frac{1}{2}x = 0$. Entonces, las asíntotas sobre este intervalo son $x = \pi$, $x = 3\pi$. Con esta información trazamos sobre el intervalo $[0, 4\pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un período de la función secante. La gráfica completa de la Figura 10 se obtiene al repetir esta parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha.

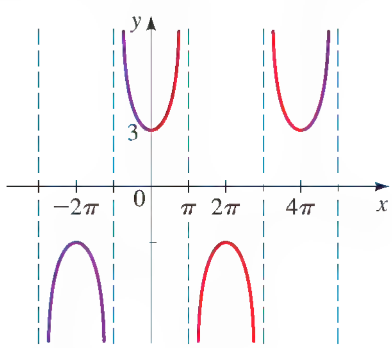



**FIGURA 10** $y = 3 \sec \frac{1}{2}x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

## 5.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

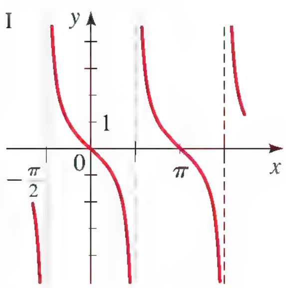
1. La función trigonométrica $y = \tan x$ tiene período ________ y asíntotas $x =$ ________. Trace una gráfica de esta función sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.
2. La función trigonométrica $y = \csc x$ tiene período ________ y asíntotas $x =$ ____. Trace una gráfica de esta función sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

### HABILIDADES

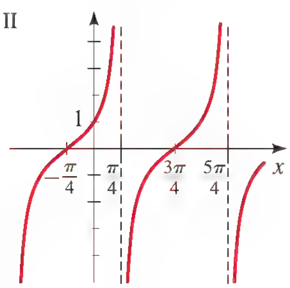
**3-8** ■ Relacione la función trigonométrica con una de las gráficas I-VI.

3. $f(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $f(x) = \sec 2x$
5. $f(x) = \cot 2x$
6. $f(x) = -\tan x$
7. $f(x) = 2 \sec x$
8. $f(x) = 1 + \csc x$

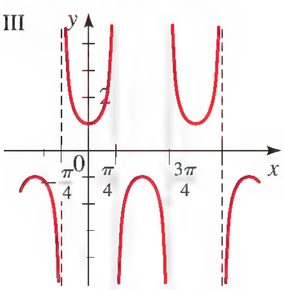
I



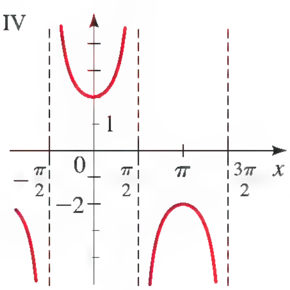
II



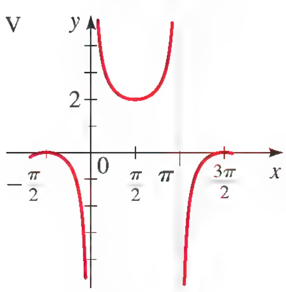
III



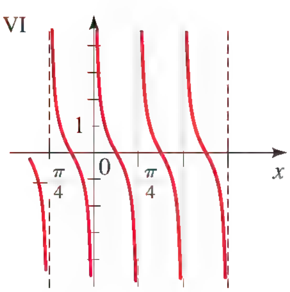
IV



V



VI



**9-54** ■ Encuentre el período y grafique la función.

9. $y = 4 \tan x$
10. $y = -4 \tan x$
11. $y = -\frac{1}{2} \tan x$
12. $y = \frac{1}{2} \tan x$
13. $y = -\cot x$
14. $y = 2 \cot x$
15. $y = 2 \csc x$
16. $y = \frac{1}{2} \csc x$
17. $y = 3 \sec x$
18. $y = -3 \sec x$
19. $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
20. $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$
21. $y = \csc\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
22. $y = \sec\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
23. $y = \cot\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
24. $y = 2 \csc\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
25. $y = \dfrac{1}{2} \sec\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
26. $y = 3 \csc\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
27. $y = \tan 4x$
28. $y = \tan \frac{1}{2}x$
29. $y = \tan \dfrac{\pi}{4}x$
30. $y = \cot \dfrac{\pi}{2}x$
31. $y = \sec 2x$
32. $y = 5 \csc 3x$
33. $y = \csc 4x$
34. $y = \csc \frac{1}{2}x$
35. $y = 2 \tan 3\pi x$
36. $y = 2 \tan \dfrac{\pi}{2}x$
37. $y = 5 \csc \dfrac{3\pi}{2}x$
38. $y = 5 \sec 2\pi x$
39. $y = \tan 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
40. $y = \csc 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
41. $y = \tan 2(x - \pi)$
42. $y = \sec 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
43. $y = \cot\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
44. $y = \frac{1}{2} \tan(\pi x - \pi)$
45. $y = 2 \csc\left(\pi x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
46. $y = 2 \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
47. $y = 5 \sec\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
48. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$
49. $y = \tan\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
50. $y = \tan \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
51. $y = 3 \sec \pi\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$
52. $y = \sec\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
53. $y = -2 \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
54. $y = 2 \csc(3x + 3)$

55. **(a)** Demuestre que si $f$ es periódica con período $p$, entonces $1/f$ también es periódica con período $p$.
    **(b)** Demuestre que las funciones cosecante y secante tienen cada una un período $2\pi$.

56. Demuestre que si $f$ y $g$ son periódicas con período $p$, entonces $f/g$ es también periódica, pero su período podría ser menor que $p$.

### APLICACIONES

57. **Faro** El haz luminoso de un faro completa una rotación cada dos minutos. En el tiempo $t$, la distancia $d$ mostrada en la figura de la página siguiente es

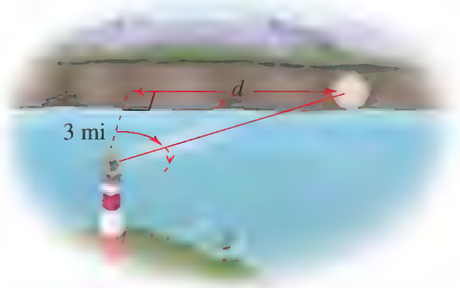
$$d(t) = 3 \tan \pi t$$

donde $t$ se mide en minutos y $d$ en millas.

**(a)** Encuentre $d(0.15)$, $d(0.25)$ y $d(0.45)$.

**(b)** Trace una gráfica de la función $d$ para $0 \le t < \frac{1}{2}$.

**(c)** ¿Qué ocurre a la distancia $d$ cuando $t$ se aproxima a $\frac{1}{2}$?




**58. Longitud de una sombra** En un día cuando el Sol pasa directamente encima al mediodía, un hombre de seis pies de estatura proyecta una sombra de longitud

$$S(t) = 6\left|\cot \frac{\pi}{12}t\right|$$

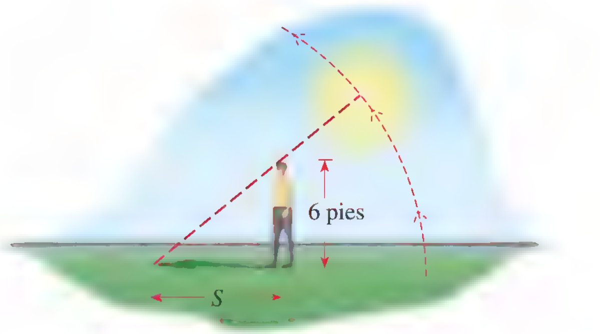
donde $S$ se mide en pies y $t$ es el número de horas desde las 6 a.m.

**(a)** Encuentre la longitud de la sombra a las 8:00 a.m., al mediodía, a las 2:00 p.m. y a las 5:45 p.m.

**(b)** Trace una gráfica de la función $S$ para $0 < t < 12$.

**(c)** De la gráfica determine los valores de $t$ en los que la longitud de la sombra es igual a la estatura del hombre. ¿A qué hora corresponden cada uno de estos valores?

**(d)** Explique lo que ocurre a la sombra a medida que el tiempo se aproxima a las 6 p.m. (es decir, cuando $t \to 12^-$).




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**59. Fórmulas de reducción** Use las gráficas de la Figura 5 para explicar por qué son verdaderas las siguientes fórmulas.

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

# 5.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y SUS GRÁFICAS

La función seno inverso ▶ La función coseno inverso ▶ La función tangente inversa ▶ Las funciones secante, cosecante y cotangente inversas

En las Secciones 6.4-6.6 estudiamos aplicaciones de funciones trigonométricas inversas a triángulos.

Recuerde de la Sección 2.7 que la inversa de una función $f$ es una función $f^{-1}$ que invierte la regla de $f$. Para que una función tenga una inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas pero es posible restringir los dominios de funciones trigonométricas en forma tal que las funciones resultantes sean biunívocas.

## ▼ La función seno inverso

Consideremos la función seno en primer término. Hay numerosas formas de restringir el dominio del seno de manera que la nueva función sea biunívoca. Una forma natural de hacer esto es restringir el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón para esta opción es que el seno es biunívoco sobre este intervalo y además alcanza cada uno de los valores en su rango sobre este intervalo. De la Figura 1 vemos que el seno es biunívoco sobre este dominio restringido (por la Prueba de la Recta Horizontal) y por lo tanto tiene una inversa.

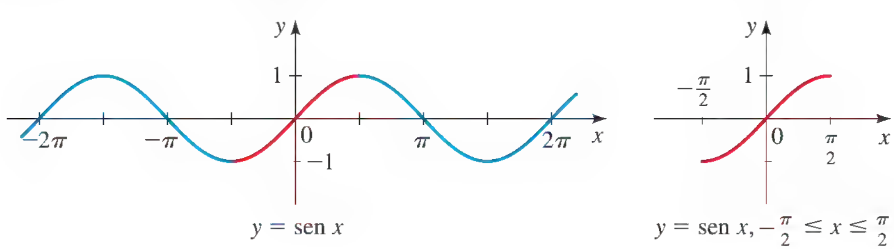



**FIGURA 1** Gráficas de la función seno y la función seno restringida

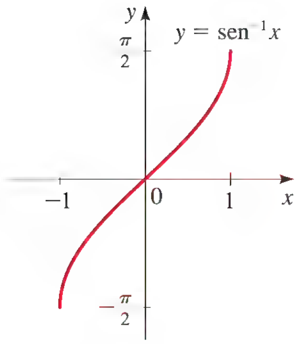



**FIGURA 2** Gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$

Ahora podemos definir una función seno inversa sobre este dominio restringido. La gráfica de $\operatorname{sen}^{-1} x$ se muestra en la Figura 2; se obtiene reflejando la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, en la recta $y = x$.

> **DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN SENO INVERSO**
>
> La **función seno inverso** es la función $\operatorname{sen}^{-1} x$ con dominio sobre $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$ definida por
>
> $$\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x$$
>
> La función seno inverso también se denomina **arcoseno**, denotada por **arcsen *x***.

Así, $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ *es el número sobre el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es* $x$. En otras palabras, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$. Realmente, de las propiedades generales de funciones inversas estudiadas en la Sección 2.7, tenemos las siguientes **propiedades de cancelación**.

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \quad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$
$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

## EJEMPLO 1 | Evaluación de la función seno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

**(a)** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{2}$

### SOLUCIÓN

**(a)** El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$. Así, $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ es $\pi/6$.

**(b)** El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Así, $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$.

**(c)** Como $\frac{3}{2} > 1$, no está en el dominio de $\operatorname{sen}^{-1} x$, de modo que $\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{2}$ no está definido.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Uso de calculadora para evaluar seno inverso

Encuentre valores aproximados para **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}(0.82)$ y **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}$.

### SOLUCIÓN

Usamos calculadora para aproximar estos valores. Usando la(s) tecla(s) SIN⁻¹ o INV SIN o ARC SIN de una calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

**(a)** $\operatorname{sen}^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3} \approx 0.33984$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **21**

Cuando evalúe expresiones que contengan $\operatorname{sen}^{-1} x$, necesitamos recordar que el rango de $\operatorname{sen}^{-1} x$ es el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

## EJEMPLO 3 | Evaluación de expresiones con seno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

**(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $\pi/3$ está en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, podemos usar las propiedades de cancelación de funciones inversas, ya citadas líneas antes.

$$\operatorname{sen}^{1}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \text{Propiedad de cancelación: } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$$

**(b)** Primero evaluamos la expresión de los paréntesis:

$$\operatorname{sen}^{1}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}^{1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{Evalúe}$$

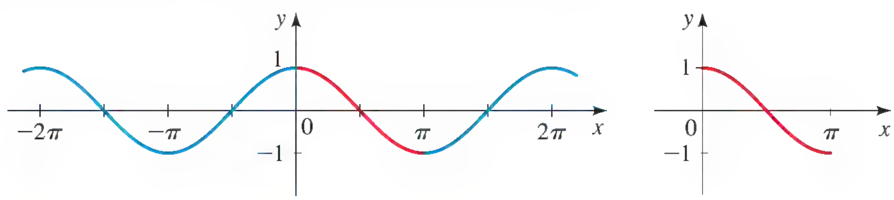
$$= \frac{\pi}{3} \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nota: $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ sólo si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **31** Y **33**

## La función coseno inverso

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, la función resultante es biunívoca y tiene una inversa. Escogemos este intervalo porque, en él, el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez (vea Figura 3).




$y = \cos x$ $\qquad$ $y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$

**FIGURA 3** Gráficas de la función coseno y la función coseno restringida

**DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN COSENO INVERSA**

La **función coseno inversa** es la función $\cos^{1} x$ con dominio $[-1, 1]$ rango $[0, \pi]$ definida por

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

La función coseno inverso también se llama **arcocoseno**, denotada por **arccos** $\boldsymbol{x}$.

Así, $y = \cos^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[0, \pi]$ *cuyo coseno es* $x$. Las siguientes **propiedades de cancelación** se siguen de las propiedades de función inversas.

$$\cos(\cos^{1} x) = x \quad \text{por} \quad -1 \leq x \leq 1$$
$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{por} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

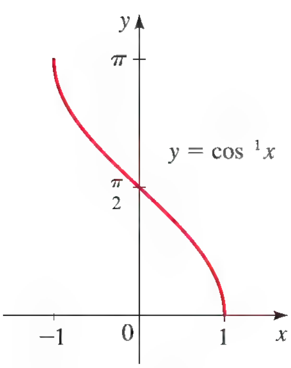



**FIGURA 4** Gráfica de $y = \cos^{-1} x$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ se muestra en la Figura 4; se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, en la recta $y = x$.

**EJEMPLO 4** | Evaluación de la función coseno inversa

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

**(a)** $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ **(b)** $\cos^{-1} 0$ $\qquad$ **(c)** $\cos^{-1}\dfrac{5}{7}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/6$. Así, $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.

**(b)** El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0 es $\pi/2$. Así, $\cos^{-1}0 = \pi/2$.

**(c)** Como no hay múltiplo racional de $\pi$ cuyo coseno es $\frac{5}{7}$, usamos una calculadora (en modo de radianes) para hallar este valor aproximadamente:

$$\cos^{-1}\frac{5}{7} \approx 0.77519$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **13**

## EJEMPLO 5 | Evaluación de expresiones con coseno inverso

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

**(a)** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$  **(b)** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $2\pi/3$ está en el intervalo $[0, \pi]$ podemos usar las propiedades de cancelación ya citadas líneas antes:

$$\cos^{1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{Propiedad de cancelación: } 0 \le \frac{2\pi}{3} \le \pi$$

**(b)** Primero evaluamos la expresión en paréntesis:

$$\cos^{1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) = \cos^{1}\left(\tfrac{1}{2}\right) \qquad \text{Evalúe}$$

$$= \frac{\pi}{3} \qquad \text{Porque } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Nota: $\cos^{-1}(\cos x) = x$ sólo si $0 \le x \le \pi$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **35**

## La función tangente inversa

Restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para obtener una función biunívoca.

### DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN TANGENTE INVERSA

La **función tangente inversa** es la función $\tan^{1}x$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$ definida por

$$\tan^{1}x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

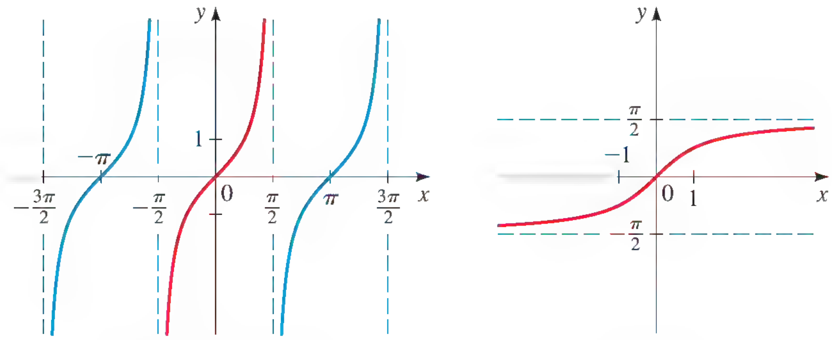
La función tangente inversa también se llama **arcotangente**, denotada por **arctan**.

Así, $y = \tan^{-1}x$ *es el número en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *cuya tangente es* $x$. Las siguientes **propiedades de cancelación** se siguen de propiedades de la función inversa.

$$\tan(\tan^{1}x) = x \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tan^{-1}(\tan x) = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

La Figura 5 muestra la gráfica de $y = \tan x$ en un intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y la gráfica de su función inversa, $y = \tan^{-1} x$.




$y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \tan^{-1} x$

**FIGURA 5** Gráficas de la función tangente restringida y la función tangente inversa

## EJEMPLO 6 Evaluar la función tangente inversa

Encuentre cada uno de los valores siguientes.

**(a)** $\tan^{-1} 1$ $\qquad$ **(b)** $\tan^{-1} \sqrt{3}$ $\qquad$ **(c)** $\tan^{-1}(20)$

**SOLUCIÓN**

**(a)** El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} = \pi/4$.

**(b)** El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente $\sqrt{3}$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$.

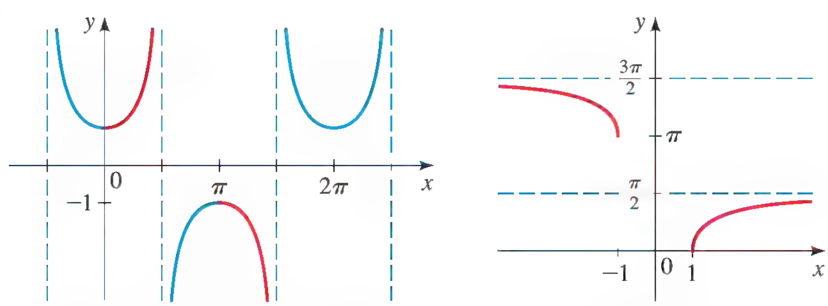
**(c)** Usamos una calculadora (en modo de radianes) para hallar que $\tan^{-1}(20) \approx -1.52084$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **17**

## ▼ Las funciones secante, cosecante y cotangente inversas

Vea en el Ejercicio 44 de la Sección 6.4 (página 469) una forma de hallar los valores de estas funciones trigonométricas en una calculadora.

Para definir las funciones inversas de las funciones secante, cosecante y cotangente, restringimos el dominio de cada función a un conjunto en el que es biunívoco y en el que alcanza todos sus valores. Aun cuando cualquier intervalo que satisfaga estos criterios es apropiado, escogemos restringir los dominios en una forma que simplifica la selección de signo en cálculos que contengan funciones trigonométricas inversas. Las selecciones que hagamos también son apropiadas para cálculo. Esto explica la aparentemente extraña restricción para los dominios de las funciones secante y cosecante. Terminamos esta sección al mostrar las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente con sus dominios restringidos y las gráficas de sus funciones inversas (Figuras 6-8).




$y = \sec x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \pi \le x < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \sec^{-1} x$

**FIGURA 6** La función secante inversa

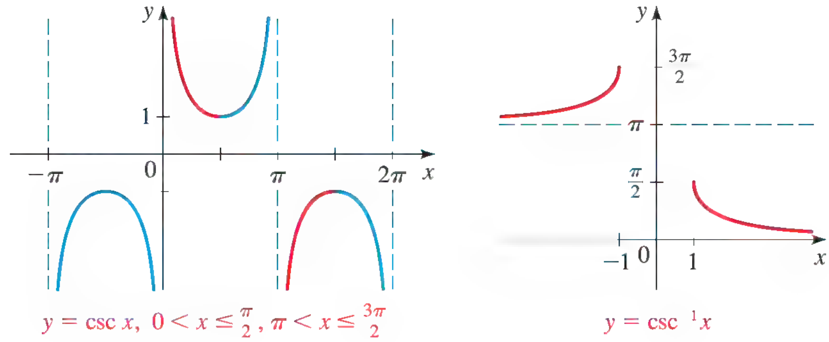



**FIGURA 7** Gráficas de la función cosecante y la función cosecante inversa

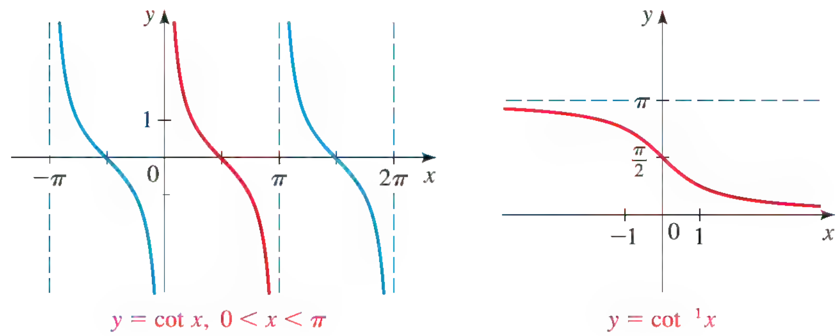



**FIGURA 8** Gráficas de la función cotangente y la función cotangente inversa

## 5.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1. (a)** Para definir la función seno inverso, restringimos el dominio de seno al intervalo _____. Sobre este intervalo la función seno es biunívoca y su función inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$ está definida por $\operatorname{sen}^{-1} x = y \Leftrightarrow \operatorname{sen}$ _____ = _______. Por ejemplo, $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} =$ _____ porque sen_______ = _______.

**(b)** Para definir la función coseno inversa restringimos el dominio de coseno al intervalo _____. Sobre este intervalo la función coseno es biunívoca y su función inversa $\cos^{-1} x$ está definida por $\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos$ _____ = _______. Por ejemplo, $\cos^{-1} \frac{1}{2} =$ _____ porque cos ____ = _____.

**2.** La propiedad de cancelación $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$ es válida para $x$ en el intervalo_______. ¿Cuál de lo siguiente no es verdadero?

**(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

**(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen} \dfrac{10\pi}{3}\right) = \dfrac{10\pi}{3}$

### HABILIDADES

**3-10** ■ Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

**3. (a)** $\operatorname{sen}^{-1} 1$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(c)** $\operatorname{sen}^{-1} 2$

**4. (a)** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(c)** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

**5. (a)** $\cos^{-1}(-1)$ **(b)** $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ **(c)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**6. (a)** $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1} 1$ **(c)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**7. (a)** $\tan^{-1}(-1)$ **(b)** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **(c)** $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**8. (a)** $\tan^{-1} 0$ **(b)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **(c)** $\tan^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**9. (a)** $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1} 1$

**10. (a)** $\cos^{-1} 0$ **(b)** $\operatorname{sen}^{-1} 0$ **(c)** $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$

**11-22** ■ Use calculadora para hallar un valor aproximado de cada expresión aproximado a cinco lugares decimales, si está definido.

**11.** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3}$

**12.** $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{8}{9})$

**13.** $\cos^{-1}(-\frac{3}{7})$

**14.** $\cos^{-1}(\frac{4}{9})$

**15.** $\cos^{-1}(-0.92761)$

**16.** $\operatorname{sen}^{-1}(0.13844)$

**17.** $\tan^{-1} 10$

**18.** $\tan^{-1}(-26)$

**19.** $\tan^{-1}(1.23456)$

**20.** $\cos^{-1}(1.23456)$

**21.** $\operatorname{sen}^{-1}(-0.25713)$

**22.** $\tan^{-1}(-0.25713)$

**23-44** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión, si está definida.

**23.** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{4}\right)$

**24.** $\cos\left(\cos^{-1}\frac{2}{3}\right)$

**25.** $\tan(\tan^{-1} 5)$

**26.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 5)$

**27.** $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

**28.** $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

**29.** $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$

**30.** $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

**31.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

**32.** $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

**33.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

**34.** $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

**35.** $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$

**36.** $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

**37.** $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

**38.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$

**39.** $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right)$

**40.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0)$

**41.** $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**42.** $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

**43.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-1))$

**44.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**45. Dos composiciones diferentes** Sean $f$ y $g$ las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x)$$

y

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$$

Por las propiedades de cancelación, $f(x) = x$ y $g(x) = x$ para valores apropiados de $x$. Pero estas funciones no son las mismas para toda $x$. Grafique $f$ y $g$ para mostrar cómo difieren las funciones. (Piense con todo cuidado en el dominio y rango de $\operatorname{sen}^{-1}x$.

**46-47** ■ **Graficar funciones trigonométricas inversas**

**(a)** Grafique la función y haga una conjetura, y **(b)** demuestre que la conjetura de usted es verdadera.

**46.** $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$

**47.** $y = \tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x}$

# 5.6 MODELADO DE MOVIMIENTO ARMÓNICO

Movimiento armónico simple ▶ Movimiento armónico amortiguado

El comportamiento periódico, es decir aquel que se repite una y otra vez, es común en la naturaleza. Quizá el ejemplo más conocido es el amanecer y la puesta de Sol que resulta en la repetitiva regla de día, noche, día, noche, … Otro ejemplo es la diaria variación de niveles de marea en la playa, que resulta en la diaria repetición de marea alta, marea baja, marea alta, marea baja, … Ciertas poblaciones de animales aumentan y disminuyen en una forma periódica que se puede predecir: una población grande agota la provisión de alimento, lo cual hace que la población disminuya; esto, a su vez, resulta en una provisión más abundante de alimento, lo cual hace posible que la población aumente; y el patrón se repite una y otra vez (vea el Proyecto de Descubrimiento *Modelos de depredador/presa* en la página 398).

Otros ejemplos comunes de comportamiento periódico comprenden el movimiento que es causado por vibración u oscilación. Una masa suspendida de un resorte que ha sido comprimido y luego se deja vibrar verticalmente es un movimiento simple. Este movimiento “de vaivén” también se presenta en fenómenos diversos como por ejemplo ondas de sonido, ondas de luz, corriente eléctrica alternante y estrellas que pulsan, por citar sólo algunos. En esta sección consideramos el problema de modelar el comportamiento periódico.

## ▼ Movimiento armónico simple

Las funciones trigonométricas son idealmente apropiadas para modelar el comportamiento periódico. Una mirada a las gráficas de las funciones seno y coseno, por ejemplo, nos dice que estas funciones por sí solas exhiben comportamiento periódico. La Figura 1 muestra la gráfica de $y = \operatorname{sen} t$. Si consideramos $t$ como tiempo, vemos que a medida que el tiempo

transcurre, $y = \text{sen } t$ aumenta y disminuye una y otra vez. La Figura 2 muestra que el movimiento de una masa en vibración en un resorte está modelada precisamente por $y = \text{sen } t$.

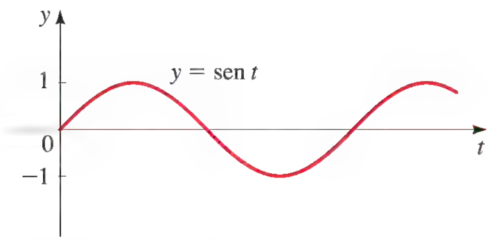



**FIGURA 1** $y = \text{sen } t$

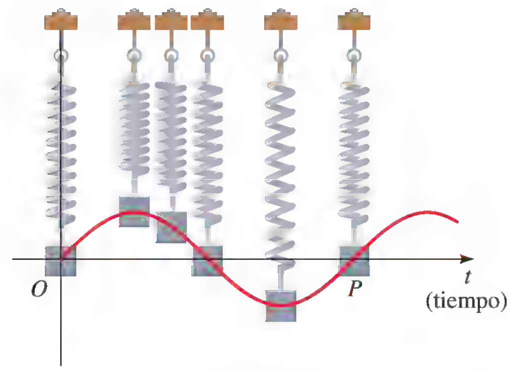



**FIGURA 2** El movimiento de un resorte en vibración está modelado por $y = \text{sen } t$.

Observe que la masa regresa a su posición original una y otra vez. Un **ciclo** es una vibración completa de un cuerpo, de modo que la masa de la Figura 2 completa un ciclo de su movimiento entre $O$ y $P$. Nuestras observaciones acerca de la forma en que las funciones seno y coseno modelan el comportamiento periódico se resumen en el recuadro siguiente.

La diferencia principal entre las dos ecuaciones que describen el movimiento armónico simple es el punto de inicio. En $t = 0$ tenemos

$$y = a \text{ sen } \omega \cdot 0 = 0$$
$$y = a \cos \omega \cdot 0 = a$$

En el primer caso, el movimiento se "inicia" con cero desplazamiento, mientras que en el segundo caso el movimiento se "inicia" con el desplazamiento al máximo (en la amplitud $a$).

El símbolo $\omega$ es la letra minúscula griega "omega", y $\nu$ es la letra "nu".

### MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Si la ecuación que describe el desplazamiento $y$ de un cuerpo en el tiempo $t$ es

$$y = a \text{ sen } \omega t \qquad \text{o} \qquad y = a \cos \omega t$$

entonces el cuerpo está en **movimiento armónico simple**. En este caso,

| | |
|---|---|
| **amplitud** $= \lvert a \rvert$ | Desplazamiento máximo del cuerpo |
| **período** $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ | Tiempo requerido para completar un ciclo |
| **frecuencia** $= \dfrac{\omega}{2\pi}$ | Número de ciclos por unidad de tiempo |

Advierta que las funciones

$$y = a \text{ sen } 2\pi\nu t \qquad \text{y} \qquad y = a \cos 2\pi\nu t$$

tienen frecuencia $\nu$, porque $2\pi\nu/(2\pi) = \nu$. En vista de que de inmediato podemos leer la frecuencia a partir de estas ecuaciones, a veces escribimos ecuaciones de movimiento armónico simple en esta forma.

## EJEMPLO 1 | Un resorte en vibración

El desplazamiento de una masa suspendida por un resorte está modelado por la función

$$y = 10 \text{ sen } 4\pi t$$

donde $y$ se mide en pulgadas y $t$ en segundos (vea Figura 3).

**(a)** Encuentre la amplitud, período y frecuencia del movimiento de la masa.

**(b)** Trace una gráfica del desplazamiento de la masa.

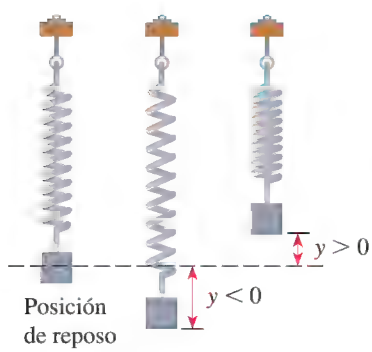



**FIGURA 3**

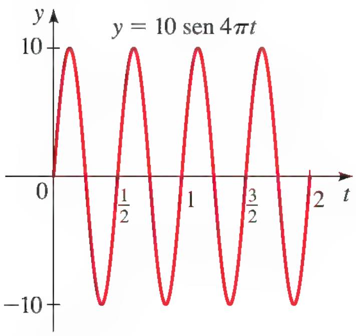



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN**

**(a)** De la fórmula para amplitud, período y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |a| = 10 \text{ pulg.}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ ciclos por segundo (Hz)}$$

**(b)** La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo $t$ se ilustra en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

Una situación importante en la que ocurre movimiento armónico simple es en la producción de sonido. El sonido es producido por una vibración regular en la presión de aire a partir de la presión normal. Si la presión varía en movimiento armónico simple, entonces se produce un sonido puro. El tono del sonido depende de la frecuencia y la intensidad depende de la amplitud.

## EJEMPLO 2 | Vibraciones de una nota musical

Un músico que toca una tuba hace sonar la nota Mi y sostiene el sonido durante algún tiempo. Para una nota Mi pura, la variación en presión a partir de la presión normal del aire está dada por

$$V(t) = 0.2 \text{ sen } 80\pi t$$

donde $V$ se mide en libras por pulgada cuadrada y $t$ se mide en segundos.

**(a)** Encuentre la amplitud, período y frecuencia de $V$.

**(b)** Trace una gráfica de $V$.

**(c)** Si el músico aumenta la intensidad de la nota, ¿cómo cambia la ecuación de $V$?

**(d)** Si el músico está tocando una nota incorrectamente y es un poco desafinada, ¿cómo cambia la ecuación de $V$?

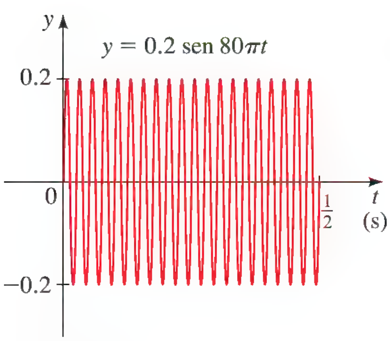



**FIGURA 5**

**SOLUCIÓN**

**(a)** De las fórmulas para amplitud, período y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |0.2| = 0.2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40$$

**(b)** La gráfica de $V$ se ilustra en la Figura 5.

**(c)** Si el músico aumenta la intensidad, la amplitud aumenta. Por lo tanto, el número 0.2 es sustituido por un número más grande.

**(d)** Si la nota es desafinada, entonces la frecuencia disminuye. En consecuencia, el coeficiente de $t$ es menor a $80\pi$.

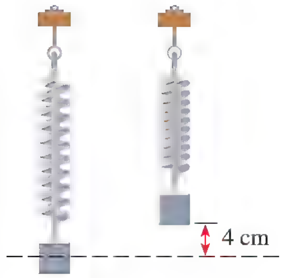
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

## EJEMPLO 3 | Modelado de un resorte en vibración

Una masa está suspendida de un resorte. El resorte se comprime una distancia de 4 cm y luego se suelta. Se observa que la masa regresa a la posición comprimida después de $\frac{1}{3}$ de segundo.

**(a)** Encuentre una función que modele el desplazamiento de la masa.

**(b)** Trace la gráfica del desplazamiento de la masa.




Posición
de reposo

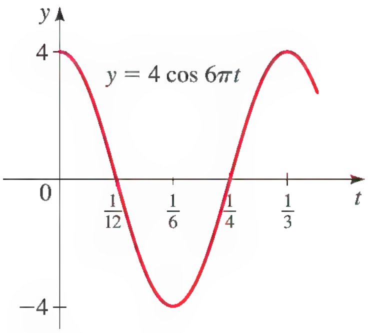



**FIGURA 6**

**SOLUCIÓN**

**(a)** El movimiento de la masa está dado por una de las ecuaciones de movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es 4 cm. Como esta amplitud se alcanza en el tiempo $t = 0$, una función apropiada que modela el desplazamiento es de la forma

$$y = a\cos\omega t$$

Como el período es $p = \frac{1}{3}$, podemos hallar $\omega$ con la siguiente ecuación:

$$\text{Período} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Período} = \tfrac{1}{3}$$

$$\omega = 6\pi \qquad \text{Despeje } \omega$$

Por lo tanto, el movimiento de la masa está modelado por la función

$$y = 4\cos 6\pi t$$

donde $y$ es el desplazamiento a partir de la posición de reposo en el tiempo $t$. Observe que cuando $t = 0$, el desplazamiento es $y = 4$, como es de esperarse.

**(b)** La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo $t$ se muestra en la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15** Y **35**

En general, las funciones seno o coseno que representan movimiento armónico pueden ser desplazadas horizontal o verticalmente. En este caso, las ecuaciones toman la forma

$$y = a\,\text{sen}(\omega(t - c)) + b \qquad \text{o} \qquad y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

El desplazamiento vertical $b$ indica que la variación ocurre alrededor de un valor promedio $b$. El desplazamiento horizontal $c$ indica la posición del cuerpo en $t = 0$. (Vea Figura 7.)

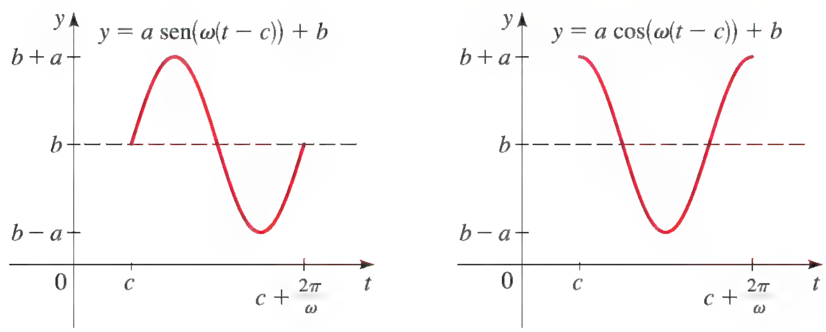



**FIGURA 7** (a) (b)

## EJEMPLO 4 | Modelado del brillo de una estrella variable

Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternativamente. Para la estrella variable Delta Cefeida, el tiempo entre períodos de máximo brillo es 5.4 días. El promedio de brillo (o magnitud) de la estrella es 4.0 y su brillo varía en una magnitud de ±0.35.

**(a)** Encuentre una función que modele el brillo de Delta Cefeida como función del tiempo.

**(b)** Trace una gráfica del brillo de Delta Cefeida como función del tiempo.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Encontremos una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

La amplitud es la variación máxima a partir del brillo promedio, de modo que la amplitud es $a = 0.35$ de magnitud. Nos indican que el período es de 5.4 días, por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{5.4} \approx 1.164$$

Como el brillo varía de un valor promedio de 4.0 magnitudes, la gráfica es desplazada hacia arriba por $b = 4.0$. Si tomamos $t = 0$ como el tiempo cuando la estrella está en su brillo máximo, no hay desplazamiento horizontal y $c = 0$ (porque una curva coseno alcanza su máximo en $t = 0$). Así, la función que buscamos es

$$y = 0.35\cos(1.16t) + 4.0$$

donde $t$ es el número de días desde el momento en que la estrella está en su brillo máximo.

**(b)** La gráfica está trazada en la Figura 8.

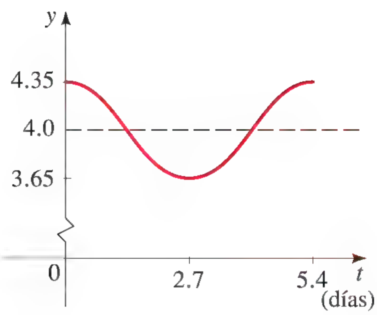
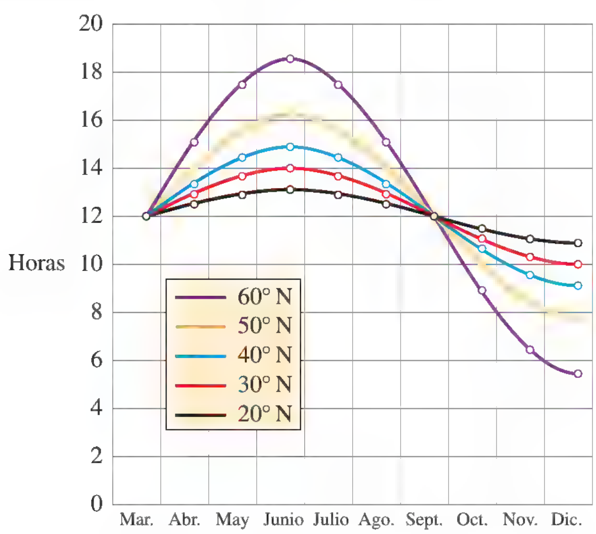



**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39

El número de horas de luz de día varía en todo el curso de un año. En el hemisferio norte, el día más largo es el 21 de junio y el más corto es el 21 de diciembre. La duración promedio de luz de día es de 12 horas y la variación desde este promedio depende de la latitud. (Por ejemplo, en Fairbanks, Alaska, hay más de 20 horas de luz de día en el día más largo y menos de 4 horas en el día más corto). La gráfica de la Figura 9 muestra el número de horas de luz de día en horas diferentes del año para varias latitudes. Es evidente de la gráfica que la variación en horas de luz de día es armónica simple.




*Fuente*: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935), pág. 40.

**FIGURA 9** Gráfica de la duración de horas de luz de día del 21 de marzo al 21 de diciembre en varias latitudes.

## EJEMPLO 5 | Modelado del número de horas de luz de día

En Filadelfia (40° latitud N) el día más largo del año tiene 14 h 50 min de luz de día, y el día más corto tiene 9 h 10 min de luz de día.

**(a)** Encuentre una función $L$ que modele la duración de luz de día como función de $t$, el número de días del 1 de enero.

**(b)** Un astrónomo necesita al menos 11 horas de oscuridad para una fotografía astronómica de exposición larga. ¿En qué días del año son posibles esas largas exposiciones?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Necesitamos hallar una función de la forma

$$y = a\ \text{sen}(\omega(t - c)) + b$$

cuya gráfica es la curva de 40º latitud norte de la Figura 9. De la información dada, vemos que la amplitud es

$$a = \tfrac{1}{2}\left(14\tfrac{5}{6} - 9\tfrac{1}{6}\right) \approx 2.83 \text{ h}$$

Como hay 365 días en un año, el período es 365, y entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \approx 0.0172$$

Como la duración promedio de luz de día es 12 horas, la gráfica está desplazada hacia arriba por 12, de modo que $b = 12$. Puesto que la curva alcanza el valor promedio (12 horas) el 21 de marzo, el 80avo día del año, la curva está desplazada 80 unidades a la derecha. Por lo tanto, $c = 80$. En consecuencia, una función que modela el número de horas de luz de día es

$$y = 2.83\ \text{sen}(0.0172(t - 80)) + 12$$

donde $t$ es el número de días desde el 1 de enero.

**(b)** Un día tiene 24 horas, de modo que 11 h de noche corresponden a 13 h de luz de día, por lo que necesitamos resolver la desigualdad $y \leq 13$. Para resolver gráficamente esta desigualdad, graficamos $y = 2.83$ sen $0.0172(t - 80) + 12$ y $y = 13$ en la misma gráfica. De la gráfica de la Figura 10 vemos que hay menos de 13 h de luz de día entre el día 1 (1 de enero) y el día 101 (11 de abril) y del día 241 (29 de agosto) al día 365 (31 de diciembre).

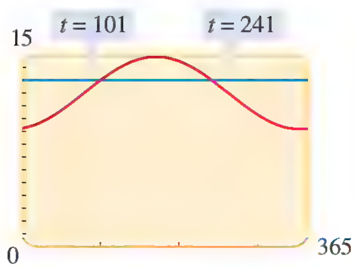



**FIGURA 10**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Otra situación en la que ocurre movimiento armónico simple es en generadores de corriente alterna (AC). Se produce corriente alterna cuando una armadura gira alrededor de su eje en un campo magnético.

La Figura 11 representa una versión sencilla de uno de estos generadores. Cuando el alambre pasa por el campo magnético, se genera un voltaje $E$ en el alambre. Se puede demostrar que el voltaje generado está dado por

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

donde $E_0$ es el voltaje máximo producido (que depende de la intensidad del campo magnético) y $\omega/(2\pi)$ es el número de revoluciones por segundo de la armadura (la frecuencia).

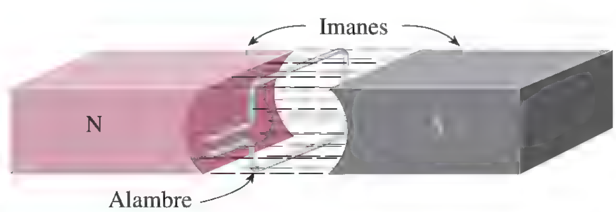



**FIGURA 11**

¿Por qué decimos que la corriente en las tomas domiciliarias es de 110 V cuando el voltaje máximo producido es de 155 V? De la simetría de la función coseno vemos que el promedio de voltaje producido es cero. Este valor promedio sería el mismo para todos los generadores de AC y, por lo tanto, no da información acerca del voltaje generado. Para obtener una medida de voltaje más informativa, los ingenieros usan el método de **raíz cuadrática media** (rms). Se puede demostrar que el voltaje rms es $1/\sqrt{2}$ veces el máximo voltaje. Entonces, para la corriente domiciliaria el voltaje rms es

$$155 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 110 \text{ V}$$

## EJEMPLO 6 | Modelado de la corriente alterna

La corriente alterna domiciliaria común de 110 volts varía de $+155$ a $-155$ V con una frecuencia de 60 Hz (ciclos por segundo). Encuentre una ecuación que describa esta variación en voltaje.

**SOLUCIÓN** La variación en voltaje es armónica simple. Como la frecuencia es de 60 ciclos por segundo, tenemos

$$\frac{\omega}{2\pi} = 60 \qquad \text{o} \qquad \omega = 120\pi$$

Tomemos $t = 0$ como un tiempo cuando el voltaje es $+155$ V. Entonces

$$E(t) = a\cos\omega t = 155\cos 120\pi t$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

## Movimiento armónico amortiguado

Se supone que el resorte de la Figura 2 de la página 413 oscila en un ambiente sin fricción. En este hipotético caso no cambiará la amplitud de la oscilación pero, en presencia de fricción, el movimiento del resorte finalmente "se muere", es decir, la amplitud del movimiento disminuye con el tiempo. El movimiento de este tipo se denomina *movimiento armónico amortiguado.*

**MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO**

Si la ecuación que describe el desplazamiento $y$ de un cuerpo en el tiempo $t$ es

$$y = ke^{-ct}\operatorname{sen}\omega t \qquad \text{o} \qquad y = ke^{-ct}\cos\omega t \qquad (c > 0)$$

entonces el cuerpo está en **movimiento armónico amortiguado**. La constante $c$ es la constante de **amortiguamiento**, $k$ es la amplitud inicial y $2\pi/\omega$ es el período.*

El movimiento armónico amortiguado es simplemente movimiento armónico para el cual la amplitud está gobernada por la función $a(t) = ke^{-ct}$. La Figura 12 muestra la diferencia entre movimiento armónico y movimiento armónico amortiguado.

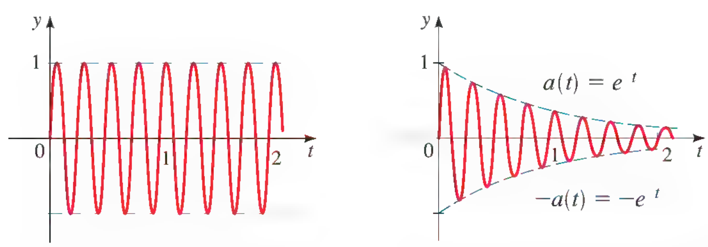



**FIGURA 12** (a) Movimiento armónico: $y = \operatorname{sen} 8\pi t$ (b) Movimiento armónico amortiguado: $y = e^{-t}\operatorname{sen} 8\pi t$

## EJEMPLO 7 | Modelado de movimiento armónico amortiguado

Dos sistemas de masa-resorte se someten a movimiento armónico amortiguado, ambos a 0.5 ciclos por segundo y ambos con un desplazamiento máximo inicial de 10 centímetros. El primero tiene una constante de amortiguamiento de 0.5 y, el segundo, tiene una constante de amortiguamiento de 0.1.

**(a)** Encuentre las funciones de la forma $g(t) = ke^{-ct}$ para modelar el movimiento en cada caso.

**(b)** Grafique las dos funciones que se encuentran en el inciso (a). ¿Cómo se diferencian?

**SOLUCIÓN**

Hz es la abreviatura de hertz. Un hertz es un ciclo por segundo.

**(a)** En el tiempo $t = 0$, el desplazamiento es de 10 cm. Por lo tanto, $g(0) = ke^{-c\cdot 0}\cos(\omega \cdot 0) = k$, para $k = 10$. Además, la frecuencia es $f = 0.5$ Hz, y como $\omega = 2\pi f$ (ver página 413), obtenemos $\omega = 2\pi(0.5) = \pi$. Mediante las constantes de amortiguamiento dado, nos encontramos con que los movimientos de los dos resortes están dados por las funciones

$$g_1(t) = 10e^{-0.5t}\cos\pi t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = 10e^{-0.1t}\cos\pi t$$

* En el caso del movimiento armónico amortiguado, el término *cuasi-período* se usa a veces en lugar de *período* porque el movimiento no es periódico en realidad sino que disminuye con el tiempo. No obstante, seguiremos usando el término *período* para evitar confusión.

**(b)** Las funciones $g_1$ y $g_2$ están graficadas en la Figura 13. De las gráficas vemos que en el primer caso (donde la constante de amortiguamiento es más grande) el movimiento se apaga rápidamente en tanto que, en el segundo caso, el movimiento perceptible continúa más tiempo.

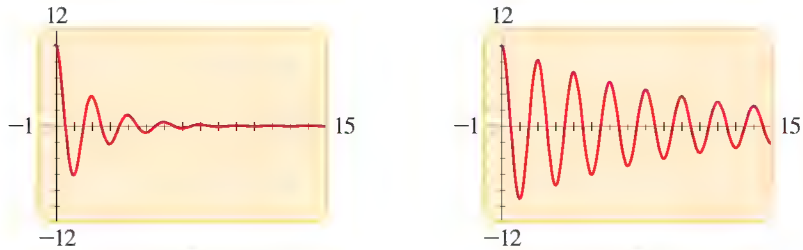



**FIGURA 13** $g_1(t) = 10\,e^{-0.5t}\cos \pi t$ $\qquad g_2(t) = 10\,e^{-0.1t}\cos \pi t$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

Como lo indica el ejemplo precedente, cuanto más grande sea la constante de amortiguamiento $c$, la oscilación se apaga con más rapidez. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra y se deja vibrar libremente, un punto en esa cuerda experimenta movimiento armónico amortiguado. Escuchamos el amortiguamiento del movimiento cuando se apaga el sonido producido por la vibración de la cuerda. La rapidez con la que ocurre el amortiguamiento de la cuerda (medido por el tamaño de la constante $c$) es una propiedad del tamaño de la cuerda y el material de que está hecha. Otro ejemplo de movimiento armónico amortiguado es el movimiento que el amortiguador de un automóvil sufre cuando el auto golpea un tope del camino. En este caso el amortiguador está diseñado para amortiguar el movimiento tan rápidamente como sea posible ($c$ grande) y tener la frecuencia tan pequeña como sea posible ($\omega$ pequeña). Por otra parte, el sonido producido por una tuba que ejecuta una nota es no amortiguado mientras el músico pueda mantener la intensidad de la nota. Las ondas electromagnéticas que producen luz se mueven en movimiento armónico simple que no es amortiguado.

## EJEMPLO 8 | Cuerda de violín en vibración

La cuerda de Sol de un violín es jalada una distancia de 0.5 cm arriba de su posición de reposo, luego se suelta y se deja vibrar. La constante de amortiguamiento $c$ para esta cuerda está determinada en 1.4. Suponga que la nota producida es de Sol pura (frecuencia = 200 Hz). Encuentre una ecuación que describa el movimiento del punto en el que fue pulsada la cuerda.

**SOLUCIÓN** Sea $P$ el punto en el que fue pulsada la cuerda. Encontraremos una función $f(t)$ que dé la distancia en el tiempo $t$ del punto $P$ desde su posición original de reposo. Como el desplazamiento máximo ocurre en $t = 0$, encontramos una ecuación de la forma

$$y = ke^{ct}\cos \omega t$$

A partir de esta ecuación vemos que $f(0) = k$. Pero sabemos que el desplazamiento original de la cuerda es 0.5 cm. Entonces, $k = 0.5$. Como la frecuencia de la vibración es 200, tenemos $\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi$. Por último, como sabemos que la constante de amortiguamiento es 1.4, obtenemos

$$f(t) = 0.5e^{-1.4t}\cos 400\pi t$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

## EJEMPLO 9 | Ondas en un estanque

Una piedra se deja caer en un lago de aguas en calma, haciendo que se formen ondas. El movimiento hacia arriba y debajo de un punto en la superficie del agua está modelado por el movimiento armónico amortiguado. En algún momento se mide la amplitud de la onda, y 20 s más tarde se encuentra que la amplitud ha bajado a $\frac{1}{10}$ de este valor. Encuentre la constante de amortiguamiento $c$.

**SOLUCIÓN** La amplitud está gobernada por el coeficiente $ke^{-ct}$ en las ecuaciones para movimiento armónico amortiguado. Entonces, la amplitud en el tiempo $t$ es $ke^{-ct}$ y, 20 s más tarde, es $ke^{-c(t+20)}$. Por lo tanto, debido a que el último valor es $\frac{1}{10}$ del valor anterior, tenemos

$$ke^{-c(t+20)} = \tfrac{1}{10}ke^{-ct}$$

Ahora despejamos $c$ de esta ecuación. Cancelando $k$ y usando las Leyes de Exponentes, obtenemos

$$e^{-ct} \cdot e^{-20c} = \tfrac{1}{10}e^{-ct}$$

$$e^{-20c} = \tfrac{1}{10} \qquad \text{Cancele } e^{-ct}$$

$$e^{20c} = 10 \qquad \text{Tome recíprocos}$$

Tomando el logaritmo natural de cada lado tendremos

$$20c = \ln(10)$$

$$c = \tfrac{1}{20}\ln(10) \approx \tfrac{1}{20}(2.30) \approx 0.12$$

Por lo tanto, la constante de amortiguamiento es $c \approx 0.12$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## 5.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Para un cuerpo en movimiento armónico simple con amplitud $a$ y período $2\pi/\omega$, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento $y$ en el tiempo $t$ si

**(a)** $y = 0$ en el tiempo $t = 0$: $y =$ _________.

**(b)** $y = a$ en el tiempo $t = 0$: $y =$ _________.

**2.** Para un cuerpo en movimiento armónico amortiguado con amplitud inicial $k$, período $2\pi/\omega$, y constante de amortiguamiento $c$, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento $y$ en el tiempo $t$ si

**(a)** $y = 0$ en el tiempo $t = 0$: $y =$ _________.

**(b)** $y = a$ en el tiempo $t = 0$: $y =$ _________.

### HABILIDADES

**3-10** ■ La función dada modela el desplazamiento de un cuerpo que se mueve en movimiento armónico simple.

**(a)** Encuentre la amplitud, período y frecuencia del movimiento.

**(b)** Trace una gráfica del desplazamiento del cuerpo en un período completo.

**3.** $y = 2 \operatorname{sen} 3t$ **4.** $y = 3\cos\frac{1}{2}t$

**5.** $y = -\cos 0.3t$ **6.** $y = 2.4 \operatorname{sen} 3.6t$

**7.** $y = -0.25\cos\left(1.5t - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **8.** $y = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}(0.2t + 1.4)$

**9.** $y = 5\cos\left(\frac{2}{3}t + \frac{3}{4}\right)$ **10.** $y = 1.6\operatorname{sen}(t - 1.8)$

**11-14** ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que tenga las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$.

**11.** amplitud 10 cm, período 3 s

**12.** amplitud 24 pies, período 2 min

**13.** amplitud 6 pulg., frecuencia $5/\pi$ Hz

**14.** amplitud 1.2 m, frecuencia 0.5 Hz

**15-18** ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que tenga las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento está en su máximo en el tiempo $t = 0$.

**15.** amplitud 60 pies, período 0.5 min

**16.** amplitud 35 pies, período 8 s

**17.** amplitud 2.4 m, frecuencia 750 Hz

**18.** amplitud 6.25 pulg., frecuencia 60 Hz

**19-26** ■ Nos dan una amplitud inicial $k$, constante de amortiguamiento $c$ y frecuencia $f$ o período $p$. (Recuerde que frecuencia y período están relacionados por la ecuación $f = 1/p$.)

**(a)** Encuentre una función que modele el movimiento armónico amortiguado. Use una función de la forma $y = ke^{-ct}\cos\omega t$ en los Ejercicios 19-22, y de la forma $y = ke^{-ct}\operatorname{sen}\omega t$ en los Ejercicios 23-26.

**(b)** Grafique la función.

**19.** $k = 2,\quad c = 1.5,\quad f = 3$

**20.** $k = 15,\quad c = 0.25,\quad f = 0.6$

**21.** $k = 100,\quad c = 0.05,\quad p = 4$

**22.** $k = 0.75,\quad c = 3,\quad p = 3\pi$

**23.** $k = 7,\quad c = 10,\quad p = \pi/6$

**24.** $k = 1,\quad c = 1,\quad p = 1$

**25.** $k = 0.3,\quad c = 0.2,\quad f = 20$

**26.** $k = 12,\quad c = 0.01,\quad f = 8$

## APLICACIONES

**27. Un corcho que sube y baja** Un corcho que flota en un lago sube y baja en movimiento armónico simple. Su desplazamiento arriba del fondo del lago está modelado por

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

donde $y$ se mide en metros y $t$ se mide en minutos.
**(a)** Encuentre la frecuencia del movimiento del corcho.
**(b)** Trace una gráfica de $y$.
**(c)** Encuentre el desplazamiento máximo del corcho arriba del fondo del lago.

**28. Señales de radio de FM** La onda portadora para una señal de radio de FM está modelada por la función

$$y = a \operatorname{sen}(2\pi(9.15 \times 10^7)t)$$

donde $t$ se mide en segundos. Encuentre el período y frecuencia de la onda portadora.

**29. Presión sanguínea** Cada vez que nuestro corazón late, aumenta la presión sanguínea y en seguida disminuye cuando el corazón descansa entre latidos. La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \operatorname{sen}(160\pi t)$$

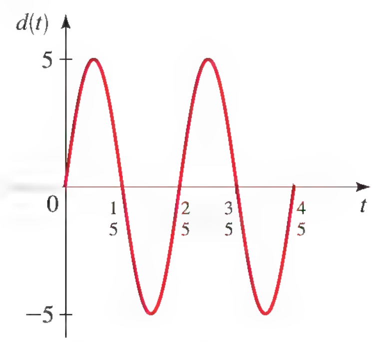
donde $p(t)$ es la presión en mmHg en el tiempo $t$, medido en minutos.
**(a)** Encuentre la amplitud, período y frecuencia de $p$.
**(b)** Trace una gráfica de $p$.
**(c)** Si cierta persona hace ejercicio, su corazón late más rápidamente. ¿Cómo afecta esto al período y frecuencia de $p$?

**30. Modelo de población de un depredador** En un modelo de depredador/presa, la población del depredador está modelada por la función

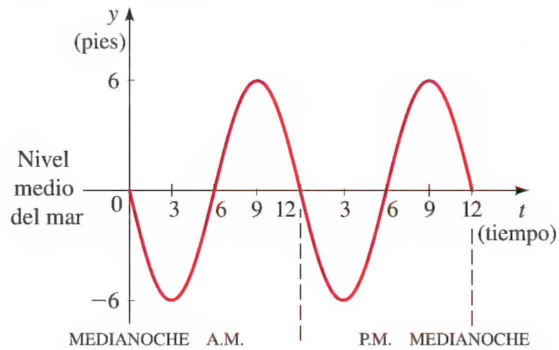
$$y = 900 \cos 2t + 8000$$

donde $t$ se mide en años.
**(a)** ¿Cuál es la población máxima?
**(b)** Encuentre el tiempo entre períodos sucesivos de población máxima.

**31. Sistema de resorte-masa** Una masa unidad a un resorte se mueve hacia arriba y abajo en movimiento armónico simple. La gráfica de su desplazamiento $d(t)$ a partir del equilibrio en el tiempo $t$. Exprese la función $d$ en la forma $d(t) = a \operatorname{sen} \omega t$.

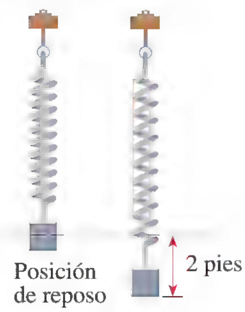



**32. Mareas** La gráfica muestra la variación del nivel del agua con respecto al nivel medio del mar en la Bahía Commencement en Tacoma, Washington, para un período particular de 24 horas. Suponiendo que esta variación está modelada por movimiento armónico simple, encuentre una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua como función del número de horas después de la medianoche.




**33. Mareas** La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene las mareas más altas del mundo. En un período de 12 horas el agua empieza al nivel medio del mar, sube a 21 pies arriba y baja 21 pies abajo, luego regresa al nivel del mar. Suponiendo que el movimiento de las mareas es armónico simple, encuentre una ecuación que describa la altura de la marea en la Bahía de Fundy arriba del nivel medio del mar. Trace una gráfica que muestre el nivel de las mareas en un período de 12 horas.

**34. Sistema resorte-masa** Una masa suspendida de un resorte es jalada hacia abajo una distancia de 2 pies desde su posición de reposo, como se ilustra en la figura siguiente. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le permite oscilar. Si la masa regresa a su posición después de 1 s, encuentre una ecuación que describa su movimiento.




**35. Sistema resorte-masa** Una masa está suspendida de un resorte. El resorte está comprimido de modo que la masa está situada a 5 cm arriba de su posición de reposo. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le permite oscilar. Se observa que la masa llega a su punto más bajo $\frac{1}{2}$ s después de soltarla. Encuentre una ecuación que describa el movimiento de la masa.

**36. Sistema resorte-masa** La frecuencia de oscilación de un cuerpo suspendido de un resorte depende de la rigidez $k$ del resorte (llamada *constante de resorte*) y de la masa $m$ del cuerpo. Si el resorte se comprime una distancia $a$ y luego se le permite oscilar, su desplazamiento está dado por

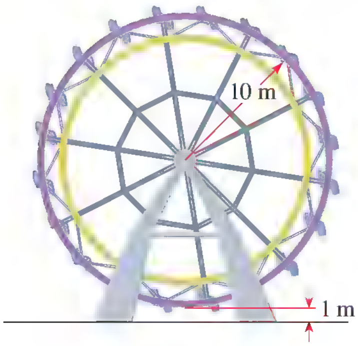
$$f(t) = a \cos \sqrt{k/m}\, t$$

**(a)** Una masa de 10 g está suspendida de un resorte con rigidez $k = 3$. Si el resorte se comprime una distancia de 5 cm y en seguida se suelta, encuentre la ecuación que describa la oscilación del resorte.
**(b)** Encuentre una fórmula general para la frecuencia (en términos de $k$ y $m$).

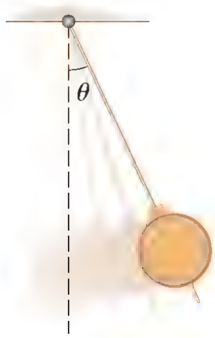
**(c)** ¿Cómo resulta afectada la frecuencia si se aumenta la masa? ¿Es más rápida o más lenta la oscilación?

**(d)** ¿Cómo se afecta la frecuencia si se usa un resorte con más rigidez ($k$ más grande)? ¿Es más rápida o más lenta la oscilación?

**37. Rueda "de la fortuna"** Una rueda de la fortuna tiene un radio de 10 m, y el fondo de la rueda pasa 1 m arriba del suelo. Si la rueda hace una revolución completa cada 20 segundos, encuentre una ecuación que dé la altura de una persona que vaya en la rueda, arriba del suelo, como función del tiempo.




**38. Péndulo de reloj** El péndulo de un reloj de caja hace una oscilación completa cada 2 segundos. El ángulo máximo que el péndulo hace con respecto a su posición de reposo es 10º. Sabemos por principios de física que el ángulo $\theta$ entre el péndulo y su posición de reposo cambia de modo armónico simple. Encuentre una ecuación que describa la medida del ángulo $\theta$ como función del tiempo. (Tome $t = 0$ como el tiempo cuando el péndulo está vertical.)



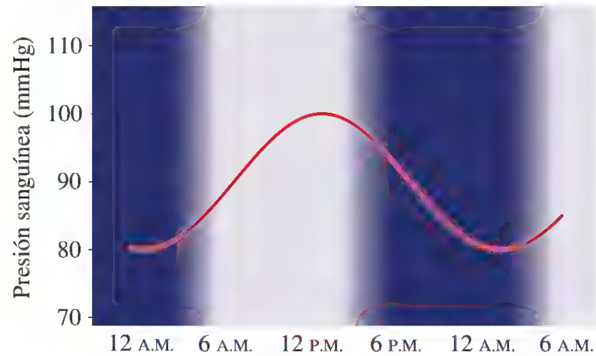

**39. Estrellas visibles** La estrella variable Zeta Géminis tiene un período de 10 días. El promedio de brillo de la estrella es 3.8 magnitudes, y la variación máxima a partir del promedio es 0.2 magnitudes. Suponiendo que la variación en brillo sea armónica simple, encuentre una ecuación que dé el brillo de la estrella como función del tiempo.

**40. Estrellas variables** Los astrónomos piensan que el radio de una estrella variable aumenta y disminuye con el brillo de la estrella. La estrella variable Delta Cefeida (Ejemplo 4) tiene un radio promedio de 20 millones de millas y cambia en un máximo de 1.5 millones de millas a partir de su promedio durante una pulsación sencilla. Encuentre una ecuación que describa el radio de esta estrella como función del tiempo.

**41. Relojes biológicos** Los *ritmos circadianos* son procesos biológicos que oscilan con un período de aproximadamente 24 horas. Esto es, un ritmo circadiano es un reloj biológico diario interno. La presión sanguínea parece seguir ese ritmo. Para cierta persona, el promedio de su presión sanguínea en reposo varía de un máximo de 100 mmHg a las 2:00 p.m. a un mínimo de 80 mmHg a las 2:00 a.m. Encuentre una función seno de la forma

$$f(t) = a\ \text{sen}(\omega(t - c)) + b$$

que modele la presión sanguínea en el tiempo $t$, medida en horas a partir de la medianoche.




**42. Generador eléctrico** La armadura de un generador eléctrico está girando a razón de 100 revoluciones por segundo (rps). Si el voltaje máximo producido es de 310 V, encuentre una ecuación que describa esta variación en voltaje. ¿Cuál es el voltaje rms? (Vea el Ejemplo 6 y la nota al margen junto al mismo.)

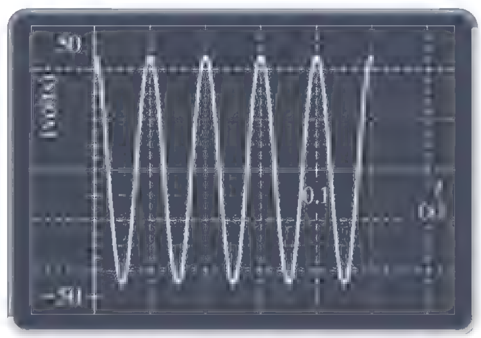
**43. Generador eléctrico** La gráfica muestra una pantalla de osciloscopio que indica la variación en voltaje de una corriente de CA producida por un generador simple.

**(a)** Encuentre el voltaje máximo producido.

**(b)** Encuentre la frecuencia (ciclos por segundo) del generador.

**(c)** ¿Cuántas revoluciones por segundo hace la armadura del generador?

**(d)** Encuentre una fórmula que describa la variación en voltaje como función del tiempo.




**44. Efecto Doppler** Cuando un auto con su claxon activado pasa junto a un observador, el tono del claxon parece más alto cuando se aproxima y más bajo cuando se aleja (vea la figura en la página siguiente). Este fenómeno se denomina **efecto Doppler**. Si la fuente de sonido se mueve a una velocidad $v$ con respecto al observador y si la velocidad del sonido es $v_0$, entonces la frecuencia $f$ percibida está relacionada con la frecuencia real $f_0$ como sigue:

$$f = f_0\left(\frac{v_0}{v_0 \pm v}\right)$$

Escogemos el signo menos si la fuente se mueve hacia el observador y el signo más si se aleja.

Suponga que un auto corre a 110 pies/s junto a una mujer que está de pie en el acotamiento de una carretera, con su claxon activado y que tiene una frecuencia de 500 Hz. Suponga que la velocidad del sonido es 1130 pies/s. (Ésta es la velocidad en aire seco a 70ºF.)

**(a)** ¿Cuáles son las frecuencias de los sonidos que la mujer escucha a medida que el auto se aproxima a ella y cuando se aleja de ella?

**(b)** Sea $A$ la amplitud del sonido. Encuentre funciones de la forma

$$y = A \operatorname{sen} \omega t$$

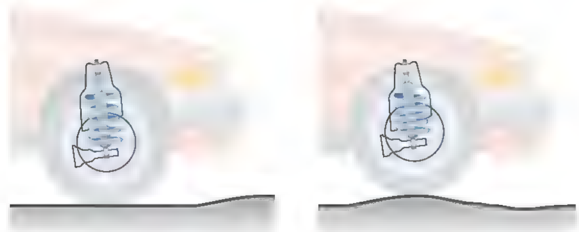
que modelen el sonido percibido cuando el auto se aproxima a la mujer y cuando se aleja de ésta.

**45. Movimiento de un edificio** Una fuerte corriente de viento incide sobre un edificio alto, haciendo que éste se mueva en vaivén en movimiento armónico amortiguado. La frecuencia de la oscilación es 0.5 ciclos por segundo, y la constante de amortiguamiento es $c = 0.9$. Encuentre una ecuación que describa el movimiento del edificio. (Suponga que $k = 1$, y tome $t = 0$ como el instante cuando la corriente de viento incide sobre el edificio.)

**46. Amortiguador de un auto** Cuando un auto golpea un tope del camino, un amortiguador del auto se comprime una distancia de 6 pulgadas y luego se suelta (vea la figura). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 2 ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

**(a)** Encuentre una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador a partir de su posición de reposo como función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en que se suelta el amortiguador.

**(b)** ¿Cuánto tiempo tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5 pulg.?



**47. Diapasón** Al pulsar un diapasón, éste oscila con movimiento armónico amortiguado. La amplitud del movimiento es medido y, 3 segundos más tarde, se encuentra que la amplitud ha bajado a ¼ de su valor. Encuentre la constante de amortiguamiento $c$ para este diapasón.

**48. Cuerda de guitarra** Una cuerda de guitarra es jalada en el punto $P$ una distancia de 3 cm arriba de su posición de reposo. A continuación se suelta y vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 165 ciclos por segundo. Después de 2 s, se observa que la amplitud de la vibración en el punto $P$ es 0.6 cm.

**(a)** Encuentre la constante de amortiguamiento $c$.

**(b)** Encuentre una ecuación que describa la posición en el punto $P$ arriba de su posición de reposo como función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en que se suelta la cuerda.

# CAPÍTULO 5 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1. (a)** ¿Qué es una circunferencia unitaria?

**(b)** Use un diagrama para explicar lo que se quiere decir con el punto terminal determinado por un número real $t$.

**(c)** ¿A qué está asociado el número de referencia $\bar{t}$ con $t$?

**(d)** Si $t$ es un número real y $P(x, y)$ es el punto terminal determinado por $t$, escriba ecuaciones que definan sen $t$, cos $t$, tan $t$, cot $t$, sec $t$ y csc $t$.

**(e)** ¿Cuáles son los dominios de las seis funciones que usted definió en el inciso (d)?

**(f)** ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes primero, segundo, tercero y cuarto?

**2. (a)** ¿Qué es una función par?

**(b)** ¿Cuáles funciones trigonométricas son pares?

**(c)** ¿Qué es una función impar?

**(d)** ¿Cuáles funciones trigonométricas son impares?

**3. (a)** Exprese las identidades recíprocas.

**(b)** Exprese las identidades de Pitágoras.

**4. (a)** ¿Qué es una función periódica?

**(b)** ¿Cuáles son los períodos de las seis funciones trigonométricas?

**5.** Grafique las funciones seno y coseno. ¿Cómo está relacionada la gráfica de la función coseno con la gráfica de la función seno?

**6.** Escriba expresiones para la amplitud, período y desfase de la curva seno $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ y la curva coseno $y = a \cos k(x - b)$.

**7. (a)** Grafique las funciones tangente y cotangente.

**(b)** Exprese los períodos de la curva tangente $y = a \tan kx$ y la curva cotangente $y = a \cot kx$.

**8. (a)** Grafique las funciones secante y cosecante.

**(b)** Exprese los períodos de la curva secante $y = a \sec kx$ y la curva cosecante $y = a \csc kx$.

**9. (a)** Defina la función inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?

**(b)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$?

**(c)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$?

**10.** **(a)** Defina la función coseno inverso $\cos^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y su rango?
**(b)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\cos(\cos^{-1} x) = x$?
**(c)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\cos^{-1}(\cos x) = x$?

**11.** **(a)** Defina la función tangente inversa $\tan^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
**(b)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\tan(\tan^{-1} x) = x$?
**(c)** ¿Para qué valores de $x$ es verdadera la ecuación $\tan^{-1}(\tan x) = x$?

**12.** **(a)** ¿Qué es un movimiento armónico simple?
**(b)** ¿Qué es un movimiento armónico amortiguado?
**(c)** Dé tres ejemplos reales de movimiento armónico simple y de movimiento armónico amortiguado.

## EJERCICIOS

**1-2** ■ Nos dan un punto $P(x, y)$.
**(a)** Demuestre que $P$ está en la circunferencia unitaria.
**(b)** Suponga que $P$ es el punto terminal determinado por $t$. Encuentre sen $t$, cos $t$ y tan $t$.

**1.** $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ **2.** $P\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

**3-6** ■ Nos dan un número real $t$.
**(a)** Encuentre el número de referencia para $t$.
**(b)** Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria determinado por $t$.
**(c)** Encuentre las seis funciones trigonométricas de $t$.

**3.** $t = \dfrac{2\pi}{3}$ **4.** $t = \dfrac{5\pi}{3}$

**5.** $t = -\dfrac{11\pi}{4}$ **6.** $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

**7-16** ■ Encuentre el valor de la función trigonométrica. Si es posible, dé el valor exacto; de otro modo, use calculadora para hallar un valor aproximado redondeado a cinco lugares decimales.

**7.** **(a)** $\text{sen } \dfrac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cos \dfrac{3\pi}{4}$

**8.** **(a)** $\tan \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

**9.** **(a)** sen 1.1 **(b)** cos 1.1

**10.** **(a)** $\cos \dfrac{\pi}{5}$ **(b)** $\cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$

**11.** **(a)** $\cos \dfrac{9\pi}{2}$ **(b)** $\sec \dfrac{9\pi}{2}$

**12.** **(a)** $\text{sen } \dfrac{\pi}{7}$ **(b)** $\csc \dfrac{\pi}{7}$

**13.** **(a)** $\tan \dfrac{5\pi}{2}$ **(b)** $\cot \dfrac{5\pi}{2}$

**14.** **(a)** $\text{sen } 2\pi$ **(b)** $\csc 2\pi$

**15.** **(a)** $\tan \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $\cot \dfrac{5\pi}{6}$

**16.** **(a)** $\cos \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $\text{sen } \dfrac{\pi}{6}$

**17-20** ■ Use las identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda.

**17.** $\dfrac{\tan t}{\cos t}$, sen $t$ **18.** $\tan^2 t \sec t$, cos $t$

**19.** tan $t$, sen $t$; $t$ en el cuarto cuadrante

**20.** sec $t$, sen $t$; $t$ en el segundo cuadrante

**21-24** ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas restantes en $t$ a partir de la información dada.

**21.** $\text{sen } t = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$

**22.** $\text{sen } t = -\frac{1}{2}$, $\cos t > 0$

**23.** $\cot t = -\frac{1}{2}$, $\csc t = \sqrt{5}/2$

**24.** $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\tan t < 0$

**25.** Si $\tan t = \frac{1}{4}$ y el punto terminal para $t$ está en el tercer cuadrante, encuentre $\sec t + \cot t$.

**26.** Si $\text{sen } t = -\frac{8}{17}$ y el punto terminal para $t$ está en el cuarto cuadrante, encuentre $\csc t + \sec t$.

**27.** Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y el punto terminal para $t$ está en el primer cuadrante, encuentre $\tan t + \sec t$.

**28.** Si $\sec t = -5$ y el punto terminal para $t$ está en el segundo cuadrante, encuentre $\text{sen}^2 t + \cos^2 t$.

**29-36** ■ Nos dan una función trigonométrica.
**(a)** Encuentre la amplitud, período y desfase de la función.
**(b)** Trace la gráfica.

**29.** $y = 10 \cos \frac{1}{2}x$ **30.** $y = 4 \text{ sen } 2\pi x$

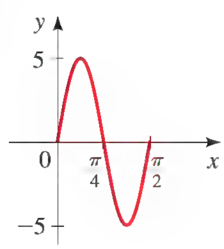
**31.** $y = -\text{sen } \frac{1}{2}x$ **32.** $y = 2 \text{ sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**33.** $y = 3 \text{ sen}(2x - 2)$ **34.** $y = \cos 2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

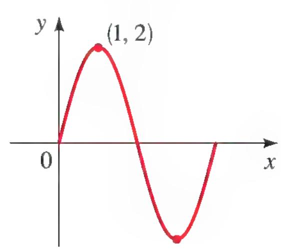
**35.** $y = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ **36.** $y = 10 \text{ sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

**37-40** ■ Se muestra la gráfica de un período de una función de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ o $y = a \cos k(x - b)$. Determine la función.

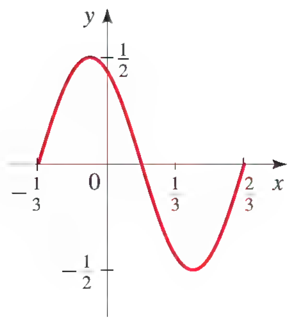
**37.**



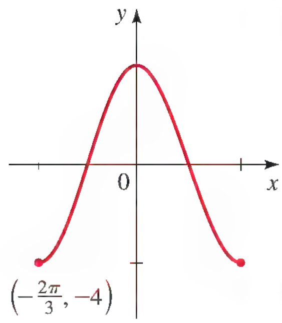

**38.**



**39.**




**40.**




**41-48** ■ Encuentre el período y trace la gráfica.

**41.** $y = 3 \tan x$ **42.** $y = \tan \pi x$

**43.** $y = 2 \cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **44.** $y = \sec\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

**45.** $y = 4 \csc(2x + \pi)$ **46.** $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

**47.** $y = \tan\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{8}\right)$ **48.** $y = -4 \sec 4\pi x$

**49-52** ■ Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

**49.** $\text{sen}^{\ 1} 1$ **50.** $\cos^{\ 1}\left(\ \dfrac{1}{2}\right)$

**51.** $\text{sen}^{\ 1}\left(\text{sen}\ \dfrac{13\pi}{6}\right)$ **52.** $\tan\left(\cos^{\ 1}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)$

**53-58** ■ Nos dan una función.

**(a)** Use calculadora graficadora para graficar la función.

**(b)** Determine de la gráfica si la función es periódica y, si es así, determine el período.

**(c)** Determine de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de éstas.

**53.** $y = |\cos x|$ **54.** $y = \text{sen}(\cos x)$

**55.** $y = \cos(2^{0.1x})$ **56.** $y = 1 + 2^{\cos x}$

**57.** $y = |x| \cos 3x$ **58.** $y = \sqrt{x}\ \text{sen}\ 3x \quad (x > 0)$

**59-62** ■ Grafique las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

**59.** $y = x, \quad y = -x, \quad y = x\ \text{sen}\ x$

**60.** $y = 2^{\ x}, \quad y = -2^{\ x}, \quad y = 2^{\ x} \cos 4\pi x$

**61.** $y = x, \quad y = \text{sen}\ 4x, \quad y = x + \text{sen}\ 4x$

**62.** $y = \text{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

**63-64** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

**63.** $y = \cos x + \text{sen}\ 2x$ **64.** $y = \cos x + \text{sen}^2 x$

**65.** Encuentre las soluciones de $\text{sen}\ x = 0.3$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

**66.** Encuentre las soluciones de $\cos 3x = x$ sobre el intervalo $[0, \pi]$.

**67.** Sea $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{x}$.

**(a)** ¿La función $f$ es par, impar o ninguna de éstas?

**(b)** Encuentre los puntos de intersección $x$ de la gráfica de $f$.

**(c)** Grafique $f$ en un rectángulo de observación apropiado.

**(d)** Describa el comportamiento de la función cuando $x$ se hace grande.

**(e)** Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando $x$ se aproxima a 0?

**68.** Sea $y_1 = \cos(\text{sen}\ x)$ y $y_2 = \text{sen}(\cos x)$.

**(a)** Grafique $y_1$ y $y_2$ en el mismo rectángulo de observación.

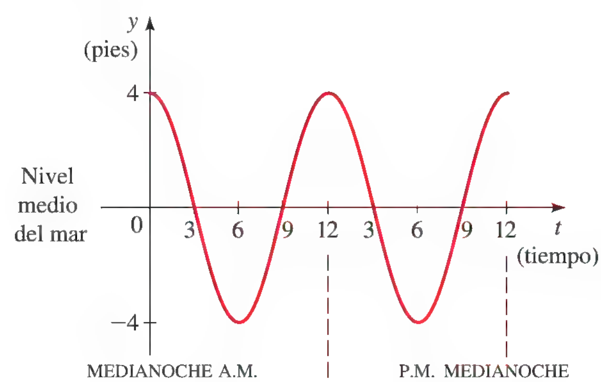
**(b)** Determine el período de cada una de estas funciones a partir de su gráfica.

**(c)** Encuentre una desigualdad entre $\text{sen}(\cos x)$ y $\cos(\text{sen}\ x)$ que sea válida para toda $x$.

**69.** Un punto $P$ que se mueve en movimiento armónico simple completa 8 ciclos por segundo. Si la amplitud del movimiento es 50 cm, encuentre una ecuación que describa el movimiento de $P$ como función del tiempo. Suponga que el punto $P$ está en su máximo desplazamiento cuando $t = 0$.

**70.** Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple a una frecuencia de 4 ciclos por segundo. La distancia del punto más alto al punto más bajo de la oscilación es 100 centímetros. Encuentre una ecuación que describa la distancia de la masa desde su posición de reposo como función del tiempo. Suponga que la masa está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

**71.** La gráfica muestra la variación del nivel de agua con respecto al nivel medio del mar en el puerto de Long Beach para un período particular de 24 horas. Suponiendo que esta variación es armónica simple, encuentre una ecuación de la forma $y = a \cos \omega t$ que describa la variación en el nivel de agua como función del número de horas después de la medianoche.



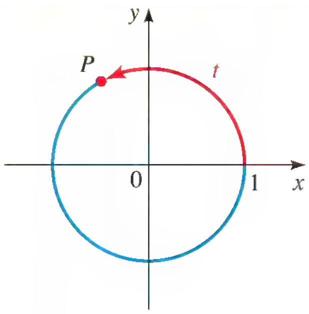

**72.** El piso superior de un edificio experimenta movimiento armónico amortiguado después de un breve y repentino terremoto. En el tiempo $t = 0$ el desplazamiento está en su máximo, a 16 cm de la posición normal. La constante de amortiguamiento es $c = 0.72$ y el edificio vibra a 1.4 ciclos por segundo.

**(a)** Encuentre una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento.

**(b)** Grafique la función que encontró en el inciso (a).

**(c)** ¿Cuál es el desplazamiento en el tiempo $t = 10$ s?

# CAPÍTULO 5 EXAMEN




1. El punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Si $x = \sqrt{11}/6$, encuentre $y$.

2. El punto $P$ de la figura de la izquierda tiene coordenada $y$ de $\frac{4}{5}$. Encuentre:

   **(a)** $\operatorname{sen} t$ **(b)** $\cos t$

   **(c)** $\tan t$ **(d)** $\sec t$

3. Encuentre el valor exacto.

   **(a)** $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{6}$ **(b)** $\cos \dfrac{13\pi}{4}$

   **(c)** $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ **(d)** $\csc \dfrac{3\pi}{2}$

4. Exprese $\tan t$ en términos de $\operatorname{sen} t$, si el punto terminal determinado por $t$ está en el segundo cuadrante.

5. Si $\cos t = -\frac{8}{17}$ y si el punto terminal determinado por $t$ está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan t \cot t + \csc t$.

**6-7** ■ Nos dan una función trigonométrica.

**(a)** Encuentre la amplitud, período y desfase de la función.

**(b)** Trace la gráfica.

6. $y = -5 \cos 4x$

7. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

**8-9** ■ Encuentre el período y grafique la función.

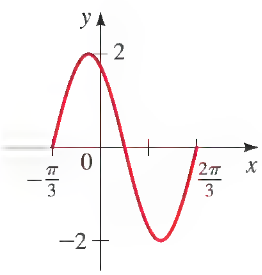
8. $y = -\csc 2x$

9. $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

10. Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

    **(a)** $\tan^{-1} 1$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

    **(c)** $\tan^{1}(\tan 3\pi)$ **(d)** $\cos(\tan^{1}(-\sqrt{3}))$




11. La gráfica mostrada a la izquierda es un período de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$. Determine la función.

12. Sea $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$.

    **(a)** Use calculadora graficadora para graficar $f$ en un rectángulo de observación apropiado.

    **(b)** Determine de la gráfica si $f$ es par, impar o ninguna de éstas.

    **(c)** Encuentre los valores mínimo y máximo de $f$.

13. Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple. La masa completa 2 ciclos por segundo, y la distancia entre el punto más alto y el punto más bajo de la oscilación es 10 cm. Encuentre una ecuación de la forma $y = \operatorname{sen} \omega t$ que da la distancia de la masa desde su posición de reposo como función del tiempo.

14. Un cuerpo está moviéndose hacia arriba y abajo en movimiento armónico amortiguado. Su desplazamiento en el tiempo $t = 0$ es 16 pulgadas; éste es su desplazamiento máximo. La constante de amortiguamiento es $c = 0.1$, y la frecuencia es 12 Hz.

    **(a)** Encuentre una función que modele este movimiento.

    **(b)** Grafique la función.

# Ajuste de datos a curvas senoidales

En secciones previas de *Enfoque sobre modelado* aprendimos cómo ajustar modelos lineales, exponenciales y de potencia a datos. La Figura 1 muestra algunas gráficas de dispersión de datos. Las gráficas de dispersión pueden ayudar a guiarnos a escoger un modelo apropiado. (Trate de determinar qué tipo de función modelaría mejor los datos en cada gráfica.) Si la gráfica de dispersión indica movimiento armónico simple, entonces podríamos tratar de modelar los datos con una función seno o coseno. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

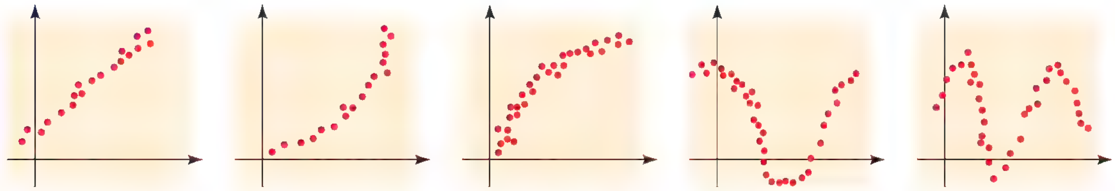


**FIGURA 1**

## EJEMPLO 1 | Modelado de la altura de una marea

La profundidad del agua en un angosto canal varía con las mareas. La Tabla 1 muestra la profundidad del agua en un período de 12 horas.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos de la profundidad del agua.

**(b)** Encuentre una función que modele la profundidad del agua con respecto al tiempo.

**(c)** Si un bote necesita al menos 11 pies de agua para cruzar el canal, ¿durante qué horas puede hacerlo así?

**TABLA 1**

| Hora | Profundidad (pies) |
|---|---|
| 12:00 A.M. | 9.8 |
| 1:00 A.M. | 11.4 |
| 2:00 A.M. | 11.6 |
| 3:00 A.M. | 11.2 |
| 4:00 A.M. | 9.6 |
| 5:00 A.M. | 8.5 |
| 6:00 A.M. | 6.5 |
| 7:00 A.M. | 5.7 |
| 8:00 A.M. | 5.4 |
| 9:00 A.M. | 6.0 |
| 10:00 A.M. | 7.0 |
| 11:00 A.M. | 8.6 |
| 12:00 P.M. | 10.0 |

### SOLUCIÓN

**(a)** Una gráfica de dispersión de los datos se muestra en la Figura 2.

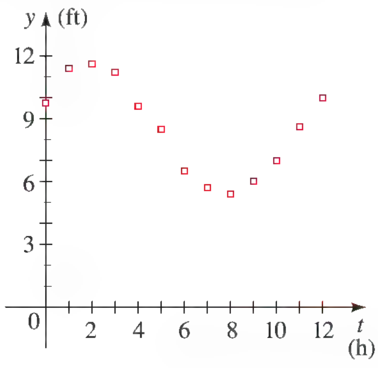



**FIGURA 2**

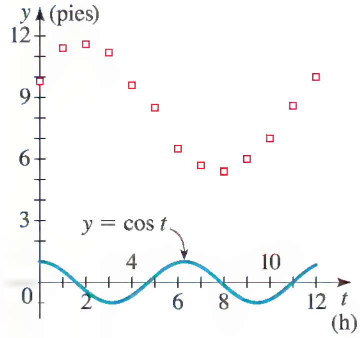
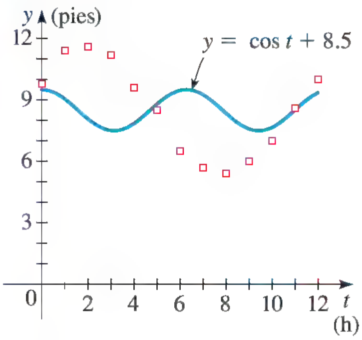
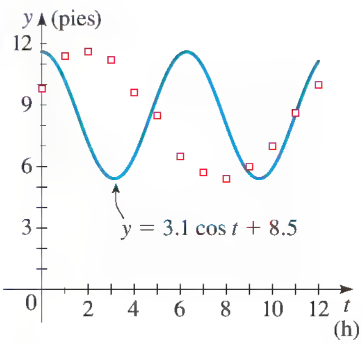
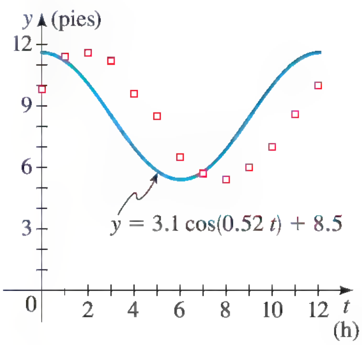



**FIGURA 3**




**(b)** Los datos parecen encontrarse en una curva coseno (o seno). Pero, si graficamos $y = \cos t$ en la misma gráfica que la gráfica de dispersión, el resultado en la Figura 3 no está siquiera cercana a los datos. Para ajustar los datos, necesitamos ajustar el desplazamiento vertical, amplitud, período y desfase de la curva coseno. En otras palabras, necesitamos hallar una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

Usamos los pasos siguientes, que están ilustrados por las gráficas al margen.

### ▶ Ajustar el desplazamiento vertical

El desplazamiento vertical $b$ es el promedio de los valores máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} b &= \text{desplazamiento vertical} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} + \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 + 5.4) = 8.5 \end{aligned}$$

### ▶ Ajustar la amplitud

La amplitud $a$ es la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} a &= \text{amplitud} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 - 5.4) = 3.1 \end{aligned}$$

### ▶ Ajustar el período

El tiempo entre valores consecutivos máximo y mínimo es la mitad de un período. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} &= \text{período} \\ &= 2\cdot(\text{tiempo de valor máximo} - \text{tiempo de valor mínimo}) \\ &= 2(8 - 2) = 12 \end{aligned}$$

Entonces, $\omega = 2\pi/12 = 0.52$.

### ▶ Ajustar el desplazamiento horizontal

Como el valor máximo de los datos se presenta en aproximadamente $t = 2.0$, representa una curva de coseno desplazada 2 h a la derecha. Por tanto,

$$\begin{aligned} c &= \text{desfase} \\ &= \text{hora de valor máximo} \\ &= 2.0 \end{aligned}$$

### ▶ El modelo

Hemos mostrado que una función que modela las mareas en el período dado está dada por

$$y = 3.1\cos(0.52(t - 2.0)) + 8.5$$

En la Figura 4 se da una gráfica de la función y la gráfica de dispersión. Parece que el modelo que encontramos es una buena aproximación de los datos.

**(c)** Necesitamos resolver la desigualdad $y \geq 11$. Resolvemos gráficamente esta desigualdad al graficar $y = 3.1 \cos 0.52(t - 2.0) + 8.5$ y $y = 11$ en la misma gráfica. De la gráfica de la Figura 5 vemos que la profundidad del agua es mayor a 11 pies entre $t \approx 3.2$. Esto corresponde a las horas 12:48 a.m. a las 3:12 a.m.

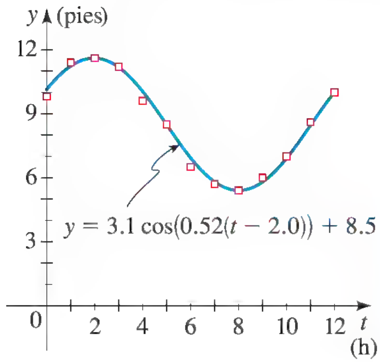



**FIGURA 4**

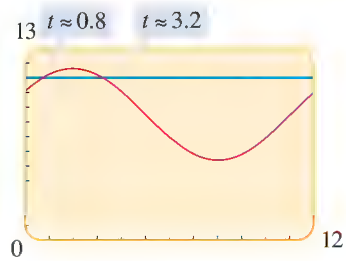



**FIGURA 5**

Para las calculadoras TI-83 y TI-86 el comando `SenReg` (para regresión de seno) encuentra la curva seno que mejor ajusta los datos dados.

En el Ejemplo 1 usamos la gráfica de dispersión para guiarnos a hallar una curva coseno que dé un modelo aproximado de los datos. Algunas calculadoras graficadoras son capaces de hallar una curva seno o coseno que mejor se ajusta a un conjunto dado de puntos de datos. El método que estas calculadoras usan es semejante al método para hallar una recta de mejor ajuste, como se explica en la página 131.

## EJEMPLO 2 | Ajuste de datos a una curva senoidal

**(a)** Use calculadora graficadora para hallar la curva senoidal que mejor ajusta los datos de profundidad del agua en la Tabla 1 en la página 427.

**(b)** Compare su resultado con el modelo hallado en el Ejemplo 1.

### SOLUCIÓN

```
SinReg
 y=a*sin(bx+c)+d
 a=3.097877596
 b=.5268322697
 c=.5493035195
 d=8.424021899
```

Salida de la función `SenReg` en la TI-83

**(a)** Usando los datos de la Tabla 1 y el comando `SenReg` de la calculadora TI-83, obtenemos una función de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$$

donde

$$a = 3.1 \qquad b = 0.53$$

$$c = 0.55 \qquad d = 8.42$$

Por lo tanto, la función seno que mejor ajusta los datos es

$$y = 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42$$

**(b)** Para comparar esto con la función del Ejemplo 1, cambiamos la función seno a función coseno usando para ello la fórmula de reducción $\operatorname{sen} u = \cos(u - \pi/2)$.

$$y = 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42$$

$$= 3.1 \cos\left(0.53t + 0.55 - \frac{\pi}{2}\right) + 8.42 \qquad \text{Fórmula de reducción}$$

$$= 3.1 \cos(0.53t \quad 1.02) + 8.42$$

$$= 3.1 \cos(0.53(t \quad 1.92)) + 8.42 \qquad \text{Factorice 0.53}$$

Comparando esto con la función obtenida en el Ejemplo 1, vemos que hay pequeñas diferencias en los coeficientes. En la Figura 6 graficamos una gráfica de dispersión de los datos junto con la función seno de mejor ajuste.

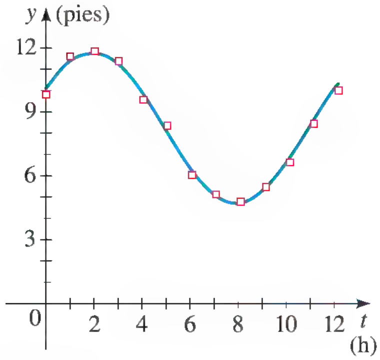



**FIGURA 6**

En el Ejemplo 1 estimamos los valores de la amplitud, período y desplazamientos a partir de los datos. En el ejemplo 2 la calculadora calculó la curva senoidal que mejor ajusta los datos (esto es, la curva que se desvía menos de los datos como se explica en la página 131). Las diferentes formas de obtener el modelo explican las diferencias en las funciones.

## PROBLEMAS

**1-4 ■ Modelado de datos periódicos** Nos dan un conjunto de datos.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una función coseno de la forma $y = a\cos(\omega(t - c)) + b$ que modele los datos, como en el Ejemplo 1.

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta la curva a los datos?

**(d)** Use una calculadora graficadora para hallar la función seno que mejor se ajuste a los datos, como en el Ejemplo 2.

**(e)** Compare las funciones que encontró en los incisos (b) y (d). [Use la fórmula de reducción $\operatorname{sen} u = \cos(u - \pi/2)$.]

**1.**

| $t$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 2.1 |
| 2 | 1.1 |
| 4 | −0.8 |
| 6 | −2.1 |
| 8 | 1.3 |
| 10 | 0.6 |
| 12 | 1.9 |
| 14 | 1.5 |

**2.**

| $t$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 190 |
| 25 | 175 |
| 50 | 155 |
| 75 | 125 |
| 100 | 110 |
| 125 | 95 |
| 150 | 105 |
| 175 | 120 |
| 200 | 140 |
| 225 | 165 |
| 250 | 185 |
| 275 | 200 |
| 300 | 195 |
| 325 | 185 |
| 350 | 165 |

**3.**

| $t$ | $y$ |
|---|---|
| 0.1 | 21.1 |
| 0.2 | 23.6 |
| 0.3 | 24.5 |
| 0.4 | 21.7 |
| 0.5 | 17.5 |
| 0.6 | 12.0 |
| 0.7 | 5.6 |
| 0.8 | 2.2 |
| 0.9 | 1.0 |
| 1.0 | 3.5 |
| 1.1 | 7.6 |
| 1.2 | 13.2 |
| 1.3 | 18.4 |
| 1.4 | 23.0 |
| 1.5 | 25.1 |

**4.**

| $t$ | $y$ |
|---|---|
| 0.0 | 0.56 |
| 0.5 | 0.45 |
| 1.0 | 0.29 |
| 1.5 | 0.13 |
| 2.0 | 0.05 |
| 2.5 | −0.10 |
| 3.0 | 0.02 |
| 3.5 | 0.12 |
| 4.0 | 0.26 |
| 4.5 | 0.43 |
| 5.0 | 0.54 |
| 5.5 | 0.63 |
| 6.0 | 0.59 |

**5. Cambio de temperatura anual** La tabla siguiente da el promedio mensual de temperatura en el condado de Montgomery, Maryland.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una curva coseno que modele los datos (como en el Ejemplo 1).

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión.

**(d)** Use calculadora graficadora para hallar la curva senoidal que mejor ajuste los datos (como en el Ejemplo 2).

| Mes | Promedio de temperatura (°F) | Mes | Promedio de temperatura (°F) |
|---|---|---|---|
| Enero | 40.0 | Julio | 85.8 |
| Febrero | 43. | Agosto | 83.9 |
| Marzo | 54.6 | Septiembre | 76.9 |
| Abril | 64.2 | Octubre | 66.8 |
| Mayo | 73.8 | Noviembre | 55.5 |
| Junio | 81.8 | Diciembre | 44.5 |

**6. Ritmos circadianos** El ritmo circadiano (del latín *circa* hacia, y *diem* día) es el modelo biológico diario por el cual cambian la temperatura del cuerpo, la presión sanguínea y otras variables fisiológicas. Los datos de la tabla siguiente muestran cambios típicos en la temperatura del cuerpo humano en un período de 24 horas ($t = 0$ corresponde a la medianoche).

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una curva coseno que modele los datos (como en el Ejemplo 1).

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión.

**(d)** Use una calculadora graficadora para hallar la curva senoidal que mejor ajusta los datos (como en el Ejemplo 2).

| Hora | Temperatura corporal (°C) | Hora | Temperatura corporal (°C) |
|---|---|---|---|
| 0 | 36.8 | 14 | 37.3 |
| 2 | 36.7 | 16 | 37.4 |
| 4 | 36.6 | 18 | 37.3 |
| 6 | 36.7 | 20 | 37.2 |
| 8 | 36.8 | 22 | 37.0 |
| 10 | 37.0 | 24 | 36.8 |
| 12 | 37.2 | | |

**7. Población de depredadores** Cuando dos especies interactúan en una relación de depredador/presa, las poblaciones de ambas especies tienden a variar en forma senoidal. (Vea el Proyecto de descubrimiento *Modelos depredador/presa* que se cita en la página 398.) En cierto condado del medio oeste, la principal fuente de alimento para lechuzas de granero está formada por ratones de campo y otros pequeños mamíferos. La tabla siguiente da la población de lechuzas de granero en este condado cada día 1 de julio en un período de 12 años.

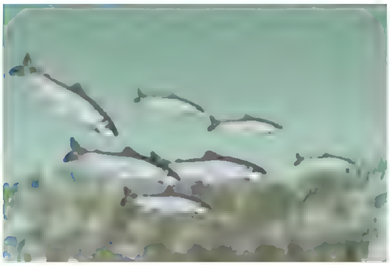
**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una curva senoidal que modele los datos (como en el Ejemplo 1).

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión.

**(d)** Use calculadora graficadora para hallar la curva senoidal que mejor ajuste los datos (como en el ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso (b).

| Año | Población de lechuzas |
|---|---|
| 0 | 50 |
| 1 | 62 |
| 2 | 73 |
| 3 | 80 |
| 4 | 71 |
| 5 | 60 |
| 6 | 51 |
| 7 | 43 |
| 8 | 29 |
| 9 | 20 |
| 10 | 28 |
| 11 | 41 |
| 12 | 49 |



**8. Supervivencia de salmones** Por razones que hasta ahora no se han entendido con toda claridad, el número de pececillos de salmón que sobreviven al viaje desde los lugares de desove en lechos de ríos hasta el mar abierto varía, aproximadamente, en forma seno de un año a otro. La tabla siguiente muestra el número de salmones que nacen en cierto arroyuelo de la Columbia Británica y luego se abren paso al estrecho de Georgia. La información se da en miles de pececillos para un período de 16 años.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una curva seno que modele los datos (como en el Ejemplo 1).

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión.

**(d)** Use calculadora graficadora para hallar la curva seno que mejor se ajuste a los datos (como en el Ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso (b).

| Año | Salmón ($\times$ 1000) | Año | Salmón ($\times$ 1000) |
|---|---|---|---|
| 1985 | 43 | 1993 | 56 |
| 1986 | 36 | 1994 | 63 |
| 1987 | 27 | 1995 | 57 |
| 1988 | 23 | 1996 | 50 |
| 1989 | 26 | 1997 | 44 |
| 1990 | 33 | 1998 | 38 |
| 1991 | 43 | 1999 | 30 |
| 1992 | 50 | 2000 | 22 |

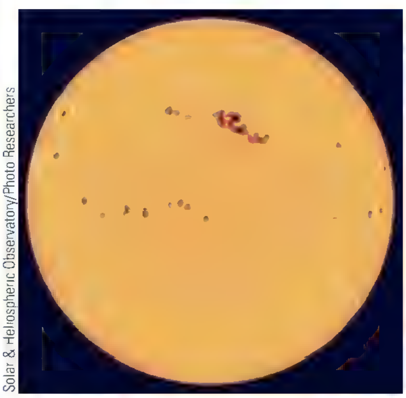
**9. Actividad de manchas solares** Las manchas solares son regiones relativamente "frías" en la superficie del Sol, que parecen como manchas oscuras cuando son observadas a través de filtros solares especiales. El número de manchas solares varía en un ciclo de 11 años. La tabla siguiente da el promedio de la cantidad diaria de manchas solares para los años 1975-2004.

**(a)** Haga una gráfica de dispersión de los datos.

**(b)** Encuentre una curva coseno que modele los datos (como en el Ejemplo 1).

**(c)** Grafique la función que encontró en el inciso (b) junto con la gráfica de dispersión.

**(d)** Use calculadora graficadora para hallar la curva seno que mejor ajuste los datos (como en el Ejemplo 2). Compare con su respuesta del inciso (b).



Solar & Heliospheric Observatory/Photo Researchers

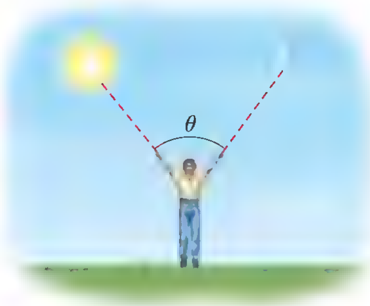
| Año | Manchas solares | Año | Manchas solares |
|---|---|---|---|
| 1975 | 16 | 1990 | 143 |
| 1976 | 13 | 1991 | 146 |
| 1977 | 28 | 1992 | 94 |
| 1978 | 93 | 1993 | 55 |
| 1979 | 155 | 1994 | 30 |
| 1980 | 155 | 1995 | 18 |
| 1981 | 140 | 1996 | 9 |
| 1982 | 116 | 1997 | 21 |
| 1983 | 67 | 1998 | 64 |
| 1984 | 46 | 1999 | 93 |
| 1985 | 18 | 2000 | 119 |
| 1986 | 13 | 2001 | 111 |
| 1987 | 29 | 2002 | 104 |
| 1988 | 100 | 2003 | 64 |
| 1989 | 158 | 2004 | 40 |

CAPÍTULO 6

# FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Supóngase que deseamos hallar la distancia de la Tierra al Sol. Usar una cinta de medir es obviamente impráctico, de modo que necesitamos algo que no sea simples mediciones para atacar este problema. Los ángulos son más fáciles de medir que las distancias. Por ejemplo, podemos hallar el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna con sólo apuntar al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar relaciones entre ángulos y distancias. En consecuencia, si tuviéramos una forma de determinar distancias a partir de ángulos, podríamos hallar la distancia al Sol sin tener que ir hasta ahí. Las funciones trigonométricas nos dan las *herramientas* que necesitamos.




Si $\theta$ es un ángulo en un triángulo rectángulo, entonces la relación trigonométrica sen $\theta$ está definida como la longitud del lado opuesto a $\theta$ dividido entre la longitud de la hipotenusa. Esta relación es la misma en *cualquier* triángulo rectángulo semejante, incluyendo el enorme triángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna. (Vea la Sección 6.2, Ejercicio 61.)

Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas equivalentes pero distintas: como funciones de números reales (Capítulo 5) o como funciones de ángulos (Capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, de modo que ya sea el Capítulo 5 o el Capítulo 6 se pueden estudiar primero. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para diferentes aplicaciones.

# 6.1 MEDIDA DE UN ÁNGULO

**Medida de un ángulo ▶ Ángulos en posición normal ▶ Longitud de un arco de circunferencia ▶ Área de un sector circular ▶ Movimiento circular**

Un **ángulo** $AOB$ está formado por dos rayos $R_1$ y $R_2$ con un vértice común $O$ (vea Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo $R_1$ sobre $R_2$. En este caso, $R_1$ recibe el nombre de **lado inicial** y $R_2$ es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como **negativo**.

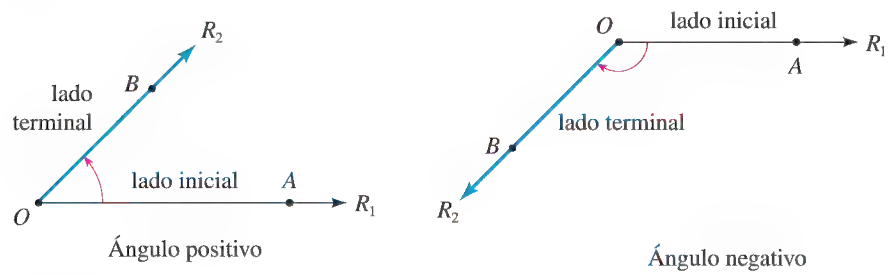



**FIGURA 1**

## Medida de un ángulo

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover $R_1$ sobre $R_2$. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la *medida en radianes.* La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

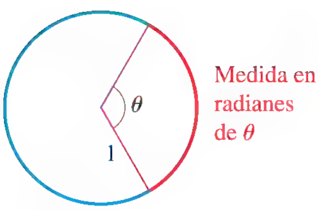



**FIGURA 2**

> **DEFINICIÓN DE MEDIDA EN RADIÁN**
>
> Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (vea Figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es $2\pi$ y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida $2\pi$ rad, un ángulo llano tiene una medida $\pi$ rad, y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que esté subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de la circunferencia unitaria tiene medida 2 en radianes (vea Figura 3).

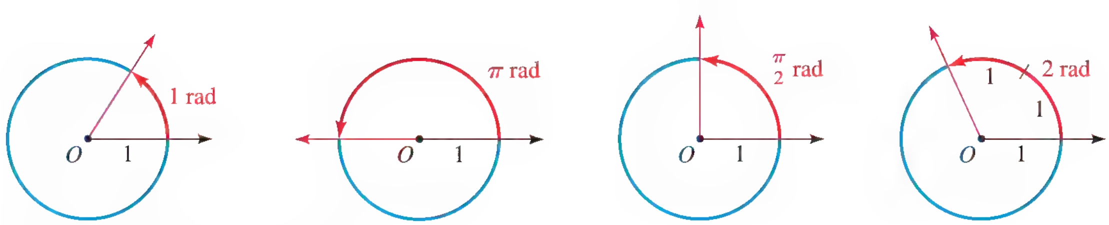



**FIGURA 3** Medida en radianes

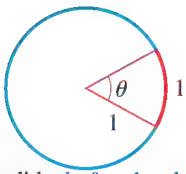
Como una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es $2\pi$ rad, obtenemos la siguiente y sencilla relación entre estos dos métodos de medición de ángulos.

**RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES**

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{rad}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

**FIGURA 4**

Para tener alguna idea del tamaño de 1 radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296° \qquad \text{y} \qquad 1° \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo $\theta$ de medida 1 radián se muestra en la Figura 4.

**EJEMPLO 1 | Convertir entre radianes y grados**

**(a)** Exprese 60° en radianes. **(b)** Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

**SOLUCIÓN** La relación entre grados y radianes da

**(a)** $60° = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \dfrac{\pi}{3} \text{rad}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{6} \text{rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30°$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **15**

Una nota de terminología: A veces usamos frases como "un ángulo de 30°" para querer decir *un ángulo cuya medida es 30°*. También, para un ángulo $\theta$, escribimos $\theta = 30°$ o $\theta = \pi/6$ para querer decir que *la medida de* $\theta$ *es* 30° *o* $\pi/6$ *rad*. Cuando no se da una unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

## Ángulos en posición normal

Un ángulo está en **posición normal** si está trazado en el plano $xy$ con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje positivo $x$. La Figura 5 da ejemplos de ángulos en posición normal.

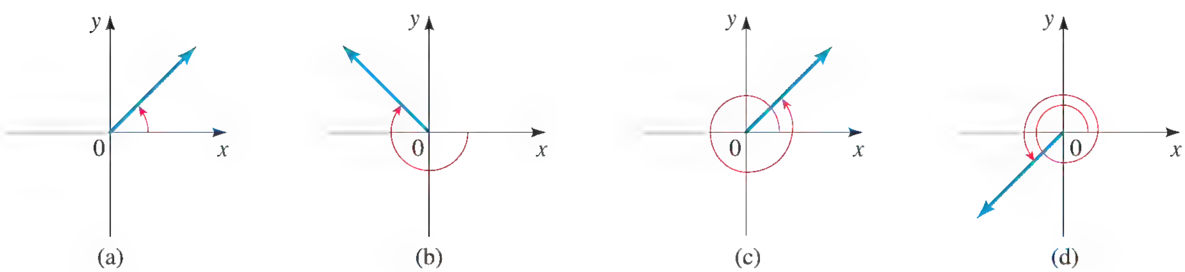


**FIGURA 5** Ángulos en posición normal

Dos ángulos en posición normal son **coterminales** si sus lados coinciden. En la Figura 5, los ángulos en (a) y en (c) son coterminales.

**EJEMPLO 2 | Ángulos coterminales**

**(a)** Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición normal.

**(b)** Encuentre ángulos que sean coterminales con el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ en posición normal.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con $\theta$, sumamos cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con $\theta$, restamos cualquier múltiplo de 360°. Así

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con $\theta$. (Vea Figura 6.)

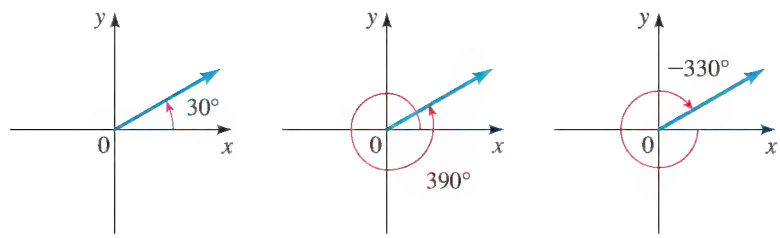



**FIGURA 6**

**(b)** Para hallar ángulos positivos que sean coterminales con $\theta$, sumamos cualquier múltiplo de $2\pi$. Así,

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que sean coterminales con $\theta$, restamos cualquier múltiplo de $2\pi$. Así

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta$. (Vea Figura 7.)

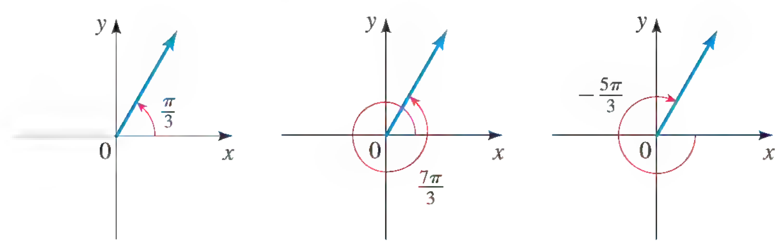



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **29**

## EJEMPLO 3 | Ángulos coterminales

Encuentre un ángulo con medida entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo de medida 1290° en posición normal.

**SOLUCIÓN** De 1290° podemos restar 360° tantas veces como se desee, y el ángulo restante será coterminal con 1290°. Así, $1290° - 360 = 930°$ es coterminal con 1290° y por lo tanto el ángulo $1290° - 2(360°) = 570°$.

Para hallar el ángulo que buscamos entre 0° y 360°, restamos 360° de 1290° tantas veces como sea necesario. Una forma eficiente de hacer esto es determinar cuántas veces cabe 360° en 1290°, es decir, divida 1290 entre 360, y el residuo será el ángulo que buscamos.

Vemos que 360 cabe tres veces en 1290, con un residuo de 210. Así, 210° es el ángulo deseado (vea Figura 8).

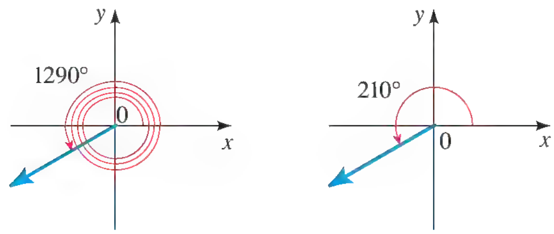



**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## Longitud de un arco de circunferencia

Un ángulo cuya medida en radianes es $\theta$ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio $r$, la longitud $s$ de un arco que subtiende al ángulo $\theta$ (vea Figura 9) es

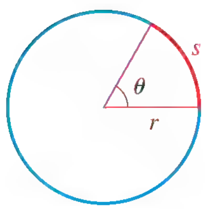



**FIGURA 9** $s = \theta r$

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

**LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR**

En una circunferencia de radio $r$, la longitud $s$ de un arco que subtiende un ángulo central de $\theta$ radianes es

$$s = r\theta$$

Despejando $\theta$, obtenemos la importante fórmula

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Esta fórmula nos permite definir medidas en radianes usando una circunferencia de cualquier radio $r$: La medida en radianes de un ángulo $\theta$ es $s/r$, donde $s$ es la longitud del arco circular que subtiende a $\theta$ en una circunferencia de radio $r$ (vea Figura 10).

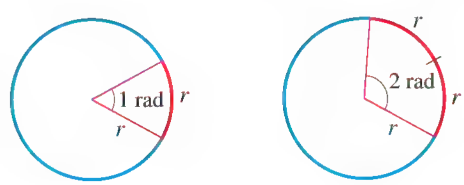



**FIGURA 10** La medida de $\theta$ en radianes es el número de "radios" que pueden caber en un arco que subtienda a $\theta$; de aquí el término *radián*.

**EJEMPLO 4** | Longitud de arco y medida de ángulo

**(a)** Encuentre la longitud de un arco de circunferencia con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

**(b)** Un ángulo central $\theta$ de un círculo de radio 4 m está subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de $\theta$ en radianes.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Del Ejemplo 1(b) vemos que $30° = \pi/6$ rad, por lo que la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}\text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando $\theta$ se mida en radianes.

**(b)** Por la fórmula $\theta = s/r$, tenemos

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\text{ rad}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

## Área de un sector circular

El área de un círculo de radio $r$ es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central $\theta$ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área de todo el círculo (vea Figura 11). Entonces, el área de este sector es

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{área de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta$$

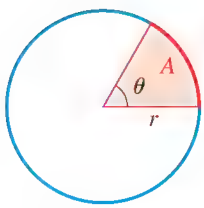



**FIGURA 11**
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

> **ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR**
>
> En un círculo de radio $r$, el área $A$ de un sector con ángulo central de $\theta$ radianes es
>
> $$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

**EJEMPLO 5** | Área de un sector

Encuentre el área de un sector de círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 metros.

**SOLUCIÓN** Para usar la fórmula para el área de un sector circular, debemos hallar el ángulo central del sector en radianes: $60° = 60(\pi/180)\text{rad} = \pi/3$ rad. Entonces, el área del sector es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2}\text{ m}^2$$

La fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ es verdadera sólo cuando $\theta$ se mida en radianes.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

## Movimiento circular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo como se ve en la Figura 12. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular. La **velocidad lineal** es la rapidez a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. La **velocidad angular** es la rapidez a la que el ángulo central $\theta$ está cambiando, de modo que la velocidad angular es el número de radianes que cambia este ángulo dividido entre el tiempo transcurrido.

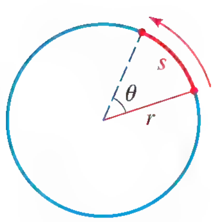



**FIGURA 12**

**VELOCIDAD LINEAL Y VELOCIDAD ANGULAR**

Suponga que un punto se mueve a lo largo de una circunferencia de radio $r$ y el rayo desde el centro del círculo al punto recorre $\theta$ radianes en el tiempo $t$. Sea $s = r\theta$ la distancia que el punto se desplaza en el tiempo $t$. Entonces la velocidad del punto está dada por

$$\textbf{Velocidad angular}\quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\textbf{Velocidad lineal}\quad v = \frac{s}{t}$$

El símbolo $\omega$ es la letra griega "omega".

## EJEMPLO 6 | Hallar velocidad lineal y angular

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo, a razón de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

**SOLUCIÓN** En 10 s, el ángulo $\theta$ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Por lo tanto, la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi \text{ rad}}{10 \text{ s}} = 3\pi \text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi = 15 \cdot 2\pi \cdot 3 = 90\pi$ pies. En consecuencia, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi \text{ pies}}{10 \text{ s}} = 9\pi \text{ pies/s}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

Observe que la velocidad angular *no* depende del radio de la circunferencia, sino sólo del ángulo $\theta$. No obstante, si conocemos la velocidad angular $\omega$ y el radio $r$, podemos hallar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

**RELACIÓN ENTRE VELOCIDAD LINEAL Y ANGULAR**

Si un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio $r$ con velocidad angular $\omega$, entonces su velocidad lineal $v$ está dada por

$$v = r\omega$$

## EJEMPLO 7 | Hallar velocidad lineal a partir de velocidad angular

Una mujer viaja en una bicicleta cuyas ruedas miden 26 pulgadas de diámetro. Si las ruedas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que ella viaja, en mi/h.

**SOLUCIÓN** La velocidad angular de las ruedas es $2\pi \cdot 125 = 250\pi$ rad/min. Como las ruedas tienen radio de 13 pulg. (la mitad del diámetro), la velocidad lineal es

$$v = r\omega = 13 \cdot 250\pi \approx 10{,}210.2 \text{ pulg./min}$$

Como hay 12 pulgadas por pie, 5280 pies por milla, y 60 minuto por hora, la velocidad de la mujer en millas por hora es

$$\frac{10{,}210.2 \text{ pulg./min} \times 60 \text{ min/h}}{12 \text{ pulg./pies} \times 5280 \text{ pies/mi}} = \frac{612{,}612 \text{ pulg./h}}{63{,}360 \text{ pulg./mi}}$$

$$\approx 9.7 \text{ mi/h}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

## 6.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. (a) La medida en radianes de un ángulo $\theta$ es la longitud del ______ que subtiende el ángulo en un círculo de radio _______.
   (b) Para convertir grados a radianes, multiplicamos por______.
   (c) Para convertir radianes a grados, multiplicamos por______.
2. Un ángulo central $\theta$ se traza en una circunferencia de radio $r$.
   (a) La longitud del arco subtendido por $\theta$ es $s =$ _____.
   (b) El área del sector circular con ángulo central $\theta$ es $A =$ ____.

### HABILIDADES

**3-14** ■ Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida dada en grados.

**3.** 72° **4.** 54° **5.** −45°
**6.** −60° **7.** −75° **8.** −300°
**9.** 1080° **10.** 3960° **11.** 96°
**12.** 15° **13.** 7.5° **14.** 202.5°

**15-26** ■ Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida dada en radianes.

**15.** $\frac{7\pi}{6}$ **16.** $\frac{11\pi}{3}$ **17.** $-\frac{5\pi}{4}$
**18.** $-\frac{3\pi}{2}$ **19.** 3 **20.** −2
**21.** −1.2 **22.** 3.4 **23.** $\frac{\pi}{10}$
**24.** $\frac{5\pi}{18}$ **25.** $-\frac{2\pi}{15}$ **26.** $-\frac{13\pi}{12}$

**27-32** ■ Nos dan la medida de un ángulo en posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que sean coterminales con el ángulo dado.

**27.** 50° **28.** 135° **29.** $\frac{3\pi}{4}$
**30.** $\frac{11\pi}{6}$ **31.** $-\frac{\pi}{4}$ **32.** −45°

**33-38** ■ Nos dan las medidas de dos ángulos en posición normal. Determine si los ángulos son coterminales.

**33.** 70°, 430° **34.** 30°, 330°
**35.** $\frac{5\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ **36.** $\frac{32\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$
**37.** 155°, 875° **38.** 50°, 340°

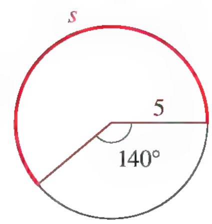
**39-44** ■ Encuentre un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal con el ángulo dado.

**39.** 733° **40.** 361° **41.** 1110°
**42.** −100° **43.** −800° **44.** 1270°

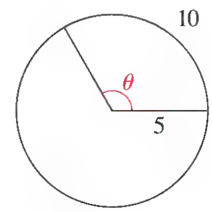
**45-50** ■ Encuentre un ángulo entre 0 y $2\pi$ que sea coterminal con el ángulo dado.

**45.** $\frac{17\pi}{6}$ **46.** $-\frac{7\pi}{3}$ **47.** $87\pi$
**48.** 10 **49.** $\frac{17\pi}{4}$ **50.** $\frac{51\pi}{2}$

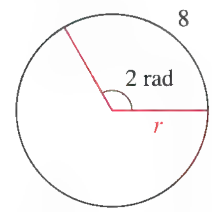
**51.** Encuentre la longitud del arc $s$ de la figura.




**52.** Encuentre el ángulo $\theta$ de la figura.




**53.** Encuentre el radio $r$ del círculo de la figura.




**54.** Encuentre la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 metros.

**55.** Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 rad en un círculo de radio 2 millas.

**56.** Un ángulo central $\theta$ en un círculo con radio de 5 m está subtendido por un arco de 6 m de longitud. Encuentre la medida de $\theta$ en grados y en radianes.

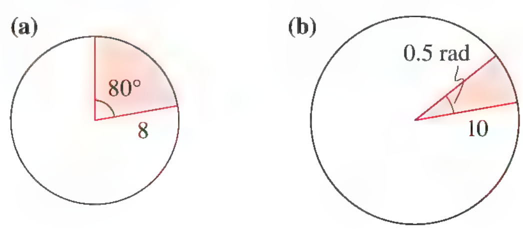
**57.** Un arco de 100 m de longitud subtiende un ángulo central $\theta$ en un círculo de 50 m de radio. Encuentre la medida de $\theta$ en grados y en radianes.

**58.** Un arco circular de 3 pies de longitud subtiende un ángulo central de 25°. Encuentre el radio del círculo.

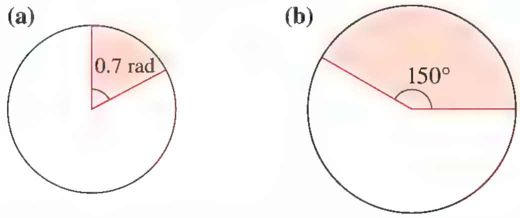
**59.** Encuentre el radio del círculo si un arco de 6 m de longitud del círculo subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

**60.** Encuentre el radio del círculo si un arco de 4 pies de longitud del círculo subtiende un ángulo central de 135°.

**61.** Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.



**62.** Encuentre el radio de cada círculo si el área del sector es 12.




**63.** Encuentre el área de un sector con ángulo central de 1 rad en un círculo de 10 m de radio.

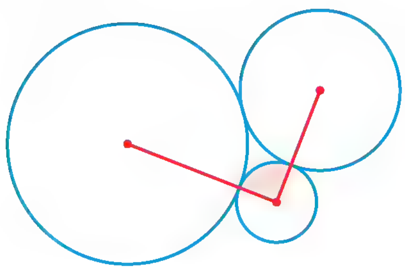
**64.** Un sector de un círculo tiene un ángulo central de 60°. Encuentre el área del sector si el radio del círculo es 3 millas.

**65.** El área de un sector de un círculo con ángulo central de 2 rad es 16 $m^2$. Encuentre el radio del círculo.

**66.** Un sector de un círculo de radio 24 mi tiene un área de 288 millas cuadradas. Encuentre el ángulo central del sector.

**67.** El área de un círculo es 72 $cm^2$. Encuentre el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de $\pi/6$ rad.

**68.** Tres círculos con radios 1, 2 y 3 pies son externamente tangentes entre sí, como se ilustra en la figura. Encuentre el área del sector del círculo de radio 1 que es cortado por los segmentos de recta que unen el centro de ese círculo con los centros de los otros dos círculos.

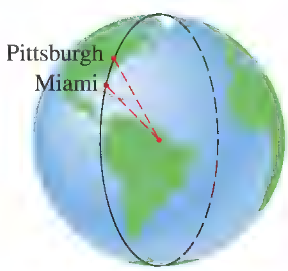


## APLICACIONES

**69. Distancia de viaje** Las ruedas de un auto miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué distancia (en millas) recorrerá el auto si sus ruedas giran 10,000 veces sin patinar?

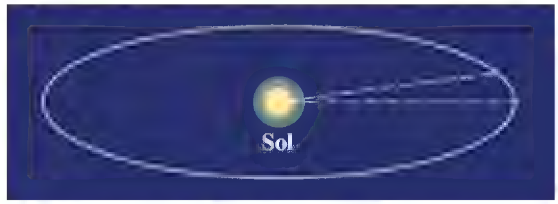
**70. Revoluciones de una rueda** ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de auto, de 30 pulg. de diámetro, cuando el auto recorre una distancia de 1 milla?

**71. Latitudes** Pittsburgh, Pennsylvania y Miami, Florida, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami tiene una latitud de 25.5° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

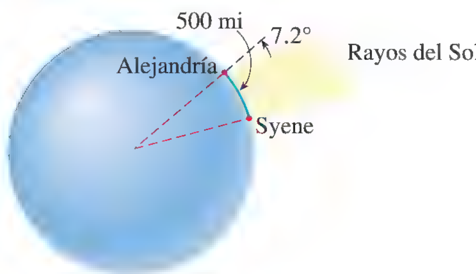



**72. Latitudes** Memphis, Tennessee, y Nueva Orleans, Louisiana, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Memphis tiene una latitud de 35° N y Nueva Orleans tiene una latitud de 30° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

**73. Órbita de la Tierra** Encuentre la distancia que la Tierra recorre en un día en su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una circunferencia de 93 millones de millas de radio. [La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es en realidad una *elipse* con el Sol en un foco (vea Sección 10.2). Esta elipse, sin embargo, tiene muy poca excentricidad y por lo tanto es casi una circunferencia.]

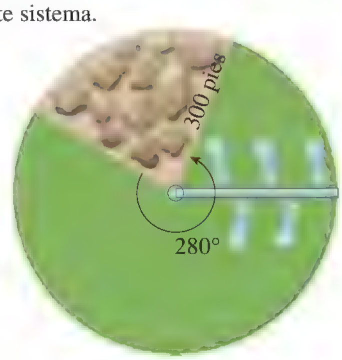



**74. Circunferencia de la Tierra** El matemático griego Eratóstenes (hacia 276-195 a.C.) midió la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones. Él observó que en cierto día los rayos del Sol caían directamente en un pozo profundo en Syene (moderna Aswan). Al mismo tiempo, en Alejandría, a 500 millas al norte (en el mismo meridiano), los rayos del Sol brillaban a un ángulo de 7.2° con respecto al cenit. Use esta información y la figura para hallar el radio y circunferencia de la Tierra.

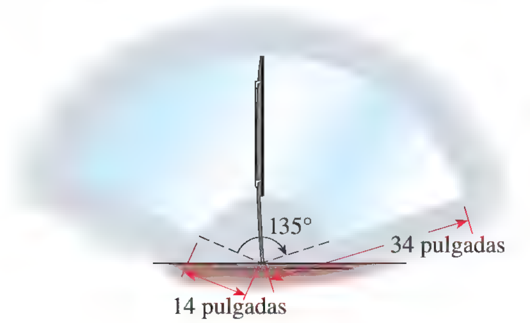



**75. Millas náuticas** Encuentre la distancia a lo largo de un arco en la superficie de la Tierra que subtiende un ángulo central de 1 minuto (1 minuto = 1/60 de grado). Esta distancia se llama *milla náutica*. (El radio de la Tierra es 3960 millas.)

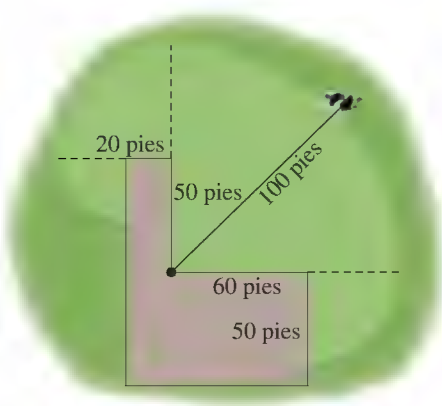
**76. Irrigación** Un sistema de irrigación utiliza un tubo aspersor de 300 pies de largo que gira sobre su eje alrededor de un punto central, como se ve en la figura siguiente. Debido a un obstáculo, se permite que el tubo gire sólo 280°. Encuentre el área irrigada por este sistema.



**77. Limpiadores de parabrisas** Los extremos superior e inferior de una rasqueta de limpiador de parabrisas miden 34 pulg. y 14 pulg., respectivamente, desde el punto de pivoteo. Cuando está en operación, el limpiador gira 135°. Encuentre el área recorrida por la rasqueta.



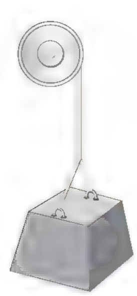

**78. La vaca amarrada** Una vaca está amarrada por una cuerda de 100 pies a la esquina interior de un edificio en forma de L, como se ve en la figura. Encuentre el área en que la vaca puede pastar.




**79. Ventilador** Un ventilador de cielo raso, con paletas de 16 pulgadas, gira a 45 rpm.
**(a)** Encuentre la velocidad angular del ventilador en rad/min.
**(b)** Encuentre la velocidad lineal de las puntas de las paletas en pulg./min.

**80. Sierra radial** Una sierra radial tiene una hoja de 6 pulg. de radio. Suponga que la hoja gira a 1000 rpm.
**(a)** Encuentre la velocidad angular de la hoja en rad/min.
**(b)** Encuentre la velocidad lineal de los dientes de la hoja en pies/s.

**81. Montacargas** Un montacargas de 2 pies de radio se usa para levantar cargas pesadas. Si el montacargas hace 8 revoluciones cada 15 segundos, encuentre la velocidad a la que se levanta la carga.

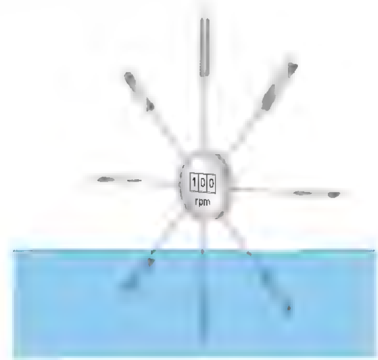


**82. Velocidad de un auto** Las ruedas de un auto tienen radio de 11 pulg. y están girando a 600 rpm. Encuentre la velocidad del auto en mi/h.

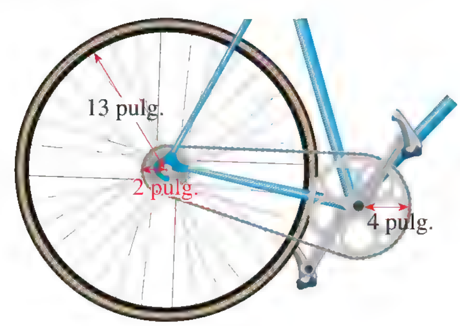
**83. Velocidad en el ecuador** La Tierra gira alrededor de su eje una vez cada 23 h 56 min 4 s., y el radio de la Tierra es 3960 millas. Encuentre la velocidad lineal de un punto en el ecuador en millas/hora.

**84. Ruedas de camión** Un camión con ruedas de 48 pulgadas de diámetro está viajando a 50 millas/hora.
**(a)** Encuentre la velocidad angular de las ruedas en rad/min.
**(b)** ¿Cuántas revoluciones por minuto hacen las ruedas?

**85. Velocidad de una corriente** Para medir la velocidad de una corriente, unos científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observan la rapidez a la que gira la rueda. Si la rueda tiene radio de 0.20 m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en m/s.

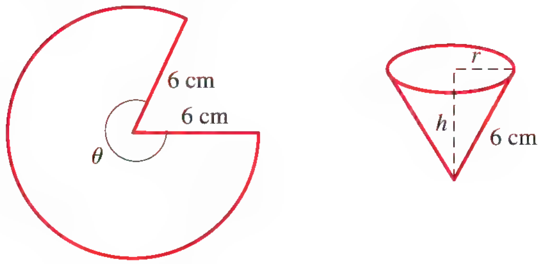



**86. Rueda de bicicleta** En la figura se ilustran los rayos y cadena de una bicicleta. La rueda dentada de los pedales tiene un radio de 4 pulg., la rueda dentada de la rueda tiene un radio de 2 pulg. y la rueda tiene un radio de 14 pulgadas. El ciclista pedalea a 40 rpm.
**(a)** Encuentre la velocidad angular de la rueda dentada de la rueda.
**(b)** Encuentre la velocidad de la bicicleta. (Suponga que la rueda gira al mismo paso que su rueda dentada.)




**87. Taza cónica** Una taza cónica se hace de un papel circular con radio de 6 cm al cortar un sector y unir los bordes, como se muestra en la figura siguiente. Suponga que $\theta = 5\pi/3$.
**(a)** Encuentre la circunferencia $C$ de la abertura de la taza.
**(b)** Encuentre el radio $r$ de la abertura de la taza. [*Sugerencia:* Use $C = 2\pi r$.]
**(c)** Encuentre la altura $h$ de la taza. [*Sugerencia:* Use el Teorema de Pitágoras.]

**(d)** Encuentre el volumen de la taza.




**88. Taza cónica** En este ejercicio encontramos el volumen de la taza cónica del Ejercicio 87 para cualquier ángulo $\theta$.

**(a)** Siga los pasos del Ejercicio 87 para demostrar que el volumen de la taza como función de $\theta$ es

$$V(\theta) = \frac{9}{\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

**(b)** Grafique la función $V$.

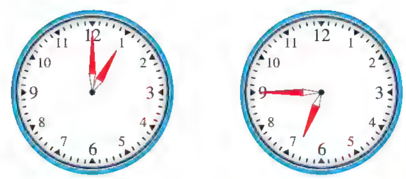
**(c)** ¿Para qué ángulo $\theta$ es máximo el volumen de la taza?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**89. Diferentes formas de medir ángulos** La costumbre de medir ángulos usando grados, con 360° en un círculo, data de los antiguos babilonios, que usaban un sistema numérico basado en grupos de 60. Otro sistema de medir ángulos divide el círculo en 400 unidades, llamadas *grad*. En este sistema, un ángulo recto es de 100 grad, de modo que esto se ajusta a nuestro sistema numérico de base 10.

Escriba un corto ensayo que compare las ventajas y desventajas de estos dos sistemas y el sistema de medir ángulos en radianes. ¿Cuál sistema prefiere usted? ¿Por qué?

**90. Relojes y ángulos** En una hora, el minutero de un reloj se mueve todo un círculo completo, y la manecilla de las horas se mueve $\frac{1}{12}$ de círculo. ¿Cuántos radianes se mueven las manecillas del minutero y de las horas entre la 1:00 p.m. y las 6:45 p.m. (en el mismo día)?



# 6.2 TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Relaciones trigonométricas ▶ Triángulos especiales ▶ Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

En esta sección estudiamos ciertas relaciones entre los lados de triángulos rectángulos, llamadas relaciones trigonométricas, y damos varias aplicaciones.

## ▼ Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con $\theta$ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (vea Figura 1).

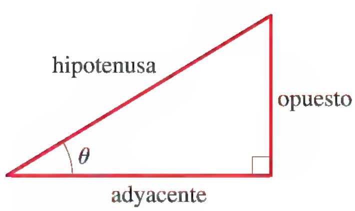



**FIGURA 1**

### LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

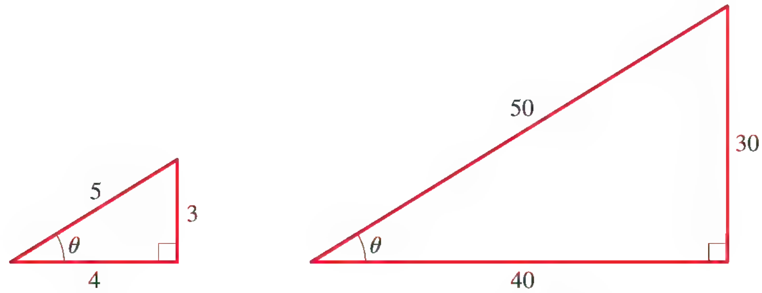
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente**. Como dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo $\theta$ son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea

**HIPARCO** (hacia el año 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para funciones estrechamente relacionadas con la función seno moderna, evaluadas para ángulos a intervalos de medio grado y consideradas las primeras tablas trigonométricas. Utilizó sus tablas principalmente para calcular las trayectorias de los planetas por los cielos.

el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo $\theta$ (vea Figura 2).




$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

**FIGURA 2**

## EJEMPLO 1 | Hallar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo $\theta$ de la Figura 3.

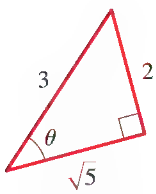



**FIGURA 3**

**SOLUCIÓN**

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Hallar relaciones trigonométricas

Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, trace un triángulo rectángulo con ángulo agudo $\alpha$ y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de $\alpha$.

**SOLUCIÓN** Como $\cos\alpha$ está definido como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a $\alpha$. Si el lado opuesto es $x$, entonces por el Teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. A continuación usamos el triángulo de la Figura 4 para hallar las relaciones.

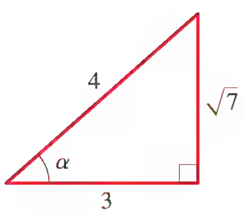



**FIGURA 4**

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## ▼ Triángulos especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del Teorema de Pitágoras. Los citados aquí en vista que se usan con frecuencia.

El primer triángulo se obtiene al trazar una diagonal en un cuadro de lado 1 (vea Figura 5). Por el Teorema de Pitágoras esta diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$. Los triángulos resultantes tienen ángulos de 45°, 45° y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, empezamos con un triángulo equilátero $ABC$ de lado 2 y trazamos la bisectriz perpendicular $DB$ de la base, como en la Figura 6. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de $DB$ es $\sqrt{3}$. Como $DB$ corta al ángulo $ABC$, obtenemos los triángulos con ángulos de 30°, 60° y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

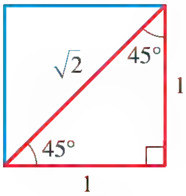



**FIGURA 5**

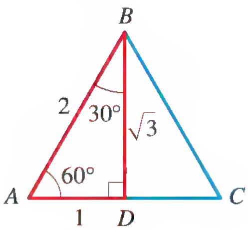



**FIGURA 6**

Ahora podemos usar los triángulos especiales de las Figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$) que aparecen en la Tabla 1.

**TABLA 1**
Valores de las relaciones trigonométricas para ángulos

| $\theta$ en grados | $\theta$ en radianes | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ | csc $\theta$ | sec $\theta$ | cot $\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

Es útil recordar estas relaciones trigonométricas especiales porque se presentan con frecuencia. Desde luego, pueden recordarse fácilmente si recordamos los triángulos de los que se obtienen.

Para hallar los valores de relaciones trigonométricas para otros ángulos, usamos calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) que se emplean para hallar las relaciones trigonométricas están programados directamente en calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se presiona la tecla SIN, la calculadora calcula una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras también dan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de éstas usando las siguientes *relaciones recíprocas*:

Para una explicación de métodos numéricos, vea la nota al margen en la página 400.

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen}\, t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Se debe verificar que estas relaciones se sigan inmediatamente de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

*Seguimos la convención de que cuando escribimos* sen $t$, *queremos decir el seno del ángulo cuya medida en radianes es* $t$. Por ejemplo, sen 1 significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es 1. Cuando se use calculadora para hallar un valor aproximado para este número, es necesario poner la calculadora en el modo de radianes; se encontrará que

$$\text{sen } 1 \approx 0.841471$$

Si se desea hallar el seno del ángulo cuya medida es 1°, la calculadora se pone en el modo de grados; se encontrará que

$$\text{sen } 1° \approx 0.0174524$$

## Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

### EJEMPLO 3 | Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo $ABC$ que se muestra en la Figura 7.

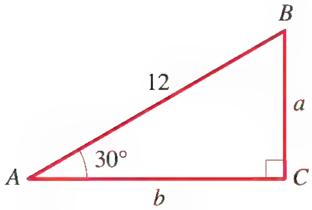



**FIGURA 7**

**SOLUCIÓN** Es evidente que $\angle B = 60°$. Para hallar $a$, buscamos una ecuación que relacione $a$ con las longitudes y ángulos que ya conocemos. En este caso, tenemos sen 30° $= a/12$, de modo que

$$a = 12 \text{ sen } 30° = 12\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

Análogamente, $\cos 30° = b/12$, entonces

$$b = 12 \cos 30° = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

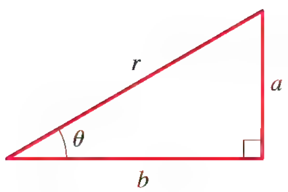



**FIGURA 8**
$a = r \text{ sen } \theta$
$b = r \cos \theta$

La Figura 8 muestra que si conocemos la hipotenusa $r$ y el ángulo agudo $\theta$ en un triángulo rectángulo, entonces los catetos $a$ y $b$ están dados por

$$a = r \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos en esta sección siempre comprenden triángulos rectos pero, como veremos en las siguientes tres secciones, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son rectángulos.

Para examinar los siguientes ejemplos, necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (Figura 9). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y de depresión se darán para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo un plano inclinado o una ladera, usamos el término **ángulo de inclinación**.

**ARISTARCO DE SAMOS** (310-230 a.C.) fue un afamado científico, músico, astrónomo y geómetra griego. En su libro *Sobre tamaños y distancias del Sol y la Luna*, estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, el triángulo formado por el Sol, la Luna y la Tierra tiene un ángulo recto en la Luna. Su método es semejante al descrito en el Ejercicio 61 de esta sección. Aristarco fue el primero en afirmar la teoría de que la Tierra y los planetas se mueven alrededor del Sol, idea que no fue aceptada por completo sino hasta después del tiempo de Copérnico, 1800 años después. Por esta razón Aristarco se conoce como el "Copérnico de la Antigüedad".

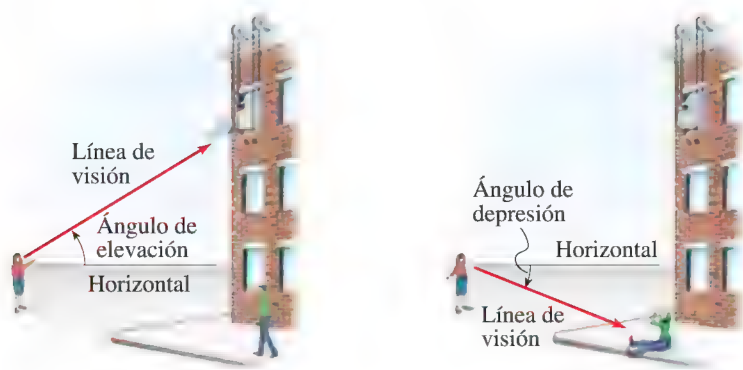



**FIGURA 9**

El ejemplo siguiente nos da una importante aplicación de trigonometría al problema de mediciones: medimos la altura de un árbol alto sin tener que subir a él. Aun cuando el ejemplo es sencillo, el resultado es fundamental para entender la forma en que se aplican relaciones trigonométricas a problemas como éste.

## EJEMPLO 4 | Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

**TALES DE MILETO** (hacia 625-547 a.C.) es el legendario fundador de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su báculo con la de la columna. Usando propiedades de triángulos semejantes, afirmó que la relación entre la altura $h$ de la columna y la altura $h'$ de su báculo era igual a la relación entre la longitud $s$ de la sombra de la columna y la longitud $s'$ de la sombra de su báculo:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Como se conocen tres de estas cantidades, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales utilizó un método similar para hallar la altura de la Gran Pirámide de Egipto, hazaña que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aun cuando él [el rey de Egipto] le admiraba [a Tales] por otras cosas, en particular a él le gustaba la forma en que midió la altura de la pirámide sin ningún problema ni instrumentos". El principio utilizado por Tales, el hecho de que las relaciones entre lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, es la base de la trigonometría.

**SOLUCIÓN** Sea $h$ la altura del árbol. De la Figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \quad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \quad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \quad \text{Use calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

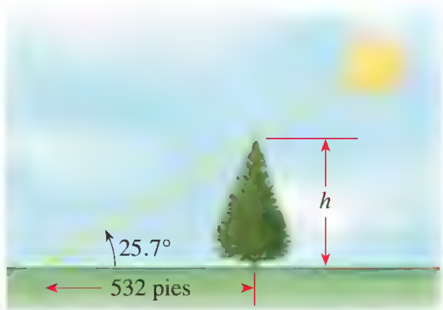



**FIGURA 10**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## EJEMPLO 5 | Un problema de triángulos rectángulos

Desde un punto en el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación a lo alto del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a lo alto de una astabandera que está en el edificio es de 27°. Encuentre la altura del edificio y la longitud de la astabandera.

**SOLUCIÓN** La Figura 11 ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra en la misma forma en que hallamos la altura del árbol en el Ejemplo 4.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \quad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \quad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \quad \text{Use calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la altura de la astabandera, encontremos primero la altura desde el suelo a lo alto del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27°$$

$$k = 500 \tan 27°$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud de la astabandera, restamos $h$ de $k$. Por lo tanto, la longitud del asta es aproximadamente $255 - 223 = 32$ pies.

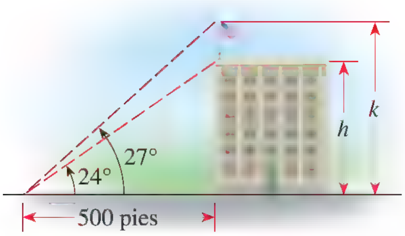


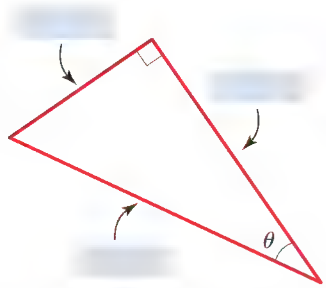

**FIGURA 11**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

# 6.2 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. En la figura siguiente se ilustra un triángulo rectángulo con ángulo $\theta$.




(a) Aplique leyenda a los lados "opuesto" y "adyacente" a $\theta$ y la hipotenusa del triángulo.

(b) Las funciones trigonométricas del ángulo $\theta$ están definidas como sigue:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\quad}{\quad}$ $\cos\theta = \dfrac{\quad}{\quad}$ $\tan\theta = \dfrac{\quad}{\quad}$

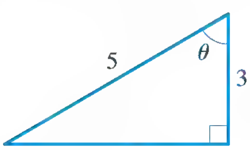
(c) Las relaciones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo. Esto es porque todos los triángulos rectángulos con ángulo agudo $\theta$ son ______.

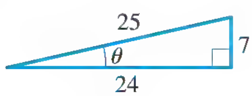
2. Las identidades recíprocas dicen que

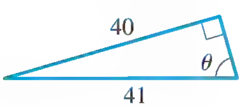
$\csc\theta = \dfrac{1}{\quad}$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\quad}$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\quad}$

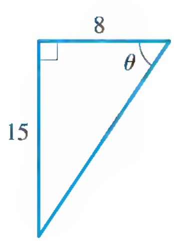
## HABILIDADES

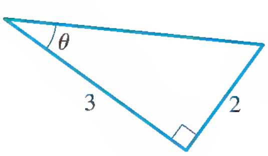
**3-8** ■ Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo $\theta$ en el triángulo.

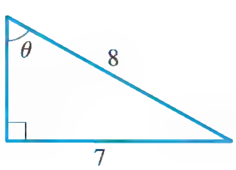
3.



4.


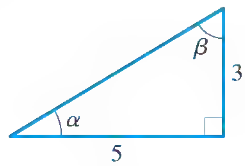

5.


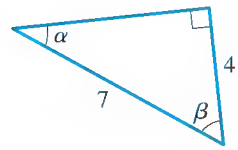

6.



7.


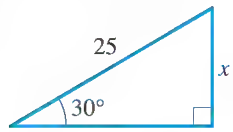

8.


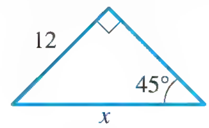

**9-10** ■ Encuentre **(a)** sen $\alpha$ y cos $\beta$, **(b)** tan $\alpha$ y cot $\beta$, y **(c)** sec $\alpha$ y csc $\beta$.

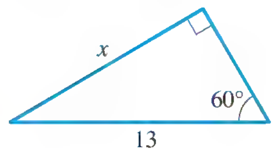
9.


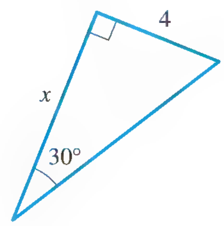

10.


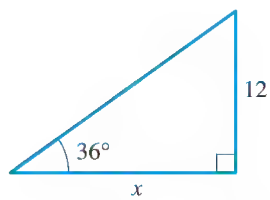

**11-16** ■ Encuentre el lado marcado como $x$. En los Ejercicios 13 y 14 exprese sus respuestas redondeadas a cinco lugares decimales.

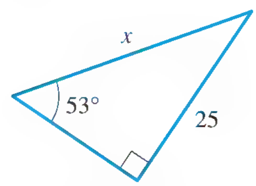
11.



12.


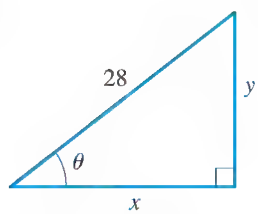

13.


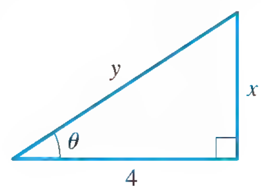

14.



15.



16.



**17-18** ■ Exprese $x$ y $y$ en términos de relaciones trigonométricas de $\theta$.

17.



18.



**19-24** ■ Trace un triángulo que tenga ángulo agudo $\theta$, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de $\theta$.

19. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$
20. $\cos\theta = \frac{9}{40}$
21. $\cot\theta = 1$
22. $\tan\theta = \sqrt{3}$
23. $\sec\theta = \frac{7}{2}$
24. $\csc\theta = \frac{13}{12}$

**25-30** ■ Evalúe la expresión sin usar calculadora.

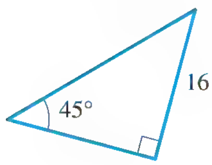
25. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6}$
26. $\operatorname{sen} 30° \csc 30°$
27. $\operatorname{sen} 30° \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cos 30°$
28. $(\operatorname{sen} 60°)^2 + (\cos 60°)^2$

**29.** $(\cos 30°)^2 - (\operatorname{sen} 30°)^2$

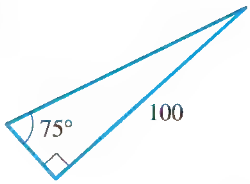
**30.** $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

**31-38** ■ Resuelva el triángulo rectángulo.

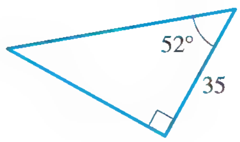
**31.**



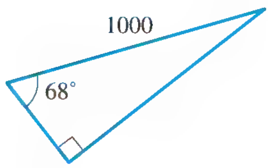

**32.**



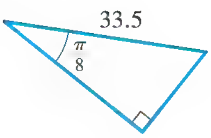

**33.**



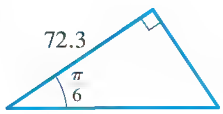

**34.**



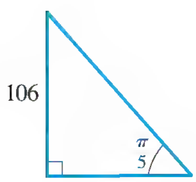

**35.**



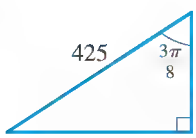

**36.**



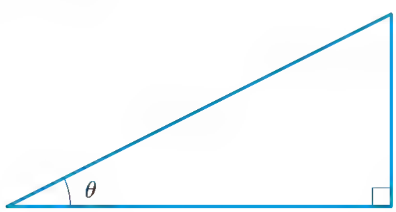

**37.**




**38.**



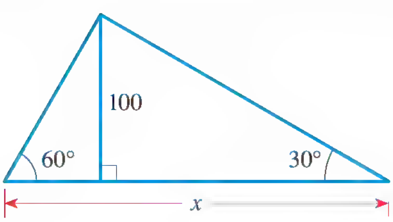

**39.** Use una regla para medir cuidadosamente los lados del triángulo y, a continuación, use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de $\theta$.



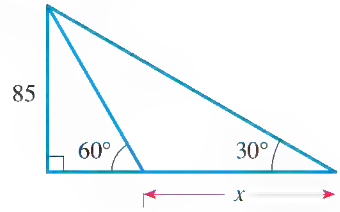

**40.** Usando un transportador, trace un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo de 40°. Mida los lados con todo cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40°.

**41-44** ■ Encuentre $x$ redondeada a un lugar decimal.

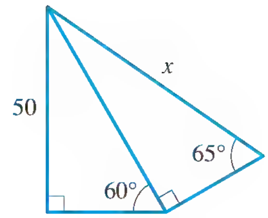
**41.**



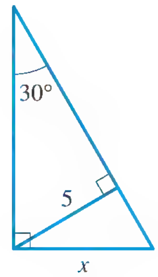

**42.**



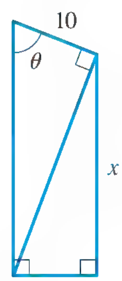

**43.**



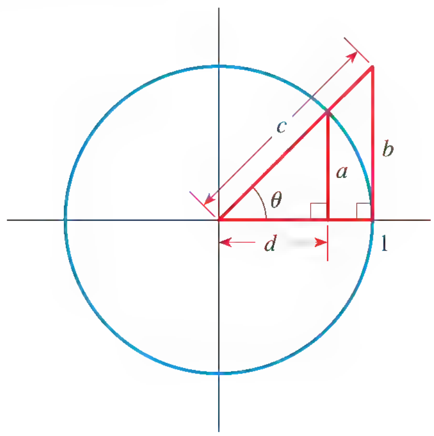

**44.**




**45.** Exprese la longitud $x$ en términos de las relaciones trigonométricas de $\theta$.




**46.** Exprese la longitud $a$, $b$, $c$ y $d$ en la figura en términos de las relaciones trigonométricas de $\theta$.




## APLICACIONES

**47. Altura de un edificio** Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto del edificio Empire State de Nueva York es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1 milla de la base del edificio. Usando esta información, encuentre la altura del edificio Empire State.

**48. Arco de Entrada** Un avión está volando a la vista del Arco de Entrada (Gateway Arch) de St. Louis, Missouri, a una elevación de 35,000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el Gateway Arch; encuentra que el ángulo de depresión a un punto en el suelo abajo del arco es de 22°.

**(a)** ¿Cuál es la distancia entre el avión y el arco?

**(b)** ¿Cuál es la distancia entre un punto en el suelo directamente bajo el avión y el arco?

**49. Desviación de un rayo láser** Un rayo láser ha de dirigirse hacia el centro de la Luna, pero el rayo se desvía 0.5° de su trayectoria propuesta.

**(a)** ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su trayectoria propuesta cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas.)

**(b)** El radio de la Luna es aproximadamente de 1000 millas. ¿El rayo incidirá en la Luna?

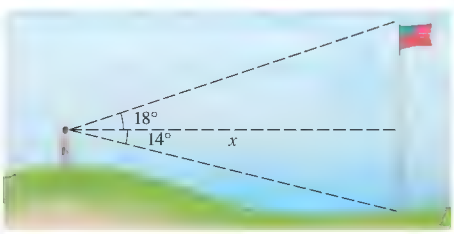
**50. Distancia al mar** Desde lo alto de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

**51. Escalera inclinada** Una escalera de 20 pies está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

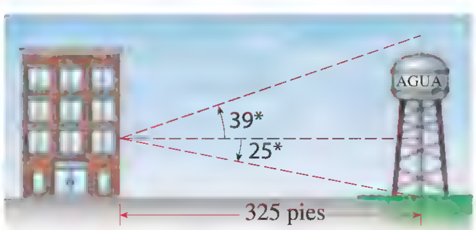
**52. Altura de una torre** Un cable de 600 pies para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

**53. Elevación de una cometa** Un hombre que está en una playa hace volar una cometa. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda es de 450 pies de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

**54. Determinación de una distancia** Una mujer que está de pie en una colina observa una astabandera que ella sabe es de 60 pies de alto. El ángulo de depresión a la parte inferior del poste es de 14° y el ángulo de elevación de la parte superior del poste es de 18°. Encuentre la distancia $x$ de la mujer al poste.




**55. Altura de una torre** Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio (vea la figura). Desde una ventana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?



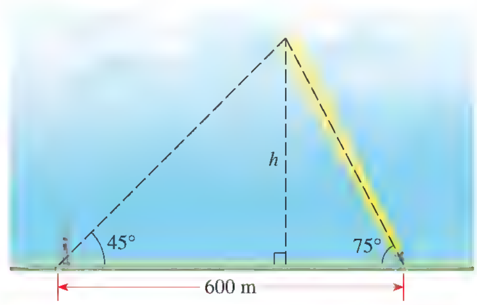

**56. Determinar una distancia** Un avión está volando a una elevación de 5150 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de depresión a un auto es 35° y al otro es de 52°. ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?

**57. Determinar una distancia** Si los dos autos del ejercicio 56 están en un lado del avión y si el ángulo de depresión a uno de los autos es 38° y al otro auto es 52°, ¿a qué distancia están entre sí los dos autos?

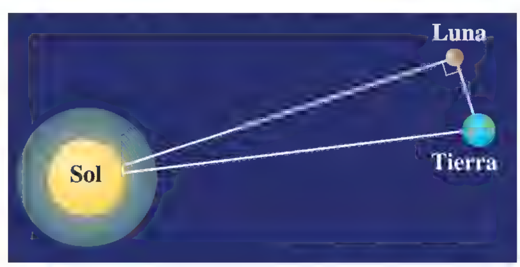
**58. Altura de un globo** Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, éstos simultáneamente miden el ángulo de depresión a dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, en el mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿A qué altura está el globo?

**59. Altura de una montaña** Para estimar la altura de una montaña sobre una meseta, el ángulo de elevación a lo alto de la montaña se mide y es de 32°. A mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la meseta, se encuentra que el ángulo de elevación es de 35°. Estime la altura de la montaña.

**60. Altura de una capa de nubes** Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura $h$ de la capa de nubes.




**61. Distancia al Sol** Cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (vea la figura). En ese momento el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna se mide y es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.

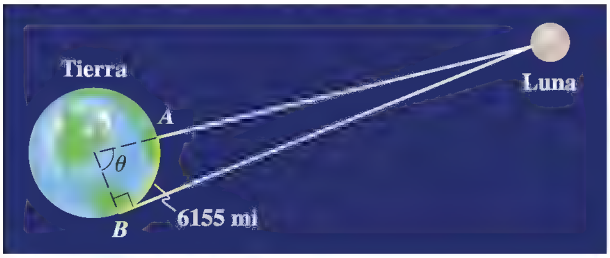



**62. Distancia a la Luna** Para hallar la distancia al Sol como en el Ejercicio 61, necesitamos conocer la distancia a la Luna. A continuación veamos una forma de estimar esa distancia: Cuando la Luna se ve en su cenit en un punto $A$ en la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto $B$ (vea la si-

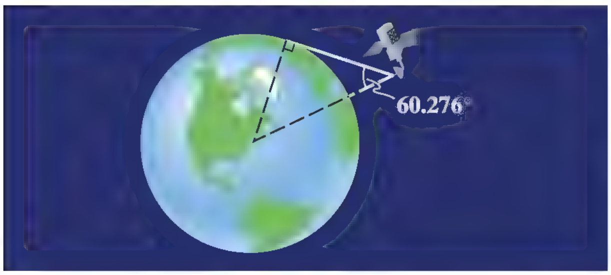
guiente figura). Los puntos $A$ y $B$ están a 6155 millas entre sí, y el radio de la Tierra es 3960 millas.

**(a)** Encuentre el ángulo $\theta$ en grados.

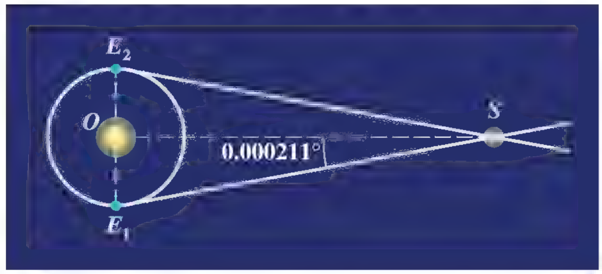
**(b)** Estime la distancia del punto $A$ a la Luna.



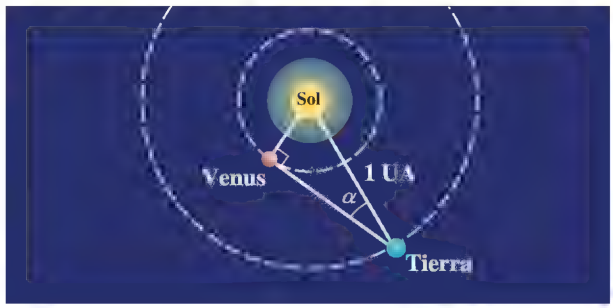

**63. Radio de la Tierra** En el Ejercicio 74 de la Sección 6.1 se dio un método para hallar el radio de la Tierra. A continuación veamos un método más moderno: de un satélite que está a 600 millas de la Tierra, se observa que un ángulo formado por la vertical y la línea de vista al horizonte es 60.276°. Use esta información para hallar el radio de la Tierra.




**64. Paralaje** Para hallar la distancia a estrellas cercanas se usa el método de paralaje. La idea es hallar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para hacer esto, la estrella se observa en dos tiempos diferentes exactamente a 6 meses entre sí, y se registra su cambio aparente en posición. De estas dos observaciones, se puede calcular $\angle E_1SE_2$. (Los tiempos se escogen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea tan grande como sea posible, lo cual garantiza que $\angle E_1OS$ es 90°.) El ángulo $E_1SO$ se llama *paralaje* de la estrella. Alfa Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como $9.3 \times 10^7$ millas.)




**65. Distancia de Venus al Sol** La **elongación** $\alpha$ de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Cuando Venus alcanza su máxima elongación de 46.3°, la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**66. Triángulos semejantes** Si dos triángulos son semejantes, ¿qué propiedades comparten? Explique la forma en que estas propiedades hacen posible definir las relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

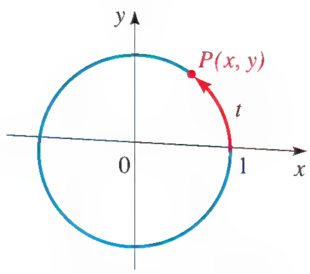
# 6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

Funciones trigonométricas de ángulos ▶ Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo ▶ Identidades trigonométricas ▶ Áreas de triángulos

En la sección precedente definimos las relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Aquí extendemos las relaciones trigonométricas a todos los ángulos al definir las funciones trigonométricas de ángulos. Con estas funciones podemos resolver problemas prácticos que involucren ángulos que no sean necesariamente agudos.

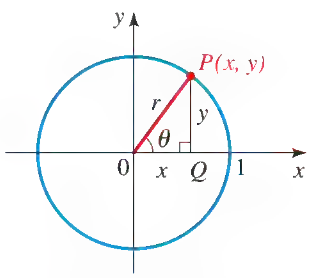
# Relación con funciones trigonométricas de números reales

Quizá el lector ya haya estudiado funciones trigonométricas definidas usando la circunferencia unitaria (Capítulo 5). Para ver cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de un *ángulo*, empecemos con la circunferencia unitaria del plano de coordenadas.




$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por $t$.

Sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por un arco de longitud $t$ sobre la circunferencia unitaria. Entonces $t$ subtiende un ángulo $\theta$ en el centro de la circunferencia. Si trazamos una perpendicular de $P$ al punto $Q$ del eje $x$, entonces el triángulo $OPQ$ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud $x$ y $y$, como se ve en la figura.




El triángulo $OPQ$ es un triángulo recto

A continuación, por la definición de funciones trigonométricas del *número real t* tenemos

$$\operatorname{sen} t = y$$

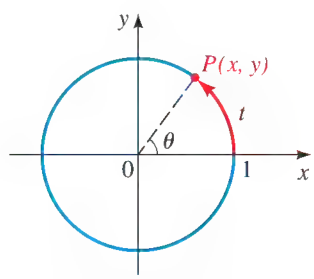
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* $\theta$ tendremos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op a } \theta}{\text{hip}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ady a } \theta}{\text{hip}} = \frac{x}{1} = x$$

Si $\theta$ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Vea la figura siguiente.) Comparando las dos formas de definir las funciones trigonométricas, vemos que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un número real determinado. (El número real es la medida de $\theta$ en radianes en un caso o la longitud $t$ de un arco en el otro.)




La medida del ángulo $\theta$ en radianes es $t$.

¿Por qué, entonces, estudiamos trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Vea *Enfoque sobre modelado*, páginas 427, 489 y 533, y Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

## Funciones trigonométricas de ángulos

Sea $POQ$ un triángulo rectángulo con ángulo agudo $\theta$ como se ve en la Figura 1(a). Ponga $\theta$ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

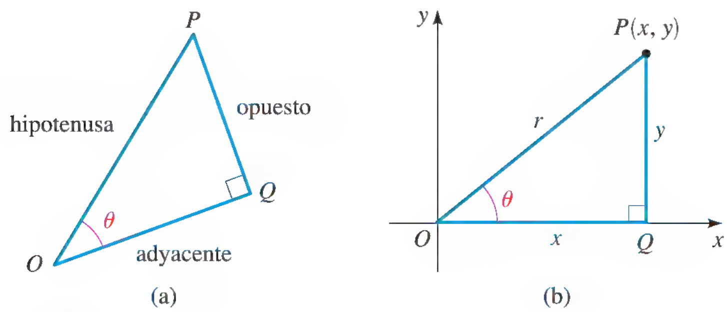



**FIGURA 1**

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de $\theta$. En el triángulo $POQ$, el lado opuesto tiene longitud $y$ y el lado adyacente tiene longitud $x$. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

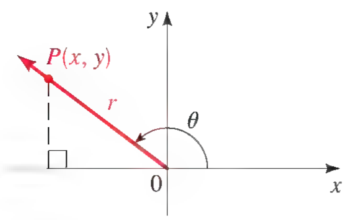



**FIGURA 2**

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).

**DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**

Sea $\theta$ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

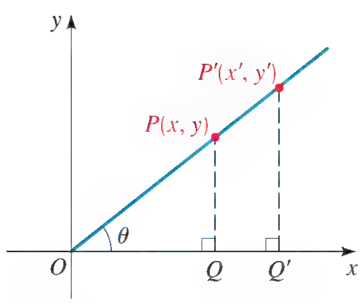



**FIGURA 3**

Como la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los cuales las funciones trigonométricas pueden no estar definidas son los ángulos para los cuales la coordenada $x$ o la $y$ de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Éstos son **ángulos cuadrantales**, es decir, ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas.

Es un dato de la mayor importancia que las funciones trigonométricas *no* dependen de la selección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto en el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos $POQ$ y $P'OQ'$ son semejantes.

## Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

De la definición vemos que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo $\theta$ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque $x$ y $y$ son positivas en este cuadrante. [Por supuesto, $r$ es siempre positiva porque es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Si el lado terminal de $\theta$ está en el segundo cuadrante, sin

embargo, entonces $x$ es negativa y $y$ positiva. Por lo tanto, en el segundo cuadrante las funciones sen $\theta$ y csc $\theta$ son positivas, y todas las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar las otras entradas de la tabla siguiente.

### SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

| Cuadrante | Funciones positivas | Funciones negativas |
|---|---|---|
| I | todas | ninguna |
| II | sen, csc | cos, sec, tan, cot |
| III | tan, cot | sen, csc, cos, sec |
| IV | cos, sec | sen, csc, tan, cot |

A continuación llevamos nuestra atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no sean agudos.

## EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

**SOLUCIÓN**

**(a)** De la Figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y como $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**(b)** Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, como $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

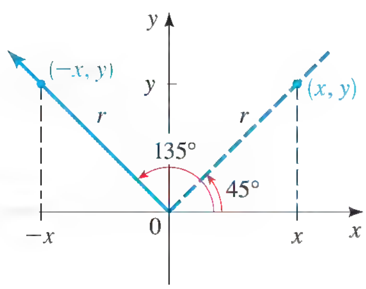



FIGURA 4

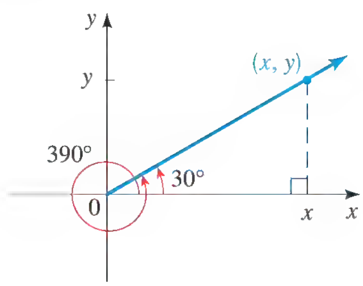



FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **13**

Del Ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de *ángulo de referencia.*

### ÁNGULO DE REFERENCIA

Sea $\theta$ un ángulo en posición normal. El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ asociado con $\theta$ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de $\theta$ y el eje $x$.

La Figura 6 muestra que para hallar un ángulo de referencia $\bar{\theta}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo $\theta$.

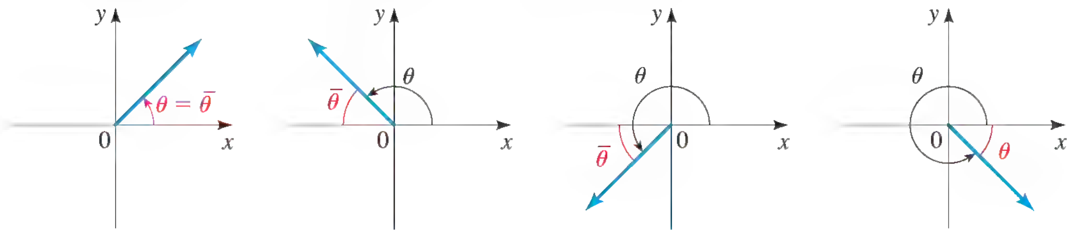



**FIGURA 6** Ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo $\theta$.

## EJEMPLO 2 | Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para **(a)** $\theta = \frac{5\pi}{3}$ y **(b)** $\theta = 870°$.

**SOLUCIÓN**

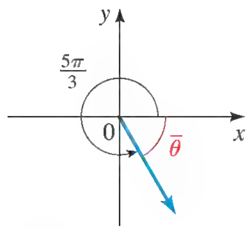



**FIGURA 7**

**(a)** El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje $x$ (vea Figura 7). Como el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

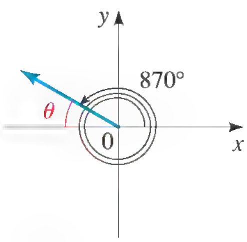



**FIGURA 8**

**(b)** Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea Figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **7**

---

**EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO**

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo $\theta$, damos los siguientes pasos.

1. Hallar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado con el ángulo $\theta$.
2. Determinar el signo de la función trigonométrica de $\theta$ observando el cuadrante en el que se encuentre $\theta$.
3. El valor de la función trigonométrica de $\theta$ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

## EJEMPLO 3 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** sen 240° y **(b)** cot 495°.

**SOLUCIÓN**

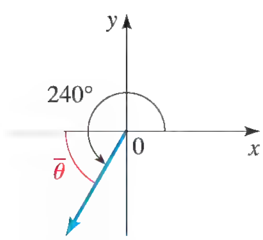



**FIGURA 9** sen 240° es *negativo.*

**(a)** Este ángulo tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, como se muestra en la Figura 9. El ángulo de referencia es, por lo tanto, $240° - 180° = 60°$ y el valor de sen 240° es negativo. Entonces

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Signo    Ángulo de referencia

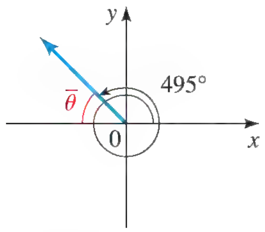



**FIGURA 10**

tan 495° *es negativa, por lo tanto,* cot 495° *es negativa.*

**(b)** El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante, como se muestra en la Figura 10. Por lo tanto, el ángulo de referencia es 180° − 135° = 45 y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\cot 495° = \cot 135° = -\cot 45° = -1$$

Ángulos coterminales | Signo | Ángulo de referencia

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **19**

---

## EJEMPLO 4 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** $\operatorname{sen}\dfrac{16\pi}{3}$ y **(b)** $\sec\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el tercer cuadrante (vea Figura 11). Entonces, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Como el valor del seno es negativo en el tercer cuadrante, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ángulos coterminales | Signo | Ángulo de referencia

**(b)** El ángulo $-\pi/4$ está en el cuarto cuadrante, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (vea figura 12). Como la secante es positiva en este cuadrante, obtenemos

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

Signo | Ángulo de referencia

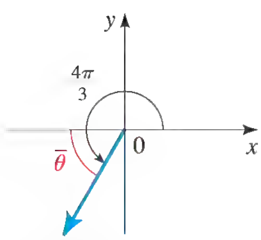



**FIGURA 11**

$\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$ *es negativo.*

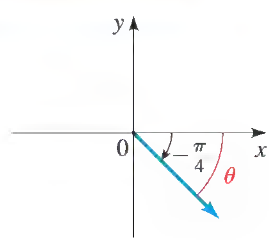



**FIGURA 12**

$\cos(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo por lo tanto,* $\sec(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo*

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

---

## Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo $\theta$,

siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.*

### IDENTIDADES FUNDAMENTALES

**Identidades recíprocas**

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$$

**Identidades de Pitágoras**

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

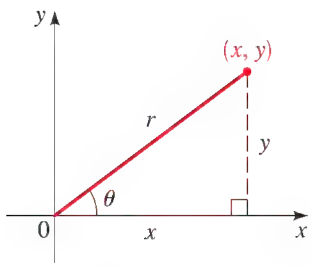



**FIGURA 13**

**DEMOSTRACIÓN** Demostremos la primera identidad de Pitágoras. Usando $x^2 + y^2 = r^2$ (el Teorema de Pitágoras) en la Figura 13, tenemos

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto, $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$. (Aun cuando la figura indica un ángulo agudo, se debe verificar que la prueba se cumpla para todo ángulo $\theta$.) ■

Vea los Ejercicios 61 y 62 para las pruebas de las otras dos identidades de Pitágoras.

## EJEMPLO 5 | Expresar una función trigonométrica en términos de otra

**(a)** Expresar sen $\theta$ en términos de cos $\theta$.

**(b)** Expresar tan $\theta$ en términos de sen $\theta$, donde $\theta$ está en el segundo cuadrante.

**SOLUCIÓN**

**(a)** De la primera identidad de Pitágoras obtenemos

$$\text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si $\theta$ está en el primero o segundo cuadrante, entonces sen $\theta$ es positivo, y por tanto

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si $\theta$ está en el tercero o cuarto cuadrante, sen $\theta$ es negativo, y por tanto

$$\text{sen}\,\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

**(b)** Como $\tan\theta = \text{sen}\,\theta/\cos\theta$, necesitamos escribir cos $\theta$ en términos de sen $\theta$. Por la parte (a),

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}$$

y como cos $\theta$ es negativo en el segundo cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{-\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

---

* Continuamos con la convención acostumbrada de escribir $\text{sen}^2\theta$ por $(\text{sen}\,\theta)^2$. En general, escribimos $\text{sen}^n\,\theta$ por $(\text{sen}\,\theta)^n$ para todos los enteros $n$ excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se asignará otro significado en la Sección 6.4. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

## EJEMPLO 6 | Evaluación de una función trigonométrica

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y $\theta$ está en el tercer cuadrante, hallar $\cos\theta$.

**SOLUCIÓN 1** Necesitamos escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ obtenemos $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el tercer cuadrante, $\sec\theta$ es negativa, por lo cual

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Entonces,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Si se desea racionalizar el denominador, se puede expresar $\cos\theta$ como

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

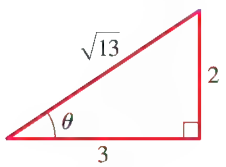



**FIGURA 14**

**SOLUCIÓN 2** Este problema se puede resolver más fácilmente usando el método del Ejemplo 2 de la Sección 6.2. Recuerde que, excepto por el signo, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son iguales a las de un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Por lo tanto, ignorando el signo por ahora, tracemos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\bar{\theta}$ que satisfaga $\bar{\theta} = \frac{2}{3}$ (vea Figura 14). Por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{13}$. Del triángulo de la Figura 14 vemos de inmediato que $\cos\bar{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Como $\theta$ está en el tercer cuadrante, $\cos\theta$ es negativo y por tanto

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

## EJEMPLO 7 | Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y $\theta$ está en el cuarto cuadrante, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de $\theta$.

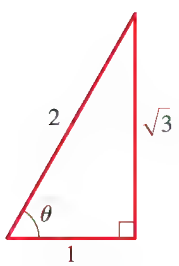



**FIGURA 15**

**SOLUCIÓN** Trazamos un triángulo como en la Figura 15 para que $\sec\bar{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que $\theta$ está en el cuarto cuadrante, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## Áreas de triángulos

Concluimos esta sección con una aplicación de las funciones trigonométricas que comprende ángulos que no son necesariamente agudos. Aplicaciones más extensas aparecen en las siguientes dos secciones.

El área de un triángulo es $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos de un triángulo, entonces podemos hallar la altura usando las funciones trigonométricas, y a partir de esto podemos hallar el área.

Si $\theta$ no es ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la Figura 16(a) está dada por $h = b\operatorname{sen}\theta$. Entonces el área es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

Si el ángulo $\theta$ no es agudo, entonces de la Figura 16(b) vemos que la altura del triángulo es

$$h = b\operatorname{sen}(180° - \theta) = b\operatorname{sen}\theta$$

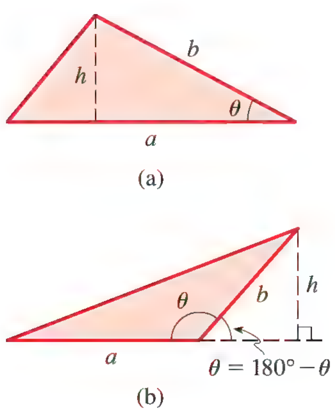



**FIGURA 16**

Esto es así porque el ángulo de referencia de $\theta$ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

> **ÁREA DE UN TRIÁNGULO**
>
> El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes $a$ y $b$ y con ángulo $\theta$ incluido es
>
> $$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta$$

## EJEMPLO 8 | Hallar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo $ABC$ que se ve en la Figura 17.

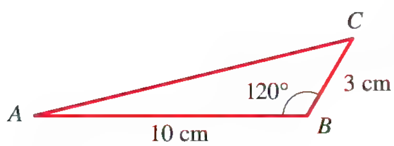



**FIGURA 17**

**SOLUCIÓN** El triángulo tiene lados de longitud 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \theta \\ &= \tfrac{1}{2}(10)(3) \text{ sen } 120° \\ &= 15 \text{ sen } 60° \qquad \text{Ángulo de referencia} \\ &= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

## 6.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Si el ángulo $\theta$ está en posición normal, $P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de $\theta$ y $r$ es la distancia del origen a $P$, entonces

sen $\theta$ = ____ cos $\theta$ = ____ tan $\theta$ = ____

**2.** El signo de una función trigonométrica de $\theta$ depende del

________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo $\theta$.

En el segundo cuadrante, sen $\theta$ es ________ (positivo/negativo).

En el tercer cuadrante, cos $\theta$ es ________ (positivo/negativo).

En el cuarto cuadrante, sen $\theta$ es ________ (positivo/negativo).

### HABILIDADES

**3-10** ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

**3.** **(a)** 150° **(b)** 330° **(c)** −30°

**4.** **(a)** 120° **(b)** −210° **(c)** 780°

**5.** **(a)** 225° **(b)** 810° **(c)** −105°

**6.** **(a)** 99° **(b)** 199° **(c)** 359°

**7.** **(a)** $\frac{11\pi}{4}$ **(b)** $-\frac{11\pi}{6}$ **(c)** $\frac{11\pi}{3}$

**8.** **(a)** $\frac{4\pi}{3}$ **(b)** $\frac{33\pi}{4}$ **(c)** $-\frac{23\pi}{6}$

**9.** **(a)** $\frac{5\pi}{7}$ **(b)** $-1.4\pi$ **(c)** 1.4

**10.** **(a)** $2.3\pi$ **(b)** 2.3 **(c)** $-10\pi$

**11-34** ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

**11.** sen 150° **12.** sen 225° **13.** cos 210°

**14.** cos(−60°) **15.** tan(−60°) **16.** sec 300°

**17.** csc(−630°) **18.** cot 210° **19.** cos 570°

**20.** sec 120° **21.** tan 750° **22.** cos 660°

**23.** sen $\frac{2\pi}{3}$ **24.** sen $\frac{5\pi}{3}$ **25.** sen $\frac{3\pi}{2}$

**26.** cos $\frac{7\pi}{3}$ **27.** cos$\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **28.** tan $\frac{5\pi}{6}$

**29.** sec $\frac{17\pi}{3}$ **30.** csc $\frac{5\pi}{4}$ **31.** cot$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

**32.** cos $\frac{7\pi}{4}$ **33.** tan $\frac{5\pi}{2}$ **34.** sen $\frac{11\pi}{6}$

**35-38** ■ Por la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentra $\theta$.

**35.** $\text{sen}\,\theta < 0$ y $\cos\theta < 0$

**36.** $\tan\theta < 0$ y $\text{sen}\,\theta < 0$

**37.** $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

**38.** $\csc\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$

**39-44** ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para $\theta$ en el cuadrante dado.

**39.** $\tan\theta$, $\cos\theta$; $\theta$ en el cuadrante III

**40.** $\cot\theta$, $\text{sen}\,\theta$; $\theta$ en el cuadrante II

**41.** $\cos\theta$, $\text{sen}\,\theta$; $\theta$ en el cuadrante IV

**42.** $\sec\theta$, $\text{sen}\,\theta$; $\theta$ en el cuadrante I

**43.** $\sec\theta$, $\tan\theta$; $\theta$ en el cuadrante II

**44.** $\csc\theta$, $\cot\theta$; $\theta$ en el cuadrante III

**45-52** ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de $\theta$ a partir de la información dada.

**45.** $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$, $\theta$ en el cuadrante II

**46.** $\cos\theta = -\frac{7}{12}$, $\theta$ en el cuadrante III

**47.** $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\cos\theta > 0$

**48.** $\sec\theta = 5$, $\text{sen}\,\theta < 0$

**49.** $\csc\theta = 2$, $\theta$ en el cuadrante I

**50.** $\cot\theta = \frac{1}{4}$, $\text{sen}\,\theta < 0$

**51.** $\cos\theta = -\frac{2}{7}$, $\tan\theta < 0$

**52.** $\tan\theta = -4$, $\text{sen}\,\theta > 0$

**53.** Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.
**(a)** $\text{sen}\,2\theta$, $2\,\text{sen}\,\theta$ **(b)** $\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,\theta$
**(c)** $\text{sen}^2\theta$, $\text{sen}(\theta^2)$

**54.** Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y ángulo entre ellos de 72°.

**55.** Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 12 y ángulo entre ellos de 10°.

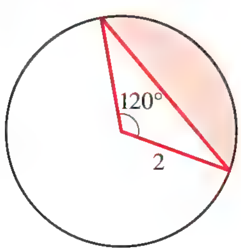
**56.** Encuentre el área de un triángulo equilátero con lados de longitud 10.

**57.** Un triángulo tiene un área de 16 pulg.$^2$, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulg. y 7 pulg. Encuentre el ángulo entre ellos por estos dos lados.

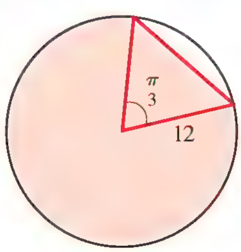
**58.** Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm$^2$, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

**59-60** ■ Encuentre el área de la región sombreada de la figura.

**59.**




**60.**



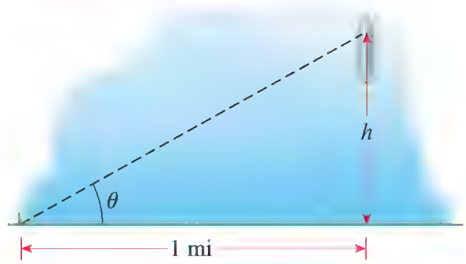

**61.** Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la segunda. [*Sugerencia:* Divida entre $\cos^2\theta$.]

**62.** Use la primera identidad de Pitágoras para demostrar la tercera.

## APLICACIONES

**63. Altura de un cohete** Un cohete disparado en línea recta hacia arriba es rastreado por un observador que está en el suelo a una milla de distancia.
**(a)** Demuestre que cuando el ángulo de elevación es $\theta$, la altura del cohete en pies es $h = 5280\tan\theta$.
**(b)** Complete la tabla para hallar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

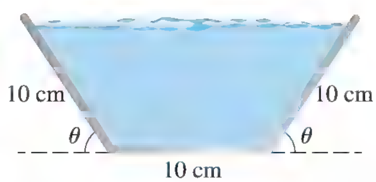
| $\theta$ | 20° | 60° | 80° | 85° |
|---|---|---|---|---|
| $h$ | | | | |



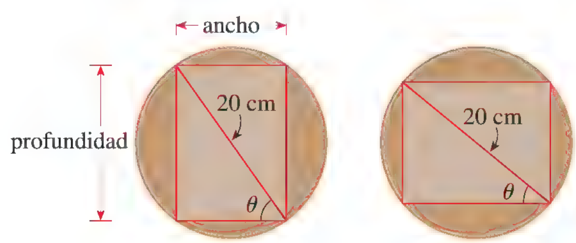

**64. Canal para lluvias** Un canal de aguas llovedizas se construye de lámina metálica de 30 cm de ancho, doblando un tercio de la lámina a ambos lados en un ángulo $\theta$.
**(a)** Demuestre que el área transversal del canal está modelada por la función

$$A(\theta) = 100\,\text{sen}\,\theta + 100\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

**(b)** Grafique la función $A$ para $0 \le \theta \le \pi/2$.
**(c)** ¿Para qué ángulo $\theta$ se obtiene la máxima área de sección transversal?




**65. Viga de madera** Una viga rectangular ha de cortarse de un tronco cilíndrico de 20 cm de diámetro. Las figuras siguientes muestran diferentes formas en que se puede hacer esto.
**(a)** Exprese el área de sección transversal de la viga como función del ángulo $\theta$ de las figuras.
**(b)** Grafique la función que encontró en el inciso (a).
**(c)** Encuentre las dimensiones de la viga con máxima área de sección transversal.



**66. Resistencia de una viga** La resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de la profundidad. Se corta una viga de un tronco como en el Ejercicio 65. Exprese la resistencia de la viga como función del ángulo $\theta$ de las figuras.

**67. Lanzamiento de bala** El alcance $R$ y altura $H$ de un tiro de lanzamiento de bala, con una velocidad inicial de $v_0$ pies/s a un ángulo $\theta$, están dados por

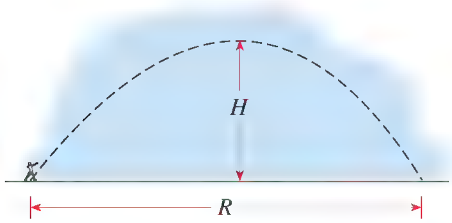
$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

En la Tierra, $g = 32$ pies/s$^2$ y, en la Luna, $g = 5.2$ pies/s$^2$. Encuentre el rango y altura de un lanzamiento de bala bajo las condiciones dadas.

**(a)** En la Tierra con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$

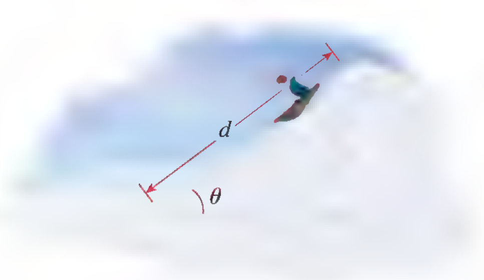
**(b)** En la Luna con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$




**68. Trineo** El tiempo en segundos que tarda un trineo en bajar deslizándose por un plano inclinado a un ángulo $\theta$ es

$$t = \sqrt{\frac{d}{16 \operatorname{sen}\theta}}$$

donde $d$ es la longitud de la pendiente en pies. Encuentre el tiempo en deslizarse por una pendiente de 2000 pies inclinada a 30°.



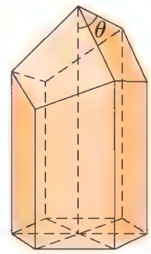

**69. Colmenas** En una colmena, cada celda es un prisma hexagonal regular, como se ve en la figura. La cantidad de cera $W$ de la celda depende del ángulo $\theta$ en el vértice, y está dada por

$$W = 3.02 - 0.38 \cot\theta + 0.65 \csc\theta$$

Las abejas instintivamente escogen $\theta$ de modo que usan la cantidad mínima posible de cera.

**(a)** Use calculadora graficadora para graficar $W$ como función de $\theta$ para $0 < \theta < \pi$.

**(b)** ¿Para qué valor de $\theta$ tiene $W$ su valor mínimo? [*Nota:* Unos biólogos han descubierto que las abejas raras veces se desvían de este valor en más de un grado o dos.]




**70. Dar vuelta en una esquina** Un tubo de acero es transportado por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final del salón hay una vuelta en ángulo recto a otro pasillo más angosto, de 6 pies de ancho.

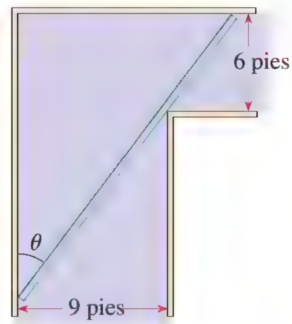
**(a)** Demuestre que la longitud del tubo en la figura está modelada por la función

$$L(\theta) = 9 \csc\theta + 6 \sec\theta$$

**(b)** Grafique la función $L$ para $0 < \theta < \pi/2$.

**(c)** Encuentre el valor mínimo de la función $L$.

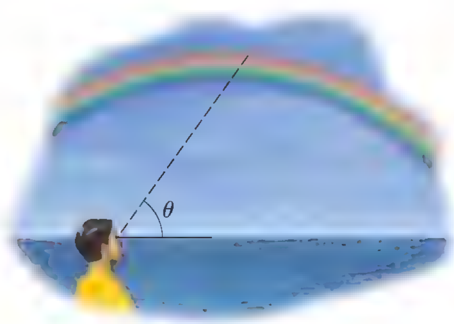
**(d)** Explique por qué el valor de $L$ que encontró en el inciso (c) es la longitud del tubo más largo que puede pasarse por la esquina.




**71. Arco iris** Los arco iris se forman cuando luz solar de longitudes de onda diferentes (colores) se refracta y refleja en pequeñas gotas de lluvia. El ángulo de elevación $\theta$ de un arco iris es siempre el mismo. Se puede demostrar que $\theta = 4\beta - 2\alpha$, donde

$$\operatorname{sen}\alpha = k \operatorname{sen}\beta$$

y $\alpha = 59.4°$ y $k = 1.33$ es el índice de refracción del agua. Use la información dada para hallar el ángulo de elevación $\theta$ de un arco iris. (Para una explicación matemática del arco iris vea *Cálculos: Transcendentes Tempranas,* 7ª edición, de James Stewart, página 282.)



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**72. Uso de una calculadora** Para resolver cierto problema usted necesita hallar el seno de 4 rad. Un compañero de grupo usa la calculadora de él y le dice que

$$\operatorname{sen} 4 = 0.0697565737$$

En su calculadora, usted obtiene

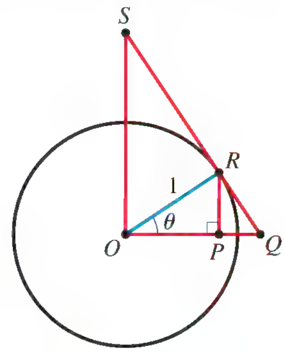
$$\operatorname{sen} 4 = -0.7568024953$$

¿Qué es lo que está mal? ¿Qué error tuvo su compañero?

**73. Diagrama trigonométrico de Viète** En el siglo XVI el matemático francés François Viète (vea página 49) publicó el sorprendente diagrama que sigue. Cada una de las seis funciones trigonométricas de $\theta$ es igual a la longitud de un segmento de recta de la figura. Por ejemplo, $\operatorname{sen}\theta = |PR|$, porque a partir de $\Delta OPR$ vemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op } \theta}{\text{hip}} = \frac{|PR|}{|OR|} = \frac{|PR|}{1} = |PR|$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas, encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud sea igual al valor de la función en $\theta$. (*Nota:* El radio de la circunferencia es 1, el centro es $O$, el segmento $QS$ es tangente a la circunferencia en $R$ y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.)




**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO Semejanza**

En este proyecto exploramos la idea de semejanza y algunas de sus consecuencias para cualquier tipo de figura. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

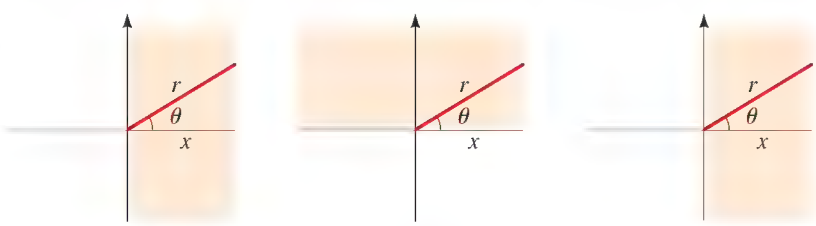
Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa ▶ Solución para ángulos en triángulos rectángulos ▶ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Las gráficas de las funciones trigonométricas inversas se estudian en la Sección 5.5.

Recuerde que para que una función tenga una inversa, debe ser biunívoca. Como las funciones trigonométricas no son biunívocas, no tienen inversas. Por lo tanto, restringimos el dominio de cada una de las funciones trigonométricas a intervalos en los que alcanzan todos sus valores y en los que son biunívocas. Las funciones resultantes tienen el mismo rango que las funciones originales pero son biunívocas.

## ▼ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Consideremos primero la función seno. Restringimos el dominio de la función seno a ángulos $\theta$ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De la Figura 1 vemos que en este dominio la función seno alcanza cada uno de los valores sobre el intervalo $[-1, 1]$ exactamente una vez y, por tanto, es biunívoca. Análogamente, restringimos los dominios de coseno y tangente como se ve en la Figura 1.




$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$   $\cos\theta = \frac{x}{r}$   $\tan\theta = \frac{x}{y}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$   $0 \le \theta \le \pi$   $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

**FIGURA 1** Dominios restringidos de las funciones seno, coseno y tangente.

En estos dominios restringidos podemos definir una inversa para cada una de estas funciones. Por la definición de función inversa tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x \\ \cos^{1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \cos y = x \\ \tan^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \tan y = x \end{aligned}$$

Resumimos los dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas en el siguiente cuadro.

### LAS FUNCIONES SENO INVERSO, COSENO INVERSO Y TANGENTE INVERSA

Las funciones seno, coseno y tangente en los dominios restringidos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$, y $(-\pi/2, \pi/2)$, respectivamente, son biunívocas y por tanto tienen inversas. Las funciones inversas tienen dominio y rango como sigue.

| Función | Dominio | Rango |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}^{1} x$ | $[-1, 1]$ | $[-\pi/2, \pi/2]$ |
| $\cos^{1} x$ | $[-1, 1]$ | $[0, \pi]$ |
| $\tan^{-1} x$ | $\mathbb{R}$ | $(-\pi/2, \pi/2)$ |

Las funciones $\operatorname{sen}^{-1}$, $x$ $\cos^{-1} x$ y $\tan^{-1} x$ a veces reciben el nombre de **arcseno, arccoseno** y **arctangente**, respectivamente.

Como éstas son funciones inversas, invierten la regla de la función original. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} \pi/6 = \frac{1}{2}$, se concluye que $\operatorname{sen}^{1} \frac{1}{2} = \pi/6$. El siguiente ejemplo da más ilustraciones.

## EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

**(a)** $\operatorname{sen}^{1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\cos^{1}(-\frac{1}{2})$ **(c)** $\tan^{1} 1$

### SOLUCIÓN

**(a)** El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

**(b)** El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Por lo tanto, $\cos^{1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$.

**(c)** El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuya tangente es 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre valores para la expresión dada.

**(a)** $\operatorname{sen}^{1}(0.71)$ **(b)** $\tan^{-1}(2)$ **(c)** $\cos^{1}(2)$

**SOLUCIÓN** Usamos calculadora para aproximar estos valores.

**(a)** Usando las teclas [INV] [SIN] o [SIN⁻¹] o [ARC] [SIN] de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(0.71) \approx 0.78950$$

**(b)** Usando las teclas [INV] [TAN] o [TAN⁻¹] o [ARC] [TAN] de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\tan^{-1} 2 \approx 1.10715$$

**(c)** Como $2 > 1$, no está en el dominio de $\cos^{-1} x$, de modo que $\cos^{-1} x$ no está definido.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 11** Y **13**

## Solución para ángulos en triángulos rectángulos

En la Sección 6.2 resolvimos triángulos usando las funciones trigonométricas para hallar los lados desconocidos. Ahora usamos funciones trigonométricas inversas para despejar *ángulos* en un triángulo rectángulo.

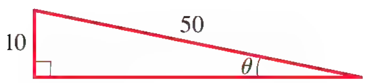



**FIGURA 2**

### EJEMPLO 3 | Hallar un ángulo en un triángulo rectángulo

Encuentre el ángulo $\theta$ en el triángulo que se ve en la Figura 2.

**SOLUCIÓN** Como $\theta$ es el ángulo opuesto al lado de longitud 10 y la hipotenusa tiene longitud 50, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op }\theta}{\text{hip}}$$

Ahora podemos usar $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ para hallar $\theta$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{5} \qquad \text{Definición de } \operatorname{sen}^{-1} x$$

$$\theta \approx 11.5° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

### EJEMPLO 4 | Solución de un ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado por la escalera y el edificio?

**SOLUCIÓN** Primero trazamos un diagrama como en la Figura 3. Si $\theta$ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{40} = 0.15 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op a }\theta}{\text{hip}}$$

A continuación usamos $\operatorname{sen}^{-1}(0.15)$ para hallar $\theta$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.15) \qquad \text{Definición de } \operatorname{sen}^{-1}$$

$$\theta \approx 8.6° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

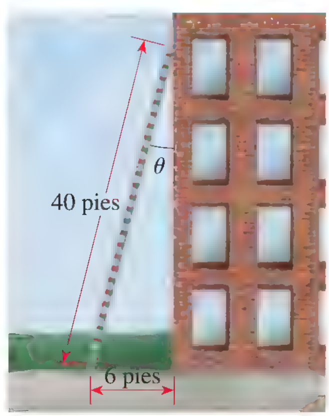



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

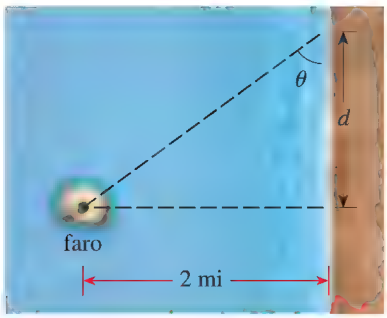



**FIGURA 4**

## EJEMPLO 5 | El ángulo de un rayo de luz

Un faro está situado en una isla que se encuentra a 2 millas frente a una orilla recta (vea Figura 4). Exprese el ángulo formado por el rayo de luz y la orilla en términos de la distancia $d$ de la figura.

**SOLUCIÓN** De la figura vemos que

$$\tan\theta = \frac{2}{d} \qquad \tan\theta = \frac{\text{op a }\theta}{\text{ady}}$$

Tomando la tangente inversa de ambos lados, obtenemos

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Tome } \tan^{-1} \text{ de ambos lados}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de funciones inversas: } \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

En la Sección 6.5 aprendimos a resolver cualquier triángulo (no necesariamente un triángulo rectángulo). Los ángulos en un triángulo están siempre en el intervalo $[0, \pi]$ (o entre 0° y 180°). Veremos que para resolver tales triángulos necesitamos hallar todos los ángulos del intervalo $[0, \pi]$ que tengan seno o coseno especificado. Hacemos esto en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 6 | Solución de una ecuación trigonométrica básica en un intervalo

Encuentre todos los ángulos $\theta$ entre 0° y 180° que satisfagan la ecuación dada.

**(a)** $\operatorname{sen}\theta = 0.4$ **(b)** $\cos\theta = 0.4$

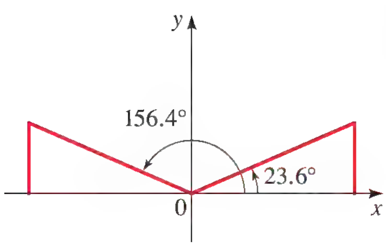



**FIGURA 5**

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos $\operatorname{sen}^{-1}$ para hallar una solución en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\operatorname{sen}\theta = 0.4 \qquad \text{Ecuación}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.4) \qquad \text{Tome } \operatorname{sen}^{-1} \text{ de cada lado}$$

$$\theta \approx 23.6° \qquad \text{Calculadora (modo de grados)}$$

Otra solución con $\theta$ entre 0° y 180° se obtiene tomando el suplemento del ángulo: 180° − 23.6° = 156.4° (vea Figura 5). Por lo tanto, las soluciones de la ecuación con $\theta$ entre 0° y 180° son

$$\theta \approx 23.6° \quad \text{y} \quad \theta \approx 156.4°$$

**(b)** La función coseno es biunívoca en el intervalo $[0, \pi]$, de modo que hay sólo una solución de la ecuación con $\theta$ entre 0° y 180°. Encontramos esa solución tomando $\cos^{-1}$ de cada lado.

$$\cos\theta = 0.4$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.4) \qquad \text{Tome } \cos^{-1} \text{ de cada lado}$$

$$\theta \approx 66.4° \qquad \text{Calculadora (modo de grados)}$$

La solución es $\theta \approx 66.4°$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

## Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Expresiones como $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ aparecen en cálculo. Encontramos valores exactos de esas expresiones usando identidades trigonométricas o triángulos rectángulos.

## EJEMPLO 7 | Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Encuentre $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$.

### SOLUCIÓN 1

Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces $\theta$ es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{3}{5}$. Interpretemos $\theta$ como un ángulo y tracemos un triángulo rectángulo con $\theta$ como uno de sus ángulos agudos, con lado opuesto 3 e hipotenusa 5 (vea Figura 6). El cateto restante del triángulo se encuentra mediante el Teorema de Pitágoras como 4. De la figura obtenemos

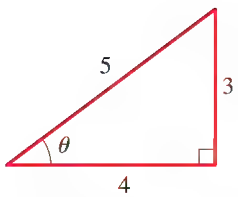



**FIGURA 6** $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

$$\begin{aligned}\cos(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) &= \cos\theta && \theta = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\\ &= \frac{4}{5} && \cos\theta = \frac{\text{ady a }\theta}{\text{hip}}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$..

### SOLUCIÓN 2

Es fácil hallar $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$. De hecho, por las propiedades de cancelación de funciones inversas, este valor es exactamente $\frac{3}{5}$. Para hallar $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5})$, primero escribimos la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Como $-\pi/2 \le u \le \pi/2$, $\cos u$ es positivo, y podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned}\cos u &= +\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} && \cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1\\ &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5})} && u = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\\ &= \sqrt{1-(\tfrac{3}{5})^2} && \text{Propiedad de funciones inversas } \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}) = \tfrac{3}{5}\\ &= \sqrt{1-\tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5} && \text{Calcule}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 8 | Composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1} x)$ y $\tan(\cos^{-1} x)$ como expresiones algebraicas en $x$ para $-1 \le x \le 1$.

### SOLUCIÓN 1

Sea $\theta = \cos^{-1} x$; entonces $\cos\theta = x$. En la Figura 7 trazamos un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\theta$, lado adyacente $x$ e hipotenusa 1. Por el Teorema de Pitágoras, el cateto restante es $\sqrt{1-x^2}$. De la figura, tenemos

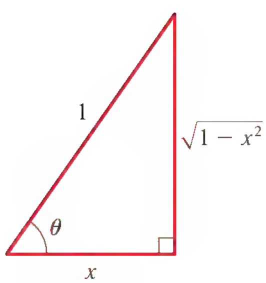



**FIGURA 7** $\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan \cos^{-1} x = \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

**SOLUCIÓN 2** Sea $u = \cos^{-1} x$. Necesitamos hallar $\operatorname{sen} u$ y $\tan u$ en términos de $x$. Al igual que en el Ejemplo 5, la idea aquí es escribir seno y tangente en términos de coseno. Observe que $0 \le u \le \pi$ porque $u = \cos^{-1} x$. Tenemos

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1-\cos^2 u} \qquad \text{y} \qquad \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 u}}{\cos u}$$

Para escoger los signos apropiados, nótese que $u$ se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1} x$. Como $\text{sen}\, u$ es positivo en este intervalo, el signo $+$ es la opción correcta. Si sustituimos $u = \cos^{-1} x$ en las ecuaciones mostradas y usamos la propiedad de cancelación $\cos(\cos^{-1} x) = x$, obtenemos

$$\text{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35**

*Nota:* En la Solución 1 del Ejemplo 8 podría parecer que debido a que estamos trazando un triángulo, el ángulo $\theta = \cos^{-1} x$ debe ser agudo. Pero resulta que el método del triángulo funciona para cualquier $x$. Los dominios y rangos para las seis funciones trigonométricas inversas se han escogido en forma tal que podemos siempre usar un triángulo para hallar $S(T^{-1}(x))$, donde $S$ y $T$ son cualesquiera funciones trigonométricas.

## 6.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

**(a)** La función $\text{sen}^{-1} x$ tiene dominio____ y rango _____.

**(b)** La función $\cos^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

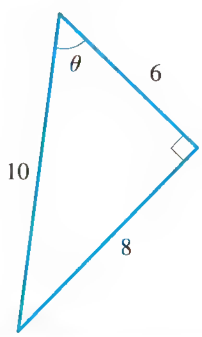
**(c)** La función $\tan^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

**2.** En el triángulo mostrado, podemos hallar el ángulo $\theta$ como sigue:

**(a)** $\theta = \text{sen}^{-1} \frac{\square}{\square}$

**(b)** $\theta = \cos^{-1} \frac{\square}{\square}$

**(c)** $\theta = \tan^{-1} \frac{\square}{\square}$




### HABILIDADES

**3-6** ■ Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

**3.** **(a)** $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-1)$

**4.** **(a)** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

**5.** **(a)** $\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ **(c)** $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

**6.** **(a)** $\text{sen}^{-1}(-1)$ **(b)** $\cos^{-1} 1$ **(c)** $\tan^{-1} 0$

**7-14** ■ Use calculadora para hallar un valor aproximado de cada expresión, redondeado a cinco lugares decimales, si está definido.

**7.** $\text{sen}^{-1}(0.45)$ **8.** $\cos^{-1}(-0.75$

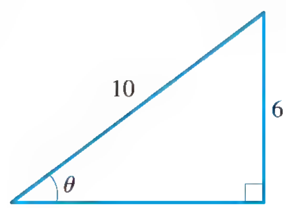
**9.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ **10.** $\text{sen}^{-1} \frac{1}{3}$

**11.** $\tan^{-1} 3$ **12.** $\tan^{-1}(-4)$

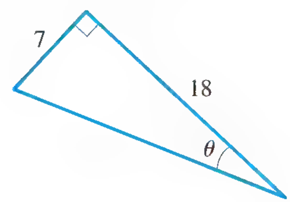
**13.** $\cos^{-1} 3$ **14.** $\text{sen}^{-1}(-2)$

**15-20** ■ Encuentre el ángulo $\theta$ en grados, redondeado a un decimal.

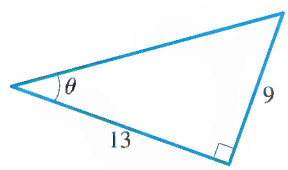
**15.**



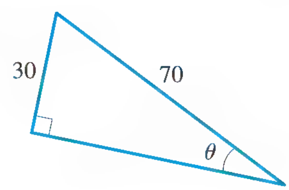

**16.**



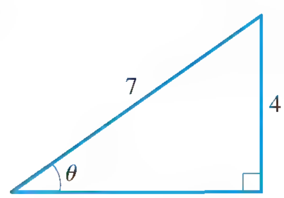

**17.**



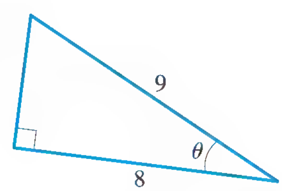

**18.**




**19.**




**20.**




**21-26** ■ Encuentre todos los ángulos $\theta$ entre 0° y 180° que satisfagan la ecuación dada.

**21.** $\text{sen}\, \theta = \frac{1}{2}$ **22.** $\text{sen}\, \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**23.** $\operatorname{sen} \theta = 0.7$ **24.** $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{4}$

**25.** $\cos \theta = 0.7$ **26.** $\cos \theta = \dfrac{1}{9}$

**27-32** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

**27.** $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{3}{5})$ **28.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5})$ **29.** $\sec(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13})$

**30.** $\csc(\cos^{-1} \frac{7}{25})$ **31.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13})$ **32.** $\cot(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3})$

**33-36** ■ Reescriba la expresión como una expresión algebraica en $x$.

**33.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$ **34.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

**35.** $\tan \operatorname{sen}^{-1} x$ **36.** $\cos \tan^{-1} x$

## APLICACIONES

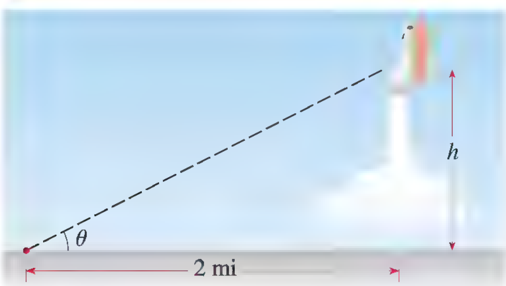
**37. Escalera inclinada** Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

**38. Ángulo del Sol** Un árbol de 96 pies proyecta una sombra que mide 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

**39. Altitud de un transbordador espacial** Un observador mira al transbordador espacial desde una distancia de 2 millas de la plataforma de lanzamiento.

**(a)** Exprese la altitud del transbordador espacial como función del ángulo de elevación $\theta$.

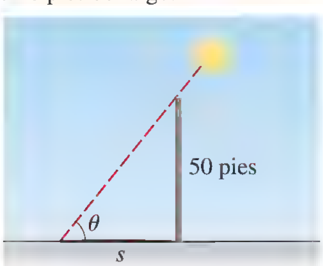
**(b)** Exprese el ángulo de elevación $\theta$ como función de la altitud $h$ del transbordador espacial.




**40. Altura de un poste** Un poste de 50 pies proyecta una sombra como se ve en la figura.

**(a)** Exprese el ángulo de elevación $\theta$ del Sol como función de la longitud $s$ de la sombra.

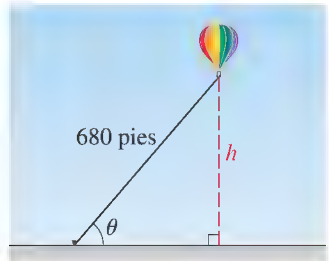
**(b)** Encuentre el ángulo $\theta$ de elevación del Sol cuando la sombra sea de 20 pies de largo.




**41. Altitud de un globo** Encuentre el ángulo $\theta$ si el globo está a una altitud de 500 pies.

**(a)** Exprese el ángulo como una función de la altura $h$ del globo.

**(b)** Encuentre el ángulo si el globo está a 500 pies de altura.




**42. Vista desde un satélite** Las figuras indican que cuanta más alta sea la órbita de un satélite, más se puede "ver" de la Tierra desde el satélite. Sean $\theta$, $s$ y $h$ como en la figura, y suponga que la Tierra es una esfera de radio 3960 millas.

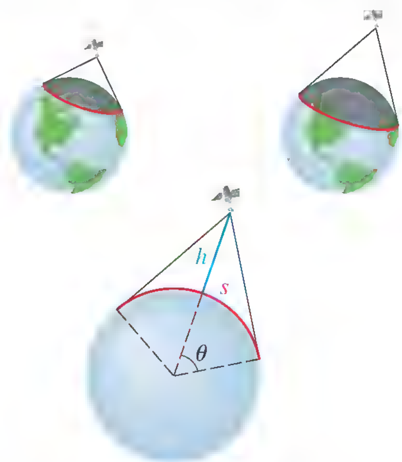
**(a)** Exprese el ángulo $\theta$ como función de $h$.

**(b)** Exprese la distancia $s$ como función de $\theta$.

**(c)** Exprese la distancia $s$ como función de $h$. [*Sugerencia:* Encuentre la composición de las funciones de las partes (a) y (b).]

**(d)** Si el satélite está a 100 millas sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia $s$ que puede ver?

**(e)** ¿A qué altura debe estar el satélite para que vea Los Ángeles y Nueva York, que están a 2450 millas entre sí?



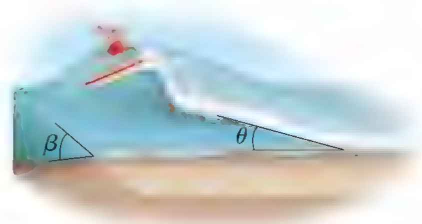

**43. Surfeando en la ola perfecta** Para que se pueda surfear una ola, ésta no puede romper toda a la vez. Robert Guza y Tony Bowen han demostrado que una ola tiene un "hombro" que se puede surfear si golpea la línea de la orilla a un ángulo $\theta$ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{(2n + 1)\tan \beta}\right)$$

donde $\beta$ es el ángulo al cual la playa hace pendiente y donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

**(a)** Para $\beta = 10°$, encuentre $\theta$ cuando $n = 3$.

**(b)** Para $\beta = 15°$, encuentre $\theta$ cuando $n = 2$, 3 y 4. Explique por qué la fórmula no da un valor para $\theta$ cuando $n = 0$ o 1.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**44. Funciones trigonométricas inversas en una calculadora** La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$ o $\cot^{-1}$. Demuestre las siguientes identidades y, a continuación, use estas identidades y una calculadora para hallar $\sec^{-1} 2$, $\csc^{-1} 3$ y $\cot^{-1} 4$.

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\csc^{-1} x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x \geq 1$$

$$\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad x > 0$$

# 6.5 La Ley de Senos

La Ley de Senos ▶ El caso ambiguo

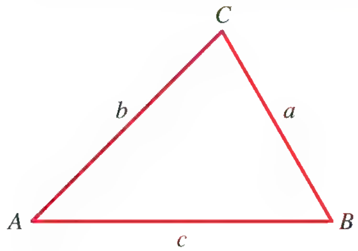
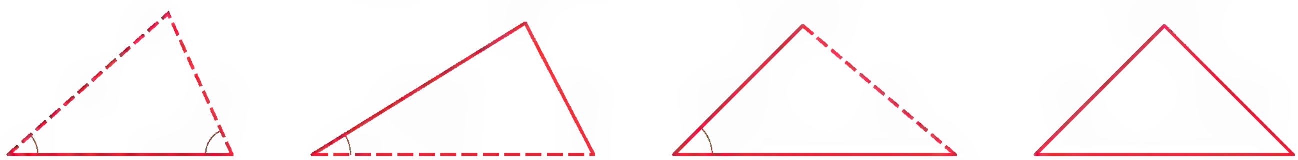



**FIGURA 1**

En la Sección 6.2 usamos las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas también se pueden usar para resolver *triángulos oblicuángulos,* es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, primero estudiamos la Ley de Senos aquí y a continuación la Ley de Cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo como $a$, $b$, $c$, como en la Figura 1.

Para resolver un triángulo, necesitamos conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para determinar si tenemos suficiente información, con frecuencia es útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si nos dan dos ángulos y el lado entre ellos, entonces es claro que se puede formar un triángulo y sólo uno (vea Figura 2(a)). Análogamente, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces se determina un triángulo único (Figura 2(c)). No obstante, si conocemos los tres ángulos pero ninguno de los lados, no podemos determinar de manera única el triángulo porque numerosos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Todos estos triángulos serían semejantes, desde luego.) Por lo tanto, no consideraremos este último caso.



(a) ALA o LAA (b) LLA (c) LAL (d) LLL

**FIGURA 2**

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) mientras al menos una de estas tres partes sea un lado. Por lo tanto, las posibilidades ilustradas en la Figura 2 son como sigue.

**Caso 1** Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)

**Caso 2** Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

**Caso 3** Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)

**Caso 4** Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven usando la Ley de Senos; los Casos 3 y 4 requieren la Ley de Cosenos.

## ▼ La Ley de Senos

La **Ley de Senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

### LA LEY DE SENOS

En el triángulo $ABC$ tenemos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

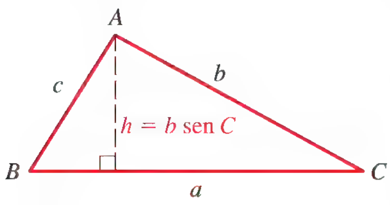



**FIGURA 3**

**DEMOSTRACIÓN** Para ver por qué la Ley de Senos es verdadera, consulte la Figura 3. Por la fórmula en la Sección 6.3, el área del triángulo $ABC$ es $\frac{1}{2}ab$ sen $C$. Por la misma fórmula, el área de este triángulo también es $\frac{1}{2}ac$ sen $B$ y $\frac{1}{2}bc$ sen $A$. Entonces,

$$\tfrac{1}{2}bc \text{ sen } A = \tfrac{1}{2}ac \text{ sen } B = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } C$$

Multiplicando por $2/(abc)$ resulta la Ley de Senos. ■

## EJEMPLO 1 | Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

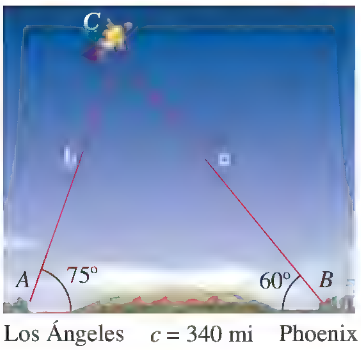



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN** Necesitamos hallar la distancia $b$ en la Figura 4. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea Figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\frac{\text{sen } 60°}{b} = \frac{\text{sen } 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **33** ■

## EJEMPLO 2 | Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la Figura 5.

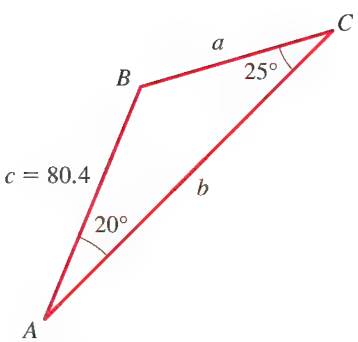



**FIGURA 5**

**SOLUCIÓN** Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Como se conoce el lado $c$, para hallar el lado $a$ usamos la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Análogamente, para hallar $b$, usamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13** ■

## ▼ El caso ambiguo

En los Ejemplos 1 y 2 se determinó un triángulo único por medio de la información dada. Esto siempre es cierto para el Caso 1 (ALA o LAA). Pero en el Caso 2 (LLA) puede haber dos triángulos, un triángulo o no haber triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón, el Caso 2 a veces se denomina **caso ambiguo**. Para ver por qué esto es así, mostramos en

la Figura 6 las posibilidades cuando nos dan el ángulo $A$ y los lados $a$ y $b$. En el inciso (a) no es posible una solución, porque el lado $a$ es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso (b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso (c) son posibles dos soluciones, y en el inciso (d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. Ilustramos las posibilidades del Caso 2 en los ejemplos siguientes.

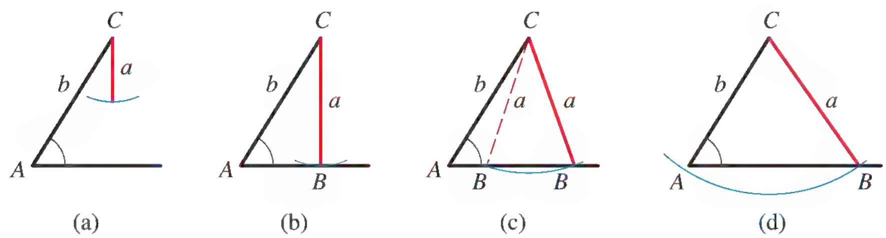



**FIGURA 6** El caso ambiguo

## EJEMPLO 3 | LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo $ABC$, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$, y $b = 7$.

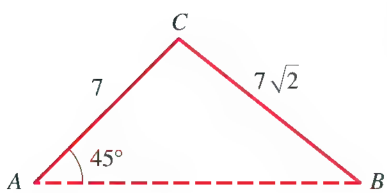



**FIGURA 7**

**SOLUCIÓN** Primero trazamos el triángulo con la información que tenemos (vea Figura 7). Nuestro dibujo es necesariamente tentativo porque todavía no conocemos los otros ángulos, pero podemos ver ahora las posibilidades.

Primero hallamos $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

¿Cuáles ángulos $B$ tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección precedente sabemos que hay dos de estos ángulos menores a 180° (son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos acerca del triángulo $ABC$? Como $\angle A = 45°$, no podemos tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$ y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Consideramos sólo ángulos menores a 180°, porque no hay triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o mayor.

Ahora podemos hallar el lado $c$.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

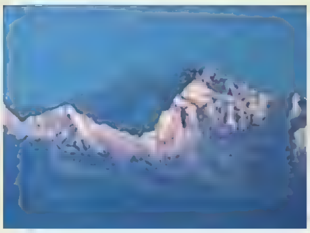
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

En el Ejemplo 3 hay dos posibilidades para el ángulo $B$ y una de éstas no era compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, debemos comprobar el ángulo y su suplemento como posibilidades, porque cualquier ángulo menor a 180° puede estar en el triángulo. Para determinar si funciona cualquiera de las dos posibilidades, vemos si la suma resultante de los ángulos excede de 180°. Puede ocurrir, como en la Figura 6(c), que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son soluciones al problema.

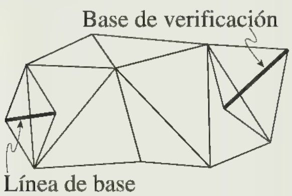
El *suplemento* de un ángulo $\theta$ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

## EJEMPLO 4 | LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo $ABC$ si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.



La **topografía** es un método de medir tierras, que se utiliza para hacer mapas. Los topógrafos usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en la región de la que se ha de hacer un mapa. El proceso se inicia al medir la longitud de una *línea de base* entre dos estaciones de topografía. A continuación, con el uso de un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera estación. El siguiente paso es usar la Ley de Senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se usan como líneas de base, y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método, la única distancia medida es la línea de base inicial; todas las otras distancias se calculan a partir de la Ley de Senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.




Uno de los esfuerzos más ambiciosos de todos los tiempos, para hacer mapas, fue el Gran Levantamiento Topográfico de la India (vea problema 8, página 492) que requirió de varias expediciones y tardó más de un siglo en completarse. La famosa expedición de 1823 dirigida por **Sir George Everest** duró 20 años. Pasando sobre terrenos engañosos y encontrando los temibles mosquitos portadores del paludismo, esta expedición llegó a la base de la cordillera del Himalaya. Una expedición posterior, usando triangulación, calculó que la altura del pico más alto de los Himalaya era de 29,002 pies; ese pico recibió el nombre de Everest en honor a Sir George Everest.

Hoy en día, con el uso de satélites, se estima que la altura del Monte Everest es de 29,028 pies. La muy cercana proximidad de estas dos estimaciones muestra la gran precisión del método trigonométrico.

**SOLUCIÓN** Con la información dada, trazamos el triángulo que se ve en la Figura 8. Observe que el lado $a$ puede trazarse en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la Ley de Senos

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{248.6 \operatorname{sen} 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

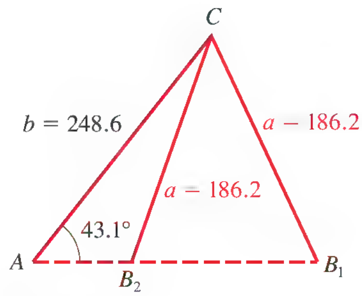



**FIGURA 8**

Hay dos posibles ángulos $B$ entre 0° y 180° tales que sen $B = 0.91225$. Usando una calculadora, encontramos que uno de los ángulos es $\operatorname{sen}^{-1}(0.91225) \approx 65.8°$. El otro ángulo es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Denotamos estos dos ángulos por $B_1$ y $B_2$ de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

Entonces dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: el triángulo $AB_1C_1$ y el triángulo $AB_2C_2$.

**Resuelva el triángulo $AB_1C_1$:**

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de Senos}$$

**Resuelva el triángulo $AB_2C_2$:**

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Así, $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Los triángulos $AB_1C_1$ y $AB_2C_2$ se ven en la Figura 9.

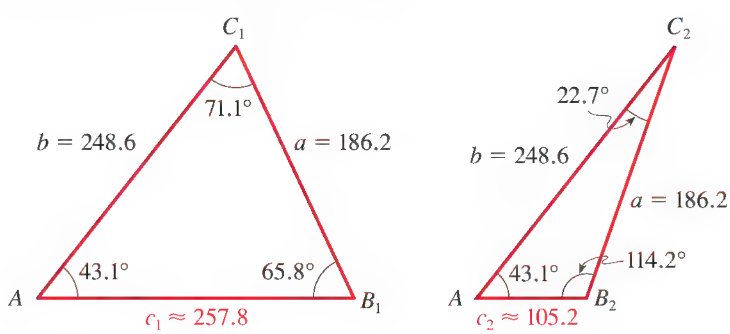



**FIGURA 9**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El siguiente ejemplo presenta una situación para la cual no hay un triángulo compatible con la información dada.

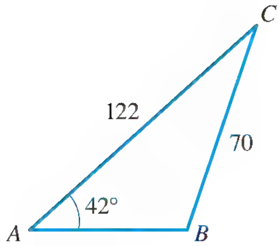



**FIGURA 10**

## EJEMPLO 5 | LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo $ABC$, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

**SOLUCIÓN** Para organizar la información dada, trazamos el diagrama de la Figura 10. Tratemos de hallar el $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{122 \text{ sen } 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

Como el seno de un ángulo nunca es mayor a 1, concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones dadas en este problema.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## 6.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** En el triángulo $ABC$ con lados $a$, $b$ y $c$ la Ley de Senos dice que

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

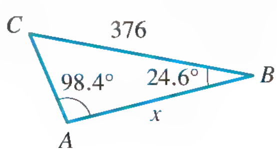
**2.** ¿En cuál de los siguientes casos podemos usar la Ley de Senos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

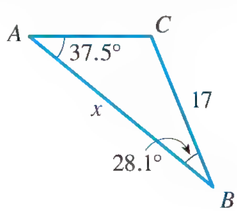
### HABILIDADES

**3-8** ■ Use la Ley de Senos para hallar el lado $x$ o ángulo $\theta$ indicados.

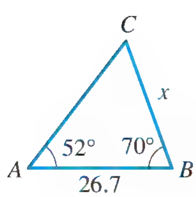
**3.**



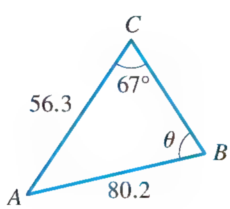

**4.**



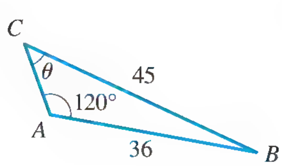

**5.**



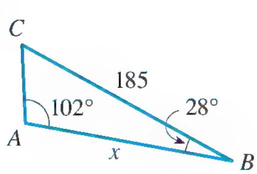

**6.**




**7.**

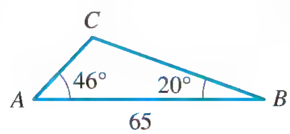



**8.**

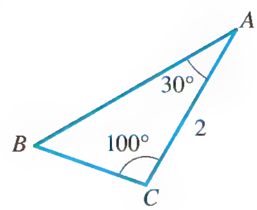



**9-12** ■ Resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

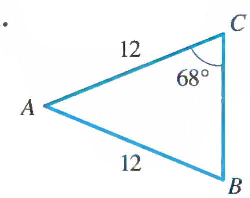
**9.**



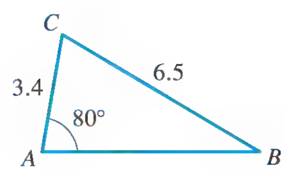

**10.**




**11.**




**12.**




**13-18** ■ Trace cada triángulo y a continuación resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

**13.** $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$

**14.** $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$

**15.** $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$

**16.** $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$

**17.** $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$

**18.** $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

**19-28** ■ Use la Ley de Senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

**19.** $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

**20.** $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

**21.** $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

**22.** $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

**23.** $b = 25, \quad c = 30, \quad \angle B = 25°$

**24.** $a = 75, \quad b = 100, \quad \angle A = 30°$

**25.** $a = 50, \quad b = 100, \quad \angle A = 50°$

**26.** $a = 100, \quad b = 80, \quad \angle A = 135°$

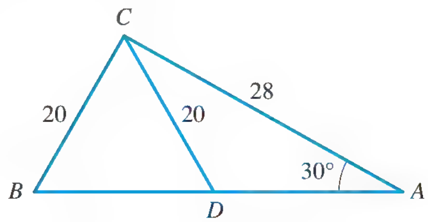
**27.** $a = 26, \quad c = 15, \quad \angle C = 29°$

**28.** $b = 73, \quad c = 82, \quad \angle B = 58°$

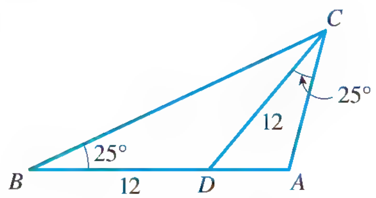
**29.** Para el triángulo mostrado, encuentre

**(a)** $\angle BCD$ y

**(b)** $\angle DCA$.




**30.** Para el triángulo mostrado, encuentre la longitud $AD$.




**31.** En el triángulo $ABC$, $\angle A = 40°$, $a = 15$, y $b = 20$.

**(a)** Demuestre que hay dos triángulos, $ABC$ y $A'B'C'$, que satisfacen estas condiciones.

**(b)** Demuestre que las áreas de los triángulos en el inciso (a) son proporcionales a los senos de los ángulos $C$ y $C'$, es decir,

$$\frac{\text{área de } \triangle ABC}{\text{área de } \triangle A'B'C'} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} C'}$$

**32.** Demuestre que, dados los tres ángulos $A$, $B$, $C$ de un triángulo y un lado, $a$ por ejemplo, el área del triángulo es

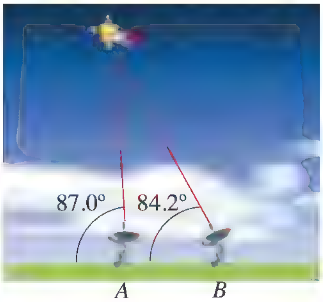
$$\text{área} = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$$

## APLICACIONES

**33. Rastreo de un satélite** La trayectoria de un satélite, que gira en órbita alrededor de la Tierra, hace que el satélite pase directamente sobre dos estaciones de rastreo $A$ y $B$, que están a 50 millas una de otra. Cuando el satélite está en un lado de las dos estaciones, los ángulos de elevación en $A$ y $B$ se miden y resultan de 87.0° y 84.2°, respectivamente.

**(a)** ¿A qué distancia está el satélite de la estación $A$?

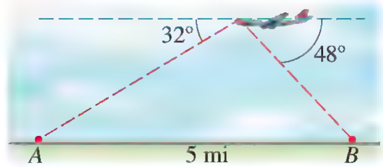
**(b)** ¿Cuál es la altura del satélite sobre la Tierra?



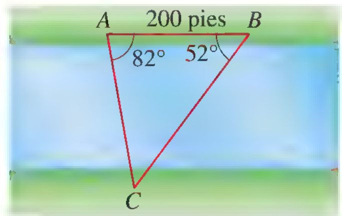

**34. Vuelo de un avión** Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48° como se muestra en la figura.

**(a)** Encuentre la distancia entre el avión y el punto $A$.

**(b)** Encuentre la elevación del avión.




**35. Distancia entre márgenes de un río** Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos $A$ y $B$, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia $C$ en el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de $A$ a $C$.

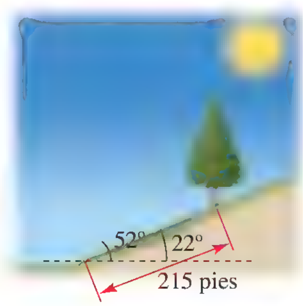



**36. Distancia de una orilla a otra de un lago** Los puntos $A$ y $B$ están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza un punto $C$ en tierra de manera que $\angle CAB = 48.6°$. También mide $CA$ como 312 pies y $CB$ como 527 pies. Encuentre la distancia entre $A$ y $B$.

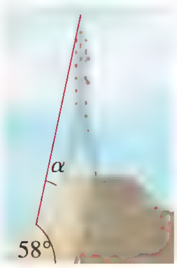
**37. La Torre Inclinada de Pisa** El campanario de la catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° con respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación a lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

**38. Antena de radio** Una antena de radio de onda corta está sostenida por dos cables de retenida (vientos), de 165 pies y 180 pies de largo. Cada cable está unido a lo alto de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿A qué distancia están entre sí los puntos de anclaje?

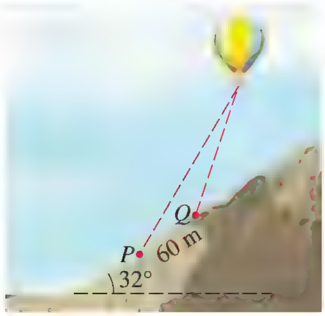
**39. Altura de un árbol** Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies ladera abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° con respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es 52°, encuentre la altura del árbol.



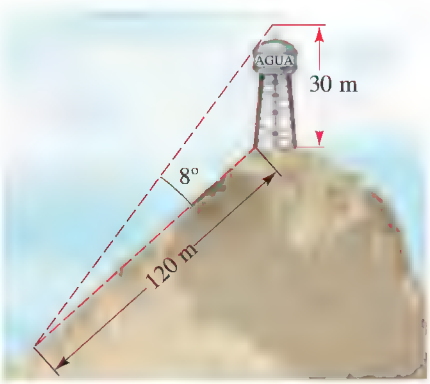
**40. Longitud de un alambre de retenida** Una torre de comunicaciones está situada en lo alto de un empinado cerro, como se ve en la figura. El ángulo de inclinación del cerro es 58°. Un alambre de retenida se ha de unir a lo alto de la torre y al suelo, a 100 metros colina abajo desde la base de la torre. El ángulo $\alpha$ de la figura está determinado como de 12°. Encuentre la longitud del cable requerido para el alambre de retenida.



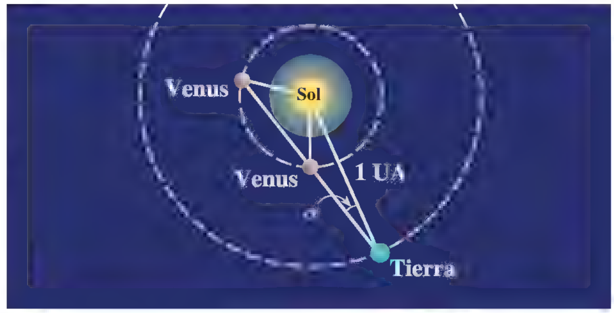

**41. Cálculo de una distancia** Observadores en $P$ y $Q$ están localizados en el costado de un cerro que está inclinado 32° con la horizontal, como se muestra. El observador en $P$ determina que el ángulo de elevación a un globo de aire caliente es de 62°. Al mismo tiempo, el observador en $Q$ mide el ángulo de elevación al globo y ve que es de 71°. Si $P$ está 60 metros colina abajo desde $Q$, encuentre la distancia de $Q$ al globo.




**42. Cálculo de un ángulo** Una torre de 30 m para agua está situada en lo alto de un cerro. De una distancia de 120 m bajando por el cerro, se observa que el ángulo formado entre lo alto y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación del cerro.




**43. Distancias a Venus** La *elongación* $\alpha$ de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es 0.723 UA (vea Ejercicio 65 en la Sección 6.2). En cierto instante, se ve que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las posibles distancias de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).




**44. Burbujas de jabón** Cuando dos burbujas de unen entre sí en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro $D$ está en la línea que pasa por los centros de las burbujas (vea la figura). También, los ángulos $ACB$ y $ACD$ miden 60° cada uno de ellos.

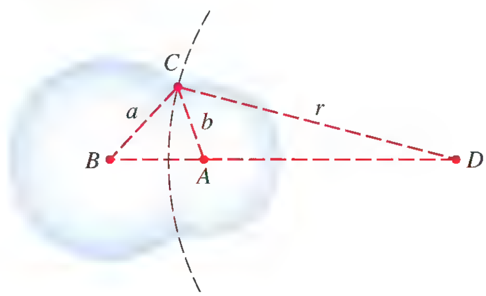
**(a)** Demuestre que el radio $r$ de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia:* Use la Ley de Senos junto con el hecho de que un ángulo $\theta$ y su suplemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

**(b)** Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 cm y 3 cm.

**(c)** ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**45. Número de soluciones en el caso ambiguo** Hemos visto que cuando se usa la Ley de Senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una solución o ninguna. Trace ángulos como los de la Figura 6 para verificar los criterios de la tabla para el número de soluciones, si nos dan $\angle A$ y los lados $a$ y $b$.

| Criterio | Número de soluciones |
|---|---|
| $a \geq b$ | 1 |
| $b > a > b \operatorname{sen} A$ | 2 |
| $a = b \operatorname{sen} A$ | 1 |
| $a < b \operatorname{sen} A$ | 0 |

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de $a$ para los cuales el triángulo $ABC$ tiene dos soluciones, una solución o ninguna solución.

# 6.6 La Ley de Cosenos

La Ley de Cosenos ▶ Navegación: orientación y rumbo ▶ El área de un triángulo

## ▼ La Ley de Cosenos

La Ley de Senos no se puede usar directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo entre ellos, o si conocemos los tres lados (Casos 3 y 4 de la sección precedente). En estos dos casos aplica la **Ley de Cosenos**.

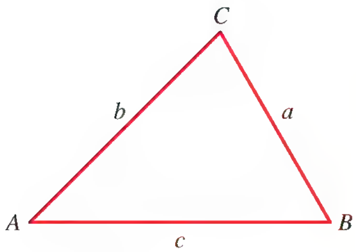


**FIGURA 1**

**LA LEY DE COSENOS**

En cualquier triángulo $ABC$ (vea Figura 1), tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 \quad 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

**DEMOSTRACIÓN** Para probar la Ley de Cosenos, ponga el triángulo $ABC$ de modo que $\angle A$ esté en el origen, como se muestra en la Figura 2. Las coordenadas de los vértices $B$ y $C$ son $(c, 0)$ y $(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$, respectivamente. (El lector debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si trazamos el ángulo $A$ como ángulo agudo.) Usando la Fórmula de Distancias, obtenemos

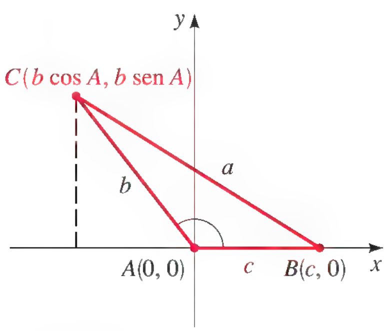


**FIGURA 2**

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc\cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

Esto prueba la primera fórmula. Las otras dos fórmulas se obtienen de la misma forma si se coloca cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y se repite el argumento precedente. ■

En palabras, la Ley de Cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo incluido.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la Ley de Cosenos se reduce al Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras es un caso especial de la Ley de Cosenos.

### EJEMPLO 1 | Longitud de un túnel

Un túnel se ha de construir por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones que se ven en la Figura 3. Use la información del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

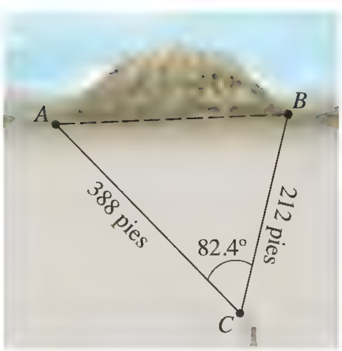


**FIGURA 3**

**SOLUCIÓN** Para aproximar la longitud $c$ del túnel, usamos la Ley de Cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Ley de Cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4^\circ && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el túnel será de aproximadamente 417 pies de largo.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **39** ■

## EJEMPLO 2 | LLL, la Ley de Cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (vea Figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

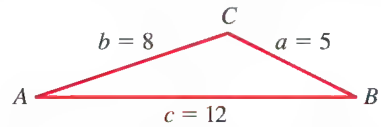



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN** Primero hallamos $\angle A$. De la Ley de Cosenos, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Despejando $\cos A$, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$

COS$^{-1}$ o INV COS o ARC COS

Usando una calculadora, encontramos que $\angle A = \cos^{-1}(0.953125) \approx 18°$. En la misma forma obtenemos

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

Usando una calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.875) \approx 29° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.6875) \approx 133°$$

Desde luego, una vez calculados dos ángulos, el tercero se puede hallar más fácilmente del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. No obstante, es buena idea calcular los tres ángulos usando la Ley de Cosenos y sumar los tres ángulos como prueba en los cálculos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

## EJEMPLO 3 | LAL, la Ley de Cosenos

Resuelva el triángulo $ABC$, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

**SOLUCIÓN** Podemos hallar $a$ usando la Ley de Cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05$$

Entonces, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. También usamos la Ley de Cosenos para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el Ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

Usando calculadora, encontramos que

$$\angle B = \cos^{-1}(0.816477) \approx 35.3° \qquad \text{y} \qquad \angle C = \cos^{-1}(-0.142532) \approx 98.2°$$

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Vea Figura 5.)

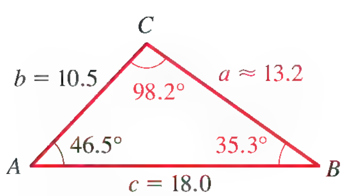



**FIGURA 5**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Podríamos haber usado la Ley de Senos para hallar $\angle B$ y $\angle C$ en el Ejemplo 3, porque conocíamos los tres lados y un ángulo del triángulo. Pero, conocer el seno de un ángulo no especifica de manera única el ángulo, porque un ángulo $\theta$ y su suplemento $180° - \theta$ tienen

ambos el mismo seno. Entonces, necesitaríamos determinar cuál de los dos ángulos es la selección correcta. Esta ambigüedad no aparece cuando usamos la Ley de Cosenos, porque todo ángulo entre 0° y 180° tiene un coseno único. Por lo tanto, usar sólo la Ley de Cosenos es preferible en problemas como el Problema 3.

## ▼ Navegación: orientación y rumbo

En navegación, es frecuente que una dirección se dé como **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido directamente del norte o del sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (vea Figura 6).

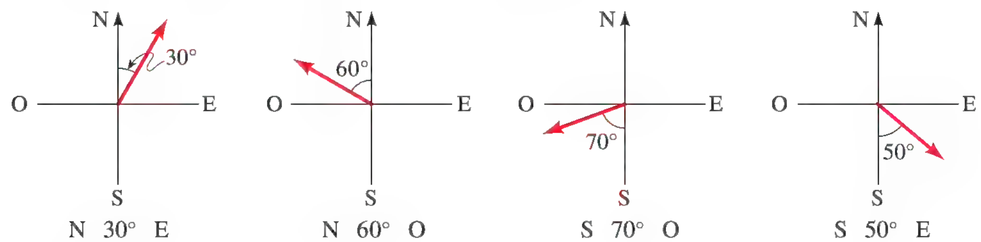



**FIGURA 6**

### EJEMPLO 4 | Navegación

Un piloto sale de un aeropuerto y hace rumbo en la dirección N 20° E, volando a 200 mi/h. Después de una hora, hace una corrección de curso y hace rumbo en la dirección N 40° E. Media hora después de esto, problemas en los motores lo obligan a hacer un aterrizaje de emergencia.

**(a)** Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto final de aterrizaje.

**(b)** Encuentre el rumbo del aeropuerto a su punto final de aterrizaje.

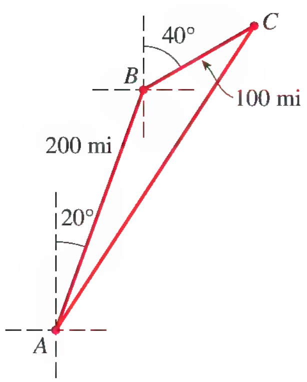



**FIGURA 7**

**SOLUCIÓN**

**(a)** En una hora el avión viaja 200 millas y, en media hora, 100 millas, de modo que podemos localizar el curso del piloto como en la Figura 7. Cuando hace la corrección de su curso, vira 20° a la derecha, de modo que el ángulo entre los dos catetos de su viaje es 180° − 20° = 160°. Entonces, por la Ley de Cosenos, tenemos

$$b^2 = 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160^\circ$$
$$\approx 87{,}587.70$$

Por lo tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

**(b)** Primero usamos la Ley de Senos para hallar $\angle A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{100} = \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{295.95}$$

$$\operatorname{sen} A = 100 \cdot \frac{\operatorname{sen} 160^\circ}{295.95}$$
$$\approx 0.11557$$

Otro ángulo con seno 0.11557 es 180° − 6.636° = 173.364°. Pero éste es claramente demasiado grande para ser $\angle A$ en $\angle ABC$.

Usando la tecla SEN$^{-1}$ en una calculadora, hallamos que $\angle A \approx 6.636°$. De la Figura 7 vemos que la línea del aeropuerto al punto final de aterrizaje apunta en la dirección 20° + 6.636° = 26.636° al este del norte. En consecuencia, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

## El área de un triángulo

Una aplicación interesante de la Ley de Cosenos involucra una fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (vea Figura 8).

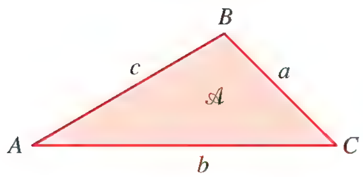



**FIGURA 8**

> **FÓRMULA DE HERÓN**
>
> El área $\mathcal{A}$ de un triángulo $ABC$ está dada por
>
> $$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
>
> donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; esto es, $s$ es la mitad del perímetro.

**DEMOSTRACIÓN** Empezamos con la fórmula $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C$ de la Sección 6.3. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) && \text{Identidad de Pitágoras} \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos C)(1 + \cos C) && \text{Factorice} \end{aligned}$$

A continuación, escribimos las expresiones $1 - \cos C$ y $1 + \cos C$ en términos de $a$, $b$ y $c$. Por la Ley de Cosenos tenemos

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Ley de Cosenos} \\ 1 + \cos C &= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Sume 1} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} && \text{Factorice} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} && \text{Diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Análogamente

$$1 - \cos C = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula que obtuvimos para $\mathcal{A}^2$ resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab} \\ &= \frac{(a + b + c)}{2} \frac{(a + b - c)}{2} \frac{(c + a - b)}{2} \frac{(c - a + b)}{2} \\ &= s(s - c)(s - b)(s - a) \end{aligned}$$

La Fórmula de Herón se obtiene al tomar la raíz cuadrada de cada lado. ■

Para ver que los factores de los últimos dos productos son iguales, observe por ejemplo que

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} - c = s - c$$

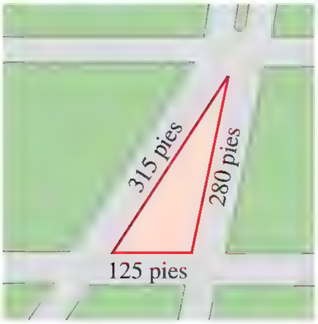



**FIGURA 9**

## EJEMPLO 5 | Área de un lote

Un negociante desea comprar un lote triangular en una zona de gran movimiento en el centro de una ciudad (vea Figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes miden 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

**SOLUCIÓN** El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la Fórmula de Herón el área es

$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17{,}451.6$$

Entonces, el área es aproximadamente 17, 452 pies$^2$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **53**

# 6.6 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Para el triángulo *ABC* con lados *a*, *b* y *c* la Ley de Cosenos dice que $c^2 =$ ____________________.

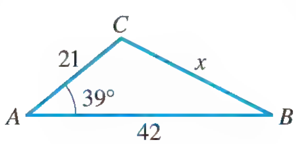
**2.** ¿En cuál de los siguientes casos debe usarse la Ley de Cosenos para resolver un triángulo?

ALA LLL LAL LLA

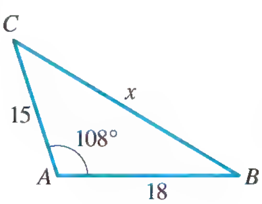
## HABILIDADES

**3-10** ■ Use la Ley de Cosenos para determinar el lado $x$ indicado o el ángulo $\theta$.

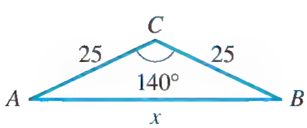
**3.**



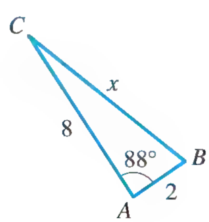

**4.**



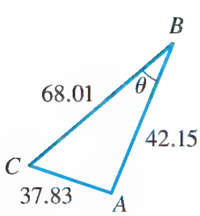

**5.**



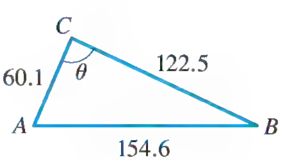

**6.**



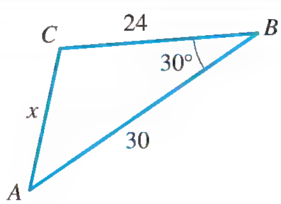

**7.**



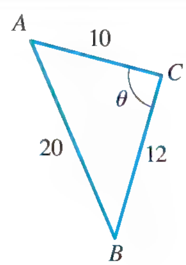

**8.**




**9.**

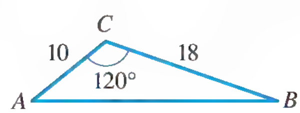



**10.**

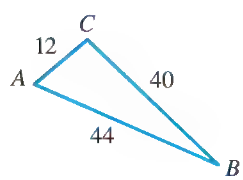



**11-20** ■ Resuelva el triángulo *ABC*.

**11.**




**12.**




**13.** $a = 3.0, \quad b = 4.0, \quad \angle C = 53°$

**14.** $b = 60, \quad c = 30, \quad \angle A = 70°$

**15.** $a = 20, \quad b = 25, \quad c = 22$

**16.** $a = 10, \quad b = 12, \quad c = 16$

**17.** $b = 125, \quad c = 162, \quad \angle B = 40°$

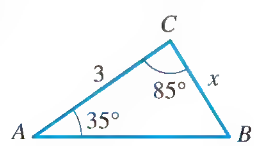
**18.** $a = 65, \quad c = 50, \quad \angle C = 52°$

**19.** $a = 50, \quad b = 65, \quad \angle A = 55°$

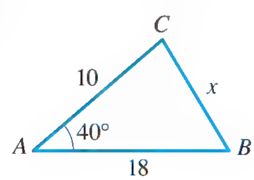
**20.** $a = 73.5, \quad \angle B = 61°, \quad \angle C = 83°$

**21-28** ■ Encuentre el lado indicado $x$ o el ángulo $\theta$. (Use ya sea la Ley de Senos o la Ley de Cosenos, según sea apropiado.)

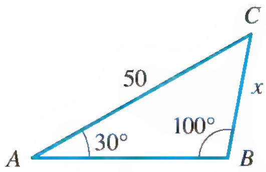
**21.**



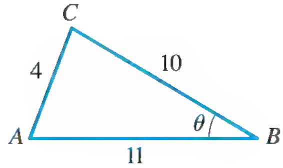

**22.**



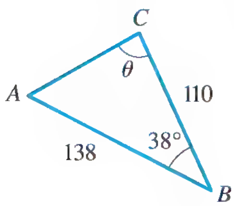
**23.**



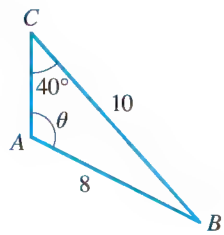

**24.**



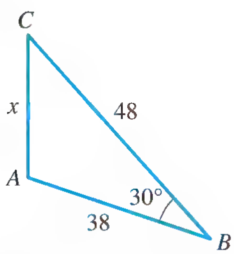

**25.**



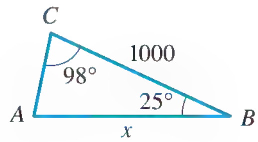

**26.**




**27.**




**28.**




**29-32** ■ Encuentre el área del triángulo cuyos lados tienen las longitudes dadas.

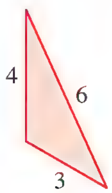
**29.** $a = 9,\quad b = 12,\quad c = 15$ **30.** $a = 1,\quad b = 2,\quad c = 2$

**31.** $a = 7,\quad b = 8,\quad c = 9$

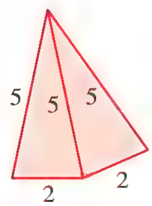
**32.** $a = 11,\quad b = 100,\quad c = 101$

**33-36** ■ Encuentre el área de la figura sombreada, redondeada a dos lugares decimales.

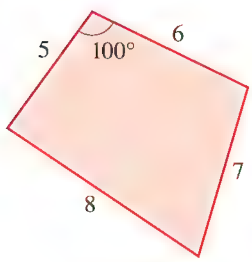
**33.**



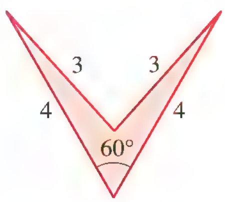

**34.**



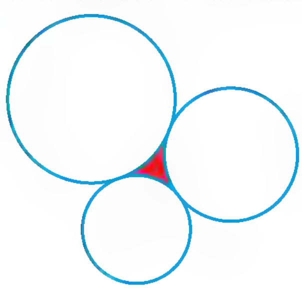

**35.**




**36.**




**37.** Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los círculos.



**38.** Demuestre que en el triángulo $ABC$

$$a = b\cos C + c\cos B$$

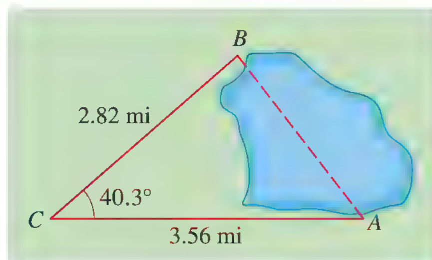
$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

Éstas reciben el nombre de *Leyes de Proyección.* [*Sugerencia:* Para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la Ley de Cosenos y despeje $a$.]

## APLICACIONES

**39. Topografía** Para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. Encuentre la distancia de un lado a otro del lago usando esta información.



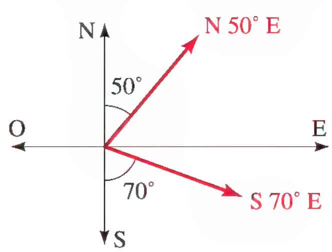

**40. Geometría** Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es de 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

**41. Cálculo de una distancia** Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos autos salen del crucero a las 2:00 a.m. uno de ellos corriendo a 50 mi/h y el otro a 30 mi/h. ¿A qué distancia entre sí están los autos a las 2:30 p.m.?

**42. Cálculo de una distancia** Un auto viaja por una carretera recta, dirigiéndose al este durante 1 hora, y luego corre 30 minutos en otro camino con dirección al noreste. Si el auto ha mantenido una velocidad constante de 40 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

**43. Situación por estima** Una aviadora vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 min. Entonces hace una corrección de curso, dirigiéndose 10° a la derecha de su curso original, y vuela 2 horas en la nueva dirección. Si ella mantiene una velocidad constante de 625 mi/h, ¿a qué distancia está de su posición inicial?

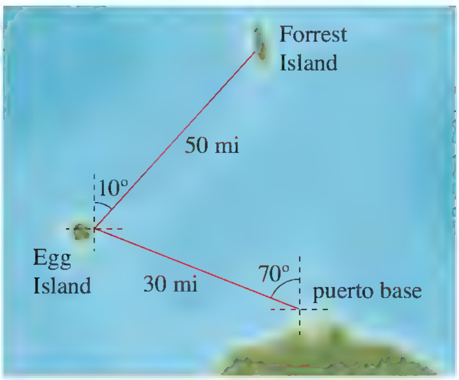
**44. Navegación** Dos botes salen del mismo puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a una velocidad de 30 mi/h en la dirección N 50° E y, el otro, viaja a una velocidad de 26 mi/h en una dirección S 70° E (vea la figura). ¿A qué distancia están entre sí los dos botes después de una hora?



**45. Navegación** Un pescador sale de su puerto base y navega en dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. Al día siguiente navega al N 10° E durante 50 minutos, llegando a Forrest Island.

**(a)** Encuentre la distancia entre el puerto base del pescador y Forrest Island.

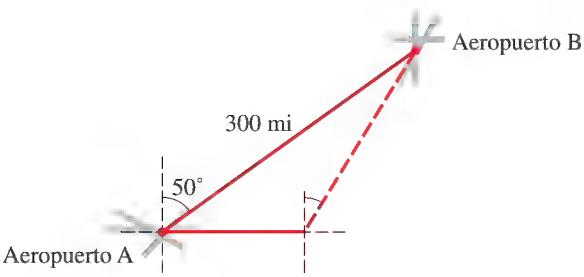
**(b)** Encuentre el rumbo de Forrest Island de regreso a su puerto base.




**46. Navegación** El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B erróneamente vuela en dirección al este a 200 mi/h durante 30 minutos, cuando se da cuenta de su error.

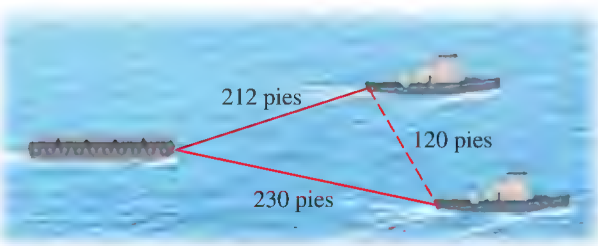
**(a)** ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?

**(b)** ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto B?

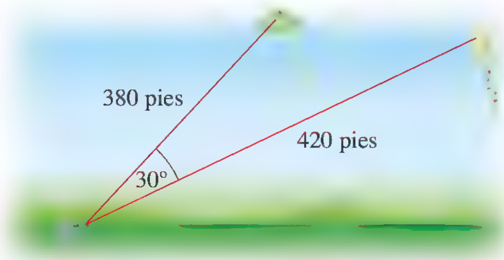



**47. Campo triangular** Un campo triangular tiene lados de longitudes 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

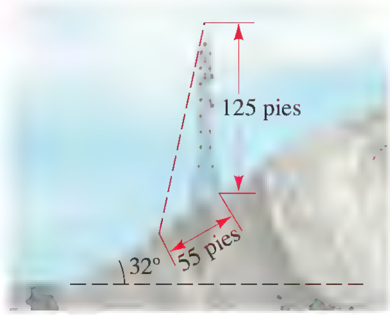
**48. Remolque de una barcaza** Dos remolcadores que están a 120 pies uno del otro tiran de una barcaza, como se muestra. Si la longitud de un cable es 212 pies y la longitud del otro es 230 pies, encuentre el ángulo formado por los dos cables.



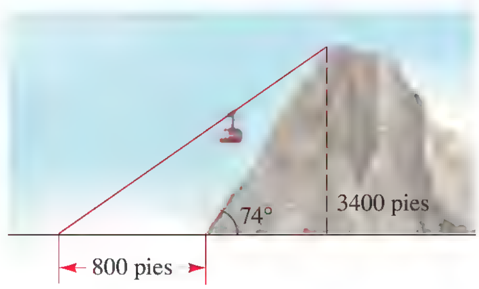

**49. Cometas en vuelo** Un niño está haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda a una de las cometas y 420 pies para la otra. Él estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. Aproxime la distancia entre las cometas.




**50. Asegurar una torre** Una torre de 125 pies está situada en la ladera de una montaña que está inclinada 32° con la horizontal. Un cable de retenida se ha de sujetar a la parte superior de la torre y anclarse en un punto a 55 pies debajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta del alambre necesario.

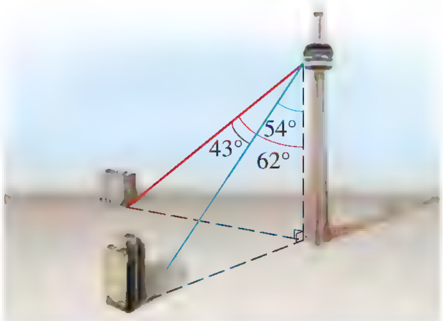



**51. Teleférico** Una empinada montaña está inclinada 74° con la horizontal y se eleva a 3400 pies sobre la llanura circundante. Un funicular se ha de instalar desde un punto a 800 pies de la base hasta lo alto de la montaña, como se muestra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.




**52. Torre CN** La Torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura libre más alta de Norteamérica. Una mujer que está en la plataforma de observación, a 1150 pies sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del suelo. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°; también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y el del otro punto de referencia

es de 54°. Encuentre la distancia entre los dos puntos de referencia.




**53. Valor de un terreno** Un terreno en el centro de Columbia está valuado en \$20 el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**54. Despejar los ángulos de un triángulo** El párrafo que sigue la solución del ejemplo 3 de la página 477 explica un método alternativo para hallar $\angle B$ y $\angle C$, usando la Ley de Senos. Use este método para resolver el triángulo del ejemplo, hallando $\angle B$ primero y $\angle C$ después. Explique cómo escoger el valor apropiado para la medición de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere usted para resolver un problema de triángulo LAL, el explicado en el Ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

# CAPÍTULO 6 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. **(a)** Explique la diferencia entre un ángulo positivo y un ángulo negativo.
   **(b)** ¿Cómo se forma un ángulo de 1 grado de medida?
   **(c)** ¿Cómo se forma un ángulo de 1 radián de medida?
   **(d)** ¿Cómo se define la medida en radianes de un ángulo $\theta$?
   **(e)** ¿Cómo se convierte de grados a radianes?
   **(f)** ¿Cómo se convierte de radianes a grados?
2. **(a)** ¿Cuándo está un ángulo en posición inicial?
   **(b)** ¿Cuándo son coterminales dos ángulos?
3. **(a)** ¿Cuál es la longitud $s$ de un arco de círculo con radio $r$ que subtiende un ángulo central de $\theta$ radianes?
   **(b)** ¿Cuál es el área $A$ de un sector de círculo con radio $r$ y ángulo central de $\theta$ radianes?
4. Si $\theta$ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los lados adyacentes y opuestos a $\theta$ y la hipotenusa.
5. ¿Qué significa resolver un triángulo?
6. Si $\theta$ es un ángulo en posición normal, $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal y $r$ es la distancia del origen a $P$, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de $\theta$.
7. ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes primero, segundo, tercero y cuarto?
8. Si $\theta$ es un ángulo en posición normal, ¿cuál es el ángulo de referencia $\theta$?
9. **(a)** Exprese las identidades recíprocas.
   **(b)** Exprese las identidades de Pitágoras.
10. **(a)** ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud $a$ y $b$ y con ángulo entre ellos $\theta$?
    **(b)** ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud $a$, $b$ y $c$?
11. Defina la función seno inversa $\operatorname{sen}^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
12. Defina la función coseno inversa $\cos^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
13. Defina la función tangente inversa $\tan^{-1} x$. ¿Cuáles son su dominio y rango?
14. **(a)** Exprese la Ley de Senos.
    **(b)** Exprese la Ley de Cosenos.
15. Explique el caso ambiguo de la Ley de Senos.

## EJERCICIOS

**1-2** ■ Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida dada en grados.

**1. (a)** 60° **(b)** 330° **(c)** $-135°$ **(d)** $-90°$

**2. (a)** 24° **(b)** $-330°$ **(c)** 750° **(d)** 5°

**3-4** ■ Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida dada en radianes.

**3. (a)** $\dfrac{5\pi}{2}$ **(b)** $-\dfrac{\pi}{6}$ **(c)** $\dfrac{9\pi}{4}$ **(d)** 3.1

**4. (a)** 8 **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** $\dfrac{11\pi}{6}$ **(d)** $\dfrac{3\pi}{5}$

**5.** Encuentre la longitud de un arco de una circunferencia de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 rad.

**6.** Encuentre la medida de un ángulo central $\theta$ en un círculo de 5 pies de radio si el ángulo está subtendido por un arco de 7 pies de longitud.

**7.** Un arco circular de 100 pies de longitud subtiende un ángulo central de 70°. Encuentre el radio del círculo.

**8.** ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de 28 pulg. de un auto en media hora si el auto está corriendo a 60 mi/h?

**9.** Nueva York y Los Ángeles están a 2450 millas entre sí. Encuentre el ángulo que el arco entre estas dos ciudades subtiende en el centro de la Tierra. (El radio de la Tierra es de 3960 millas).

**10.** Encuentre el área de un sector con ángulo central de 2 rad en un círculo de 5 m de radio.

**11.** Encuentre el área de un sector con ángulo central de 52° en un círculo de 200 pies de radio.

**12.** Un sector de un círculo de 25 pies de radio tiene un área de 125 pies$^2$. Encuentre el ángulo central del sector.

**13.** La rueda de un alfarero, con radio de 8 pulg., gira a 150 rpm. Encuentre las velocidades angular y lineal de un punto en el borde de la rueda.

**14.** En la transmisión de un automóvil, una *relación de engranajes* $g$ es la relación

$$g = \frac{\text{velocidad angular del motor}}{\text{velocidad angular de las ruedas}}$$

La velocidad angular del motor se ve en el tacómetro (en rpm).

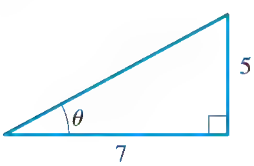
Cierto auto deportivo tiene ruedas con radio de 11 pulg. Sus relaciones de engranes se ilustran en la tabla siguiente. Suponga que el auto está en cuarta y el tacómetro indica 3500 rpm.

**(a)** Encuentre la velocidad angular del motor.
**(b)** Encuentre la velocidad angular de las ruedas.
**(c)** ¿A qué velocidad corre el auto (en mi/h)?

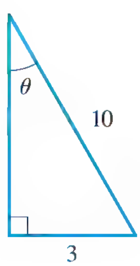
| Velocidad | Relación |
|---|---|
| 1a. | 4.1 |
| 2a. | 3.0 |
| 3a. | 1.6 |
| 4a. | 0.9 |
| 5a. | 0.7 |

**15-16** ■ Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas de $\theta$.

**15.**

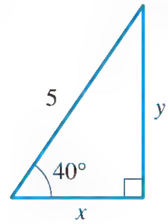



**16.**

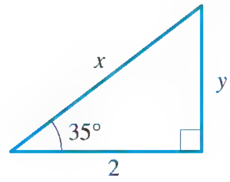



**17-20** ■ Encuentre los lados marcados $x$ y $y$, redondeados a dos lugares decimales.

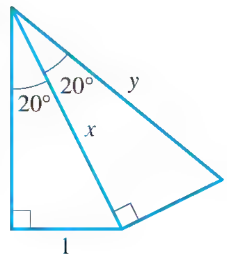
**17.**



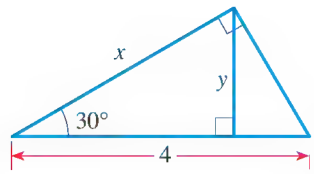

**18.**




**19.**

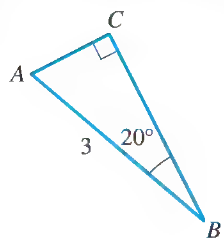



**20.**

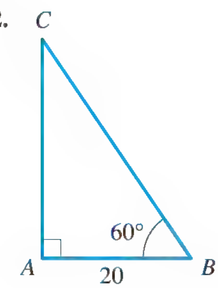



**21-24** ■ Resuelva el triángulo.

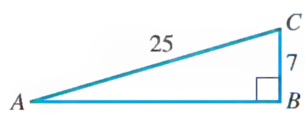
**21.**



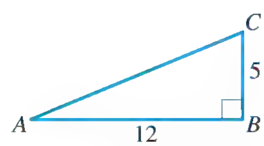

**22.**



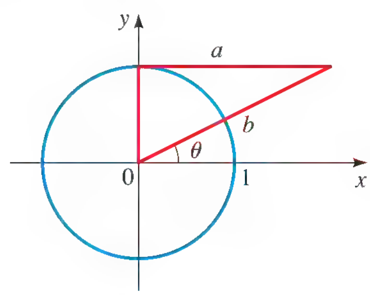

**23.**




**24.**



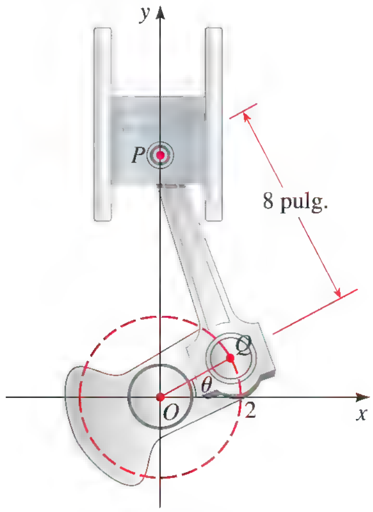

**25.** Exprese las longitudes $a$ y $b$ de la figura en términos de las relaciones trigonométricas de $\theta$.



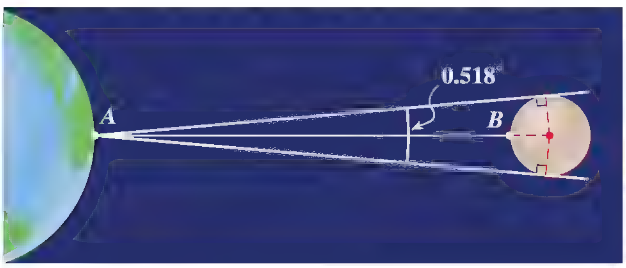

**26.** La torre libre más alta de Norteamérica es la Torre CN de Toronto, Canadá. De 1 km de distancia a su base, el ángulo de elevación a lo alto de la torre es de 28.81°. Encuentre la altura de la torre.

**27.** Encuentre el perímetro de un hexágono regular que está inscrito en un círculo de 8 m de radio.

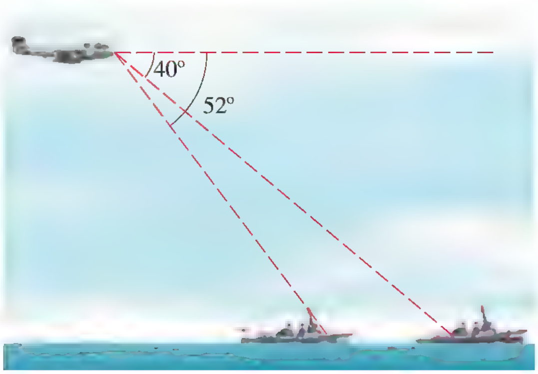
**28.** El pistón del motor de un auto sube y baja repetidamente para hacer girar el cigüeñal, como se ilustra. Encuentre la altura del punto $P$ sobre el centro $O$ del cigüeñal en términos del ángulo $\theta$.




**29.** Como se ve desde la Tierra, el ángulo subtendido por la Luna llena es de 0.518°. Utilice esta información y el dato de que la distancia $AB$ de la Tierra a la Luna es de 236,000 millas para hallar el radio de la Luna.




**30.** Un piloto mide que los ángulos de depresión a dos barcos son 40° y 52° (vea la figura). Si el piloto está volando a una elevación de 35,000 pies, encuentre la distancia entre los dos barcos.




**31-42** ■ Encuentre el valor exacto.

**31.** sen 315°  **32.** $\csc \frac{9\pi}{4}$

**33.** $\tan(-135°)$  **34.** $\cos \frac{5\pi}{6}$

**35.** $\cot\left(-\frac{22\pi}{3}\right)$  **36.** sen 405°

**37.** cos 585°  **38.** $\sec \frac{22\pi}{3}$

**39.** $\csc \frac{8\pi}{3}$  **40.** $\sec \frac{13\pi}{6}$

**41.** $\cot(-390°)$  **42.** $\tan \frac{23\pi}{4}$

**43.** Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas del ángulo $\theta$ en posición normal si el punto $(-5, 12)$ está en el lado terminal de $\theta$.

**44.** Encuentre sen $\theta$ si $\theta$ está en una posición normal y su lado terminal corta la circunferencia de radio 1 con centro en el origen en el punto $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$.

**45.** Encuentre el ángulo agudo que está formado por la recta $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ y el eje $x$.

**46.** Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo $\theta$ en posición normal si su lado terminal está en el tercer cuadrante y es paralelo a la recta $4y - 2x - 1 = 0$.

**47-50** ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda, para $\theta$ en el primer cuadrante.

**47.** $\tan\theta$, $\cos\theta$; $\theta$ en el segundo cuadrante

**48.** $\sec\theta$, sen $\theta$; $\theta$ en el tercer cuadrante

**49.** $\tan^2\theta$, sen $\theta$; $\theta$ en cualquier cuadrante

**50.** $\csc^2\theta \cos^2\theta$, sen $\theta$; $\theta$ en cualquier cuadrante

**51-54** ■ Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de $\theta$ a partir de la información dada.

**51.** $\tan\theta = \sqrt{7}/3$, $\sec\theta = \frac{4}{3}$  **52.** $\sec\theta = \frac{41}{40}$, $\csc\theta = -\frac{41}{9}$

**53.** sen $\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta < 0$  **54.** $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\tan\theta > 0$

**55.** Si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ para $\theta$ en el segundo cuadrante, encuentre sen $\theta$ + cos $\theta$.

**56.** Si sen $\theta = \frac{1}{2}$ para $\theta$ en el primer cuadrante, encuentre tan $\theta$ + sec $\theta$.

**57.** Si $\tan\theta = -1$, encuentre $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

**58.** Si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ y $\pi/1 < \theta < \pi$, encuentre sen $2\theta$.

**59-62** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

**59.** $\text{sen}^{\,1}(\sqrt{3}/2)$  **60.** $\tan^{\,1}(\sqrt{3}/3)$

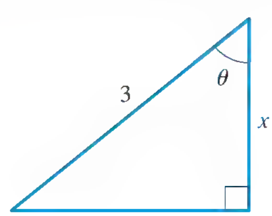
**61.** $\tan(\text{sen}^{\,1}\,\frac{2}{5})$  **62.** $\text{sen}(\cos^{\,1}\,\frac{3}{8})$

**63-64** ■ Reescriba la expresión como una expresión algebraica en $x$.

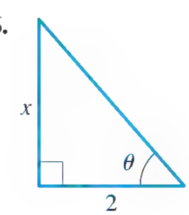
**63.** $\text{sen}(\tan^{\,1} x)$  **64.** $\sec(\text{sen}^{\,1} x)$

**65-66** ■ Exprese $\theta$ en términos de $x$.

**65.**

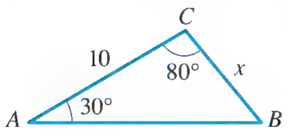



**66.**

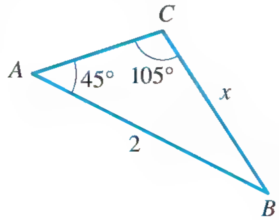


**67-76** ■ Encuentre el lado marcado $x$ o el ángulo marcado $\theta$.

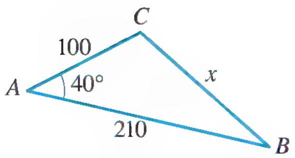
**67.**



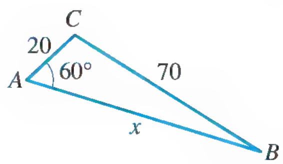

**68.**



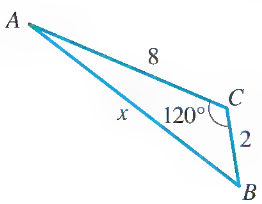

**69.**



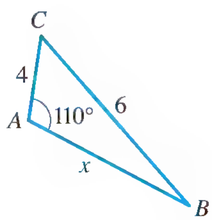

**70.**



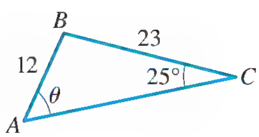

**71.**



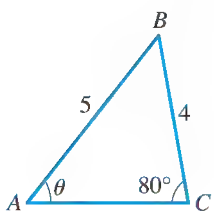

**72.**



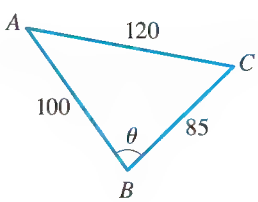

**73.**



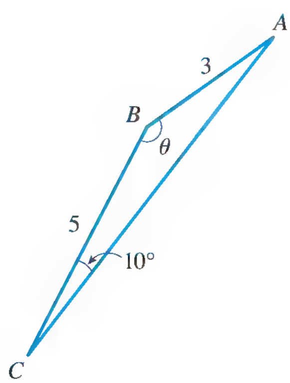

**74.**



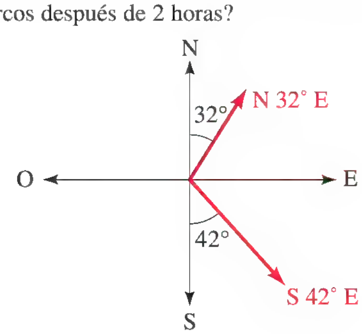

**75.**



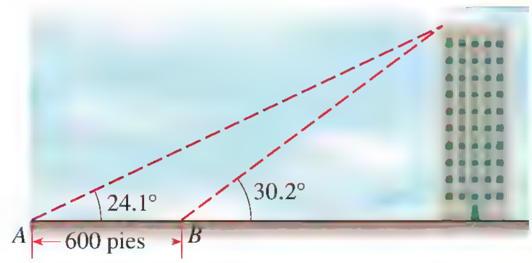

**76.**



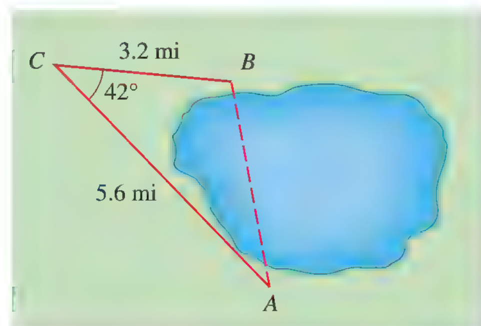

**77.** Dos barcos salen de un puerto al mismo tiempo. Uno de ellos navega a 20 mi/h en dirección N 32° E y, el otro, navega a 28 mi/h en dirección S 42° E (vea la figura). ¿A qué distancia están los dos barcos después de 2 horas?



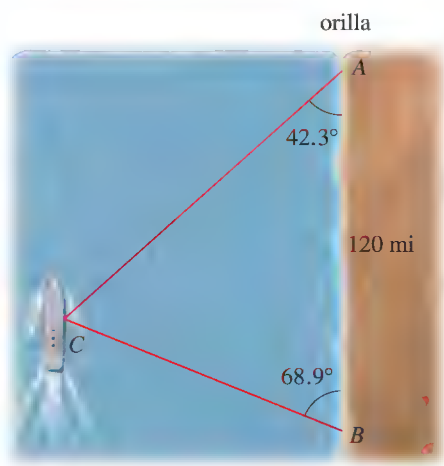

**78.** Del punto $A$ en el suelo, el ángulo de elevación a la parte superior de un edificio elevado es 24.1°. De un punto $B$, que está 600 pies más cercano al edificio, el ángulo de elevación que se mide es de 30.2°. Encuentre la altura del edificio.




**79.** A partir de la información mostrada, encuentre la distancia entre los puntos $A$ y $B$ opuestos de un lago.



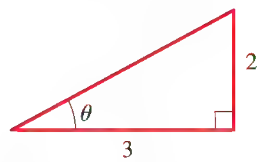

**80.** Un barco está de viaje por el océano frente a una playa recta. Los puntos $A$ y $B$ están a 120 millas uno del otro en la orilla, como se ve en la figura. Se encuentra que $\angle A = 42.3°$ y $\angle B = 68.9°$. Encuentre la distancia más corta del barco a la orilla.



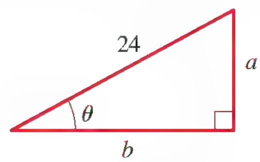

**81.** Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 8 y 14 y ángulo incluido de 35°.

**82.** Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 5, 6 y 8.

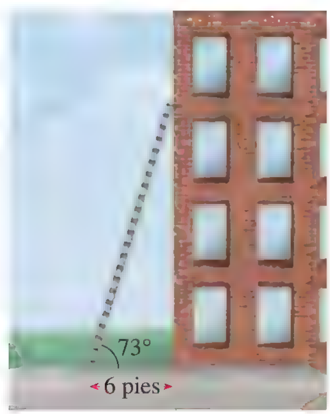
1. Encuentre las medidas en radianes que corresponden a las medidas en grados de 330° y −135°.
2. Encuentre las medidas en grados que corresponden a las medidas en radianes de $\frac{4\pi}{3}$ y $-1.3$.
3. Las paletas del rotor de un helicóptero miden 16 pies de largo y están girando a 120 rpm.
   **(a)** Encuentre la velocidad angular del rotor.
   **(b)** Encuentre la velocidad lineal de un punto situado en la punta de una paleta.
4. Encuentre el valor exacto de cada uno de lo siguiente.
   **(a)** sen 405° **(b)** $\tan(-150°)$ **(c)** $\sec \frac{5\pi}{3}$ **(d)** $\csc \frac{5\pi}{2}$
5. Encuentre $\tan\theta + \operatorname{sen}\theta$ para el ángulo $\theta$ de la figura.



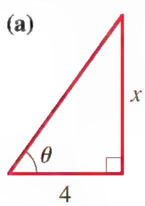

6. Exprese las longitudes $a$ y $b$ mostradas en la figura, en términos de $\theta$.



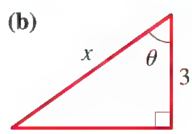

7. Si $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\theta$ está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan\theta\cot\theta + \csc\theta$.
8. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ y $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, encuentre $\sec\theta$.
9. Exprese $\tan\theta$ en términos de $\sec\theta$ para $\theta$ en el segundo cuadrante.
10. La base de la escalera de la figura siguiente está a 6 pies del edificio, y el ángulo formado por la escalera y el suelo es de 73°. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?




11. Exprese $\theta$ en cada figura en términos de $x$.
    **(a)**



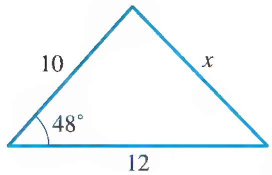

    **(b)**



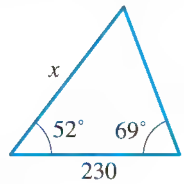

12. Encuentre el valor exacto de $\cos\left(\tan^{-1}\frac{9}{40}\right)$.

**13-18** ■ Encuentre el lado marcado $x$ o el ángulo marcado $\theta$.

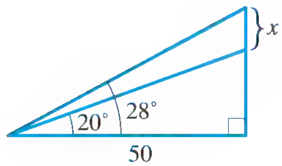
**13.**



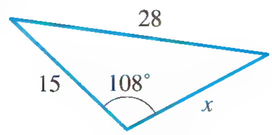

**14.**



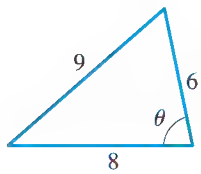

**15.**



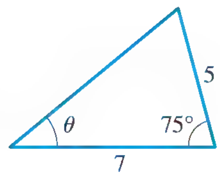

**16.**



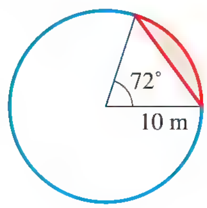

**17.**



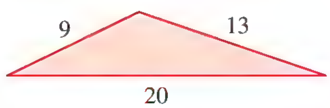

**18.**



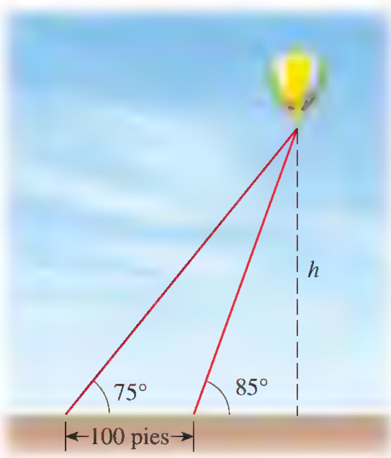

**19.** Consulte la figura siguiente.
**(a)** Encuentre el área de la región sombreada.
**(b)** Encuentre el perímetro de la región sombreada.




**20.** Consulte la figura siguiente.
**(a)** Encuentre el ángulo opuesto al lado más largo.
**(b)** Encuentre el área del triángulo.




**21.** Dos cables sujetan un globo al suelo, como se muestra. ¿A qué altura está el globo respecto al suelo?



# Topografía

¿Cómo podemos medir la altura de una montaña o la distancia de un lado a otro de un lago? Obviamente, puede ser difícil, incómodo o imposible medir estas distancias directamente (es decir, usando una cinta de medir). Por otra parte, puede ser fácil medir *ángulos* en donde intervienen objetos distantes. Aquí es donde la trigonometría entra en acción: las relaciones trigonométricas relacionan ángulos con distancias, de modo que se pueden usar para *calcular* distancias a partir de los ángulos *medidos*. En este *Enfoque* examinamos cómo se usa trigonometría para trazar el mapa de una ciudad. Los modernos métodos de hacer mapas usan satélites y el sistema de posicionamiento global, pero la matemática sigue estando en el centro del proceso.

## ▼ Trazar el mapa de una ciudad

Un estudiante desea trazar un mapa de su ciudad natal. Para construir un mapa preciso (o modelo a escala), necesita hallar distancias entre varios puntos de referencia de la ciudad. El estudiante hace las mediciones que se muestran en la Figura 1. Observe que sólo se mide una distancia, entre el Ayuntamiento y el primer puente. Todas las otras medidas son ángulos.

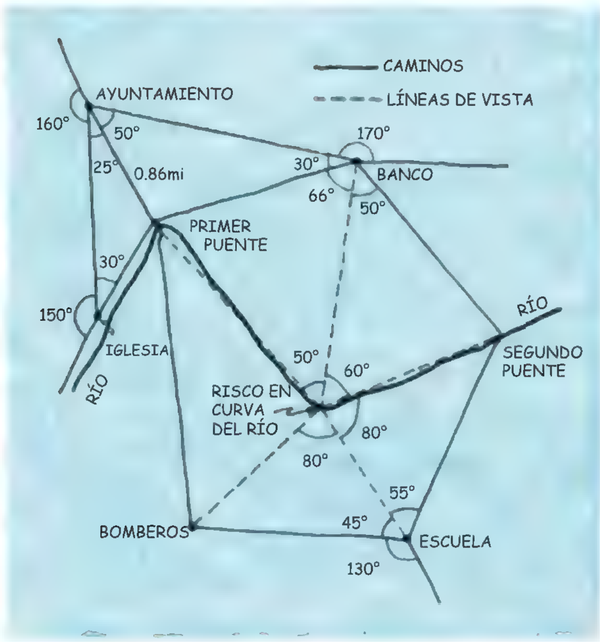



**FIGURA 1**

Las distancias entre otros puntos de referencia se pueden hallar ahora usando la Ley de Senos. Por ejemplo, la distancia $x$ del banco al primer puente se calcula aplicando la Ley de Senos al triángulo con vértices en el Ayuntamiento, el banco y el primer puente:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{0.86}{\operatorname{sen} 30^\circ} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$x = \frac{0.86 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 1.32 \text{ mi} \qquad \text{Calculadora}$$

Por lo tanto, la distancia entre el banco y el primer puente es 1.32 millas.

La distancia que acabamos de encontrar se puede usar ahora para hallar otras distancias. Por ejemplo, hallamos la distancia $y$ entre el banco y el risco como sigue:

$$\frac{y}{\text{sen } 64^\circ} = \frac{1.32}{\text{sen } 50^\circ} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$y = \frac{1.32 \text{ sen } 64^\circ}{\text{sen } 50^\circ} \qquad \text{Despeje } y$$

$$\approx 1.55 \text{ mi} \qquad \text{Calculadora}$$

Si continuamos en esta forma, podemos calcular todas las distancias entre los puntos de interés mostrados en el diagrama aproximado de la Figura 1. Podemos usar esta información para trazar el mapa que se ve en la Figura 2.

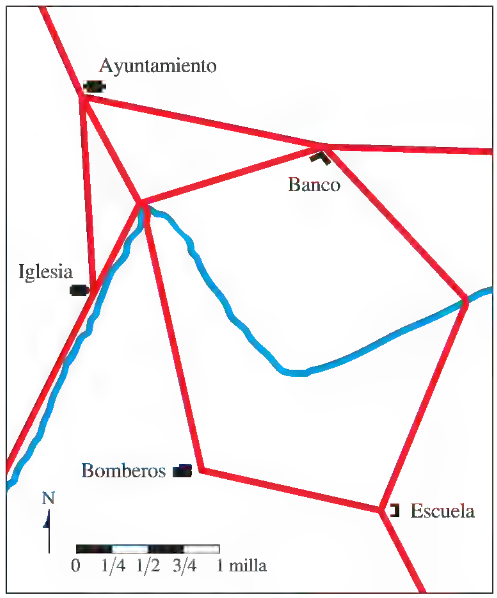
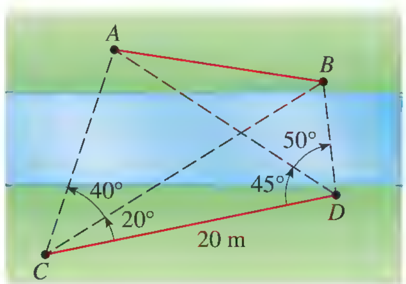


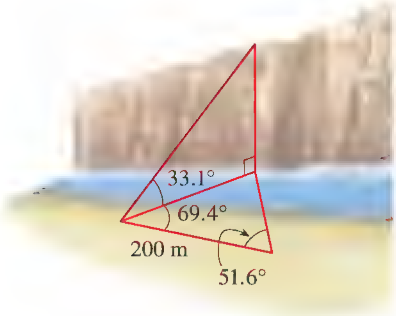

**FIGURA 2**

Para hacer un mapa topográfico, necesitamos medir elevación. Este concepto se explora en los Problemas 4-6.

## PROBLEMAS

1. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la iglesia y el Ayuntamiento.
2. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la estación de bomberos y la escuela. (Primero necesitará hallar otras distancias.)
3. **Determinar una distancia** Una experta en topografía, que se encuentra en un lado de un río, desea hallar la distancia entre los puntos $A$ y $B$ del lado opuesto del río. En el lado de ella, escoge los puntos $C$ y $D$, que están a 20 m entre sí y mide los ángulos mostrados en la figura siguiente. Encuentre la distancia entre $A$ y $B$.






**4. Altura de un risco** Para medir la altura de un peñasco inaccesible en el lado opuesto de un río, un topógrafo hace las mediciones que se ilustran en la figura de la izquierda. Encuentre la altura del risco.

**5. Altura de una montaña** Para calcular la altura $h$ de una montaña, se miden el ángulo $\alpha$, $\beta$ y la distancia $d$, como se ve en la figura siguiente.

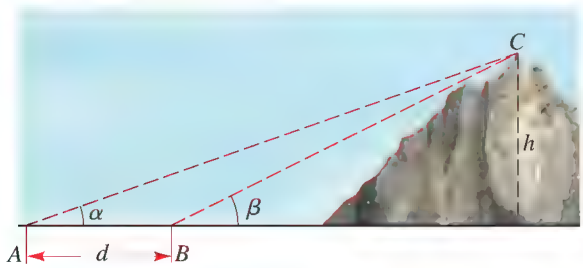
**(a)** Demuestre que

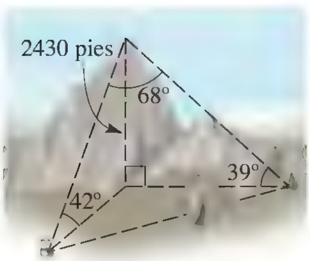
$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

**(b)** Demuestre que

$$h = d\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

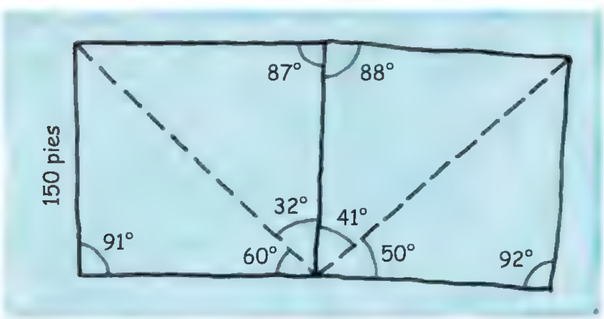
**(c)** Use las fórmulas de los incisos (a) y (b) para hallar la altura de una montaña si $\alpha = 25°$, $\beta = 29°$ y $d = 800$ pies. ¿Obtiene usted la misma respuesta de cada fórmula?




**6. Determinación de una distancia** Un topógrafo ha determinado que una montaña mide 2430 pies de altura. De lo alto de la montaña él mide los ángulos de depresión a dos puntos de referencia en la base de la montaña y encuentra que son de 42° y 39°. (Observe que éstos son los mismos que los ángulos de elevación de los puntos de referencia como se ven en la figura de la izquierda.) El ángulo entre las líneas de vista a los puntos de referencia es de 68°. Calcule la distancia entre los dos puntos de referencia.

**7. Levantamiento topográfico de lotes de edificios** Un topógrafo hace el levantamiento topográfico de dos lotes adyacentes y hace el siguiente bosquejo aproximado que muestra sus mediciones. Calcule todas las distancias mostradas en la figura, y use sus resultados para trazar un mapa preciso de los dos lotes.



8. **Gran Levantamiento Topográfico de la India** El Gran Levantamiento Topográfico de la India fue uno de los más grandes proyectos de trazado de mapas que se hayan realizado (vea nota al margen en la página 472). Haga el lector alguna investigación en su biblioteca o en Internet para aprender más acerca del Levantamiento Topográfico y escriba un informe sobre lo que haya encontrado.

CAPÍTULO 7

# TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA



En los capítulos 5 y 6 estudiamos propiedades gráficas y geométricas de las funciones trigonométricas. En este capítulo estudiamos propiedades algebraicas de estas funciones, es decir, para simplificar y factorizar expresiones y resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas.

Hemos empleado las funciones trigonométricas para modelar diferentes fenómenos reales, incluyendo movimiento periódico (por ejemplo el movimiento de una ola oceánica). Para obtener información de un modelo, con frecuencia necesitamos resolver ecuaciones. Si el modelo contiene funciones trigonométricas, necesitamos resolver ecuaciones trigonométricas. Para resolver ecuaciones trigonométricas a veces se requiere el uso de identidades trigonométricas, algunas de las cuales hemos encontrado en capítulos precedentes. Iniciamos este capítulo con el proceso para hallar nuevas identidades.

# 7.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Simplificación de expresiones trigonométricas ▶ Demostración de identidades trigonométricas

Empezamos por hacer una lista de algunas identidades trigonométricas básicas. Ya estudiamos la mayor parte de éstas en los Capítulos 5 y 6; pedimos al estudiante demuestre las identidades de cofunción en el Ejercicio 102.

**IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES**

**Identidades recíprocas**

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

**Identidades pitagóricas**

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

**Identidades pares e impares**

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

**Identidades de cofunción**

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

## ▼ Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades hacen posible que escribamos la misma expresión en formas diferentes. A veces es posible reescribir una expresión de aspecto complicado como una mucho más sencilla. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos factorización, denominadores comunes y las Fórmulas de Productos Notables. Para simplificar expresiones trigonométricas, usamos estas mismas técnicas junto con las identidades trigonométricas fundamentales.

### EJEMPLO 1 | Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

**SOLUCIÓN** Empezamos por reescribir la expresión en términos de seno y coseno:

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \qquad \text{Común denominador}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \qquad \text{Identidad de Pitágoras}$$

$$= \sec t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

### EJEMPLO 2 | Simplificación por combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

**SOLUCIÓN** Combinamos las fracciones usando un común denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{Común denominador}\\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{Distribuya sen } \theta\\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} && \text{Identidad de Pitágoras}\\
&= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta && \text{Cancele y use identidad recíproca}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## Demostración de identidades trigonométricas

Numerosas identidades se originan en las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen, aprenderemos a demostrar que una ecuación trigonométrica determinada es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

En primer término, es fácil determinar cuándo una ecuación dada *no es* una identidad. Todo lo que es necesario hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algún valor de la variable (o variables). Entonces la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para verificar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un lado de la ecuación en el otro lado mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

### GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Empezar con un lado.** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
2. **Usar identidades conocidas.** Use álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Lleve las expresiones fraccionarias a un denominador común, factorice y use las identidades fundamentales para simplificar expresiones.
3. **Convertir a senos y cosenos.** Si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Advertencia: Para demostrar una identidad, *no sólo* ejecutamos las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, Si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

**(1)** $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos lados, obtenemos la ecuación

**(2)** $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

que es claramente una identidad. ¿Significa esto que la ecuación original es una identidad? Por supuesto que no. El problema aquí es que la operación de elevar al cuadrado **no es re-**

**versible** en el sentido de que no podemos regresar a (1) a partir de (2) al tomar raíces cuadradas (invirtiendo el procedimiento). Sólo las operaciones que son reversibles necesariamente transformarán una identidad en una identidad.

## EJEMPLO 3 | Demostrar una identidad reescribiéndola en términos de seno y coseno

Considere la ecuación $\cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \text{sen}^2\theta$.

(a) Verifique algebraicamente que la ecuación sea una identidad.

(b) Confirme gráficamente que la ecuación es una identidad.

**SOLUCIÓN**

(a) El lado izquierdo (LI) se ve más complicado, de modo que empezamos con él y tratamos de transformarlo en el lado derecho (LD):

$$\begin{aligned} \text{LI} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\ &= 1 - \cos^2\theta && \text{Expandir} \\ &= \text{sen}^2\theta = \text{LD} && \text{Teorema de Pitágoras} \end{aligned}$$

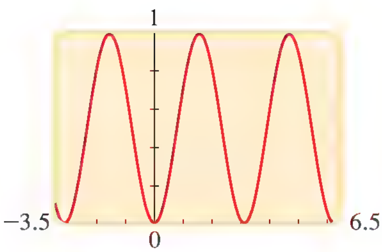



**FIGURA 1**

(b) Graficamos cada lado de la ecuación para ver si la gráfica coincide. De la Figura 1 vemos que las gráficas de $y = \cos\theta(\sec\theta - \cos\theta)$ y $y = \text{sen}^2\theta$ son idénticas. Esto confirma que la ecuación es una identidad.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

En el Ejemplo 3 no es fácil ver cómo cambiar el lado derecho en el lado izquierdo, pero definitivamente es posible. Observe que cada paso es reversible. En otras palabras, si empezamos con la última expresión en la prueba y trabajamos a la inversa por los pasos, el lado derecho se transforma en el lado izquierdo. Es probable que el lector concuerde, sin embargo, en que es más difícil demostrar la identidad de esta manera. Por eso es que a veces es mejor cambiar el lado más complicado de la identidad en el lado más sencillo.

## EJEMPLO 4 | Demostrar una identidad combinando fracciones

Verifique la identidad

$$2\tan x\sec x = \frac{1}{1 \quad \text{sen}\,x} - \frac{1}{1 + \text{sen}\,x}$$

**SOLUCIÓN** Hallando un denominador común y combinando las fracciones del lado derecho de esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{LD} &= \frac{1}{1 - \text{sen}\,x} - \frac{1}{1 + \text{sen}\,x} \\ &= \frac{(1 + \text{sen}\,x) - (1 - \text{sen}\,x)}{(1 - \text{sen}\,x)(1 + \text{sen}\,x)} && \text{Denominador común} \\ &= \frac{2\,\text{sen}\,x}{1 - \text{sen}^2 x} && \text{Simplifique} \\ &= \frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos^2 x} && \text{Identidad de Pitágoras} \\ &= 2\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorice} \\ &= 2\tan x\sec x = \text{LI} && \text{Identidades recíprocas} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 79

Vea el Prólogo: *Principios de Solución de Problemas,* páginas P1-P4.

En el Ejemplo 5 introducimos "algo extra" al problema de multiplicar el numerador y el denominador por una expresión trigonométrica, escogida para que podamos simplificar el resultado.

## EJEMPLO 5 | Demostrar una identidad introduciendo algo extra

Verifique la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

**SOLUCIÓN** Empezamos con el lado izquierdo y multiplicamos el numerador y el denominador por $1 + \operatorname{sen} u$:

$$\text{LI} = \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u}$$

$$= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por } 1 + \operatorname{sen} u$$

$$= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u} \qquad \text{Expanda denominador}$$

$$= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{\cos^2 u} \qquad \text{Identidad de Pitágoras}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} \qquad \text{Cancele factor común}$$

$$= \frac{1}{\cos u} + \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \qquad \text{Separe en dos fracciones}$$

$$= \sec u + \tan u \qquad \text{Identidades recíprocas}$$

Multiplicamos por $1 + \operatorname{sen} u$ porque sabemos por la fórmula de la diferencia de cuadrados que $(1 - \operatorname{sen} u)(1 + \operatorname{sen} u) = 1 - \operatorname{sen}^2 u$, y esto es precisamente $\cos^2 u$, una expresión más sencilla.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

**EUCLIDES** (hacia el año 300 a.C.) impartió clases en Alejandría. Su obra, *Elementos*, es el libro científico de mayor influencia en la historia. Durante 2000 años fue la introducción estándar a la geometría en escuelas, y por muchas generaciones fue considerado la mejor forma de desarrollar el razonamiento lógico. Abraham Lincoln, por ejemplo, estudió los *Elementos* como una forma de agudizar su ingenio. Cuenta la leyenda que el rey Tolomeo preguntó una vez a Euclides si había una forma más rápida de aprender geometría que por los *Elementos*, a lo que Euclides respondió que "no había camino real a la geometría", queriendo decir con ello que las matemáticas no respetan riquezas ni condición social. Euclides fue reverenciado en su propio tiempo y se le conoció como "El geómetra" o "El autor de los *Elementos*". La grandeza de los *Elementos* proviene de su tratamiento preciso, lógico y sistemático de la geometría. Para trabajar con igualdades, Euclides dio las siguientes reglas a las que llamó "nociones comunes".

1. Las cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
2. Si iguales se suman a iguales, las sumas son iguales.
3. Si iguales se restan de iguales, los residuos son iguales.
4. Las cosas que coinciden entre sí son iguales.
5. El todo es mayor que la parte.

A continuación veamos otros métodos para probar que una ecuación es una identidad. Si podemos transformar cada lado de la ecuación *separadamente*, por medio de identidades, para llegar al mismo resultado, entonces la ecuación es una identidad. El Ejemplo 6 ilustra este procedimiento.

## EJEMPLO 6 | Probar una identidad trabajado separadamente con ambos lados

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1}$.

**SOLUCIÓN** Probamos la identidad al cambiar cada lado separadamente en la misma expresión. Dé las razones para cada paso:

$$\text{LI} = \frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\text{LD} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se deduce que LI = LD, de modo que la ecuación es una identidad.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

Concluimos esta sección describiendo la técnica de *sustitución trigonométrica,* que usamos para convertir expresiones algebraicas en trigonométricas. Esto con frecuencia es útil en cálculo, por ejemplo, para hallar el área de un círculo o una elipse.

**EJEMPLO 7 | Sustitución trigonométrica**

Sustituya sen $\theta$ por $x$ en la expresión $\sqrt{1 - x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

**SOLUCIÓN** Haciendo $x = \text{sen}\,\theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} &= \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} && \text{Sustituya } x = \text{sen}\,\theta \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad de Pitágoras} \\ &= \cos\theta && \text{Tome raíz cuadrada} \end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera porque $\cos\theta \geq 0$ para todos los valores de $\theta$ en cuestión.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91** ■

## 7.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Una ecuación se llama identidad si es válida para _____valores de la variable. La ecuación $2x = x + x$ es una identidad algebraica, y la ecuación $\text{sen}^2 x + \cos^2 x =$ ______es una identidad trigonométrica.

2. Para cualquier $x$ es verdadero que $\cos(-x)$ tiene el mismo valor que $\cos x$. Expresamos este hecho como la identidad___________.

### HABILIDADES

**3-12** ■ Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y luego simplifique.

3. $\cos t \tan t$
4. $\cos t \csc t$
5. $\text{sen}\,\theta \sec\theta$
6. $\tan\theta \csc\theta$
7. $\tan^2 x - \sec^2 x$
8. $\dfrac{\sec x}{\csc x}$
9. $\text{sen}\,u + \cot u \cos u$
10. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$
11. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$
12. $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta - \text{sen}\,\theta}$

**13-26** ■ Simplifique la expresión trigonométrica.

13. $\dfrac{\text{sen}\,x \sec x}{\tan x}$
14. $\cos^3 x + \text{sen}^2 x \cos x$
15. $\dfrac{1 + \cos y}{1 + \sec y}$
16. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$
17. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$
18. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$
19. $\dfrac{1 + \csc x}{\cos x + \cot x}$
20. $\dfrac{\text{sen}\,x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$
21. $\dfrac{1 + \text{sen}\,u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + \text{sen}\,u}$
22. $\tan x \cos x \csc x$
23. $\dfrac{2 + \tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$
24. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$
25. $\tan\theta + \cos(-\theta) + \tan(-\theta)$
26. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

**27-28** ■ Considere la ecuación dada. **(a)** Verifique algebraicamente que la ecuación sea una identidad. **(b)** Confirme gráficamente que la ecuación sea una identidad.

27. $\dfrac{\cos x}{\sec x\,\text{sen}\,x} = \csc x - \text{sen}\,x$
28. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$

**29-90** ■ Verifique la identidad.

29. $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\tan\theta} = \cos\theta$
30. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \text{sen}\,x$
31. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$
32. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$
33. $\text{sen}\,B + \cos B \cot B = \csc B$
34. $\cos(-x) - \text{sen}(-x) = \cos x + \text{sen}\,x$
35. $\cot(-\alpha)\cos(-\alpha) + \text{sen}(-\alpha) = -\csc\alpha$
36. $\csc x\,[\csc x + \text{sen}(-x)] = \cot^2 x$
37. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$
38. $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = 1 + 2\,\text{sen}\,x\cos x$
39. $(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta) = \dfrac{1}{\csc^2\beta}$
40. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\text{sen}\,x}{\csc x} = 1$
41. $\dfrac{(\text{sen}\,x + \cos x)^2}{\text{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\text{sen}\,x - \cos x)^2}$
42. $(\text{sen}\,x + \cos x)^4 = (1 + 2\,\text{sen}\,x\cos x)^2$
43. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \text{sen}^2 t$
44. $\dfrac{1 - \text{sen}\,x}{1 + \text{sen}\,x} = (\sec x - \tan x)^2$
45. $\dfrac{1}{1 - \text{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$
46. $\csc x - \text{sen}\,x = \cos x \cot x$
47. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\text{sen}\,x$
48. $\text{sen}^4\theta - \cos^4\theta = \text{sen}^2\theta - \cos^2\theta$
49. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

**50.** $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

**51.** $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

**52.** $(\tan y + \cot y)\operatorname{sen} y \cos y = 1$

**53.** $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$

**54.** $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

**55.** $\tan^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$

**56.** $\cot^2\theta \cos^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$

**57.** $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}$

**58.** $\dfrac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$

**59.** $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t \cos t} = 2 + \sec t \csc t$

**60.** $\sec t \csc t(\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$

**61.** $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$

**62.** $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$

**63.** $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x(\sec x + \tan x)$

**64.** $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

**65.** $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$

**66.** $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$

**67.** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$

**68.** $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2\csc x$

**69.** $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

**70.** $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x$

**71.** $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$

**72.** $\dfrac{\tan v \operatorname{sen} v}{\tan v + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan v - \operatorname{sen} v}{\tan v \operatorname{sen} v}$

**73.** $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$

**74.** $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

**75.** $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \csc\theta}{\cos\theta - \cot\theta}$

**76.** $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

**77.** $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$

**78.** $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 2\sec x \tan x$

**79.** $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x} = 2\sec x$

**80.** $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4\tan x \sec x$

**81.** $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

**82.** $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

**83.** $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

**84.** $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

**85.** $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$

**86.** $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \operatorname{sen} v \cos v$

**87.** $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = (\tan x + \sec x)^2$

**88.** $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

**89.** $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x$

**90.** $(\operatorname{sen}\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha - \cot\alpha) = (\cos\alpha - 1)(\operatorname{sen}\alpha - 1)$

**91-96** ■ Haga la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica dada y simplifique (vea Ejemplo 7). Suponga que $0 \le \theta \le \pi/2$.

**91.** $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \operatorname{sen}\theta$

**92.** $\sqrt{1 + x^2}$, $x = \tan\theta$

**93.** $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec\theta$

**94.** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$, $x = 2\tan\theta$

**95.** $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3\operatorname{sen}\theta$

**96.** $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$, $x = 5\sec\theta$

**97-100** ■ Grafique $f$ y $g$ en el mismo rectángulo de vista. ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Pruebe su respuesta.

**97.** $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

**98.** $f(x) = \tan x(1 + \operatorname{sen} x)$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

**99.** $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$, $g(x) = 1$

**100.** $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$, $g(x) = 2\cos^2 x - 1$

**101.** Demuestre que la ecuación no es una identidad.

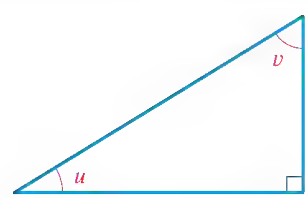
**(a)** $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$ **(b)** $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

**(c)** $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$

**(d)** $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x + \sec x$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**102. Identidades de cofunción** En el triángulo rectángulo que se ilustra, explique por qué $v = (\pi/2) - u$. Explique cómo se pueden obtener las seis identidades de cofunción a partir de este triángulo para $0 < u < \pi/2$.



**103. Gráficas e identidades** Suponga el lector que grafica dos funciones, $f$ y $g$, en una calculadora graficadora y sus gráficas parecen idénticas en el rectángulo de vista. ¿Esto demuestra que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Explique.

**104. Haga su propia identidad** Si empieza con una expresión trigonométrica y la reescribe o la simplifica, entonces hacer la expresión original igual a la expresión reescrita da una identidad trigonométrica. Por ejemplo, del Ejemplo 1 obtenemos la identidad

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \sec t$$

Use esta técnica para hacer su propia identidad y pásela a un compañero de clase para que la verifique.

# 7.2 FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Fórmulas de adición y sustracción ▶ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas ▶ Expresiones de la forma $A \operatorname{sen} x + B \cos x$

## ▼ Fórmulas de adición y sustracción

A continuación derivamos identidades para funciones trigonométricas de sumas y diferencias.

### FÓRMULAS DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

**Fórmulas para seno:**
$$\operatorname{sen}(s + t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s - t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

**Fórmulas para coseno:**
$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$
$$\cos(s - t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

**Fórmulas para tangente:**
$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$
$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

**PRUEBA DE LA FÓRMULA DE ADICIÓN PARA COSENO** Para probar la fórmula $\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$, usamos la Figura 1. En la figura, las distancias $t$, $s + t$ y $-s$ se han marcado en la circunferencia unitaria, empezando en $P_0(1, 0)$ y terminando en $Q_1$, $P_1$ y $Q_0$, respectivamente. Las coordenadas de estos puntos son

$$P_0(1, 0) \qquad Q_0(\cos(-s), \operatorname{sen}(-s))$$
$$P_1(\cos(s + t), \operatorname{sen}(s + t)) \qquad Q_1(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

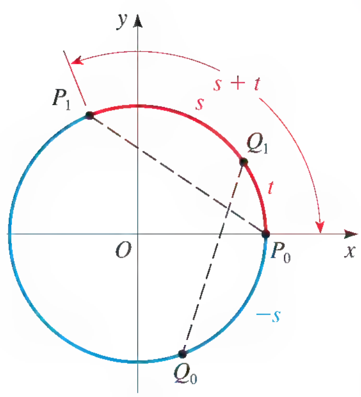



FIGURA 1

Como $\cos(-s) = \cos s$ y $\operatorname{sen}(-s) = -\operatorname{sen} s$, se deduce que el punto $Q_0$ tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\operatorname{sen} s)$. Observe que las distancias entre $P_0$ y $P_1$ y entre $Q_0$ y $Q_1$ medidas a lo largo del arco de la circunferencia son iguales. Como arcos iguales están subtendidos por cuerdas iguales, se concluye que $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Usando la Fórmula de la Distancia, obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s + t) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(s + t) - 0]^2} = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados y expandiendo tendremos

$$\underbrace{\cos^2(s + t) - 2\cos(s + t) + 1 + \operatorname{sen}^2(s + t)}_{\text{La suma es 1 (primer y último término)}}$$
$$= \cos^2 t - 2\cos s \cos t + \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 t + 2 \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 s$$

La suma es 1 ($\cos^2(s+t)$ y $\operatorname{sen}^2(s+t)$) · La suma es 1 ($\cos^2 t$ y $\operatorname{sen}^2 t$) · La suma es 1 ($\cos^2 s$ y $\operatorname{sen}^2 s$)

**JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER** (1768-1830) es responsable de la aplicación más poderosa de las funciones trigonométricas (vea nota al margen en la página 394). Él usó sumas de estas funciones para describir fenómenos físicos como la transmisión de sonido y flujo de calor.

Huérfano desde niño, Fourier fue educado en una escuela militar, donde fue maestro de matemáticas a los 20 años de edad. Posteriormente fue nombrado como profesor en la École Polytechnique pero renunció a este puesto para acompañar a Napoleón en su expedición a Egipto, donde Fourier prestó servicio como gobernador. Después de regresar a Francia, empezó a realizar experimentos sobre el calor. La Academia Francesa se negó a publicar los primeros trabajos de Fourier sobre esta materia porque carecían de rigor. Fourier finalmente llegó a ser Secretario de la Academia y, en este puesto, hizo que se publicaran sus obras en su forma original. Probablemente debido a sus estudios sobre el calor y a sus años en los desiertos de Egipto, Fourier se obsesionó por mantenerse caliente (vestía varias capas de ropas) incluso en verano, y mantenía su cuarto a temperaturas insoportables de tanto calor. Es evidente que estos hábitos recargaron demasiado su corazón y contribuyeron a su muerte a los 62 años de edad.

Usando la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tres veces da

$$2 - 2\cos(s + t) = 2 - 2\cos s \cos t + 2\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Finalmente, restando 2 de cada lado y dividiendo ambos lados entre $-2$, tenemos

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

lo cual demuestra la Fórmula de la Adición para Coseno. ■

**DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA DE SUSTRACCIÓN PARA COSENO** Sustituyendo $t$ con $-t$ en la Fórmula de la Adición para Coseno, obtenemos

$$\begin{aligned} \cos(s - t) &= \cos(s + (-t)) \\ &= \cos s \cos(-t) - \operatorname{sen} s \operatorname{sen}(-t) && \text{Fórmula de la Adición para Coseno} \\ &= \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t && \text{Identidades par-impar} \end{aligned}$$

Esto prueba la Fórmula de la Sustracción para Coseno. ■

Vea los Ejercicios 70 y 71 para pruebas de las otras Fórmulas de la Adición.

## EJEMPLO 1 | Uso de Fórmulas para la Adición y Sustracción

Encuentre el valor exacto de cada expresión.

**(a)** $\cos 75°$ **(b)** $\cos \dfrac{\pi}{12}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Observe que $75° = 45° + 30°$. Como sabemos los valores exactos de seno y coseno en $45°$ y $30°$, usamos la Fórmula de la Adición para Coseno para obtener

$$\begin{aligned} \cos 75° &= \cos(45° + 30°) \\ &= \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

**(b)** Como $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, la Fórmula de la Sustracción para Coseno da

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **9** ■

## EJEMPLO 2 | Uso de la Fórmula de la Adición para Seno

Encuentre el valor exacto de la expresión $\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40°$.

**SOLUCIÓN** Reconocemos la expresión como el lado derecho de la Fórmula de la Adición para Seno con $s = 20°$ y $t = 40°$. Tenemos entonces

$$\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen}(20° + 40°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15** ■

## EJEMPLO 3 | Demostrar una identidad de cofunción

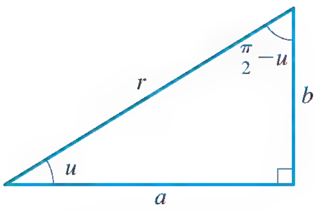
Demuestre la identidad de cofunción $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \text{sen } u$.

**SOLUCIÓN** Por la Fórmula de la Sustracción para Coseno, tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \quad u\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \text{sen}\frac{\pi}{2}\,\text{sen } u$$

$$= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \text{sen } u = \text{sen } u$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**



$\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \frac{b}{r} = \text{sen } u$

La identidad de cofunción del Ejemplo 3, así como las otras identidades de cofunción, también se pueden derivar de la figura del margen.

## EJEMPLO 4 | Probar una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 \quad \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

**SOLUCIÓN** Empezando con el lado derecho y usando la Fórmula de la Adición para Tangente, obtenemos

$$\text{LD} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{LI}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

El siguiente ejemplo es un uso típico de las Fórmulas de la Adición y Sustracción en cálculo.

## EJEMPLO 5 | Una identidad de cálculo

Si $f(x) = \text{sen } x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{sen } x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\text{sen } h}{h}\right)$$

**SOLUCIÓN**

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \qquad \text{Definición de } f$$

$$= \frac{\text{sen } x\cos h + \cos x\,\text{sen } h - \text{sen } x}{h} \qquad \text{Fórmula de la Adición para Seno}$$

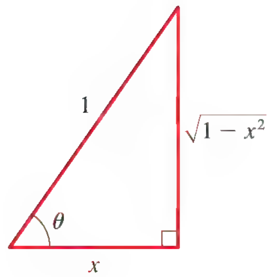
$$= \frac{\text{sen } x\,(\cos h - 1) + \cos x\,\text{sen } h}{h} \qquad \text{Factorice}$$

$$= \text{sen } x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\text{sen } h}{h}\right) \qquad \text{Separe la fracción}$$

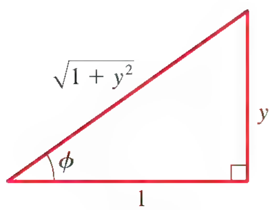
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

## Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Las expresiones que contienen funciones trigonométricas y sus inversas aparecen en cálculo. En los siguientes ejemplos ilustramos cómo evaluar estas expresiones.




$\cos\theta = x$




$\tan\phi = y$

**FIGURA 2**

## EJEMPLO 6 | Simplificación de una expresión que contiene funciones trigonométricas inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x + \tan^{-1}y)$ como una expresión en $x$ y $y$, donde $-1 \le x \le 1$ y $y$ es cualquier número real.

**SOLUCIÓN** Sea $\theta = \cos^{-1}x$ y $\phi = \tan^{-1}y$. Usando los métodos de la Sección 6.4, trazamos triángulos con ángulos $\theta$ y $\phi$ tales que $\cos\theta = x$ y $\tan\phi = y$ (vea Figura 2). De los triángulos, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - x^2} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

De la Fórmula de la Adición para Seno tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\cos^{-1}x + \tan^{-1}y) &= \operatorname{sen}(\theta + \phi) \\
&= \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi && \text{Fórmula de la Adición para Seno} \\
&= \sqrt{1 - x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} + x\,\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} && \text{De los triángulos} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\left(\sqrt{1 - x^2} + xy\right) && \text{Factorice } \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47**

## EJEMPLO 7 | Evaluación de una expresión que contenga funciones trigonométricas

Evalúe $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$, donde $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$ con $\theta$ en el segundo cuadrante y $\tan\phi = \frac{3}{4}$ con $\phi$ en el tercer cuadrante.

**SOLUCIÓN** Primero trazamos los ángulos $\theta$ y $\phi$ en posición normal con lados terminales en los cuadrantes apropiados como en la Figura 3. Como $\operatorname{sen}\theta = y/r = \frac{12}{13}$, podemos marcar un lado y la hipotenusa del triángulo de la Figura 3(a). Para hallar el lado restante, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\
x^2 + 12^2 &= 13^2 && y = 12, \quad r = 13 \\
x^2 &= 25 && \text{Despeje } x^2 \\
x &= -5 && \text{Porque } x < 0
\end{aligned}$$

Análogamente, como $\tan\phi = y/x = \frac{3}{4}$, podemos marcar dos lados del triángulo de la Figura 3(b) y entonces usar el Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa.

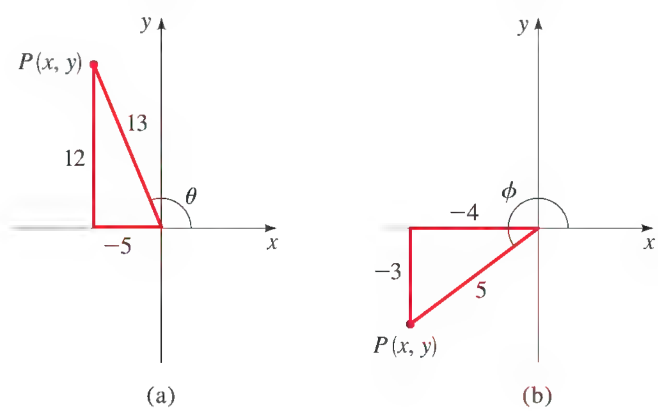



**FIGURA 3**

A continuación, para hallar sen($\theta + \phi$), usamos la Fórmula de la Adición para Seno y los triángulos de la Figura 3:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta + \phi) &= \text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi && \text{Fórmula de la Adición} \\ &= \left(\tfrac{12}{13}\right)\left(-\tfrac{4}{5}\right) + \left(-\tfrac{5}{13}\right)\left(-\tfrac{3}{5}\right) && \text{De los triángulos} \\ &= -\tfrac{33}{65} && \text{Calcule} \end{aligned}$$

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **51**

## Expresiones de la forma $A$ sen $x$ + $B$ cos $x$

Podemos escribir expresiones de la forma $A$ sen $x + B$ cos $x$ en términos de una sola función trigonométrica usando la Fórmula de la Adición para Seno. Por ejemplo, considere la expresión

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

Si hacemos $\phi = \pi/3$, entonces $\cos\phi = \frac{1}{2}$ y sen $\phi = \sqrt{3}/2$, y podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x &= \cos\phi\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,\phi\cos x \\ &= \text{sen}(x + \phi) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Podemos hacer esto porque los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}/2$ son precisamente el coseno y el seno de un número particular, en este caso, $\pi/3$. Podemos usar esta misma idea en general para escribir $A$ sen $x + B$ cos $x$ en la forma $k$ sen($x + \phi$). Empezamos por multiplicar el numerador y denominador por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para obtener

$$A\,\text{sen}\,x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,\text{sen}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos x\right)$$

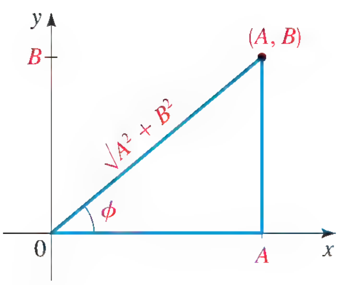



**FIGURA 4**

Necesitamos un número $\phi$ con la propiedad de que

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La Figura 4 muestra que el punto ($A$, $B$) en el plano determina un número $\phi$ con precisamente esta propiedad. Con esta $\phi$ tenemos

$$\begin{aligned} A\,\text{sen}\,x + B\cos x &= \sqrt{A^2 + B^2}(\cos\phi\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,\phi\cos x) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\,\text{sen}(x + \phi) \end{aligned}$$

Hemos probado el siguiente teorema.

### SUMAS DE SENOS Y COSENOS

Si $A$ y $B$ son números reales, entonces

$$A\,\text{sen}\,x + B\cos x = k\,\text{sen}(x + \phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\phi$ satisfacen

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## EJEMPLO 8 | Una suma de términos seno y coseno

Exprese 3 sen $x$ + 4 cos $x$ en la forma $k$ sen($x + \phi$).

**SOLUCIÓN** Por el teorema precedente $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. El ángulo $\phi$ tiene la propiedad de que sen $\phi = \frac{4}{5}$ y cos $\phi = \frac{3}{5}$. Usando calculadora, encontramos $\phi \approx 53.1°$. Entonces

$$3 \text{ sen } x + 4 \cos x \approx 5 \text{ sen}(x + 53.1°)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

## EJEMPLO 9 | Graficar una función trigonométrica

Escriba la función $f(x) = -\text{sen } 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ en la forma $k$ sen($2x + \phi$), y use la nueva forma para graficar la función.

**SOLUCIÓN** Como $A = -1$ y $B = \sqrt{3}$, tenemos $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$. El ángulo $\phi$ satisface cos $\phi = -\frac{1}{2}$ y sen $\phi = \sqrt{3}/2$. De los signos de estas cantidades concluimos que $\phi$ está en el segundo cuadrante. Por lo tanto, $\phi = 2\pi/3$. Por el teorema precedente podemos escribir

$$f(x) = -\text{sen } 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \text{ sen}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Usando la forma

$$f(x) = 2 \text{ sen } 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

vemos que la gráfica es una curva seno con amplitud 2, período $2\pi/2 = \pi$, y desfase $-\pi/3$. La gráfica se muestra en la Figura 5.

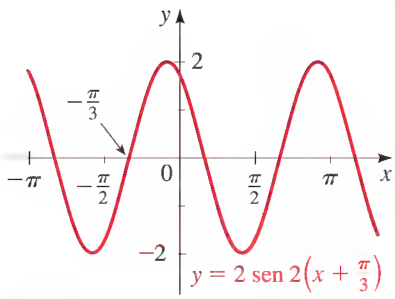



**FIGURA 5**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

# 7.2 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Si sabemos los valores del seno y coseno de $x$ y $y$, podemos hallar el valor de sen($x + y$) si usamos la Fórmula _______ para Seno. Exprese la fórmula: sen($x + y$) = _____________.

2. Si sabemos los valores del seno y coseno de $x$ y $y$, podemos hallar el valor de cos($x - y$) si usamos la Fórmula _______ para Coseno. Exprese la fórmula: cos($x - y$) = _____________.

## HABILIDADES

**3-14** ■ Use una Fórmula de la Adición o Sustracción para hallar el valor exacto de la expresión, como se demuestra en el Ejemplo 1.

**3.** sen 75° **4.** sen 15°

**5.** cos 105° **6.** cos 195°

**7.** tan 15° **8.** tan 165°

**9.** $\text{sen } \frac{19\pi}{12}$ **10.** $\cos \frac{17\pi}{12}$

**11.** $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **12.** $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

**13.** $\cos \frac{11\pi}{12}$ **14.** $\tan \frac{7\pi}{12}$

**15-20** ■ Use una Fórmula de la Adición o Sustracción para escribir la expresión como una función trigonométrica de un número, y luego encuentre su valor exacto.

**15.** sen 18° cos 27° + cos 18° sen 27°

**16.** cos 10° cos 80° − sen 10° sen 80°

**17.** $\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{21} + \text{sen } \frac{3\pi}{7} \text{ sen } \frac{2\pi}{21}$

**18.** $\dfrac{\tan \frac{\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{9}}{1 - \tan \frac{\pi}{18} \tan \frac{\pi}{9}}$

**19.** $\dfrac{\tan 73° - \tan 13°}{1 + \tan 73° \tan 13°}$

**20.** $\cos \dfrac{13\pi}{15} \cos\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen} \dfrac{13\pi}{15} \operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$

**21-24** ■ Pruebe la identidad de cofunción usando las Fórmulas de la Adición y Sustracción.

**21.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$ **22.** $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

**23.** $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$ **24.** $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

**25–42** ■ Pruebe la identidad.

**25.** $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

**26.** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

**27.** $\operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x$ **28.** $\cos(x - \pi) = -\cos x$

**29.** $\tan(x - \pi) = \tan x$

**30.** $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

**31.** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

**32.** $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

**33.** $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \cos x \operatorname{sen} y$

**34.** $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$

**35.** $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

**36.** $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

**37.** $\tan x - \tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

**38.** $1 - \tan x \tan y = \dfrac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$

**39.** $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan y$

**40.** $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

**41.** $\operatorname{sen}(x + y + z) = \operatorname{sen} x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

**42.** $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

**43-46** ■ Escriba la expresión dada en términos de $x$ y $y$ solamente.

**43.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x - \tan^{-1} y)$ **44.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$

**45.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x - \tan^{-1} y)$ **46.** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$

**47-50** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

**47.** $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} 1)$ **48.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \cot^{-1} \sqrt{3})$

**49.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{4} - \cos^{-1} \frac{1}{3})$ **50.** $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{2}{3} - \tan^{-1} \frac{1}{2})$

**51-54** ■ Evalúe cada expresión bajo las condiciones dadas.

**51.** $\cos(\theta - \phi)$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\theta$ en el cuarto cuadrante, $\tan \phi = -\sqrt{3}$, $\phi$ en el segundo cuadrante.

**52.** $\operatorname{sen}(\theta - \phi)$; $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\theta$ en el tercer cuadrante, $\operatorname{sen} \phi = -\sqrt{10}/10$, $\phi$ en el cuarto cuadrante.

**53.** $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$; $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}$, $\theta$ en el primer cuadrante, $\cos \phi = -2\sqrt{5}/5$, $\phi$ en el segundo cuadrante.

**54.** $\tan(\theta + \phi)$; $\cos \theta = -\frac{1}{3}$, $\theta$ en el tercer cuadrante, $\operatorname{sen} \phi = \frac{1}{4}$, $\phi$ en el segundo cuadrante.

**55-58** ■ Escriba la expresión en términos de seno solamente.

**55.** $-\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$ **56.** $\operatorname{sen} x + \cos x$

**57.** $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$ **58.** $3 \operatorname{sen} \pi x + 3\sqrt{3} \cos \pi x$

**59-60** ■ **(a)** Exprese la función en términos de seno solamente. **(b)** Grafique la función.

**59.** $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$ **60.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

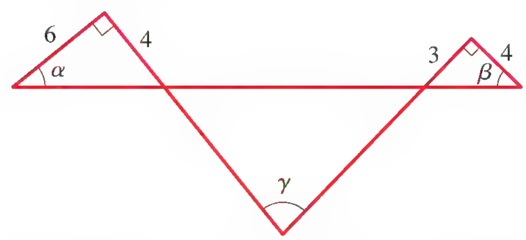
**61.** Sea $g(x) = \cos x$. Demuestre que

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\cos x \left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \operatorname{sen} x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

**62.** Demuestre que si $\beta - \alpha = \pi/2$, entonces

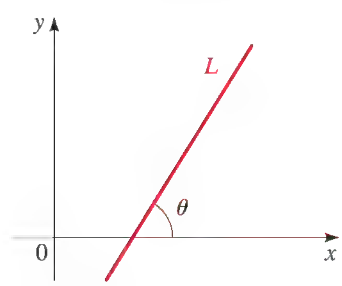
$$\operatorname{sen}(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0$$

**63.** Consulte la figura. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$, y encuentre $\tan \gamma$.



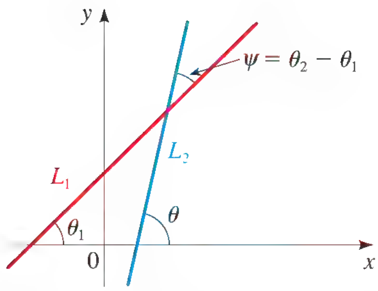

**64.** **(a)** Si $L$ es una recta en el plano y $\theta$ es el ángulo formado por la recta y el eje $x$ como se ve en la figura, demuestre que la pendiente $m$ de la recta está dada por

$$m = \tan \theta$$




**(b)** Sean $L_1$ y $L_2$ dos rectas no paralelas en el plano con pendientes $m_1$ y $m_2$, respectivamente. Sea $\psi$ el ángulo agudo formado por las dos rectas (vea la siguiente figura). Demuestre que

$$\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$




**(c)** Encuentre el ángulo agudo formado por las dos rectas

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1 \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{1}{2}x - 3$$

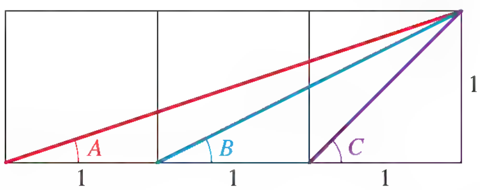
**(d)** Demuestre que si dos rectas son perpendiculares, entonces la pendiente de una es la recíproca negativa de la pendiente de la otra. [*Sugerencia:* Primero encuentre una expresión para cot $\psi$.]

**65-66** ■ **(a)** Grafique la función y haga una conjetura, entonces **(b)** pruebe que su conjetura es verdadera.

**65.** $y = \operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**66.** $y = -\tfrac{1}{2}[\cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)]$

**67.** Encuentre $\angle A + \angle B + \angle C$ en la figura. [*Sugerencia:* Primero use una fórmula de la adición para hallar $(A + B)$.]




## APLICACIONES

**68. Sumar un eco** Un aparato digital de retardo hace eco de una señal de entrada al repetirla en un tiempo fijo después de recibida. Si ese aparato recibe la nota pura $f_1(t) = 5 \operatorname{sen} t$ y hace eco de la nota pura $f_2(t) = 5 \cos t$, entonces el sonido combinado es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

**(a)** Grafique $y = f(t)$ y observe que la gráfica tiene la forma de una curva sinusoidal $y = k \operatorname{sen}(t + \phi)$.

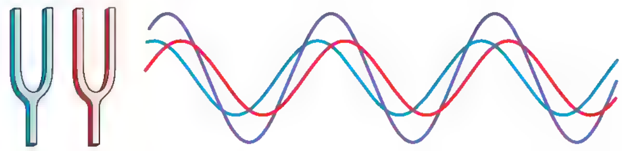
**(b)** Encuentre $k$ y $\phi$.

**69. Interferencia** Se pulsan dos diapasones idénticos, uno de ellos una fracción de segundo después que el otro. Los sonidos producidos están modelados por $f(t) = C \operatorname{sen} \omega t$ y $f2(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Las dos ondas sonoras se interfieren y producen una señal de sonido modelada por la suma de estas funciones

$$f(t) = C \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

**(a)** Use la Fórmula de la Adición para Seno para demostrar que $f$ puede escribirse en la forma $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$, donde $A$ y $B$ son constantes que dependen de $\alpha$.

**(b)** Suponga que $C = 10$ y $\alpha = \pi/3$. Encuentre las constantes $k$ y $\phi$ para que $f(t) = k \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**70. Fórmula de la Adición para Seno** En el texto probamos sólo las Fórmulas para la Adición y Sustracción para Coseno. Use estas fórmulas y las identidades de cofunción

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para probar la Fórmula de la Adición para Seno. [*Sugerencia:* Para empezar, use la primera identidad de cofunción para escribir

$$\operatorname{sen}(s + t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)$$

y use la Fórmula de Sustracción para Coseno.]

**71. Fórmula de la Adición para Tangente** Use las Fórmulas de la Adición para Coseno y Seno para probar la Fórmula de la Adición para Tangente. [*Sugerencia*: Use

$$\tan(s + t) = \frac{\operatorname{sen}(s + t)}{\cos(s + t)}$$

y divida el numerador y denominador entre cos $s$ cos $t$.]

# 7.3 FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE, SEMIÁNGULO Y PRODUCTO A SUMA

Fórmulas de ángulo doble ▶ Fórmulas de semiángulo ▶ Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas ▶ Fórmulas de producto a suma

Las identidades que consideramos en esta sección son consecuencia de las fórmulas de la adición. Las **Fórmulas de ángulo doble** nos permiten hallar los valores de las funciones trigonométricas en $2x$ desde sus valores en $x$. Las **Fórmulas de semiángulo** relacionan los valores de las funciones trigonométricas en $\tfrac{1}{2}x$ con sus valores en $x$. Las **Fórmulas de producto a suma** relacionan productos de senos y cosenos con sumas de senos y cosenos.

## Fórmulas de ángulo doble

Las fórmulas del cuadro siguiente son consecuencias inmediatas de las fórmulas de la adición, que probamos en la sección precedente.

### FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

**Fórmula para seno:** $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

**Fórmula para coseno:**
$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

**Fórmula para tangente:** $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Aquí se dan las pruebas para las fórmulas para coseno. Pedimos al estudiante pruebe las fórmulas restantes en los Ejercicios 35 y 36.

**PRUEBA DE FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE PARA COSENO**

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Las fórmulas segunda y tercera para $\cos 2x$ se obtienen de la fórmula que acabamos de probar y de la identidad de Pitágoras. Sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ da

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

La tercera fórmula se obtiene en la misma forma, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. ■

## EJEMPLO 1 | Uso de las fórmulas de ángulo doble

Si $\cos x = -\frac{2}{3}$ y $x$ está en el segundo cuadrante, encuentre $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$.

**SOLUCIÓN** Usando una de las Fórmulas de Ángulo Doble para Coseno, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

Para usar la fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, primero necesitamos hallar $\operatorname{sen} x$. Tenemos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

donde hemos usado la raíz cuadrada positiva porque $\operatorname{sen} x$ es positivo en el segundo cuadrante. Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

### EJEMPLO 2 | Una fórmula de ángulo triple

Escriba $\cos 3x$ en términos de $\cos x$.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x && \text{Fórmula de la adición} \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2 \operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x && \text{Fórmulas de Ángulo Doble} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x && \text{Expanda} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x && \text{Expanda} \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x && \text{Simplifique}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **101**

El Ejemplo 2 muestra que $\cos 3x$ se puede escribir como un polinomio de grado 3 en $\cos x$. La identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ muestra que $\cos 2x$ es un polinomio de grado 2 en $\cos x$. De hecho, para cualquier número natural $n$, podemos escribir $\cos nx$ como un polinomio en $\cos x$ de grado $n$ (vea la nota que sigue al Ejercicio 101). El resultado análogo para $\operatorname{sen} nx$ no es verdadero en general.

### EJEMPLO 3 | Demostración de una identidad

Pruebe la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 4\cos x - \sec x$.

**SOLUCIÓN** Empezamos con el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(x + 2x)}{\operatorname{sen} x \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmula de la Adición} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmulas de Ángulo Doble} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos x(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fracción separada} \\
&= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Cancele} \\
&= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Fracción separada} \\
&= 4\cos x - \sec x && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

## Fórmulas de semiángulo

Las siguientes fórmulas nos permiten escribir cualquier expresión trigonométrica que contiene potencias pares de seno y coseno en términos de la primera potencia de coseno solamente. Esta técnica es importante en cálculo. Las Fórmulas de Semiángulo son inmediatas consecuencias de estas fórmulas.

**FÓRMULAS PARA BAJAR POTENCIAS**

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

**DEMOSTRACIÓN** La primera fórmula se obtiene al despejar $\operatorname{sen}^2 x$ en la fórmula de doble ángulo $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. Análogamente, la segunda fórmula se obtiene al despejar $\cos^2 x$ en la Fórmula de Doble Ángulo $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula se deduce de las primeras dos y de las identidades recíprocas:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

## EJEMPLO 4 | Bajar potencias en una expresión trigonométrica

Expresar $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia de coseno.

**SOLUCIÓN** Usamos las fórmulas para bajar potencias repetidamente:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

Otra forma de obtener esta identidad es usar la Fórmula de Ángulo Doble para Seno en la forma $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

**FÓRMULAS DE SEMIÁNGULO**

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La opción del signo + o − depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

**DEMOSTRACIÓN** Sustituimos $x = u/2$ en las fórmulas para bajar potencias y tomar la raíz cuadrada de cada lado. Esto da las primeras dos Fórmulas de Semiángulo. En el caso de la Fórmula de Semiángulo para Tangente obtenemos

$$\tan\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)\left(\frac{1-\cos u}{1-\cos u}\right)} \qquad \text{Multiplicar numerador y denominador por } 1-\cos u$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{1-\cos^2 u}} \qquad \text{Simplificar}$$

$$= \pm\frac{|1-\cos u|}{|\text{sen}\, u|} \qquad \sqrt{A^2} = |A| \text{ y } 1-\cos^2 u = \text{sen}^2 u$$

Ahora, $1 - \cos u$ es no negativo para todos los valores de $u$. También es cierto que sen $u$ y $\tan(u/2)$ siempre tienen el mismo signo. (Verifique esto.) Se deduce que

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\text{sen}\, u}$$

La otra Fórmula de Semiángulo para Tangente se deriva de esto al multiplicar el numerador y denominador por $1 + \cos u$. ■

## EJEMPLO 5 | Uso de una fórmula de semiángulo

Encuentre el valor exacto de sen 22.5°.

**SOLUCIÓN** Como 22.5° es la mitad de 45°, usamos la Fórmula de Semiángulo para Seno con $u = 45°$. Escogemos el signo + porque 22.5° está en el primer cuadrante:

$$\text{sen}\,\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} \qquad \text{Fórmula de Semiángulo}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} \qquad \cos 45° = \sqrt{2}/2$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \qquad \text{Común denominador}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} \qquad \text{Simplifique}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17** ■

## EJEMPLO 6 | Uso de una Fórmula de Semiángulo

Encuentre $\tan(u/2)$ si sen $u = \frac{2}{5}$ y $u$ está en el segundo cuadrante.

**SOLUCIÓN** Para usar la Fórmula de Semiángulo para Tangente, primero necesitamos hallar $\cos u$. Como el coseno es negativo en el segundo cuadrante, tenemos

$$\cos u = -\sqrt{1-\text{sen}^2 u}$$

$$= -\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Por lo tanto,

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\text{sen}\, u}$$

$$= \frac{1+\sqrt{21}/5}{\frac{2}{5}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37** ■

## Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Expresiones que contienen funciones trigonométricas y sus inversas aparecen en cálculo. En los siguientes ejemplos ilustramos la forma de evaluar estas expresiones.

**EJEMPLO 7 | Simplificación de una expresión que contenga una función trigonométrica**

Escriba $\text{sen}(2\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en $x$ solamente, donde $-1 \le x \le 1$.

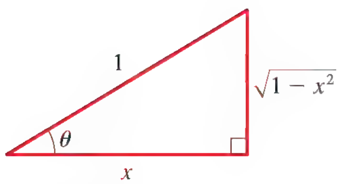



**FIGURA 1**

**SOLUCIÓN** Sea $\theta = \cos^{-1}x$, y trace un triángulo como en la Figura 1. Necesitamos hallar sen $2\theta$, pero del triángulo sólo podemos hallar funciones trigonométricas de $\theta$, no de $2\theta$. Por lo tanto, usamos la Fórmula de Ángulo Doble para Seno.

$$\begin{aligned} \text{sen}(2\cos^{-1}x) &= \text{sen}\, 2\theta && \cos^{-1}x = \theta \\ &= 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta && \text{Fórmula de Ángulo Doble} \\ &= 2x\sqrt{1-x^2} && \text{Del triángulo} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47**

**EJEMPLO 8 | Evaluación de una expresión que contenga funciones trigonométricas inversas**

Evalúe sen $2\theta$, donde $\cos\theta = -\frac{2}{5}$ con $\theta$ en el segundo cuadrante.

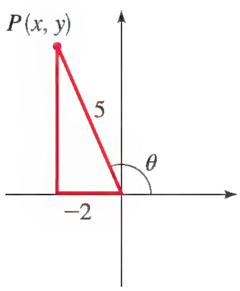



**FIGURA 2**

**SOLUCIÓN** Primero trazamos el ángulo $\theta$ en posición normal con el lado terminal en el segundo cuadrante, como en la Figura 2. Como $\cos\theta = x/r = -\frac{2}{5}$, podemos marcar un lado y la hipotenusa del triángulo en la Figura 2. Para hallar el lado restante, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 && \text{Teorema de Pitágoras} \\ (-2)^2 + y^2 &= 5^2 && x = -2, \quad r = 5 \\ y &= \pm\sqrt{21} && \text{Despeje } y \\ y &= +\sqrt{21} && \text{Porque } y > 0 \end{aligned}$$

Ahora potemos usar la Fórmula de Ángulo Doble para Seno:

$$\begin{aligned} \text{sen}\, 2\theta &= 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta && \text{Fórmula de Ángulo Doble} \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) && \text{Del triángulo} \\ &= -\frac{4\sqrt{21}}{25} && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

## Fórmulas de producto a suma

Es posible escribir el producto sen $u$ cos $v$ como una suma de funciones trigonométricas. Para ver esto, considere las fórmulas de adición y sustracción para la función seno:

$$\text{sen}(u+v) = \text{sen}\, u\cos v + \cos u\,\text{sen}\, v$$

$$\text{sen}(u-v) = \text{sen}\, u\cos v - \cos u\,\text{sen}\, v$$

Sumando los lados izquierdo y derecho de estas fórmulas dará

$$\text{sen}(u+v) + \text{sen}(u-v) = 2\,\text{sen}\, u\cos v$$

Dividiendo entre 2 resulta la fórmula

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

Las otras tres **Fórmulas de producto a suma** se deducen de las fórmulas de la adición en una forma semejante.

**FÓRMULAS DE PRODUCTO A SUMA**

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$$

$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$$

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$$

## EJEMPLO 9 | Expresar un producto trigonométrico como una suma

Exprese sen $3x$ sen $5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

**SOLUCIÓN** Usando la cuarta Fórmula de Producto a Suma con $u = 3x$ y $v = 5x$ y el hecho de que coseno es una función par, obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x &= \tfrac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)] \\ &= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x \\ &= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

Las Fórmulas de Producto a Suma también se pueden usar como Fórmulas de Suma a Producto. Esto es posible porque el lado derecho de cada Fórmula de Producto a Suma es una suma y el lado izquierdo es un producto. Por ejemplo, si hacemos

$$u = \frac{x + y}{2} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{x - y}{2}$$

en la primera Fórmula de Producto a Suma, obtenemos

$$\operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)$$

y entonces

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

Las tres restantes de las siguientes **Fórmulas de Suma a Producto** se obtienen de una manera semejante.

**FÓRMULAS DE SUMA A PRODUCTO**

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$$

## EJEMPLO 10 | Expresar una suma trigonométrica como producto

Escriba sen $7x$ + sen $3x$ como producto.

**SOLUCIÓN** La primera Fórmula de Suma a Producto da

$$\text{sen } 7x + \text{sen } 3x = 2 \text{ sen } \frac{7x + 3x}{2} \cos \frac{7x - 3x}{2}$$

$$= 2 \text{ sen } 5x \cos 2x$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **61**

## EJEMPLO 11 | Probar una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{\text{sen } 3x - \text{sen } x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$.

**SOLUCIÓN** Aplicamos la segunda Fórmula de Suma a Producto al numerador y la tercera fórmula al denominador:

$$\text{LI} = \frac{\text{sen } 3x - \text{sen } x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \cos \frac{3x + x}{2} \text{ sen } \frac{3x - x}{2}}{2 \cos \frac{3x + x}{2} \cos \frac{3x - x}{2}} \qquad \text{Fórmulas de Suma a Producto}$$

$$= \frac{2 \cos 2x \text{ sen } x}{2 \cos 2x \cos x} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \tan x = \text{LD} \qquad \text{Cancele}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **89**

# 7.3 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Si conocemos los valores de sen $x$ y cos $x$, podemos hallar el valor de sen $2x$ si usamos la Fórmula de _____para Seno. Exprese la fórmula: sen $2x$ = ________.

2. Si conocemos los valores de cos $x$ y el cuadrante en el que se encuentra $x/2$, podemos hallar el valor de sen$(x/2)$ si usamos la Fórmula _____para el Seno. Exprese la fórmula: sen $(x/2)$ = ________.

## HABILIDADES

**3-10** ■ Encuentre sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información dada.

3. sen $x = \frac{5}{13}$, $x$ en el cuadrante I
4. $\tan x = -\frac{4}{3}$, $x$ en el cuadrante II
5. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$
6. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$
7. sen $x = -\frac{3}{5}$, $x$ en el cuadrante III
8. $\sec x = 2$, $x$ en el cuadrante IV
9. $\tan x = -\frac{1}{3}$, $\cos x > 0$
10. $\cot x = \frac{2}{3}$, sen $x > 0$

**11-16** ■ Use las fórmulas para bajar potencias para reescribir la expresión en términos de la primera potencia de coseno, como en el Ejemplo 4.

11. $\text{sen}^4 x$
12. $\cos^4 x$
13. $\cos^2 x\ \text{sen}^4 x$
14. $\cos^4 x\ \text{sen}^2 x$
15. $\cos^4 x\ \text{sen}^4 x$
16. $\cos^6 x$

**17-28** ■ Use una Fórmula de Semiángulo apropiada para hallar el valor exacto de la expresión.

17. sen 15°
18. tan 15°
19. tan 22.5°
20. sen 75°
21. cos 165°
22. cos 112.5°

**23.** $\tan \dfrac{\pi}{8}$ **24.** $\cos \dfrac{3\pi}{8}$

**25.** $\cos \dfrac{\pi}{12}$ **26.** $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

**27.** $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{8}$ **28.** $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

**29-34** ■ Simplifique la expresión usando una Fórmula de Ángulo Doble o una Fórmula de Semiángulo.

**29.** **(a)** $2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ **(b)** $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

**30.** **(a)** $\dfrac{2 \tan 7°}{1 - \tan^2 7°}$ **(b)** $\dfrac{2 \tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

**31.** **(a)** $\cos^2 34° - \operatorname{sen}^2 34°$ **(b)** $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

**32.** **(a)** $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ **(b)** $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

**33.** **(a)** $\dfrac{\operatorname{sen} 8°}{1 + \cos 8°}$ **(b)** $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

**34.** **(a)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}$ **(b)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

**35.** Use la Fórmula de la Adición para Seno para probar la Fórmula de Ángulo Doble para Seno.

**36.** Use la Fórmula de la Adición para Tangente para probar la Fórmula de Ángulo Doble para Tangente.

**37-42** ■ Encuentre $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$ y $\tan\dfrac{x}{2}$ a partir de la información dada.

**37.** $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0° < x < 90°$

**38.** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$

**39.** $\csc x = 3$, $90° < x < 180°$

**40.** $\tan x = 1$, $0° < x < 90°$

**41.** $\sec x = \frac{3}{2}$, $270° < x < 360°$

**42.** $\cot x = 5$, $180° < x < 270°$

**43-46** ■ Escriba la expresión dada como una expresión algebraica en $x$.

**43.** $\operatorname{sen}(2 \tan^{-1} x)$ **44.** $\tan(2 \cos^{-1} x)$

**45.** $\operatorname{sen}(\frac{1}{2} \cos^{-1} x)$ **46.** $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$

**47-50** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión dada.

**47.** $\operatorname{sen}(2 \cos^{-1} \frac{7}{25})$ **48.** $\cos(2 \tan^{-1} \frac{12}{5})$

**49.** $\sec(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4})$ **50.** $\tan(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{2}{3})$

**51-54** ■ Evalúe cada expresión bajo las condiciones dadas.

**51.** $\cos 2\theta$; $\operatorname{sen} \theta = -\frac{3}{5}$, $\theta$ en el tercer cuadrante

**52.** $\operatorname{sen}(\theta/2)$; $\tan \theta = -\frac{5}{12}$, $\theta$ en el cuarto cuadrante

**53.** $\operatorname{sen} 2\theta$ $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{7}$, $\theta$ en el segundo cuadrante

**54.** $\tan 2\theta$; $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\theta$ en el primer cuadrante

**55-60** ■ Escriba el producto como una suma.

**55.** $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$ **56.** $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

**57.** $\cos x \operatorname{sen} 4x$ **58.** $\cos 5x \cos 3x$

**59.** $3 \cos 4x \cos 7x$ **60.** $11 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4}$

**61-66** ■ Escriba la suma como producto.

**61.** $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$ **62.** $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

**63.** $\cos 4x - \cos 6x$ **64.** $\cos 9x + \cos 2x$

**65.** $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$ **66.** $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

**67-72** ■ Encuentre el valor del producto o suma.

**67.** $2 \operatorname{sen} 52.5° \operatorname{sen} 97.5°$ **68.** $3 \cos 37.5° \cos 7.5°$

**69.** $\cos 37.5° \operatorname{sen} 7.5°$ **70.** $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

**71.** $\cos 255° - \cos 195°$

**72.** $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

**73-90** ■ Pruebe la identidad.

**73.** $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

**74.** $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

**75.** $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

**76.** $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

**77.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

**78.** $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

**79.** $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

**80.** $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

**81.** $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

**82.** $4(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3 \operatorname{sen}^2 2x$

**83.** $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

**84.** $\tan^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

**85.** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$

**86.** $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cot 2x$

**87.** $\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

**88.** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

**89.** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$

**90.** $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

**91.** Demuestre que $\operatorname{sen} 130° - \operatorname{sen} 110° = -\operatorname{sen} 10°$.

**92.** Demuestre que $\cos 100° - \cos 200° = \operatorname{sen} 50°$.

**93.** Demuestre que $\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} 75°$.

**94.** Demuestre que $\cos 87° + \cos 33° = \operatorname{sen} 63°$.

**95.** Pruebe la identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \tan 3x$$

**96.** Use la identidad

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$n$ veces para demostrar que

$$\operatorname{sen}(2^n x) = 2^n \operatorname{sen} x \cos x \cos 2x \cos 4x \cdots \cos 2^{n-1} x$$

**97.** **(a)** Grafique $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ y haga una conjetura.
**(b)** Pruebe la conjetura que hizo en el inciso (a).

**98.** **(a)** Grafique $f(x) = \cos 2x + 2 \operatorname{sen}^2 x$ y haga una conjetura.
**(b)** Pruebe la conjetura que hizo en el inciso (a).

**99.** Sea $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 7x$.
**(a)** Grafique $y = f(x)$.
**(b)** Verifique que $f(x) = 2 \cos \frac{1}{2}x \operatorname{sen} \frac{13}{2}x$.
**(c)** Grafique $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$ y $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$, junto con la gráfica de la parte (a), en el mismo rectángulo de vista. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas con la gráfica de $f$?

**100.** Sea $3x = \pi/3$ y sea $y = \cos x$. Use el resultado del Ejemplo 2 para demostrar que $y$ satisface la ecuación

$$8y^3 - 6y - 1 = 0$$

NOTA Esta ecuación tiene raíces de cierta clase que se usan para demostrar que el ángulo $\pi/3$ no se puede dividir en tres sólo con regla y compás.

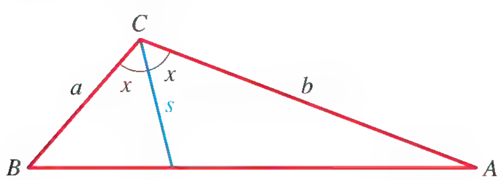
**101.** **(a)** Demuestre que hay una polinomial $P(t)$ de grado 4 tal que $\cos 4x = P(\cos x)$ (vea Ejemplo 2).
**(b)** Demuestre que hay una polinomial $Q(t)$ de grado 5 tal que $\cos 5x = Q(\cos x)$.

NOTA En general, hay una polinomial $P_n(t)$ de grado $n$ tal que $\cos nx = P_n(\cos x)$. Estas polinomiales se denominan *polinomiales de Tchebycheff* en honor al matemático ruso P. L. Tchebycheff (1821-1894).

**102.** En el triángulo $ABC$ (vea la figura) el segmento de recta $s$ biseca el ángulo $C$. Demuestre que la longitud de $s$ está dada por

$$s = \frac{2ab \cos x}{a + b}$$

[*Sugerencia:* Use la Ley de Senos.]



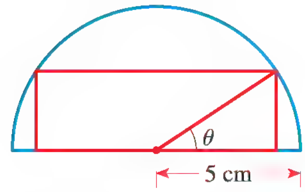

**103.** Si $A$, $B$ y $C$ son los ángulos en un triángulo, demuestre que

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

**104.** Un rectángulo se ha de inscribir en un semicírculo de 5 cm de radio como se ve en la figura siguiente.
**(a)** Demuestre que el área del rectángulo está modelada por la función

$$A(\theta) = 25 \operatorname{sen} 2\theta$$

**(b)** Encuentre la máxima área posible para tal rectángulo inscrito.
**(c)** Encuentre las dimensiones del rectángulo inscrito con la máxima área posible.

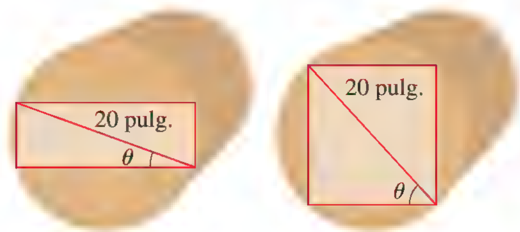



## APLICACIONES

**105. Cortar una viga de madera** Una viga rectangular ha de cortarse de un tronco cilíndrico de 20 pulgadas de diámetro.
**(a)** Demuestre que el área de sección transversal de la viga está modelada por la función

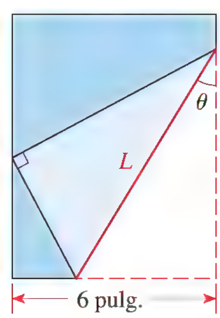
$$A(\theta) = 200 \operatorname{sen} 2\theta$$

donde $\theta$ es como se muestra en la figura.
**(b)** Demuestre que la máxima área de sección transversal de dicha viga es de 200 pulg.². [*Sugerencia:* Use el dato de que $\operatorname{sen} u$ alcanza su valor máximo en $u = \pi/2$.]




**106. Longitud de un doblez** La esquina inferior derecha de una pieza grande de papel de 6 pulgadas de ancho se dobla sobre el borde izquierdo, como se muestra. La longitud $L$ del doblez depende del ángulo $\theta$. Demuestre que

$$L = \frac{3}{\operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta}$$




**107. Pulsaciones de sonido** Cuando dos notas puras que sean cercanas en frecuencia se pulsan juntas, sus sonidos interfieren para producir *pulsos*; esto es, la intensidad (o amplitud) del sonido alternadamente aumenta y disminuye. Si las dos notas están dadas por

$$f_1(t) = \cos 11t \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \cos 13t$$

el sonido resultante es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.
**(a)** Grafique la función $y = f(t)$.
**(b)** Verifique que $f(t) = 2 \cos t \cos 12t$.

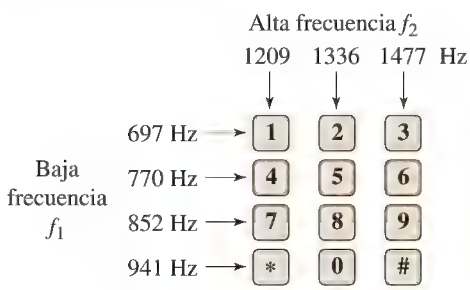
(c) Grafique $y = 2 \cos t$ y $y = -2 \cos t$, junto con la gráfica del inciso (a), en el mismo rectángulo de vista. ¿Cómo describen estas gráficas la variación en intensidad del sonido?

**108. Teléfonos de tonos** Cuando se presiona una tecla en un teléfono de tonos, la botonera genera dos tonos puros que se combinan para producir un sonido que de manera única identifica la tecla. La figura siguiente muestra la baja frecuencia $f_1$ y la alta frecuencia $f_2$ asociada con cada tecla. Pulsar una tecla produce la onda de sonido $y = \operatorname{sen}(2\pi f_1 t) + \operatorname{sen}(2\pi f_2 t)$.

(a) Encuentre la función que modele el sonido producido cuando se presiona la tecla 4.

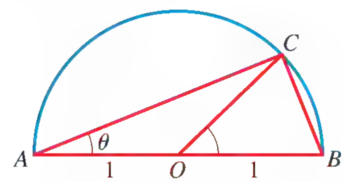
(b) Use una Fórmula de Suma a Producto para expresar el sonido generado por la tecla 4 como producto de una función seno y una función coseno.

(c) Grafique la onda de sonido generada por la tecla 4, de $t = 0$ a $t = 0.006$ segundos.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**109. Prueba geométrica de una fórmula de ángulo doble** Use la figura siguiente para probar que $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$.




[*Sugerencia:* Encuentre el área del triángulo $ABC$ en dos formas diferentes. Serán necesarios los siguientes datos de geometría:

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, de modo que $\angle ACB$ es un ángulo recto.

El ángulo central subtendido por la cuerda de un círculo es dos veces el ángulo subtendido por la cuerda del círculo, de modo que $\angle BOC$ es $2\theta$.]

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Dónde tomar asiento en un cine**

En este proyecto usamos trigonometría para hallar el mejor lugar para ver cosas como una pintura o una película. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 7.4 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Ecuaciones trigonométricas básicas ▶ Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 2 \operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \qquad \tan 2\theta - 1 = 0$$

La primera ecuación es una *identidad*, es decir, es verdadera para todo valor de la variable $\theta$. Las otras dos ecuaciones son verdaderas sólo para ciertos valores de $\theta$. Para resolver una ecuación trigonométrica, encontramos todos los valores de la variable que hagan verdadera la ecuación.

## ▼ Ecuaciones trigonométricas básicas

La resolución de cualquier ecuación trigonométrica siempre se reduce a resolver una **ecuación trigonométrica básica**, es decir, una ecuación de la forma $T(\theta) = c$, donde $T$ es una función trigonométrica y $c$ es una constante. En los siguientes tres ejemplos resolvemos tales ecuaciones básicas.

### EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$.

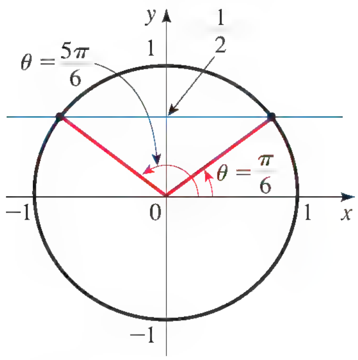



**FIGURA 1**

**SOLUCIÓN**

Encuentre las soluciones en un período. Como el seno tiene un período $2\pi$, primero encontramos las soluciones en cualquier intervalo de longitud $2\pi$. Para hallar estas soluciones, veamos la circunferencia unitaria de la Figura 1. Vemos que sen $\theta = \frac{1}{2}$ en los cuadrantes primero y segundo, de modo que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$ son

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

Encuentre todas las soluciones. Debido a que la función seno repite sus valores a cada $2\pi$ unidades, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones:

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero. La Figura 2 da una representación gráfica de las soluciones.

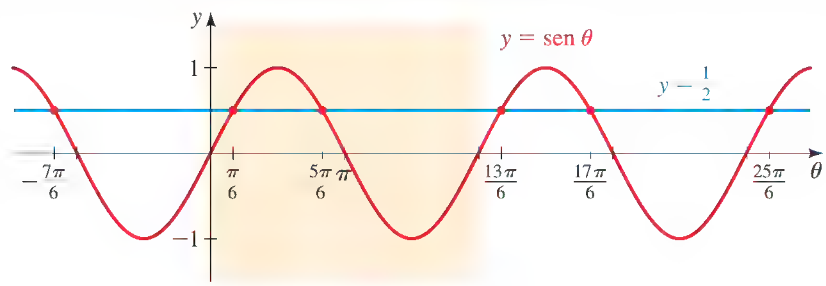



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

## EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación cos $\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, y haga una lista de ocho soluciones específicas.

**SOLUCIÓN**

Encuentre las soluciones en un período. Debido a que el coseno tiene período $2\pi$, primero hallamos las soluciones en cualquier intervalo de longitud $2\pi$. De la circunferencia unitaria de la Figura 3 vemos que cos $\theta = -\sqrt{2}/2$ en los cuadrantes segundo y tercero, de modo que las soluciones del intervalo $[0, 2\pi]$ son

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \theta = \frac{5\pi}{4}$$

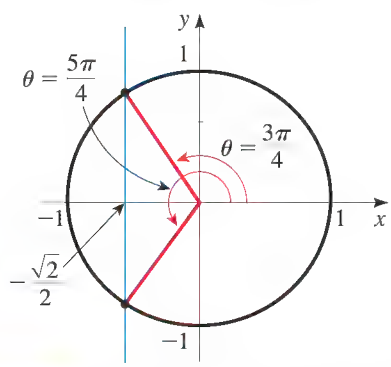



**FIGURA 3**

Encuentre todas las soluciones. Debido a que la función coseno repite sus valores cada $2\pi$ unidades, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero. Se puede comprobar que para $k = -1, 0, 1, 2$ obtenemos las siguientes soluciones específicas:

$$\theta = \underbrace{-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}}_{k=-1}, \underbrace{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}}_{k=0}, \underbrace{\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}}_{k=1}, \underbrace{\frac{19\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}}_{k=2}$$

La Figura 4 da una representación gráfica de las soluciones.

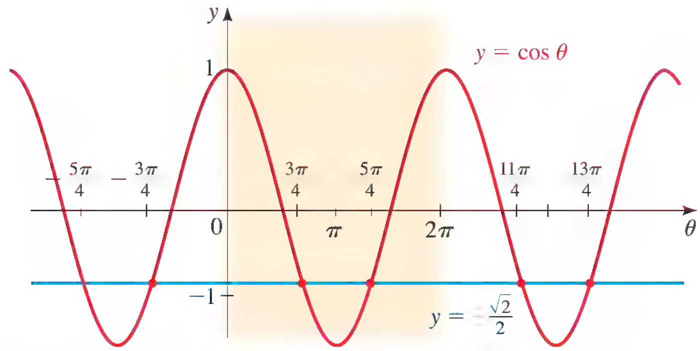



**FIGURA 4**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\cos\theta = 0.65$.

### SOLUCIÓN

**Encuentre las soluciones en un período.** Primero hallamos una solución al tomar $\cos^{-1}$ de cada lado de la ecuación.

| | |
|---|---|
| $\cos\theta = 0.65$ | Ecuación dada |
| $\theta = \cos^{-1}(0.65)$ | Tome $\cos^{-1}$ de cada lado |
| $\theta \approx 0.86$ | Calculadora (en modo radianes) |

Como el coseno tiene período $2\pi$, a continuación encuentre las soluciones en cualquier intervalo de longitud $2\pi$. Para hallar estas soluciones, vemos la circunferencia unitaria de la Figura 5. Vemos que $\cos\theta = 0.85$ en los cuadrantes primero y cuarto, de modo que las soluciones son

$$\theta \approx 0.86 \qquad \theta \approx 2\pi - 0.86 \approx 5.42$$

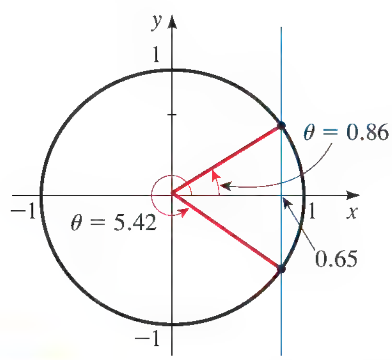



**FIGURA 5**

**Encuentre todas las soluciones.** Para obtener todas las soluciones de la ecuación, sumamos múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones:

$$\theta \approx 0.86 + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta \approx 5.42 + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## EJEMPLO 4 | Resolver una ecuación trigonométrica básica

Resuelva la ecuación $\tan\theta = 2$.

### SOLUCIÓN

**Encuentre las soluciones en un período.** Primero hallamos una solución al tomar $\tan^{-1}$ de cada lado de la ecuación:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 2 && \text{Ecuación dada} \\ \theta &= \tan\ ^{1}(2) && \text{Tome tan } ^{1} \text{ de cada lado} \\ \theta &\approx 1.12 && \text{Calculadora (en modo de radianes)} \end{aligned}$$

Por la definición de $\tan^{-1} x$, la solución que obtuvimos es la única solución en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (que es un intervalo de longitud $\pi$).

**Encuentre todas las soluciones.** Como la tangente tiene período $\pi$, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $\pi$:

$$\theta \approx 1.12 + k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero. Una representación gráfica de las soluciones se muestra en la Figura 6. Se puede comprobar que las soluciones en la gráfica corresponden a $k = -1, 0, 1, 2, 3$.

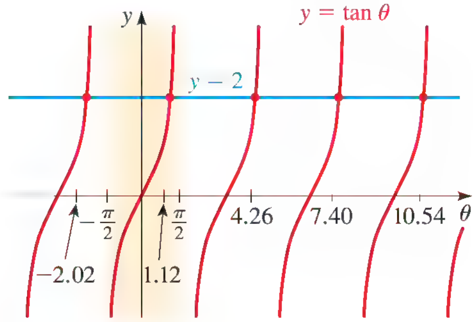



**FIGURA 6**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

---

En el siguiente ejemplo resolvemos ecuaciones trigonométricas que son algebraicamente equivalentes a ecuaciones trigonométricas básicas.

## EJEMPLO 5 | Resolver ecuaciones trigonométricas

Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

**(a)** $2 \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$ **(b)** $\tan^2\theta - 3 = 0$

### SOLUCIÓN

**(a)** Primero empezamos por aislar sen $\theta$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta - 1 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ 2\operatorname{sen}\theta &= 1 && \text{Sume 1} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{1}{2} && \text{Divida entre 2} \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la misma que en el Ejemplo 1. Las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

**(b)** Empezamos por aislar tan $\theta$:

$$\tan^2\theta - 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\tan^2\theta = 3 \qquad \text{Sume 3}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{3} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

Como la tangente tiene período $\pi$, primero hallamos las soluciones en cualquier intervalo de longitud $\pi$. En el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ las soluciones son $\theta = \pi/3$ y $\theta = -\pi/3$. Para obtener todas las soluciones, sumamos múltiplos enteros de $\pi$ a estas soluciones:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{o} \quad \theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **33**

## Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

**Propiedad de producto cero**
Si $AB = 0$ entonces $A = 0$ o $B = 0$.

La factorización es una de las técnicas más útiles para resolver ecuaciones, incluyendo ecuaciones trigonométricas. La idea es mover todos los términos a un lado de la ecuación, factorizar y luego usar la Propiedad del Producto Cero (vea Sección 1.5).

### EJEMPLO 6 | Una ecuación trigonométrica de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$.

**Ecuación de tipo cuadrático**

$$2C^2 \quad 7C + 3 = 0$$

$$(2C - 1)(C - 3) = 0$$

**SOLUCIÓN** Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\cos\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta - 3 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 cada factor}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos\theta = 3 \qquad \text{Despeje } \cos\theta$$

Como el coseno tiene período $2\pi$, primero hallamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Para la primera ecuación las soluciones son $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$ (vea Figura 7). La segunda ecuación no tiene solución porque $\cos\theta$ nunca es mayor a 1. Entonces las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

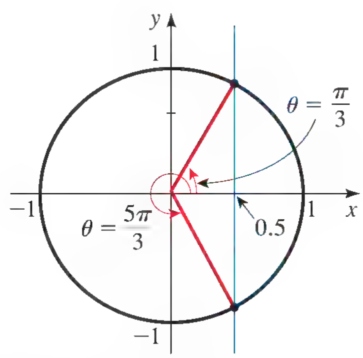



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación trigonométrica por factorización

Resuelva la ecuación $5 \text{ sen } \theta \cos \theta + 4 \cos \theta = 0$.

**SOLUCIÓN** Factorizamos el lado izquierdo de la ecuación:

| | |
|---|---|
| $5 \text{ sen } \theta \cos \theta + 2 \cos \theta = 0$ | Ecuación dada |
| $\cos \theta (5 \text{ sen } \theta + 2) = 0$ | Factorice |
| $\cos \theta = 0 \quad \text{o} \quad 5 \text{ sen } \theta + 4 = 0$ | Iguale a 0 cada factor |
| $\text{sen } \theta = -0.8$ | Despeje sen $\theta$ |

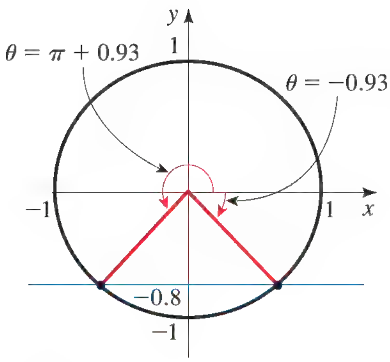



**FIGURA 8**

Como seno y coseno tienen período $2\pi$, primero hallamos las soluciones de estas ecuaciones en un intervalo de longitud $2\pi$. Para la primera ecuación, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Para resolver la segunda ecuación, tomamos $\text{sen}^{-1}$ de cada lado:

| | |
|---|---|
| $\text{sen } \theta = -0.80$ | Segunda ecuación |
| $\theta = \text{sen}^{\ 1}(-0.80)$ | Tome sen $^{1}$ de cada lado |
| $\theta \approx -0.93$ | Calculadora (en modo de radianes) |

Entonces las soluciones en un intervalo de longitud $2\pi$ son $\theta = \pi + 0.93 \approx 4.07$ (vea Figura 8). Obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones.

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad \theta \approx -0.93 + 2k\pi, \quad \text{o} \quad \theta \approx 4.07 + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## 7.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Debido a que las funciones trigonométricas son periódicas,

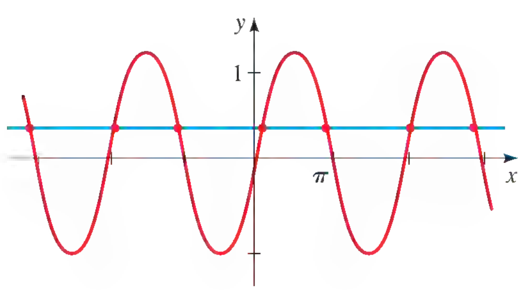
si una ecuación trigonométrica básica tiene una solución, tiene ______(varias/número infinito de) soluciones.

**2.** La ecuación básica sen $x = 2$ tiene _____(varias/número infinito de) soluciones, mientras que la ecuación básica

sen $x = 0.3$ tiene _____ (varias/número infinito de) soluciones.

**3.** Podemos hallar algunas de las soluciones de sen $x = 0.3$

gráficamente si graficamos $y = \text{sen } x$ y $y =$ _____. Use la gráfica siguiente para estimar algunas de las soluciones.




**4.** Podemos hallar las soluciones de sen $x = 0.3$ algebraicamente.

**(a)** Primero encontramos las soluciones en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Obtenemos una de estas soluciones al tomar $\text{sen}^{-1}$ para obtener $x =$ _______.

La otra solución en este intervalo es $x =$ _______.

**(b)** Encontramos todas las soluciones al sumar múltiplos de _______ a las soluciones en $[-\pi, \pi]$. Las soluciones son $x =$ _______ y $x =$ _______.

### HABILIDADES

**5-16** ■ Resuelva la ecuación dada.

**5.** $\text{sen } \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**6.** $\text{sen } \theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**7.** $\cos \theta = -1$

**8.** $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**9.** $\cos \theta = \frac{1}{4}$

**10.** $\text{sen } \theta = -0.3$

**11.** $\text{sen } \theta = -0.45$

**12.** $\cos \theta = 0.32$

**13.** $\tan \theta = -\sqrt{3}$

**14.** $\tan \theta = 1$

**15.** $\tan \theta = 5$

**16.** $\tan \theta = -\frac{1}{3}$

**17-24** ■ Resuelva la ecuación dada, y haga una lista de seis soluciones específicas.

**17.** $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **18.** $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

**19.** $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **20.** $\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**21.** $\cos\theta = 0.28$ **22.** $\tan\theta = 2.5$

**23.** $\tan\theta = -10$ **24.** $\operatorname{sen}\theta = -0.9$

**25-38** ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación dada.

**25.** $\cos\theta + 1 = 0$ **26.** $\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$

**27.** $\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$ **28.** $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

**29.** $5\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$ **30.** $4\cos\theta + 1 = 0$

**31.** $3\tan^2\theta - 1 = 0$ **32.** $\cot\theta + 1 = 0$

**33.** $2\cos^2\theta - 1 = 0$ **34.** $4\operatorname{sen}^2\theta - 3 = 0$

**35.** $\tan^2\theta - 4 = 0$ **36.** $9\operatorname{sen}^2\theta - 1 = 0$

**37.** $\sec^2\theta - 2 = 0$ **38.** $\csc^2\theta - 4 = 0$

**39-56** ■ Resuelva la ecuación dada.

**39.** $(\tan^2\theta - 4)(2\cos\theta + 1) = 0$

**40.** $(\tan\theta - 2)(16\operatorname{sen}^2\theta - 1) = 0$

**41.** $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$

**42.** $2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

**43.** $3\operatorname{sen}^2\theta - 7\operatorname{sen}\theta + 2 = 0$

**44.** $\tan^4\theta - 13\tan^2\theta + 36 = 0$

**45.** $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

**46.** $\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta - 2 = 0$

**47.** $\cos^2\theta - \cos\theta - 6 = 0$ **48.** $2\operatorname{sen}^2\theta + 5\operatorname{sen}\theta - 12 = 0$

**49.** $\operatorname{sen}^2\theta = 2\operatorname{sen}\theta + 3$ **50.** $3\tan^3\theta = \tan\theta$

**51.** $\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta + 1) = 0$ **52.** $\sec\theta(2\cos\theta - \sqrt{2}) = 0$

**53.** $\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta = 0$ **54.** $\tan\theta\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

**55.** $3\tan\theta\operatorname{sen}\theta - 2\tan\theta = 0$ **56.** $4\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 0$

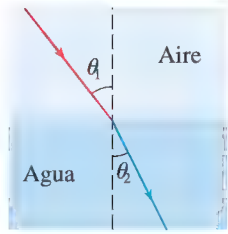
## APLICACIONES

**57. Refracción de luz** Desde tiempos antiguos se ha observado que la luz se refracta o se "dobla" al pasar de un medio a otro (de aire al agua, por ejemplo). Si $v_1$ es la velocidad de la luz en un medio y $v_2$ es su velocidad en otro medio, entonces, de acuerdo con la **ley de Snell**,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde $\theta_1$ es el *ángulo de incidencia* y $\theta_2$ es el *ángulo de refracción* (vea la figura). El número $v_1/v_2$ recibe el nombre de *índice de refracción*. El índice de refracción para varias sustancias se da en la tabla siguiente.

Si un rayo de luz pasa por la superficie de un lago a un ángulo de incidencia de 70°, ¿cuál es el ángulo de refracción?




| Sustancia | Refracción del aire a la sustancia |
|---|---|
| Agua | 1.33 |
| Alcohol | 1.36 |
| Vidrio | 1.52 |
| Diamante | 2.41 |

**58. Reflexión interna total** Cuando la luz pasa de un medio más denso a otro menos denso, de vidrio a aire, por ejemplo, el ángulo de refracción pronosticado por la Ley de Snell (vea el Ejercicio 57) puede ser de 90° o mayor. En este caso el rayo de luz es en realidad reflejado de nuevo hacia el medio más denso. Este fenómeno, llamado *reflexión interna total*, es el principio que hay detrás de fibras ópticas. Haga $\theta_2 = 90°$ en la Ley de Snell, y despeje $\theta_1$ para determinar el ángulo crítico de incidencia en el que se inicia la reflexión interna total cuando la luz pasa del vidrio al aire. (Observe que el índice de refracción del vidrio al aire es el recíproco del índice del aire al vidrio.)

**59. Fases de la Luna** Cuando la Luna gira alrededor de la Tierra, el lado que da la cara a la Tierra por lo general está sólo parcialmente iluminado por el Sol. Las fases de la Luna describen cuánto de la superficie parece estar a la luz del Sol. Una medida astronómica está dada por la fracción $F$ del disco lunar que está iluminado. Cuando el ángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna es $\theta(0 \le \theta \le 360°)$, entonces

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$$

Determine los ángulos $\theta$ que corresponden a las siguientes fases:

**(a)** $F = 0$ (luna nueva)
**(b)** $F = 0.25$ (cuarto creciente)
**(c)** $F = 0.5$ (primero o último cuarto)
**(d)** $F = 1$ (luna llena)

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**60. Ecuaciones e identidades** ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero?

A. Toda identidad es una ecuación.

B. Toda ecuación es una identidad.

Dé ejemplos para ilustrar su respuesta. Escriba un breve párrafo para explicar la diferencia entre una ecuación y una identidad.

# 7.5 MÁS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Solución de ecuaciones trigonométricas con uso de identidades ▶ Ecuaciones con funciones trigonométricas de múltiplos de ángulos

En esta sección resolvemos ecuaciones trigonométricas al usar primero identidades para simplificar la ecuación. También resolvemos ecuaciones trigonométricas en las que los términos contienen múltiplos de ángulos.

## ▼ Solución de ecuaciones trigonométricas con uso de identidades

En los siguientes dos ejemplos usamos identidades trigonométricas para expresar una ecuación trigonométrica en una forma en la que se puede factorizar.

### EJEMPLO 1 | Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + \text{sen}\,\theta = 2\cos^2\theta$.

**SOLUCIÓN** Primero necesitamos reescribir esta ecuación de modo que contenga sólo una función trigonométrica. Para hacer esto, usamos una identidad trigonométrica:

$$1 + \text{sen}\,\theta = 2\cos^2\theta \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$1 + \text{sen}\,\theta = 2(1 - \text{sen}^2\theta) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}\,\theta - 1 = 0 \qquad \text{Iguale a cero}$$

$$(2\,\text{sen}\,\theta - 1)(\text{sen}\,\theta + 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta + 1 = 0 \qquad \text{Iguale a 0 cada uno de los factores}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \text{sen}\,\theta = -1 \qquad \text{Despeje sen}\,\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{Despeje } \theta \text{ en intervalos } [0, 2\pi)$$

Como el seno tiene período $2\pi$, obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones. Entonces las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

### EJEMPLO 2 | Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $\text{sen}\,2\theta - \cos\theta = 0$.

**SOLUCIÓN** El primer término es una función de $2\theta$, y el segundo es una función de $\theta$, de modo que empezamos por usar una identidad trigonométrica para reescribir el primer término como función de $\theta$ únicamente:

$$\text{sen}\,2\theta - \cos\theta = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \cos\theta = 0 \qquad \text{Fórmula de Ángulo Doble}$$

$$\cos\theta\,(2\,\text{sen}\,\theta - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos\theta = 0$ | o | $2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0$ | Iguale a 0 cada uno de los factores |
| | | $\text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2}$ | Despeje sen $\theta$ |
| $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ | o | $\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ | Despeje $\theta$ en $[0, 2\pi)$ |

Tanto el seno como el coseno tienen período $2\pi$, de modo que obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones. Entonces, las soluciones son

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **11**

## EJEMPLO 3 | Elevar al cuadrado y usar una identidad

Resuelva la ecuación $\cos\theta + 1 = \text{sen}\,\theta$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

**SOLUCIÓN** Para obtener una ecuación que contenga ya sea seno únicamente o coseno únicamente, elevamos al cuadrado ambos lados y usamos la identidad de Pitágoras:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\cos\theta + 1 = \text{sen}\,\theta$ | Ecuación dada |
| | | $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = \text{sen}^2\theta$ | Eleve al cuadrado ambos lados |
| | | $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 1 - \cos^2\theta$ | Identidad pitagórica |
| | | $2\cos^2\theta + 2\cos\theta = 0$ | Simplifique |
| | | $2\cos\theta(\cos\theta + 1) = 0$ | Factorice |
| $2\cos\theta = 0$ | o | $\cos\theta + 1 = 0$ | Iguale a 0 cada uno de los factores |
| $\cos\theta = 0$ | o | $\cos\theta = -1$ | Despeje $\cos\theta$ |
| $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ | o | $\theta = \pi$ | Despeje $\theta$ en $[0, 2\pi)$ |

Dado que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamos comprobar si hay soluciones extrañas. *Verifique sus respuestas* vemos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y $\pi$.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

| $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ | $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ | $\theta = \pi$ |
|---|---|---|
| $\cos\dfrac{\pi}{2} + 1 = \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}$ | $\cos\dfrac{3\pi}{2} + 1 = \text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}$ | $\cos\pi + 1 = \text{sen}\,\pi$ |
| $0 + 1 = 1$ ✔ | $0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$ ✘ | $-1 + 1 = 0$ ✔ |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

## EJEMPLO 4 | Hallar puntos de intersección

Encuentre los valores de $x$ para los cuales las gráficas de $f(x) = \text{sen}\,x$ y $g(x) = \cos x$ se cruzan.

**SOLUCIÓN 1:** Gráfica

Las gráficas se cruzan en donde $f(x) = g(x)$. En la Figura 1 graficamos $y_1 = \text{sen } x$ y $y_2 = \cos x$ en la misma pantalla, para $x$ entre 0 y $2\pi$. Usando el comando TRACE o el `intersect` en la calculadora graficadora, vemos que los dos puntos de intersección en este intervalo se presentan donde $x \approx 0.785$ y $x \approx 3.927$. Como el seno y el coseno son periódicos con período $2\pi$, los puntos de intersección ocurren donde

$$x \approx 0.785 + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x \approx 3.927 + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

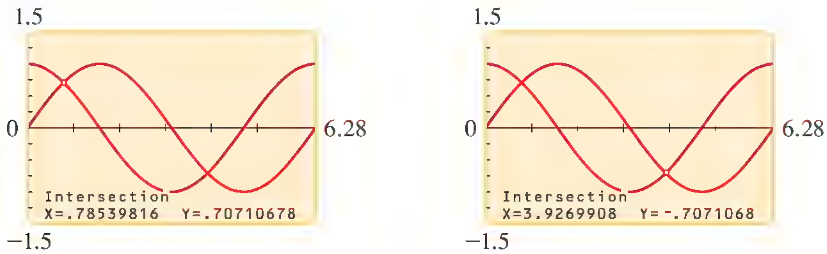



**FIGURA 1** (a) (b)

**SOLUCIÓN 2:** Algebraica

Para hallar la solución exacta, hacemos $f(x) = g(x)$ y resolvemos la ecuación resultante algebraicamente:

$$\text{sen } x = \cos x \qquad \text{Las funciones son iguales}$$

Como los números $x$ para los cuales $\cos x = 0$ no son soluciones de la ecuación, podemos dividir ambos lados entre $\cos x$:

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \qquad \text{Divida entre cos } x$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{Identidad}$$

La única solución de esta ecuación en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ es $x = \pi/4$. Como la tangente tiene período $\pi$, obtenemos todas las soluciones de la ecuación si sumamos múltiplos enteros de $\pi$:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero. Las gráficas se cruzan para estos valores de $x$. El lector debe usar su calculadora para comprobar que, redondeados a tres lugares decimales, éstos son los valores que obtuvimos en la Solución 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35** ■

## ▼ Ecuaciones con funciones trigonométricas de múltiplos de ángulos

Cuando resolvamos ecuaciones trigonométricas que contengan funciones de múltiplos de ángulos, primero despejamos el múltiplo del ángulo y a continuación dividimos para despejar el ángulo.

**EJEMPLO 5** | Una ecuación trigonométrica que contiene un múltiplo de un ángulo

Considere la ecuación $2 \text{ sen } 3\theta - 1 = 0$.

**(a)** Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

**(b)** Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero aislamos sen $3\theta$ y luego despejamos el ángulo $3\theta$.

$$2 \text{ sen } 3\theta - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2 \text{ sen } 3\theta = 1 \qquad \text{Sume 1}$$

$$\text{sen } 3\theta = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$3\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad \text{Despeje } 3\theta \text{ en el intervalo } [0, 2\pi) \text{ (vea Figura 2)}$$

Para obtener todas las soluciones, sumamos múltiplos enteros de $2\pi$ a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son de la forma

$$3\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad 3\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Para despejar $\theta$, dividimos entre 3 para obtener las soluciones

$$\theta = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

donde $k$ es cualquier entero.

**(b)** Las soluciones del inciso (a) que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ corresponden a $k = 0$, 1 y 2. Para todos los otros valores de $k$, los valores correspondientes de $\theta$ se encuentran fuera de este intervalo. Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \underbrace{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}}_{k=0}, \underbrace{\frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}}_{k=1}, \underbrace{\frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}}_{k=2}$$

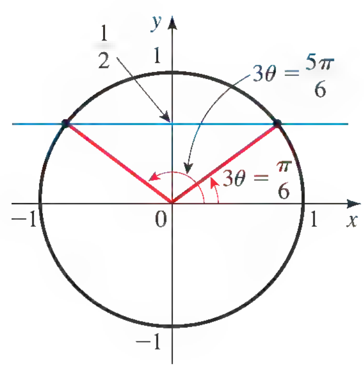



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## EJEMPLO 6 | Una ecuación trigonométrica con un semiángulo

Considere la ecuación $\sqrt{3} \tan \frac{\theta}{2} - 1 = 0$.

**(a)** Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

**(b)** Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$.

**SOLUCIÓN**

(a) Empezamos por aislar $\tan \frac{\theta}{2}$:

$$\sqrt{3}\tan\frac{\theta}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\sqrt{3}\tan\frac{\theta}{2} = 1 \qquad \text{Sume 1}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{Divida entre } \sqrt{3}$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{Despeje } \frac{\theta}{2} \text{ en el intervalo} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como la tangente tiene período $\pi$, obtenemos todas las soluciones para sumar múltiplos enteros de $\pi$ a esta solución. Por lo tanto, las soluciones son de la forma

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Multiplicando por 2, obtenemos las soluciones

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde $k$ es cualquier entero.

(b) Las soluciones del inciso (a) que están en el intervalo $[0, 4\pi)$ corresponden a $k = 0$ y $k = 1$. Para todos los otros valores de $k$ los valores correspondientes de $x$ se encuentran fuera de este intervalo. Entonces, las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## 7.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Podemos usar identidades para ayudarnos a resolver ecuaciones trigonométricas.

1. Usando una identidad pitagórica vemos que la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ es equivalente a la ecuación básica_____ cuyas soluciones son $x =$ _____.
2. Usando una Fórmula de Ángulo Doble vemos que la ecuación $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$ es equivalente a la ecuación _____. Factorizando, vemos que resolver esta ecuación es equivalente a resolver las dos ecuaciones básicas _____ y ______.

### HABILIDADES

**3-16** ■ Resuelva la ecuación dada.

**3.** $2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1$  **4.** $\operatorname{sen}^2\theta = 4 - 2\cos^2\theta$

**5.** $\tan^2\theta - 2\sec\theta = 2$  **6.** $\csc^2\theta = \cot\theta + 3$

**7.** $2\operatorname{sen} 2\theta - 3\operatorname{sen}\theta = 0$  **8.** $3\operatorname{sen} 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta = 0$

**9.** $\cos 2\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 1$  **10.** $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \frac{1}{2}$

**11.** $2\operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta = 1$  **12.** $\tan\theta - 3\cot\theta = 0$

**13.** $\operatorname{sen}\theta - 1 = \cos\theta$  **14.** $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = 1$

**15.** $\tan\theta + 1 = \sec\theta$  **16.** $2\tan\theta + \sec^2\theta = 4$

**17-34** ■ Nos dan una ecuación. **(a)** Encuentre todas las soluciones de la ecuación. **(b)** Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

**17.** $2\cos 3\theta = 1$  **18.** $3\csc^2\theta = 4$

**19.** $2\cos 2\theta + 1 = 0$  **20.** $2\operatorname{sen} 3\theta + 1 = 0$

**21.** $\sqrt{3}\tan 3\theta + 1 = 0$  **22.** $\sec 4\theta - 2 = 0$

**23.** $\cos\frac{\theta}{2} - 1 = 0$  **24.** $\tan\frac{\theta}{4} + \sqrt{3} = 0$

**25.** $2\operatorname{sen}\frac{\theta}{3} + \sqrt{3} = 0$  **26.** $\sec\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$

**27.** $\operatorname{sen} 2\theta = 3\cos 2\theta$

**28.** $\csc 3\theta = 5\operatorname{sen} 3\theta$

**29.** $\sec\theta - \tan\theta = \cos\theta$

**30.** $\tan 3\theta + 1 = \sec 3\theta$

**31.** $3\tan^3\theta - 3\tan^2\theta - \tan\theta + 1 = 0$

**32.** $4\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$

**33.** $2\operatorname{sen}\theta\tan\theta - \tan\theta = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

**34.** $\sec\theta\tan\theta - \cos\theta\cot\theta = \operatorname{sen}\theta$

**35-38** ■ **(a)** Grafique $f$ y $g$ en el rectángulo de vista dado y encuentre gráficamente los puntos de intersección, redondeados a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre algebraicamente los puntos de intersección de $f$ y $g$. Dé respuestas exactas.

**35.** $f(x) = 3\cos x + 1,\ g(x) = \cos x - 1;$ $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-2.5, 4.5]$

**36.** $f(x) = \operatorname{sen} 2x + 1,\ g(x) = 2\operatorname{sen} 2x + 1;$ $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.5, 3.5]$

**37.** $f(x) = \tan x,\ g(x) = \sqrt{3};\ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ por $[-10, 10]$

**38.** $f(x) = \operatorname{sen} x - 1,\ g(x) = \cos x;\ [-2\pi, 2\pi]$ por $[-2.5, 1.5]$

**39-42** ■ Use una Fórmula de la Adición o Sustracción para simplificar la ecuación. A continuación encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

**39.** $\cos\theta\cos 3\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 3\theta = 0$

**40.** $\cos\theta\cos 2\theta + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 2\theta = \frac{1}{2}$

**41.** $\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$

**42.** $\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta = 0$

**43-52** ■ Use una Fórmula de Semiángulo para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

**43.** $\operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta = 0$

**44.** $\tan\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\theta = 0$

**45.** $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

**46.** $\tan\theta + \cot\theta = 4\operatorname{sen} 2\theta$

**47.** $\cos 2\theta - \cos^2\theta = 0$

**48.** $2\operatorname{sen}^2\theta = 2 + \cos 2\theta$

**49.** $\cos 2\theta - \cos 4\theta = 0$

**50.** $\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} 6\theta = 0$

**51.** $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

**52.** $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$

**53-56** ■ Resuelva la ecuación usando primero una Fórmula de Suma a Producto.

**53.** $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta = 0$

**54.** $\cos 5\theta - \cos 7\theta = 0$

**55.** $\cos 4\theta + \cos 2\theta = \cos\theta$

**56.** $\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta = \cos 4\theta$

**57-62** ■ Use una calculadora de gráficas para hallar las soluciones de la ecuación, correctas a dos lugares decimales.

**57.** $\operatorname{sen} 2x = x$

**58.** $\cos x = \frac{x}{3}$

**59.** $2^{\operatorname{sen} x} = x$

**60.** $\operatorname{sen} x = x^3$

**61.** $\frac{\cos x}{1 + x^2} = x^2$

**62.** $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

## APLICACIONES

**63. Alcance de un proyectil** Si un proyectil es disparado con velocidad $v_0$ a un ángulo $\theta$, entonces su *alcance*, la distancia horizontal que recorre (en pies), está modelada por la función

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{32}$$

(Vea página 576.) Si $v_0 = 2200$ pies/s, ¿qué ángulo (en grados) debe escogerse para que el proyectil dé en el blanco en tierra a 5000 pies de distancia?

**64. Vibraciones amortiguadas** El desplazamiento de un resorte que vibra en movimiento armónico amortiguado está dado por

$$y = 4e^{-3t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

Encuentre los tiempos cuando el resorte está en su posición de equilibrio ($y = 0$).

**65. Horas de luz de día** En Filadelfia, el número de horas de luz de día en el día $t$ (donde $t$ es el número de días después del 1 de enero) está modelado por la función

$$L(t) = 12 + 2.83\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

**(a)** ¿Cuáles días del año tienen alrededor de 10 horas de luz de día?

**(b)** ¿Cuántos días del año tienen más de 10 horas de luz de día?

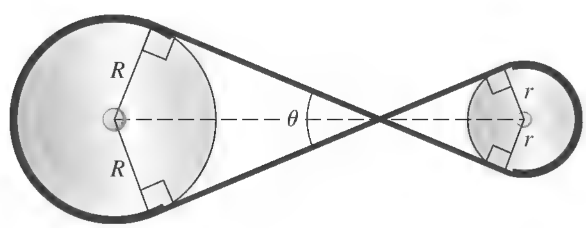
**66. Bandas y poleas** Una banda delgada de longitud $L$ rodea a dos poleas de radios $R$ y $r$, como se ve en la figura.

**(a)** Demuestre que el ángulo $\theta$ (en radianes) donde la banda se cruza satisface la ecuación

$$\theta + 2\cot\frac{\theta}{2} = \frac{L}{R + r} - \pi$$

[*Sugerencia:* Exprese $L$ en términos de $R$, $r$ y $\theta$ sumando las longitudes de las partes curvas y rectas de la banda.]

**(b)** Suponga que $R = 2.42$ pies, $r = 1.21$ pies y $L = 27.78$ pies. Encuentre $\theta$ al resolver la ecuación del inciso (a) gráficamente. Exprese su respuesta tanto en radianes como en grados.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**67. Una ecuación trigonométrica especial** ¿Qué es lo que hace que la ecuación $\operatorname{sen}(\cos x) = 0$ sea diferente de todas las otras ecuaciones que hemos visto en esta sección? Encuentre todas las soluciones de esta ecuación.

# CAPÍTULO 7 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Exprese las identidades recíprocas.
   (b) Exprese las identidades pitagóricas.
   (c) Exprese las identidades par-impar.
   (d) Exprese las identidades de cofunción.
2. Explique la diferencia entre una ecuación y una identidad.
3. ¿Cómo prueba usted una identidad trigonométrica?
4. (a) Exprese las Fórmulas de la Adición para Seno, Coseno y Tangente.
   (b) Exprese las Fórmulas de la Sustracción para Seno, Coseno y Tangente.
5. (a) Exprese las Fórmulas de Ángulo Doble para Seno, Coseno y Tangente.
   (b) Exprese las fórmulas para bajar potencias.
   (c) Exprese las Fórmulas de Semiángulo.
6. (a) Exprese las Fórmulas de Producto a Suma.
   (b) Exprese las Fórmulas de Suma a Producto.
7. Explique cómo resuelve usted una ecuación trigonométrica por factorización.
8. ¿Qué identidad usaría usted para resolver la ecuación $\cos x - \operatorname{sen} 2x = 0$?

## EJERCICIOS

**1-24** ■ Verifique la identidad.

1. $\operatorname{sen}\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$
2. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$
3. $\cos^2 x \csc x - \csc x = -\operatorname{sen} x$
4. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1 + \tan^2 x$
5. $\dfrac{\cos^2 x - \tan^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot^2 x - \sec^2 x$
6. $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \cos x}$
7. $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - \tan x}$
8. $(1 - \tan x)(1 - \cot x) = 2 - \sec x \csc x$
9. $\operatorname{sen}^2 x \cot^2 x + \cos^2 x \tan^2 x = 1$
10. $(\tan x + \cot x)^2 = \csc^2 x \sec^2 x$
11. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$
12. $\dfrac{\cos(x + y)}{\cos x \operatorname{sen} y} = \cot y - \tan x$
13. $\tan\dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x$
14. $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan x$
15. $\operatorname{sen}(x + y)\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
16. $\csc x - \tan\dfrac{x}{2} = \cot x$
17. $1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2} = \sec x$
18. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \cos 3x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + 2\operatorname{sen} 2x$
19. $\left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$
20. $\dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x} = \tan 2x$
21. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \sec x$
22. $(\cos x + \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2 = 2 + 2\cos(x + y)$
23. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
24. $\dfrac{\sec x - 1}{\operatorname{sen} x \sec x} = \tan\dfrac{x}{2}$

**25-28** ■ **(a)** Grafique $f$ y $g$. **(b)** ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Pruebe su respuesta.

25. $f(x) = 1 - \left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$
26. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$
27. $f(x) = \tan x \tan\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
28. $f(x) = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x, \quad g(x) = \cos 4x$

**29-30** ■ **(a)** Grafique la(s) función (es) y haga una conjetura, y **(b)** pruebe su conjetura.

29. $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 3x + \cos 6x$
30. $f(x) = \operatorname{sen} x \cot\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \cos x$

**31-48** ■ Resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

31. $4\operatorname{sen}\theta - 3 = 0$
32. $5\cos\theta + 3 = 0$
33. $\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$
34. $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

**35.** $2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen}\,x + 2 = 0$

**36.** $\text{sen}\,x - \cos x - \tan x = -1$

**37.** $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

**38.** $4\,\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3$

**39.** $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

**40.** $\text{sen}\,x = \cos 2x$

**41.** $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$

**42.** $\cos 2x \csc^2 x = 2\cos 2x$

**43.** $\tan \frac{1}{2}x + 2\,\text{sen}\,2x = \csc x$

**44.** $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

**45.** $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

**46.** $2\cos x - 3\tan x = 0$

**47.** $\cos x = x^2 - 1$

**48.** $e^{\text{sen}\,x} = x$

**49.** Si un proyectil es disparado con velocidad $v_0$ a un ángulo $\theta$, entonces la altura máxima que alcanza (en pies) está modelada por la función

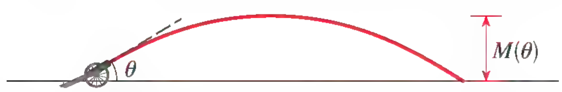
$$M(\theta) = \frac{v_0^2\,\text{sen}^2\theta}{64}$$

Suponga $v_0 = 400$ pies/s.

**(a)** ¿A qué ángulo $\theta$ debe ser disparado el proyectil para que la altura máxima que alcance sea de 2000 pies?

**(b)** ¿Es posible que el proyectil llegue a una altura de 3000 pies?

**(c)** Encuentre el ángulo $\theta$ para el que el proyectil llegará más alto.




**50.** El desplazamiento de un amortiguador de automóvil está modelado por la función

$$f(t) = 2^{-0.2t}\,\text{sen}\,4\pi t$$

Encuentre los tiempos cuando el amortiguador está en su posición de equilibrio (esto es, cuando $f(t) = 0$). [*Sugerencia:* $2^x > 0$ para toda $x$ real.]

**51-60** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

**51.** $\cos 15°$

**52.** $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{12}$

**53.** $\tan \dfrac{\pi}{8}$

**54.** $2\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$

**55.** $\text{sen}\,5° \cos 40° + \cos 5°\,\text{sen}\,40°$

**56.** $\dfrac{\tan 66° - \tan 6°}{1 + \tan 66° \tan 6°}$

**57.** $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} - \text{sen}^2\dfrac{\pi}{8}$

**58.** $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}$

**59.** $\cos 37.5° \cos 7.5°$

**60.** $\cos 67.5° + \cos 22.5°$

**61-66** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión dado que $\sec x = \frac{3}{2}$, $\csc y = 3$ y $x$ y $y$ están en el primer cuadrante.

**61.** $\text{sen}(x + y)$

**62.** $\cos(x - y)$

**63.** $\tan(x + y)$

**64.** $\text{sen}\,2x$

**65.** $\cos\dfrac{y}{2}$

**66.** $\tan\dfrac{y}{2}$

**67-68** ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

**67.** $\tan\left(2\cos^{-1}\frac{3}{7}\right)$

**68.** $\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{3}{4} + \cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$

**69-70** ■ Escriba la expresión como una expresión algebraica con la(s) variable(s).

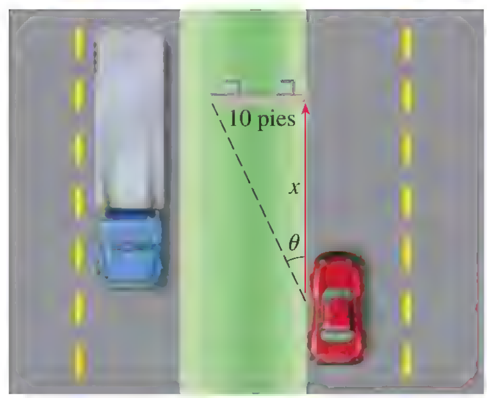
**69.** $\tan(2\tan^{-1}x)$

**70.** $\cos(\text{sen}^{-1}x + \cos^{-1}y)$

**71.** Una señal de carretera, de 10 pies de ancho, está adyacente a una calzada pavimentada, como se muestra en la figura. Cuando un conductor se aproxima a la señal, cambia el ángulo $\theta$ de visibilidad.

**(a)** Exprese el ángulo de visibilidad $\theta$ como función de la distancia $x$ entre el conductor y la señal.

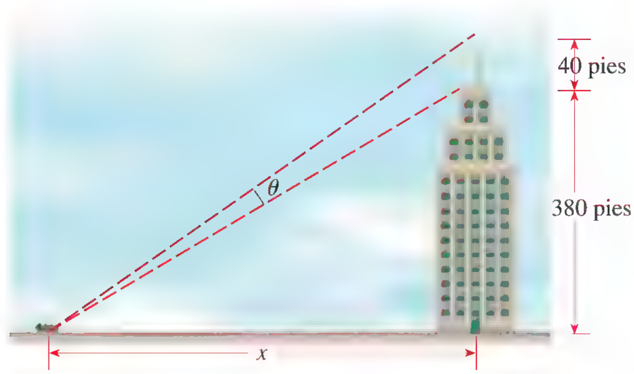
**(b)** La señal es legible cuando el ángulo de visibilidad es 2° o mayor. ¿A qué distancia $x$ se hace legible primeramente la señal?




**72.** Un edificio de 380 pies de alto soporta una torre de 40 pies para comunicaciones (vea la figura). Cuando un automovilista se aproxima al edificio, cambia el ángulo $\theta$ de visibilidad de la torre.

**(a)** Exprese el ángulo $\theta$ de visibilidad como función de la distancia $x$ entre el automovilista y el edificio.

**(b)** ¿A qué distancia del edificio el ángulo $\theta$ de visibilidad es tan grande como sea posible?



1. Verifique cada una de las identidades siguientes.

   (a) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

   (b) $\dfrac{\tan x}{1 - \cos x} = \csc x\,(1 + \sec x)$

   (c) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

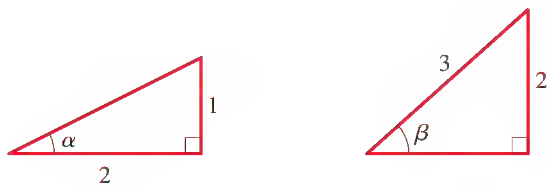
2. Sea $x = 2\operatorname{sen}\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Simplifique la expresión

$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

3. Encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones siguientes.

   (a) $\operatorname{sen} 8^\circ \cos 22^\circ + \cos 8^\circ \operatorname{sen} 22^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 75^\circ$ (c) $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$

4. Para los ángulos $\alpha$ y $\beta$ de las figuras, encuentre $\cos(\alpha + \beta)$.




5. (a) Escriba $\operatorname{sen} 3x \cos 5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

   (b) Escriba $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 5x$ como un producto de funciones trigonométricas.

6. Si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$ y $\theta$ está en el tercer cuadrante, encuentre $\tan(\theta/2)$.

7. Resuelva cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$, redondeada a cinco lugares decimales:

   (a) $3\operatorname{sen}\theta \quad 1 = 0$

   (b) $(2\cos\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$

   (c) $2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 2 = 0$

   (d) $\operatorname{sen} 2\theta - \cos\theta = 0$

8. Encuentre todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$, redondeado a cinco lugares decimales:

$$5\cos 2\theta = 2$$

9. Encuentre el valor exacto de $\cos\left(2\tan^{\,1}\frac{9}{40}\right)$.

10. Reescriba la expresión como una función algebraica de $x$ y $y$:

$$\operatorname{sen}(\cos^{\,1} x - \tan^{\,1} y)$$

ENFOQUE SOBRE MODELADO

# Ondas viajeras y estacionarias

Hemos aprendido que la posición de una partícula en movimiento armónico simple está descrita por una función de la forma $y = A \text{ sen } \omega t$ (vea Sección 5.6). Por ejemplo, si una cuerda sube y baja como en la Figura 1, entonces el punto rojo sobre la cuerda sube y baja en movimiento armónico simple. Desde luego, lo mismo se cumple para cada punto de la cuerda.

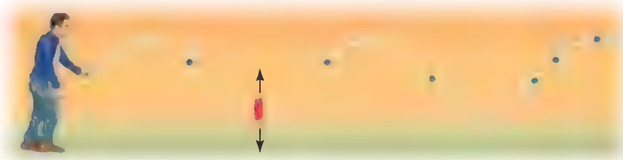


**FIGURA 1**

¿Qué función describe la forma de toda la cuerda? Si fijamos un instante en el tiempo ($t = 0$) y tomamos una instantánea de la cuerda, obtenemos la forma de la Figura 2, que está modelada por

$$y = A \text{ sen } kx$$

donde $y$ es la altura de la cuerda arriba del eje $x$ en el punto $x$.

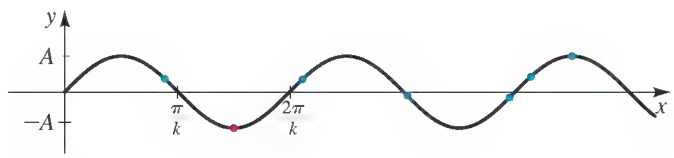



**FIGURA 2** $y = A \text{ sen } kx$

## Ondas viajeras

Si tomamos fotos de la cuerda en otros instantes, como en la Figura 3, parece que las ondas de la cuerda "viajan" o se desplazan a la derecha.

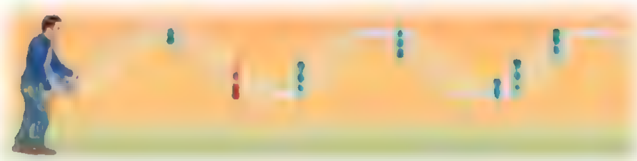


**FIGURA 3**

La **velocidad** de la onda es la rapidez a la que se mueve a la derecha. Si la onda tiene velocidad $v$, entonces se mueve a la derecha una distancia $vt$ en el tiempo $t$. Por lo tanto, la gráfica de la onda desplazada en el tiempo $t$ es

$$y(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt)$$

Esta función modela la posición de cualquier punto $x$ en la cuerda en cualquier tiempo $t$. Usamos la notación $y(x, t)$ para indicar que la función depende de las *dos* variables $x$ y $y$. A continuación veamos la forma en que esta función modela el movimiento de la cuerda.

- **Si fijamos $x$**, entonces $y(x, t)$ es una función sólo de $t$, lo cual da la posición del punto fijo $x$ en el tiempo $t$.
- **Si fijamos $t$**, entonces $y(x, t)$ es una función sólo de $x$, cuya gráfica es la forma de la cuerda en el tiempo fijo $t$.

## EJEMPLO 1 | Una onda viajera

Una onda viajera está descrita por la función

$$y(x, t) = 3 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right), \qquad x \geq 0$$

**(a)** Encuentre la función que modela la posición del punto $x = \pi/6$ en cualquier tiempo $t$. Observe que el punto se mueve en movimiento armónico simple.

**(b)** Trace la forma de la onda cuando $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ y $2.0$. ¿La onda parece estar viajando a la derecha?

**(c)** Encuentre la velocidad de la onda.

### SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $x = \pi/6$ obtenemos

$$y\left(\frac{\pi}{6}, t\right) = 3 \text{ sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}t\right) = 3 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t\right)$$

La función $y = 3 \text{ sen}(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t)$ describe movimiento armónico simple con amplitud 3 y período $2\pi/(\pi/2) = 4$.

**(b)** Las gráficas se ilustran en la Figura 4. Cuando $t$ aumenta, la onda se mueve a la derecha.

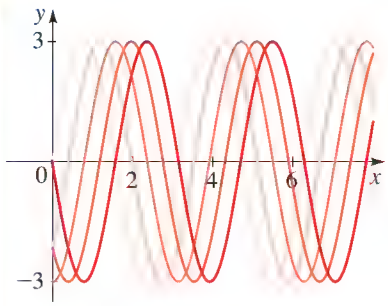



**FIGURA 4** Onda viajera

**(c)** Expresamos la función dada en la forma normal $y(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt)$:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 3 \text{ sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right) && \text{Dado} \\ &= 3 \text{ sen } 2\left(x - \frac{\pi}{4}t\right) && \text{Factorice 2} \end{aligned}$$

Comparando esto con la forma normal, vemos que la onda se mueve con velocidad $v = \pi/4$.

## Ondas estacionarias

Si dos ondas están viajando a lo largo de la misma cuerda, entonces el movimiento de la cuerda está determinado por la suma de las dos ondas. Por ejemplo, si la cuerda está unida a una pared, entonces las ondas rebotan con la misma amplitud y velocidad pero en dirección opuesta. En este caso, una onda está descrita por $y = A \text{ sen } k(x - vt)$ y la onda reflejada por $y = A \text{ sen } k(x + vt)$. La onda resultante es

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \text{ sen } k(x - vt) + A \text{ sen } k(x + vt) && \text{Sume las dos ondas} \\ &= 2A \text{ sen } kx \cos kvt && \text{Fórmula de Suma a Producto} \end{aligned}$$

Los puntos donde $kx$ es un múltiplo de $2\pi$ son especiales, porque en estos puntos $y = 0$ para cualquier tiempo $t$. En otras palabras, estos puntos nunca se mueven. Tales puntos reciben el nombre de **nodos**. La Figura 5 muestra la gráfica de la onda para varios valores de $t$. Vemos que la onda no viaja, sino que simplemente vibra hacia arriba y abajo. Tal onda recibe el nombre de **onda estacionaria**.

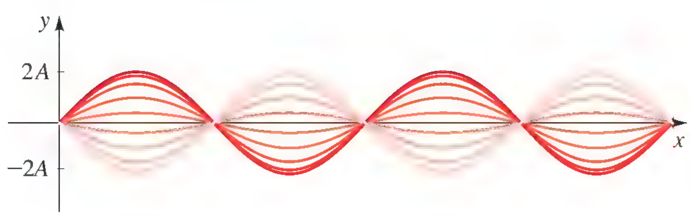



**FIGURA 5** Una onda estacionaria

## EJEMPLO 2 | Una onda estacionaria

Se generan ondas estacionarias en cada extremo de un tanque de ondas de 30 pies de largo, con ecuaciones

$$y = 1.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right)$$

y

$$y = 1.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right)$$

**(a)** Encuentre la ecuación de la onda combinada, y encuentre los nodos.

**(b)** Trace la gráfica para $t = 0, 0.17, 0.34, 0.51, 0.68, 0.85$ y $1.02$. ¿Ésta es una onda estacionaria?

### SOLUCIÓN

**(a)** La onda combinada se obtiene al sumar dos ecuaciones:

$$y = 1.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right) + 1.5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right) \qquad \text{Sume las dos ondas}$$

$$= 3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}x \cos 3t \qquad \text{Fórmula de Suma a Producto}$$

Los nodos se presentan en los valores de $x$ para los cuales $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}x = 0$, es decir, donde $\frac{\pi}{5}x = k\pi$ ($k$ es un entero). Despejando $x$, obtenemos $x = 5k$. Por lo tanto, los nodos se presentan en

$$x = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$$

**(b)** Las gráficas se muestran en la Figura 6. De las gráficas vemos que ésta es una onda estacionaria.

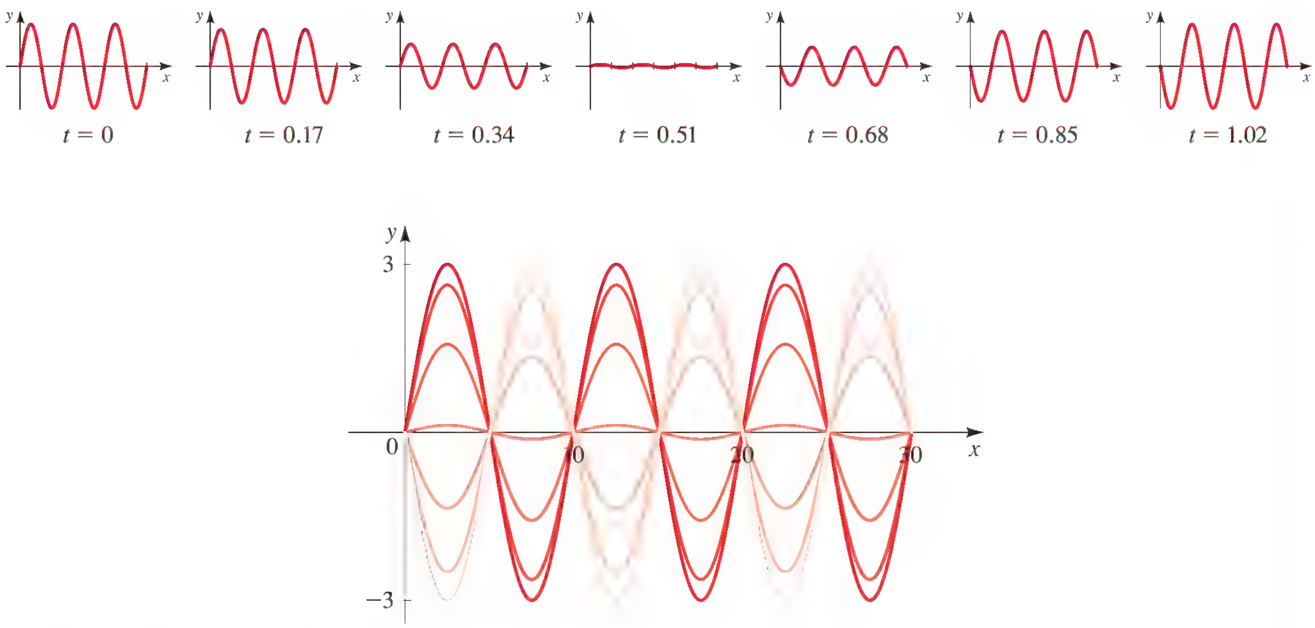
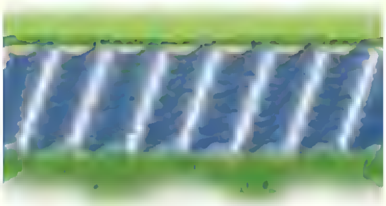



**FIGURA 6** $y(x, t) = 3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}x \cos 3t$



## PROBLEMAS

1. **Onda en un canal** Una onda en la superficie de un largo canal está descrita por la función

$$y(x, t) = 5 \operatorname{sen}\left(2x \quad \frac{\pi}{2}t\right), \quad x \geq 0$$

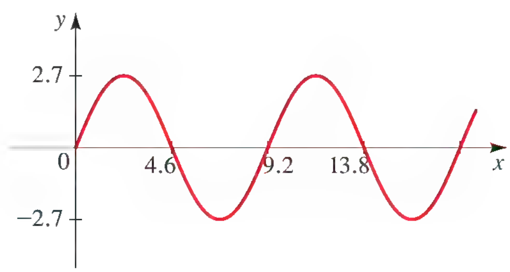
**(a)** Encuentre la función que modele la posición del punto $x = 0$ en cualquier tiempo $t$.
**(b)** Trace la forma de la onda cuando $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2$ y $1.6$. ¿Ésta es una onda viajera?
**(c)** Encuentre la velocidad de la onda.

2. **Onda en una cuerda** Las ondas viajeras son generadas en cada extremo de una cuerda de 24 pies de largo, estirada de manera tensa, con ecuaciones

$$y = 0.2 \operatorname{sen}(1.047x - 0.524t) \qquad \text{y} \qquad y = 0.2 \operatorname{sen}(1.047x + 0.524t)$$

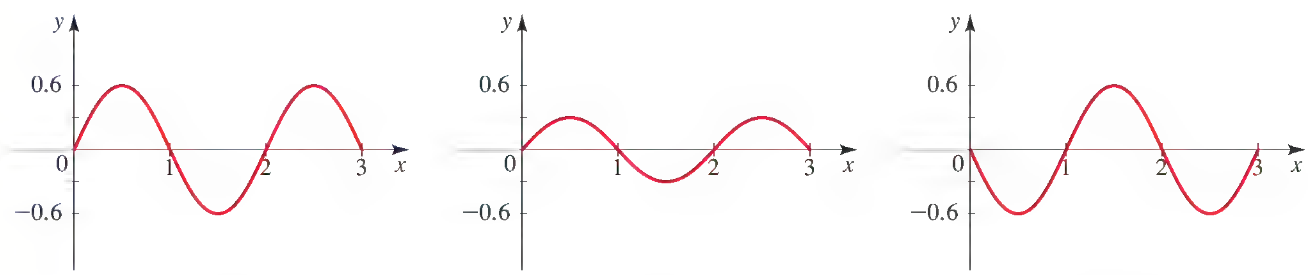
**(a)** Encuentre la ecuación de la onda combinada, y encuentre los nodos.
**(b)** Trace la gráfica para $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y $6$. ¿Ésta es una onda estacionaria?

3. **Onda viajera** Una onda viajera está graficada en el instante $t = 0$. Si se está moviendo a la derecha con velocidad 6, encuentre una ecuación de la forma $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - kvt)$ para esta onda.



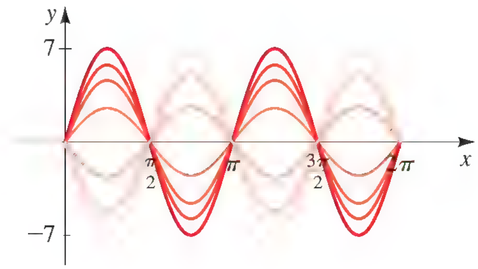

4. **Onda viajera** Una onda viajera tiene período $2\pi/3$, amplitud 5 y velocidad 0.5.
**(a)** Encuentre la ecuación de la onda.
**(b)** Trace la gráfica para $t = 0, 0.5, 1, 1.5$ y $2$.

5. **Onda estacionaria** Una onda estacionaria con amplitud 0.6 se grafica a varios tiempos $t$ como se ve en la figura. Si la vibración tiene una frecuencia de 20 Hz, encuentre una ecuación de la forma $y(x, t) = A \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta t$ que modela esta onda.




$t = 0$ s $\qquad$ $t = 0.010$ s $\qquad$ $t = 0.025$ s

**6. Onda estacionaria** Una onda estacionaria tiene una amplitud máxima de 7 y nodos en 0, $\pi/2$, $\pi$, $3\pi/2$, $2\pi$, como se muestra en la figura. Cada punto que no es un nodo sube y baja con período $4\pi$. Encuentre una función de la forma $y(x, t) = A$ sen $\alpha x$ cos $\beta t$ que modele esta onda.




**7. Cuerda en vibración** Cuando vibra una cuerda de violín, el sonido producido resulta de una combinación de ondas estacionarias que tienen nodos espaciados de manera uniforme. La figura ilustra algunas de las posibles ondas estacionarias. Supongamos que la cuerda tiene longitud $\pi$.

**(a)** Para $t$ fijo, la cuerda tiene la forma de una curva sen $y = A$ sen $\alpha x$. Encuentre el valor apropiado de $\alpha$ por cada una de las ondas estacionarias ilustradas.

**(b)** ¿Se observa un patrón en los valores de $\alpha$ que se hallaron en la parte (a)?¿Cuáles serían los siguientes dos valores de $\alpha$? Trace gráficas aproximadas de las ondas estacionarias asociadas con estos nuevos valores de $\alpha$.

**(c)** Suponga que para $t$ fijo, cada punto en la cuerda que no es un nodo vibra con frecuencia 440 Hz. Encuentre el valor $\beta$ para el cual una ecuación de la forma $y = A \cos \beta t$ modelaría este movimiento.

**(d)** Combine sus respuestas para los incisos (a) y (c) para hallar funciones de la forma $y(x, t) = A$ sen $\alpha x$ cos $\beta t$ que modele cada una de las ondas estacionarias de la figura. (Suponga que $A = 1$.)

**8. Ondas en un tubo** Las ondas estacionarias en una cuerda de violín deben tener nodos en los extremos de la cuerda porque la cuerda está fija en esos puntos extremos. Pero éste no tiene que ser el caso con ondas de sonido en un tubo (por ejemplo el de una flauta o de un tubo de órgano). La figura muestra algunas posibles ondas estacionarias en un tubo.

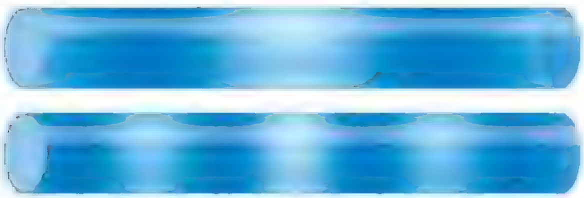
Suponga que una onda estacionaria en un tubo de 37.7 pies de largo está modelada por la función

$$y(x, t) = 0.3 \cos \tfrac{1}{2}x \cos 50\pi t$$

Aquí, $y(x, t)$ representa la variación de la presión normal de aire en el punto a $x$ pies del extremo del tubo, en un tiempo de $t$ segundos.

**(a)** ¿En qué puntos $x$ están localizados los nodos? ¿Los puntos extremos del tubo son nodos?

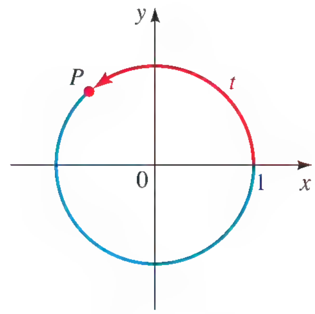
**(b)** ¿A qué frecuencia vibra el aire en puntos que no son nodos?



# EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO CAPÍTULOS 5, 6 Y 7

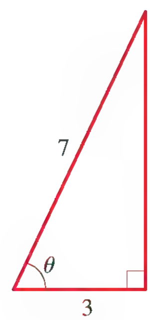
**1.** El punto $P(x, y)$ mostrado en las figuras tiene coordenadas $y\sqrt{5}/3$. Encuentre:

**(a)** $\text{sen}\, t$ **(b)** $\cos t$ **(c)** $\tan t$ **(d)** $\csc t$




**2.** Para el ángulo $\theta$ que se muestra en la figura, encuentre:

**(a)** $\text{sen}\, \theta$ **(b)** $\sec \theta$ **(c)** $\cot \theta$




**3.** Encuentre el valor exacto:

**(a)** $\cos \dfrac{7\pi}{6}$ **(b)** $\tan 135°$ **(c)** $\csc 240°$ **(d)** $\text{sen}\left(\dfrac{9\pi}{2}\right)$

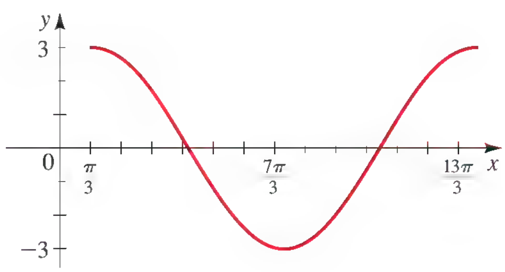
**4.** Suponga que $\cos t = \dfrac{7}{25}$ y $t < 0$. Encuentre los valores de $\text{sen}\, t$, $\tan t$, $\cot t$, $\sec t$ y $\csc t$.

**5.** Sea $f(x) = -2\,\text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

**(a)** Encuentre la amplitud, período y desfase de $f$.

**(b)** Trace la gráfica de un período completo de $f$.

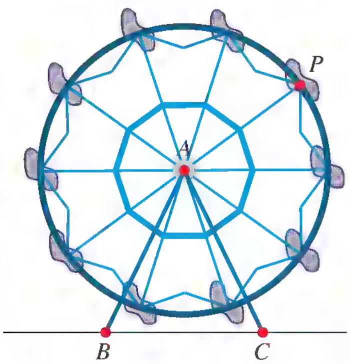
**6.** Un período de una función de la forma $y = a\cos k(x - b)$ se muestra en la figura. Determine la función.



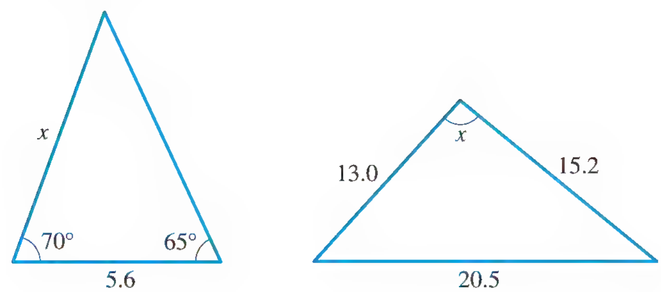
**7.** La figura siguiente muestra un modelo de rueda "de la fortuna" que un niño construyó usando piezas de construcción de juguete. La rueda tiene un radio de 40 cm, y el centro de la rueda está 45 cm arriba del piso. Un motor eléctrico hace girar la rueda a 4 rotaciones por minuto.

**(a)** Sea $h(t)$ la distancia vertical entre el punto $P$ y el piso en el tiempo $t$. Exprese la función $h$ en la forma $h(t) = a + b \cos kt$. (Suponga que en $t = 0$ el punto $P$ está en el punto más bajo de su viaje.)

**(b)** Las vigas de soporte $AB$ y $AC$ miden 50 cm de largo cada una. Encuentre la distancia entre $B$ y $C$.




**8.** Encuentre el lado o ángulo marcado $x$.




(a) (b)

**9.** Verifique cada una de las identidades siguientes.

**(a)** $\dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta + 1}$ **(b)** $8 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta = 1 - \cos 4\theta$

**10.** Escriba $\cos 3x + \cos 4x$ como producto de funciones trigonométricas.

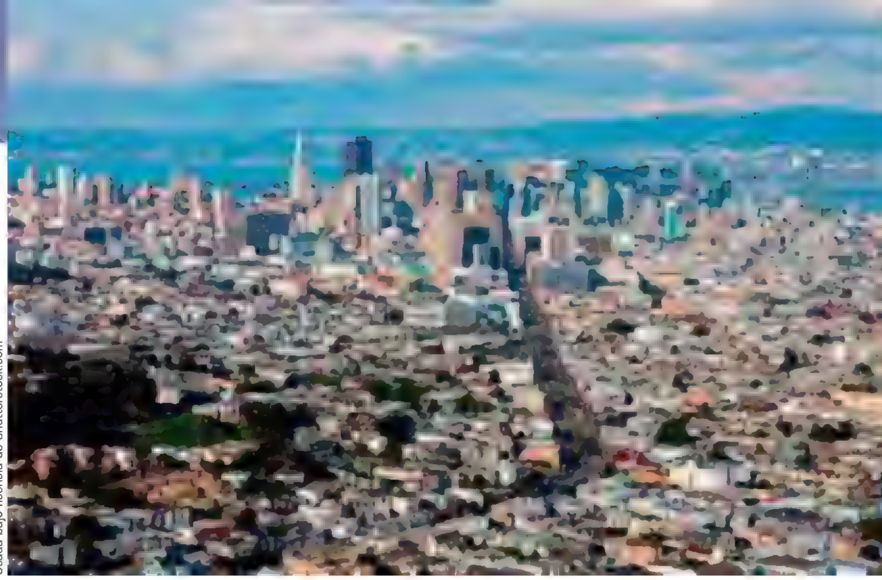
**11.** **(a)** ¿Cuáles son el dominio y rango de la función $f(x) = \cos^{-1}x$? Trace una gráfica de esta función.

**(b)** Encuentre el valor exacto de $\cos^{-1}(\cos(7\pi/6))$.

**(c)** Exprese $\tan(\cos^{-1}x)$ como función algebraica de $x$.

**12.** Encuentre todas las soluciones de la ecuación $\cos 2x - \operatorname{sen} x = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

CAPÍTULO 8

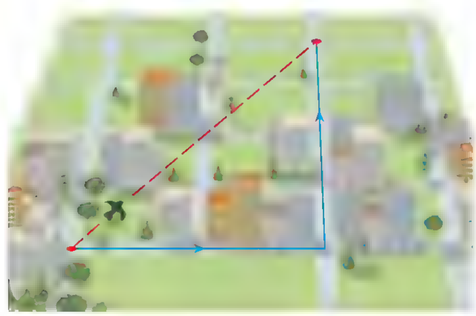




# Coordenadas polares y ecuaciones paramétricas



En la Sección 1.8 aprendimos a graficar puntos en coordenadas rectangulares. En este capítulo estudiamos una forma diferente de localizar puntos en el plano, llamada *coordenadas polares.* Usar coordenadas polares es como describir un lugar en una ciudad diciendo que está en la esquina de la Calle y la Avenida 4; estas direcciones ayudarán a un taxista a hallar el lugar. Pero también podemos describir este mismo lugar "a vuelo de pájaro"; podemos decir que está a 1.5 millas al noreste del Ayuntamiento. Por lo tanto, en lugar de especificar el lugar con respecto a una red de calles y avenidas, lo especificamos dando su distancia y dirección desde un punto de referencia fijo. Esto es lo que hacemos en el sistema de coordenadas polares. En coordenadas polares, el lugar de un punto está dado por un par ordenado de números: la distancia del punto desde el origen (o polo) y el ángulo desde el eje $x$ positivo.



¿Por qué estudiamos diferentes sistemas de coordenadas? Porque ciertas curvas se describen en forma más natural en un sistema de coordenadas que en otro. Por ejemplo, en coordenadas rectangulares las rectas y parábolas tienen ecuaciones sencillas, pero las ecuaciones de circunferencias son más bien complicadas. Veremos que en coordenadas polares las circunferencias tienen ecuaciones muy sencillas.

# 8.1 COORDENADAS POLARES

**Definición de coordenadas polares ▶ Relación entre coordenadas polares y rectangulares ▶ Ecuaciones polares**

En esta sección definimos coordenadas polares, y aprendemos la forma en que las coordenadas polares están relacionadas con coordenadas rectangulares.

## ▼ Definición de coordenadas polares

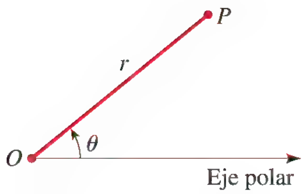



**FIGURA 1**

El **sistema de coordenadas polares** usa distancias y direcciones para especificar la posición de un punto en un plano. Para establecer este sistema, escogemos un punto fijo $O$ del plano llamado **polo** (u **origen**) y de $O$ trazamos un rayo (media recta) llamado **eje polar** como en la Figura 1. A continuación, a cada punto $P$ se le pueden asignar coordenadas polares $P(r, \theta)$ donde

$r$ es la *distancia* de $O$ a $P$

$\theta$ es el ángulo entre el eje polar y el segmento $OP$

Usamos la convención de que $\theta$ es positivo si se mide en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj desde el eje polar, o negativo si se mide en la dirección de las manecillas del reloj. Si $r$ es negativa, entonces $P(r, \theta)$ se define como el punto que se encuentra a $|r|$ unidades del polo en la dirección opuesta a la dada por $\theta$ (vea Figura 2).

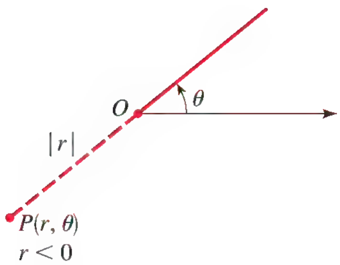



**FIGURA 2**

### EJEMPLO 1 | Localizar puntos en coordenadas polares

Localice los puntos cuyas coordenadas polares se dan.

**(a)** $(1, 3\pi/4)$ **(b)** $(3, -\pi/6)$ **(c)** $(3, 3\pi)$ **(d)** $(-4, \pi/4)$

**SOLUCIÓN** Los puntos están localizados en la Figura 3. Observe que el punto del inciso (d) se encuentra a 4 unidades del origen a lo largo del ángulo $5\pi/4$, porque el valor dado de $r$ es negativo.

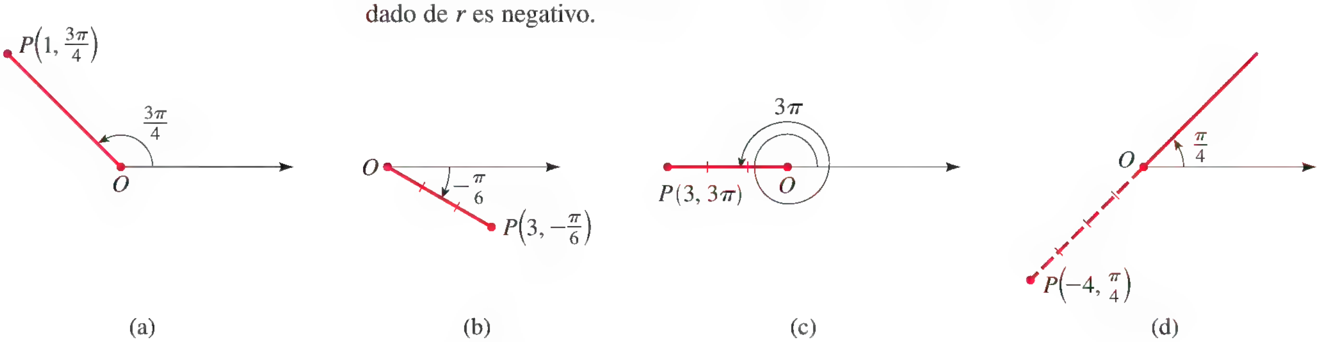



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 3 Y 5 ■

Nótese que las coordenadas $(r, \theta)$ y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto, como se ve en la Figura 4. Además, como los ángulos $\theta + 2n\pi$ (donde $n$ es cualquier entero) tienen todos el mismo lado terminal que el ángulo $\theta$, cada punto del plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares. De hecho, cualquier punto $P(r, \theta)$ también puede estar representado por

$$P(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad P(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

para cualquier entero $n$.

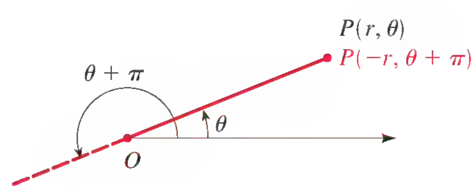



**FIGURA 4**

**EJEMPLO 2 | Diferentes coordenadas polares para el mismo punto**

**(a)** Grafique el punto con coordenadas polares $P(2, \pi/3)$.

**(b)** Encuentre otras dos representaciones de coordenadas polares de $P$ con $r > 0$ y dos con $r < 0$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La gráfica se muestra en la Figura 5(a).

**(b)** Otras representaciones con $r > 0$ son

$$\left(2, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(2, \frac{7\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } 2\pi \text{ a } \theta$$

$$\left(2, \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(2, -\frac{5\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } -2\pi \text{ a } \theta$$

Otras representaciones con $r < 0$ son

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(-2, \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } r \text{ con } -r \text{ y sume } \pi \text{ a } \theta$$

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} - \pi\right) = \left(-2, -\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } r \text{ con } -r \text{ y sume } -\pi \text{ a } \theta$$

Las gráficas de la Figura 5 explican por qué estas coordenadas representan el mismo punto.

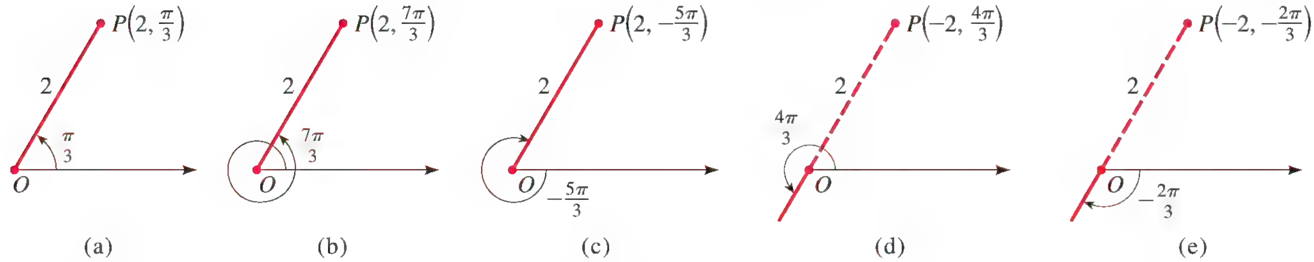


**FIGURA 5**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Es frecuente que aparezcan situaciones en las que sea necesario considerar coordenadas polares y rectangulares simultáneamente. La conexión entre los dos sistemas se ilustra en la Figura 6, donde el eje polar coincide con el eje $x$ positivo. Las fórmulas del cuadro siguiente se obtienen de la figura, usando las definiciones de las funciones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras. (Aun cuando hemos descrito el caso donde $r > 0$ y $\theta$ es agudo, las fórmulas se cumplen para cualquier ángulo $\theta$ y para cualquier valor de $r$.)

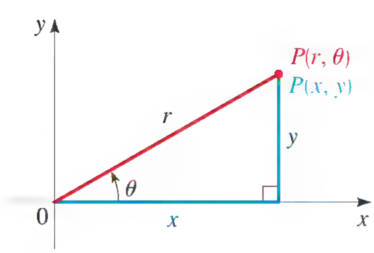



**FIGURA 6**

**RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES**

**1.** Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares, use las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen}\theta$$

**2.** Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares, use las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

**EJEMPLO 3** | Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre coordenadas rectangulares para el punto que tiene coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$.

**SOLUCIÓN** Como $r = 4$ y $\theta = 2\pi/3$, tenemos

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Entonces el punto tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2\sqrt{3})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

**EJEMPLO 4** | Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

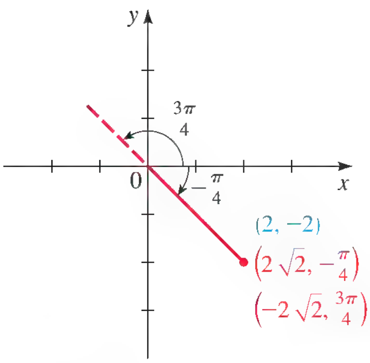



**FIGURA 7**

Encuentre coordenadas polares para el punto que tiene coordenadas rectangulares $(2, -2)$.

**SOLUCIÓN** Usando $x = 2$, $y = -2$, tenemos

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

de modo que $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$. También

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

por lo que $\theta = 3\pi/4$ o $-\pi/4$. Como el punto $(2, -2)$ se encuentra en el cuarto cuadrante (vea Figura 7), podemos representarlo en coordenadas polares como $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$ o $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Nótese que las ecuaciones que relacionan coordenadas polares y rectangulares no determinan $r$ o $\theta$ de manera única. Cuando usamos estas ecuaciones para hallar las coordenadas polares de un punto, debemos tener cuidado de que los valores que escojamos para $r$ y $\theta$ nos den un punto en el cuadrante correcto, como hicimos en el Ejemplo 4.

## Ecuaciones polares

En los Ejemplos 3 y 4 convertimos puntos de un sistema de coordenadas a otro. A continuación consideramos el mismo problema para ecuaciones.

**EJEMPLO 5** | Convertir una ecuación de coordenadas rectangulares a polares

Exprese la ecuación $x^2 = 4y$ en coordenadas polares.

**SOLUCIÓN** Usamos las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$:

| | |
|---|---|
| $x^2 = 4y$ | Ecuación rectangular |
| $(r\cos\theta)^2 = 4(r\,\text{sen}\,\theta)$ | Sustituya $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ |
| $r^2\cos^2\theta = 4r\,\text{sen}\,\theta$ | Desarrolle |
| $r = 4\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$ | Divida entre $r\cos^2\theta$ |
| $r = 4\sec\theta\tan\theta$ | Simplifique |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

Como lo muestra el Ejemplo 5, convertir de coordenadas rectangulares a polares es sencillo: simplemente sustituya $x$ por $r \cos \theta$ y $y$ por $r$ sen $\theta$, y a continuación simplifique. Pero, convertir ecuaciones polares a forma rectangular con frecuencia requiere de pensar más.

## EJEMPLO 6 | Convertir ecuaciones de coordenadas polares a rectangulares

Exprese la ecuación polar en coordenadas rectangulares. Si posible, determine la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular.

**(a)** $r = 5 \sec \theta$ **(b)** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **(c)** $r = 2 + 2 \cos \theta$

### SOLUCIÓN

**(a)** Como $\sec \theta = 1/\cos \theta$, multiplicamos ambos lados por $\cos \theta$:

$$r = 5 \sec \theta \qquad \text{Ecuación polar}$$

$$r \cos \theta = 5 \qquad \text{Multiplique por } \cos \theta$$

$$x = 5 \qquad \text{Sustituya } x = r \cos \theta$$

La gráfica de $x = 5$ es la recta vertical de la Figura 8.

**(b)** Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $r$, porque entonces podemos usar las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y $r \operatorname{sen} \theta = y$:

$$r = 2 \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Ecuación polar}$$

$$r^2 = 2r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{Multiplique por } r$$

$$x^2 + y^2 = 2y \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r \operatorname{sen} \theta = y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \text{Reste } 2y$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \qquad \text{Complete el cuadrado en } y$$

Ésta es la ecuación de una circunferencia de radio 1 con centro en el punto (0, 1), y está graficada en la Figura 9.

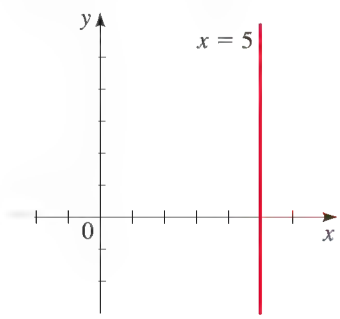



**FIGURA 8**

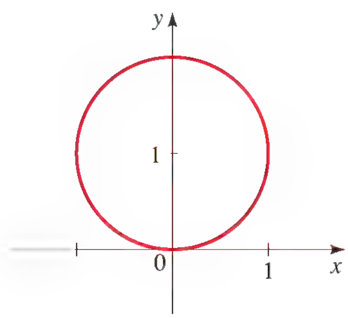



**FIGURA 9**

**(c)** Primero multiplicamos ambos lados de la ecuación por $r$:

$$r^2 = 2r + 2r \cos \theta$$

Usando $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r \cos \theta$, podemos convertir dos términos de la ecuación en coordenadas rectangulares, pero eliminar la $r$ restante requiere más trabajo:

$$x^2 + y^2 = 2r + 2x \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r \cos \theta = x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 2r \qquad \text{Reste } 2x$$

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4r^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados}$$

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

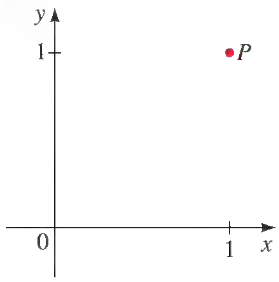
En este caso la ecuación rectangular se ve más complicada que la ecuación polar. Aun cuando no podemos determinar fácilmente la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular, veremos en la siguiente sección cómo graficarla usando la ecuación polar.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53, 55** Y **57**

# 8.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

1. Podemos describir la ubicación de un punto en el plano usando diferentes sistemas de________. El punto $P$ mostrado en la figura tiene coordenadas rectangulares ( , ) y coordenadas polares ( , ).




2. Sea $P$ un punto en el plano.
   (a) Si $P$ tiene coordenadas polares $(r, \theta)$ entonces tiene coordenadas rectangulares $(x, y)$ donde $x =$ _______ y $y =$ _______.
   (b) Si $P$ tiene coordenadas rectangulares $(x, y)$ entonces tiene coordenadas polares $(r, \theta)$ donde $r^2 =$ _______ y $\tan \theta =$ _______.

## HABILIDADES

**3-8** ■ Localice el punto que tienen las coordenadas polares dadas.

**3.** $(4, \pi/4)$ **4.** $(1, 0)$ **5.** $(6, -7\pi/6)$

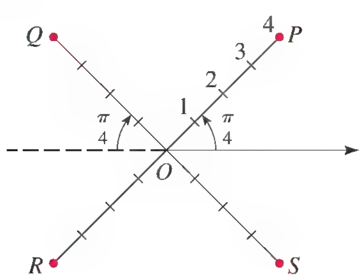
**6.** $(3, -2\pi/3)$ **7.** $(-2, 4\pi/3)$ **8.** $(-5, -17\pi/6)$

**9-14** ■ Localice el punto que tienen las coordenadas polares dadas. A continuación, dé otras dos representaciones de coordenadas del punto, una con $r < 0$ y la otra con $r > 0$.

**9.** $(3, \pi/2)$ **10.** $(2, 3\pi/4)$ **11.** $(-1, 7\pi/6)$

**12.** $(-2, -\pi/3)$ **13.** $(-5, 0)$ **14.** $(3, 1)$

**15-22** ■ Determine cuál punto de la figura, $P$, $Q$, $R$ o $S$, tiene las coordenadas polares.




**15.** $(4, 3\pi/4)$ **16.** $(4, -3\pi/4)$

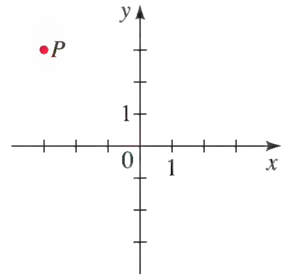
**17.** $(-4, -\pi/4)$ **18.** $(-4, 13\pi/4)$

**19.** $(4, -23\pi/4)$ **20.** $(-4, 23\pi/4)$

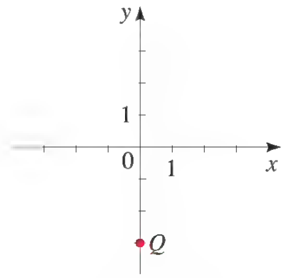
**21.** $(-4, 101\pi/4)$ **22.** $(4, 103\pi/4)$

**23-24** ■ Un punto está graficado en forma rectangular. Encuentre coordenadas polares para el punto, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

**23.**

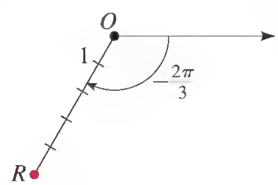



**24.**

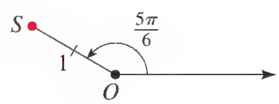



**25-26** ■ Un punto está graficado en forma polar. Encuentre sus coordenadas rectangulares.

**25.**




**26.**




**27-34** ■ Encuentre las coordenadas rectangulares para el punto cuyas coordenadas polares se dan.

**27.** $(4, \pi/6)$ **28.** $(6, 2\pi/3)$

**29.** $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ **30.** $(-1, 5\pi/2)$

**31.** $(5, 5\pi)$ **32.** $(0, 13\pi)$

**33.** $(6\sqrt{2}, 11\pi/6)$ **34.** $(\sqrt{3}, -5\pi/3)$

**35-42** ■ Convierta las coordenadas rectangulares en coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

**35.** $(-1, 1)$ **36.** $(3\sqrt{3}, -3)$

**37.** $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$ **38.** $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$

**39.** $(3, 4)$ **40.** $(1, -2)$

**41.** $(-6, 0)$ **42.** $(0, -\sqrt{3})$

**43-48** ■ Convierta la ecuación a forma polar.

**43.** $x = y$ **44.** $x^2 + y^2 = 9$

**45.** $y = x^2$ **46.** $y = 5$

**47.** $x = 4$ **48.** $x^2 - y^2 = 1$

**49-68** ■ Convierta la ecuación polar a coordenadas rectangulares.

**49.** $r = 7$ **50.** $r = -3$

**51.** $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ **52.** $\theta = \pi$

**53.** $r \cos \theta = 6$ **54.** $r = 2 \csc \theta$

**55.** $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

**56.** $r = 6 \cos \theta$

**57.** $r = 1 + \cos \theta$

**58.** $r = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$

**59.** $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$

**60.** $r = 2 - \cos \theta$

**61.** $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$

**62.** $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

**63.** $r = \dfrac{4}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$

**64.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$

**65.** $r^2 = \tan \theta$

**66.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

**67.** $\sec \theta = 2$

**68.** $\cos 2\theta = 1$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**69. La Fórmula de la Distancia en Coordenadas Polares**

**(a)** Use la Ley de Cosenos para demostrar que la distancia entre los puntos polares $(r_1, \theta_1)$ y $(r_2, \theta_2)$ es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

**(b)** Encuentre la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 3\pi/4)$ y $(1, 7\pi/6)$, usando la fórmula del inciso (a).

**(c)** Ahora convierta los puntos del inciso (b) a coordenadas rectangulares. Encuentre la distancia entre ellos usando la Fórmula de la Distancia. ¿Obtiene la misma respuesta?

# 8.2 GRÁFICAS DE ECUACIONES POLARES

Gráficas de ecuaciones polares ▶ Simetría ▶ Gráficas de ecuaciones polares con calculadora graficadora

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$ está formada por todos los puntos $P$ que tienen al menos una representación polar $(r, \theta)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Muchas curvas que aparecen en matemáticas y sus aplicaciones son representadas en forma más fácil y natural por ecuaciones polares que por ecuaciones rectangulares.

## ▼ Gráficas de ecuaciones polares

Una cuadrícula rectangular es útil para localizar puntos en coordenadas rectangulares (vea Figura 1(a)). Para localizar puntos en coordenadas polares, es conveniente usar una cuadrícula formada por circunferencias centradas en el polo y rayos que emanan del polo, como en la Figura 1(b). Usaremos tales cuadrículas para ayudarnos a trazar gráficas polares.

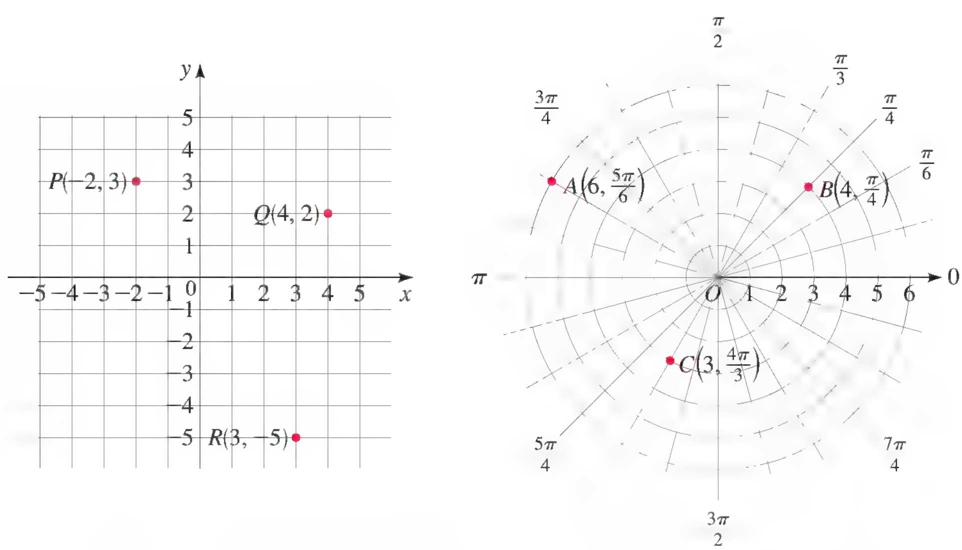



**FIGURA 1** (a) Cuadrícula para coordenadas rectangulares (b) Cuadrícula para coordenadas polares

En los Ejemplos 1 y 2 vemos que las circunferencias centradas en el origen y las rectas que pasan por el origen tienen ecuaciones particularmente sencillas en coordenadas polares.

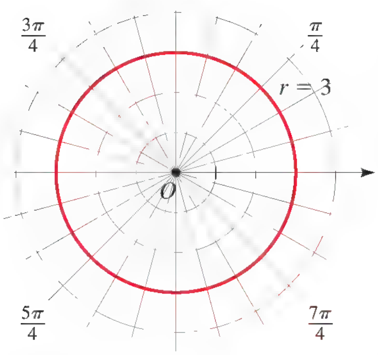



**FIGURA 2**

## EJEMPLO 1 | Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación $r = 3$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

**SOLUCIÓN** La gráfica está formada por todos los puntos cuya coordenada $r$ es 3, es decir, todos los puntos que están a 3 unidades de distancia del origen. Por lo tanto, la gráfica es una circunferencia de radio 3 con centro en el origen, como se ve en la Figura 2.

Si se elevan al cuadrado ambos lados, obtenemos

$$r^2 = 3^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{Sustituya } r^2 = x^2 + y^2$$

Entonces, la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = 9$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

En general, la gráfica de la ecuación $r = a$ es una circunferencia de radio $|a|$ con centro en el origen. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, vemos que la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = a^2$.

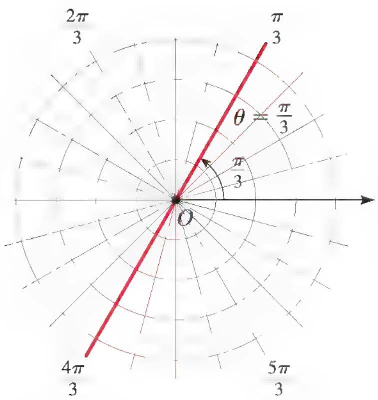



**FIGURA 3**

## EJEMPLO 2 | Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación $\theta = \pi/3$, y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

**SOLUCIÓN** La gráfica está formada por todos los puntos cuya coordenada $\theta$ es $\pi/3$. Ésta es la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar (vea Figura 3). Observe que los puntos $(r, \pi/3)$ sobre la recta con $r > 0$ se encuentran en el primer cuadrante, mientras que los puntos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. Si el punto $(x, y)$ está sobre esta recta, entonces

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la ecuación rectangular de esta recta es $y = \sqrt{3}x$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

Para trazar una curva polar cuya gráfica no es tan obvia como las de los ejemplos precedentes, localizamos puntos calculados para un número suficiente de valores de $\theta$ y, a continuación, los unimos en una curva continua. (Esto es lo que hicimos cuando primero aprendimos a graficar funciones en coordenadas rectangulares.)

## EJEMPLO 3 | Trazar la gráfica de una ecuación polar

Trace una gráfica de la ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen}\theta$.

**SOLUCIÓN** Primero usamos la ecuación para determinar las coordenadas polares de varios puntos en la curva. Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

| $\theta$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $3\pi/4$ | $5\pi/6$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r = 2 \operatorname{sen}\theta$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | 1 | 0 |

Localizamos estos puntos en la Figura 4 y a continuación los unimos para trazar la curva. La gráfica parece ser una circunferencia. Hemos utilizado valores de $\theta$ sólo entre 0 y $\pi$, porque los mismos puntos (esta vez expresados con coordenadas $r$ negativas) se obtendrían si permitimos que $\theta$ varíe de $\pi$ a $2\pi$.

La ecuación polar $r = 2$ sen $\theta$ en coordenadas rectangulares es

$$x^2 + (y - 1)^2 - 1$$

(vea Sección 8.1, Ejemplo 6(b)). De la forma rectangular de la ecuación vemos que la gráfica es una circunferencia de radio 1 con centro en 10, 12.

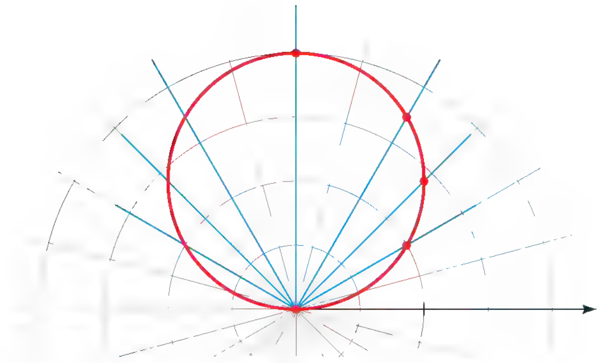


**FIGURA 4** $r = 2$ sen $\theta$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

En general, las gráficas de ecuaciones de la forma

$$r = 2a \text{ sen } \theta \qquad \text{y} \qquad r = 2a \cos \theta$$

son **circunferencias** con radio $|a|$ con centro en los puntos con coordenadas polares $(a, \pi/2)$ y $(a, 0)$, respectivamente.

## EJEMPLO 4 | Trazado de la gráfica de un cardioide

Trace una gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$.

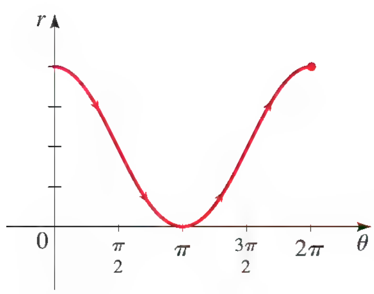
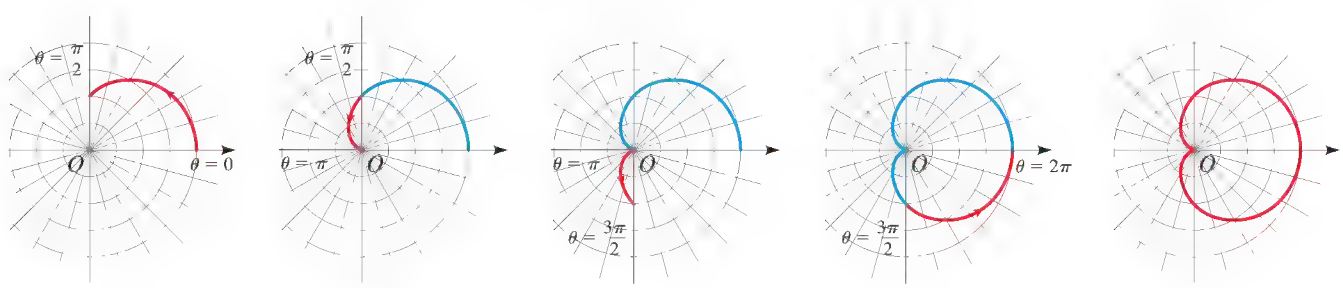



**FIGURA 5** $r = 2 + 2\cos\theta$.

**SOLUCIÓN** En lugar de localizar puntos como en el Ejemplo 3, primero trazamos la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$ en coordenadas *rectangulares* en la figura 5. Podemos considerar esta gráfica como una tabla de valores que hace posible que leamos de un vistazo los valores de $r$ que corresponden a valores crecientes de $\theta$. Por ejemplo, vemos que cuando $\theta$ aumenta de 0 a $\pi/2$, $r$ (la distancia desde $O$) decrece de 4 a 2, de modo que trazamos la parte correspondiente de la gráfica polar de la Figura 6(a). Cuando $\theta$ aumenta de $\pi/2$ a $\pi$, la Figura 5 muestra que $r$ decrece de 2 a 0, de modo que trazamos la siguiente parte de la gráfica como en la Figura 6(b). Cuando $\theta$ aumenta de $\pi$ a $3\pi/2$, $r$ aumenta de 0 a 2, como se ve en el inciso (c). Finalmente, cuando $\theta$ aumenta de $3\pi/2$ a $2\pi$, $r$ aumenta de 2 a 4, como se ve en el inciso (d). Si hacemos que $\theta$ aumente a más de $2\pi$ o disminuya a menos de 0, simplemente volveríamos a trazar nuestra trayectoria. Combinando las partes de la gráfica de los incisos (a) a la (d) de la Figura 6, trazamos la gráfica completa del inciso (e).




(a) (b) (c) (d) (e)

**FIGURA 6** Pasos para trazar $r = 2 + 2\cos\theta$

La ecuación polar $r = 2 + 2\cos\theta$ en coordenadas rectangulares es

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)$$

(vea Sección 8.1, Ejemplo 6(c)). La forma más sencilla de la ecuación polar muestra que es más natural describir cardioides usando coordenadas polares.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

La curva de la figura 6 recibe el nombre de **cardioide** por su forma de corazón. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$r = a(1 \pm \cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r = a(1 \pm \text{sen }\theta)$$

es un cardioide.

## EJEMPLO 5 | Trazado de la gráfica de una rosa de cuatro pétalos

Trace la curva $r = \cos 2\theta$.

**SOLUCIÓN** Al igual que en el Ejemplo 4, primero trazamos la gráfica de $r = \cos 2\theta$ en coordenadas *rectangulares*, como se ve en la Figura 7. Cuando $\theta$ aumenta de 0 a $\pi/4$, la Figura 7 muestra que $r$ disminuye de 1 a 0, de modo que trazamos la parte correspondiente de la curva polar de la Figura 8 (indicada por ①). Cuando $\theta$ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$, el valor de $r$ pasa de 0 a $-1$. Esto significa que la distancia desde el origen aumenta de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante, esta parte de la curva polar (indicada por ②) se encuentra en el lado opuesto del origen en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con las flechas y números indicando el orden en el que están trazadas las partes. La curva resultante tiene cuatro pétalos y se denomina **rosa de cuatro pétalos**.

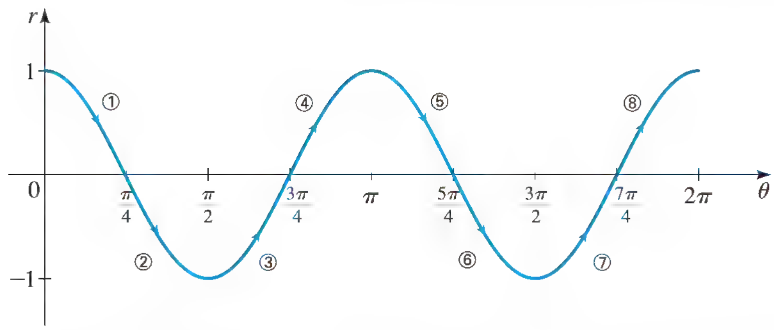


**FIGURA 7** Gráfica de $r = \cos 2\theta$ trazada en coordenadas rectangulares

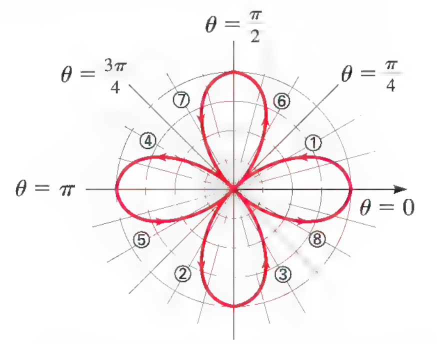


**FIGURA 8** Rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$ trazada en coordenadas polares

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \cos n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

es una **rosa de *n* pétalos** si $n$ es impar o $2n$ pétalos si $n$ es par (como en el Ejemplo 5).

## Simetría

Al graficar una ecuación polar, a veces es útil aprovechar la simetría. A continuación mencionamos tres pruebas de simetría; la Figura 9 muestra por qué funcionan estas tareas.

### PRUEBAS DE SIMETRÍA

1. Si una ecuación polar no cambia cuando sustituimos $\theta$ por $-\theta$, entonces la gráfica es simétrica alrededor del eje polar (Figura 9(a)).
2. Si la ecuación no cambia cuando sustituimos $r$ por $-r$, entonces la gráfica es simétrica alrededor del polo (Figura 9(b)).
3. Si la ecuación no cambia cuando sustituimos $\theta$ por $\pi - \theta$, la gráfica es simétrica alrededor de la recta vertical $\theta = \pi/2$ (el eje $y$) (Figura 9(c)).

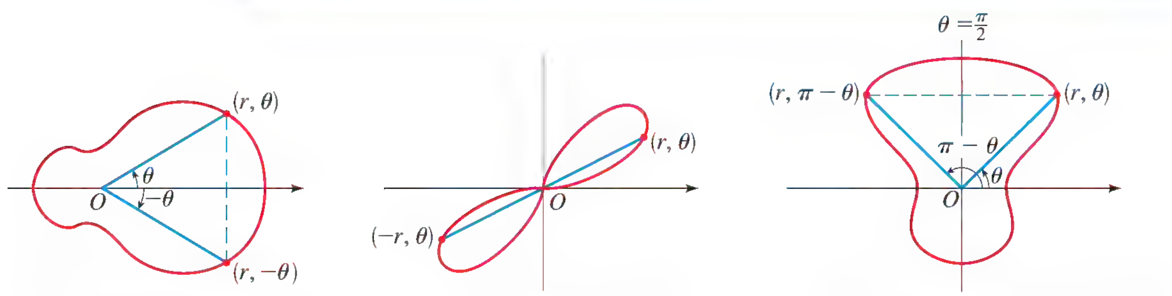


**FIGURA 9** (a) Simetría alrededor del eje polar (b) Simetría alrededor del polo (c) Simetría alrededor de la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

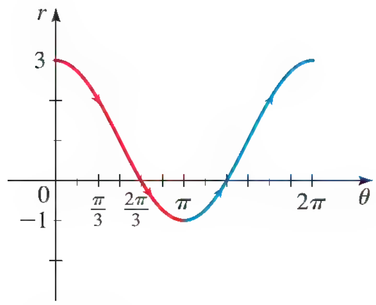



**FIGURA 10**

Las gráficas de las Figuras 2, 6(e) y 8 son simétricas alrededor del eje polar. La gráfica de la Figura 8 es también simétrica alrededor del polo. Las Figuras 4 y 8 muestran gráficas que son simétricas alrededor de $\theta = \pi/2$. Observe que la rosa de cuatro pétalos de la Figura 8 satisface las tres pruebas de simetría.

En coordenadas rectangulares, los ceros de la función $y = f(x)$ corresponden a los puntos de intersección $x$ de la gráfica. En coordenadas polares, los ceros de la función $r = f(\theta)$ son los ángulos $\theta$ en los que la curva cruza el polo. Los ceros nos ayudan a trazar la gráfica, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 6 | Uso de simetría para trazar un caracol

Trace una gráfica de la ecuación $r = 1 + 2\cos\theta$.

**SOLUCIÓN** Usamos lo siguiente como ayudas para trazar la gráfica:

**Simetría:** En vista que la ecuación no cambia cuando $\theta$ se sustituye por $-\theta$, la gráfica es simétrica alrededor del eje polar.

**Ceros:** Para hallar los ceros, resolvemos

$$0 = 1 + 2\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

**Tabla de valores:** Al igual que en el Ejemplo 4, trazamos la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ en coordenadas *rectangulares* para que sirva como tabla de valores (Figura 10).

A continuación trazamos la gráfica polar de $r = 1 + 2\cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ y después usamos simetría para completar la gráfica de la Figura 11.

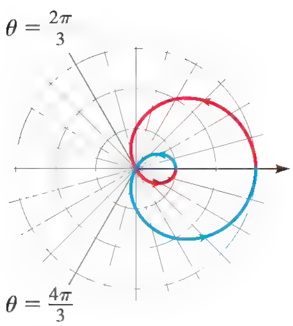



**FIGURA 11** $r = 1 + 2\cos\theta$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

La curva de la Figura 11 se denomina **limaçon**, por la palabra francesa que significa **caracol**. En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

es un caracol. La forma del caracol depende del tamaño relativo de $a$ y $b$ (vea la tabla de la página siguiente).

## Graficar ecuaciones polares con calculadora graficadora

Aun cuando es útil tener aptitud para trazar manualmente gráficas polares sencillas, necesitamos una calculadora o computadora cuando la gráfica es tan complicada como la de la Figura 12. Por fortuna, la mayor parte de calculadoras son capaces de graficar ecuaciones polares directamente.

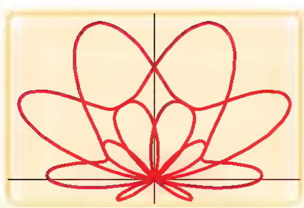


**FIGURA 12** $r = \mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}^3(5\theta/2)$

## EJEMPLO 7 | Trazar la gráfica de una ecuación polar

Grafique la ecuación $r = \cos(2\theta/3)$.

**SOLUCIÓN** Necesitamos determinar el dominio para $\theta$, por lo que nos preguntamos: ¿cuántas veces debe $\theta$ hacer una revolución completa ($2\pi$ radianes) antes que la gráfica empiece a repetirse? La gráfica se repite cuando el mismo valor de $r$ se obtenga en $\theta$ y $\theta + 2n\pi$. Entonces necesitamos hallar un entero $n$, de modo que

$$\cos\frac{2(\theta + 2n\pi)}{3} = \cos\frac{2\theta}{3}$$

Para que se cumpla esta igualdad, $4n\pi/3$ debe ser múltiplo de $2\pi$, y esto primero ocurre cuando $n = 3$. Por lo tanto, obtenemos toda la gráfica si escogemos valores de $\theta$ entre $\theta = 0$ y $\theta = 0 + 2(3)\pi = 6\pi$. La gráfica se ilustra en la Figura 13.

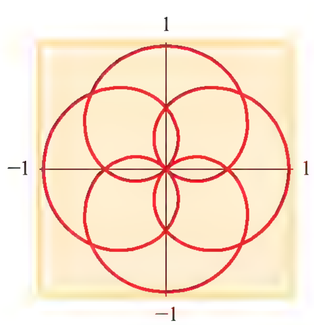


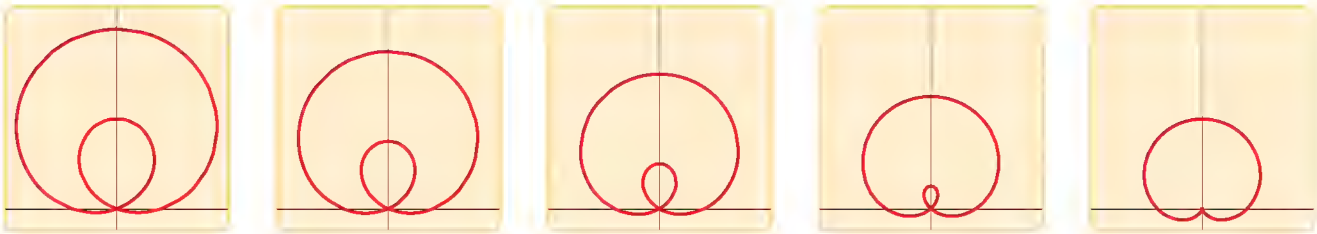

**FIGURA 13** $r = \cos(2\theta/3)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

### EJEMPLO 8 | Una familia de ecuaciones polares

Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ para $c = 3, 2.5, 2, 1.5, 1$. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando cambia $c$?

**SOLUCIÓN** La Figura 14 muestra gráficas generadas por computadora para los valores dados de $c$. Cuando $c > 1$, la gráfica tiene un lazo interior; el lazo disminuye en tamaño a medida que $c$ disminuye. Cuando $c = 1$, el lazo desaparece y la gráfica se convierte en cardioide (vea Ejemplo 4).



$c = 3.0$ $c = 2.5$ $c = 2.0$ $c = 1.5$ $c = 1.0$

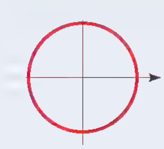
**FIGURA 14** Familia de caracoles, $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ en el rectángulo de vista $[-2.5, 2.5]$ por $[-0.5, 4.5]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47** ■

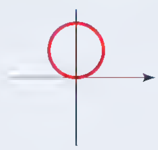
El cuadro siguiente da un resumen de algunas de las gráficas polares básicas que se usan en Cálculo.

### ALGUNAS CURVAS POLARES COMUNES

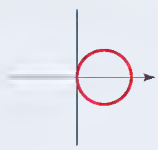
**Circunferencia y espiral**



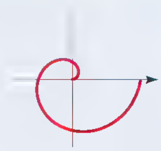
$r = a$
circunferencia



$r = a \operatorname{sen} \theta$
circunferencia



$r = a \cos \theta$
circunferencia



$r = a\theta$
espiral

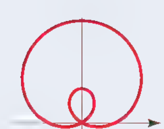
**Caracoles**

$r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$

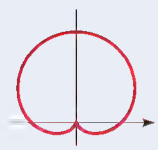
$r = a \pm b \cos \theta$

$(a > 0, b > 0)$

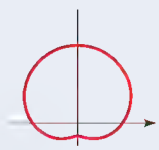
La orientación depende de la función trigonométrica (seno o coseno) y del signo de $b$.



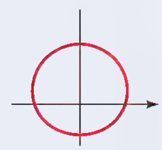
$a < b$
caracol con lazo interior



$a = b$
cardioide



$a > b$
caracol alveolado



$a \geq 2b$
caracol convexo

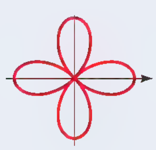
**Rosas**

$r = a \operatorname{sen} n\theta$

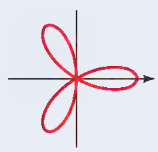
$r = a \cos n\theta$

$n$ hojas si $n$ es impar

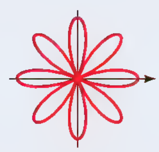
$2n$ hojas si $n$ es par



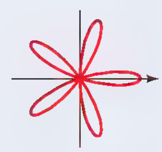
$r = a \cos 2\theta$
rosa de 4 hojas



$r = a \cos 3\theta$
rosa de 3 hojas

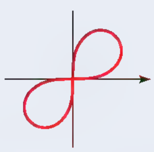


$r = a \cos 4\theta$
rosa de 8 hojas

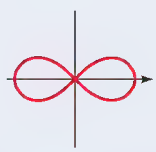


$r = a \cos 5\theta$
rosa de 5 hojas

**Lemniscatas**
Curvas en forma de un ocho



$r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$
lemniscata



$r^2 = a^2 \cos 2\theta$
lemniscata

## 8.2 EJERCICIOS

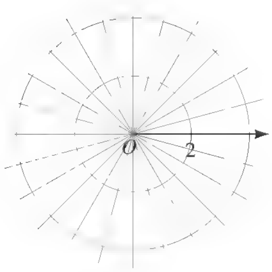
### CONCEPTOS

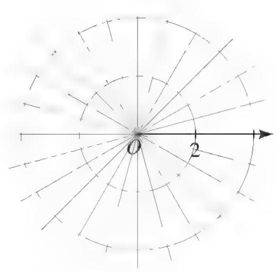
**1.** Para determinar puntos en coordenadas polares, usamos una cuadrícula formada por _______con centro en el polo y ________ que emanan del polo.

**2.** **(a)** Para graficar una ecuación polar $r = f(\theta)$, localizamos todos los puntos $(r, \theta)$ que ________la ecuación.

**(b)** Las ecuaciones polares más sencillas se obtienen haciendo $r$ o $\theta$ iguales a una constante. La gráfica de la ecuación polar $r = 3$ es una _____con radio _____con centro en el ____. La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/4$ es una ______ que pasa por el _____con pendiente_____.

Grafique las ecuaciones polares siguientes.




### HABILIDADES

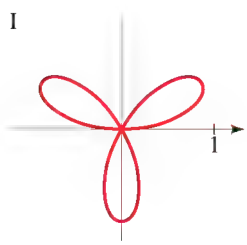
**3-8** ■ Relacione la ecuación polar con las gráficas marcadas I-IV. Use la tabla de la página 552 para ayudarse.

**3.** $r = 3\cos\theta$ **4.** $r = 3$

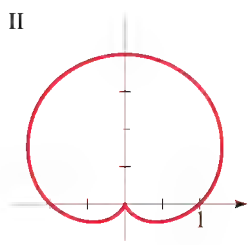
**5.** $r = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta$ **6.** $r = 1 + 2\cos\theta$

**7.** $r = \text{sen}\,3\theta$ **8.** $r = \text{sen}\,4\theta$

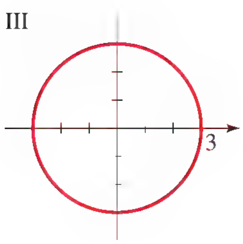
I



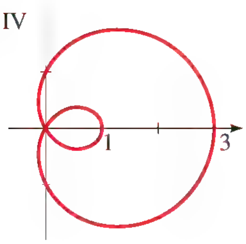

II



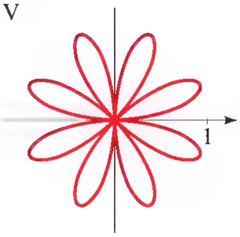

III



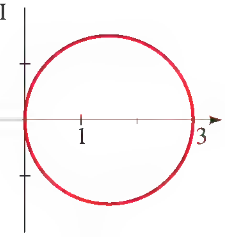

IV




V




VI




**9-16** ■ Pruebe si hay simetría en la ecuación polar con respecto al eje polar, el polo, y la recta $\theta = \pi/2$.

**9.** $r = 2 - \text{sen}\,\theta$ **10.** $r = 4 + 8\cos\theta$

**11.** $r = 3\sec\theta$ **12.** $r = 5\cos\theta\,\csc\theta$

**13.** $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **14.** $r = \dfrac{5}{1 + 3\cos\theta}$

**15.** $r^2 = 4\cos 2\theta$ **16.** $r^2 = 9\,\text{sen}\,\theta$

**17-22** ■ Trace una gráfica de la ecuación polar y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

**17.** $r = 2$ **18.** $r = -1$

**19.** $\theta = -\pi/2$ **20.** $\theta = 5\pi/6$

**21.** $r = 6\,\text{sen}\,\theta$ **22.** $r = \cos\theta$

**23-42** ■ Trace una gráfica de la ecuación polar.

**23.** $r = -2\cos\theta$ **24.** $r = 2\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta$

**25.** $r = 2 - 2\cos\theta$ **26.** $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

**27.** $r = -3(1 + \text{sen}\,\theta)$ **28.** $r = \cos\theta - 1$

**29.** $r = \text{sen}\,2\theta$ **30.** $r = 2\cos 3\theta$

**31.** $r = -\cos 5\theta$ **32.** $r = \text{sen}\,4\theta$

**33.** $r = \sqrt{3} - 2\,\text{sen}\,\theta$ **34.** $r = 2 + \text{sen}\,\theta$

**35.** $r = \sqrt{3} + \cos\theta$ **36.** $r = 1 - 2\cos\theta$

**37.** $r^2 = \cos 2\theta$ **38.** $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$

**39.** $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral)

**40.** $r\theta = 1, \quad \theta > 0$ (espiral recíproca)

**41.** $r = 2 + \sec\theta$ (concoide)

**42.** $r = \text{sen}\,\theta\tan\theta$ (cisoide)

**43-46** ■ Use calculadora graficadora para graficar la ecuación polar. Escoja el dominio de $\theta$ para asegurarse de producir toda la gráfica.

**43.** $r = \cos(\theta/2)$ **44.** $r = \text{sen}(8\theta/5)$

**45.** $r = 1 + 2\,\text{sen}(\theta/2)$ (nefroide)

**46.** $r = \sqrt{1 - 0.8\,\text{sen}^2\theta}$ (hipopedia)

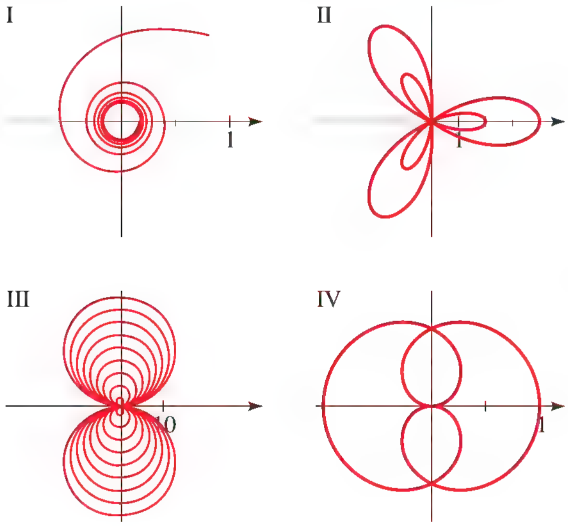
**47.** Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + \text{sen}\,n\theta$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cómo está relacionado el número de lazos con respecto a $n$?

**48.** Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c\,\text{sen}\,2\theta$ para $c = 0.3, 0.6, 1, 1.5$ y 2. ¿Cómo cambia la gráfica cuando $c$ aumenta?

**49-52** ■ Relacione la ecuación polar con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

**49.** $r = \text{sen}(\theta/2)$ **50.** $r = 1/\sqrt{\theta}$

**51.** $r = \theta \text{ sen } \theta$ **52.** $r = 1 + 3\cos(3\theta)$




**53-56** ■ Trace una gráfica de la ecuación rectangular. [*Sugerencia:* Primero convierta la ecuación a coordenadas polares.]

**53.** $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

**54.** $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$

**55.** $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

**56.** $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$

**57.** Demuestre que la gráfica de $r = a\cos\theta + b \text{ sen } \theta$ es una circunferencia, y encuentre su centro y radio.

**58.** **(a)** Grafique la ecuación polar $r = \tan\theta \sec\theta$ en el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-1, 9]$.

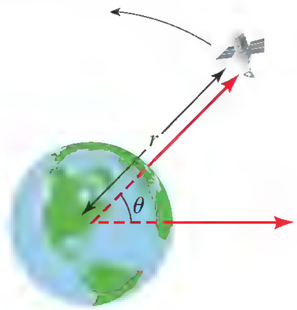
**(b)** Observe que su gráfica del inciso (a) se asemeja a una parábola (vea Sección 2.5). Confirme esto convirtiendo la ecuación a coordenadas rectangulares.

## APLICACIONES

**59. Órbita de un satélite** Es frecuente que científicos e ingenieros usen ecuaciones polares para modelar el movimiento de satélites en órbita de la Tierra. Consideremos un satélite cuya órbita está modelada por la ecuación $r = 22{,}500(4 - \cos\theta)$, donde $r$ es la distancia en millas entre el satélite y el centro de la Tierra y $\theta$ es el ángulo mostrado en la figura siguiente.

**(a)** En la misma pantalla de vista grafique la circunferencia $r = 3960$ (para representar la Tierra, que supondremos es una esfera de 3960 millas de radio) y la ecuación polar de la órbita del satélite. Describa el movimiento del satélite cuando $\theta$ aumenta de 0 a $2\pi$.

**(b)** ¿Para qué ángulo $\theta$ está más cercano el satélite a la Tierra? Encuentre la altura del satélite sobre la superficie terrestre para este valor de $\theta$.




**60. Una órbita inestable** La órbita descrita en el Ejercicio 59 es estable porque el satélite recorre la misma trayectoria una y otra vez cuando $\theta$ aumenta. Suponga que un meteoro choca contra el satélite y cambia su órbita a

$$r = \frac{22{,}500\left(1 - \dfrac{\theta}{40}\right)}{4 - \cos\theta}$$

**(a)** En la misma pantalla de observación grafique la circunferencia $r = 3960$ y la nueva ecuación de órbita, con $\theta$ creciente de 0 a $3\pi$. Describa el nuevo movimiento del satélite.

**(b)** Use el comando TRACE de su calculadora graficadora para hallar el valor de $\theta$ en el momento en que el satélite choca en la Tierra.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**61. Una transformación de gráficas polares** ¿Cómo están relacionadas las gráficas de

$$r = 1 + \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

y
$$r = 1 + \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

con la gráfica de $r = 1 + \text{sen } \theta$? En general, ¿cómo está relacionada la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

**62. Selección de un sistema de coordenadas útil** Compare la ecuación polar de la circunferencia $r = 2$ con su ecuación en coordenadas rectangulares. ¿En cuál sistema de coordenadas es más sencilla la ecuación? Haga lo mismo para la ecuación de la rosa de cuatro pétalos $r = \text{sen } 2\theta$. ¿Cuál sistema de coordenadas escogería usted para estudiar estas curvas?

**63. Selección de un sistema de coordenadas útil** Compare la ecuación rectangular de la recta $y = 2$ con su ecuación polar. ¿En cuál sistema de coordenadas es más sencilla la ecuación? ¿Cuál sistema de coordenadas escogería usted para estudiar rectas?

# 8.3 Forma polar de números complejos: Teorema de De Moivre

Gráficas de números complejos ▶ Forma polar de números complejos ▶ Teorema de De Moivre ▶ Raíces $n$-ésimas de números complejos

En esta sección representamos números complejos en forma polar (o trigonométrica). Esto hace posible que encontremos las raíces $n$ de números complejos. Para describir la forma polar de números complejos, debemos primero aprender a trabajar gráficamente con números complejos.

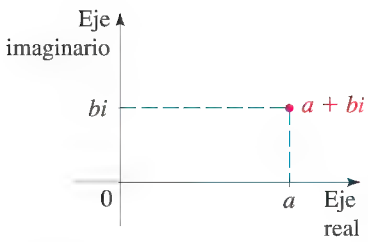



FIGURA 1

## Gráficas de números complejos

Para graficar números reales o conjuntos de números reales, hemos estado empleado la recta, que tiene sólo una dimensión. Los números complejos, no obstante, tienen dos componentes: una parte real y una parte imaginaria. Esto sugiere que necesitamos dos ejes para graficar números complejos: uno para la parte real y uno para la parte imaginaria. A éstos se les da el nombre de **eje real** y **eje imaginario**, respectivamente. El plano determinado por estos dos ejes se denomina **plano complejo**. Para graficar el número complejo $a + bi$, localizamos el par ordenado de números $(a, b)$ en este plano, como se indica en la Figura 1.

### EJEMPLO 1 | Graficar números complejos

Grafique los números complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$, y $z_1 + z_2$.

**SOLUCIÓN** Tenemos $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = 5 + i$. La gráfica se ilustra en la Figura 2.

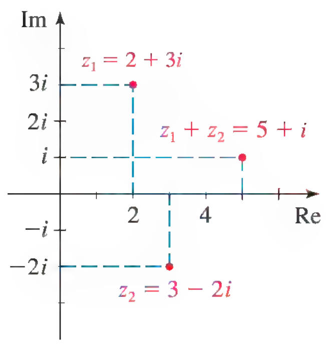



FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19** ■

### EJEMPLO 2 | Graficar conjuntos de números complejos

Grafique cada conjunto de números complejos.

**(a)** $S = \{a + bi \mid a \geq 0\}$

**(b)** $T = \{a + bi \mid a < 1, b \geq 0\}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $S$ es el conjunto de números complejos cuya parte real es no negativa. La gráfica se muestra en la Figura 3(a).

**(b)** $T$ es el conjunto de números complejos para el cual la parte real es menor a 1 y la parte imaginara es no negativa. La gráfica se ilustra en la Figura 3(b).

FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21** ■

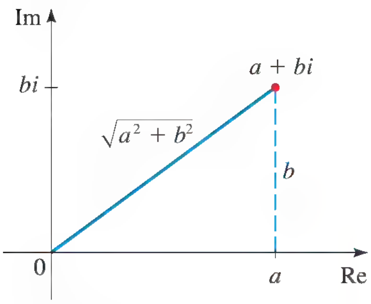



**FIGURA 4**

Recuerde que el valor absoluto de un número real puede considerarse como su distancia del origen en la recta de números reales (vea Sección 1.1). Definimos el valor absoluto para números complejos en forma semejante. Usando el Teorema de Pitágoras, podemos ver de la Figura 4 que la distancia entre $a + bi$ y el origen en el plano complejo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto lleva a la siguiente definición.

> **MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO**
>
> El **módulo** (o **valor absoluto**) del número complejo $z = a + bi$ es
>
> $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## EJEMPLO 3 | Calcular el módulo

El plural de *módulo es módulos.*

Encuentre los módulos de los números complejos $3 + 4i$ y $8 - 5i$.

**SOLUCIÓN**

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|8 - 5i| = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## EJEMPLO 4 | Valor absoluto de números complejos

Grafique los siguientes conjuntos de números complejos.

**(a)** $C = \{z \mid |z| = 1\}$ **(b)** $D = \{z \mid |z| \le 1\}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $C$ es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es 1. Entonces, $C$ es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen, como se ve en la Figura 5.

**(b)** $D$ es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es menor o igual a 1. Entonces, $D$ es el disco que está formado por todos los números complejos en y dentro del círculo $C$ del inciso (a), como se ve en la Figura 6.

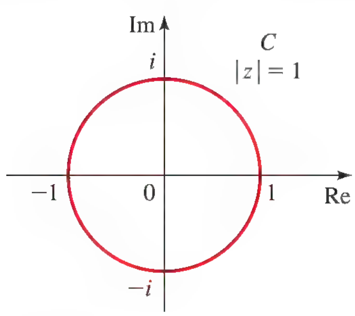



**FIGURA 5**

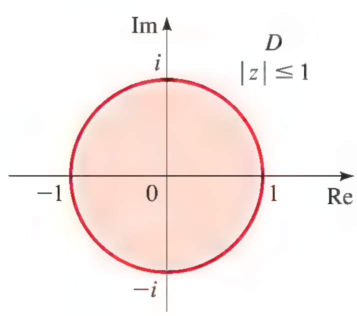



**FIGURA 6**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

## Forma polar de números complejos

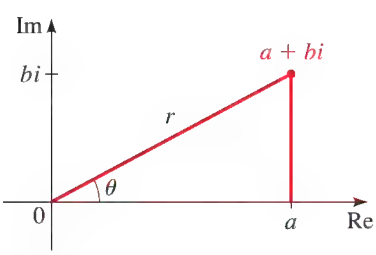



**FIGURA 7**

Sea $z = a + bi$ un número complejo, y en el plano complejo tracemos el segmento de recta que enlaza el origen al punto $a + bi$ (vea Figura 7). La longitud de este segmento de recta es $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Si $\theta$ es un ángulo en posición normal cuyo lado terminal coin-

cide con este segmento de recta, entonces por las definiciones de seno y coseno (vea Sección 6.2)

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

de modo que $z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Hemos demostrado lo siguiente:

### FORMA POLAR DE NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma polar** (o **forma trigonométrica**)

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$. El número $r$ es el **módulo** de $z$ y $\theta$ es un **argumento** de $z$.

El argumento de $z$ no es único, sino que cualesquier dos argumentos de $z$ difieren en un múltiplo de $2\pi$. Cuando determinemos el argumento, debemos considerar el cuadrante en el que se encuentre $z$, como vemos en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 5 | Escribir números complejos en forma polar

Escriba cada número complejo en forma polar.

**(a)** $1 + i$ **(b)** $-1 + \sqrt{3}i$ **(c)** $-4\sqrt{3} - 4i$ **(d)** $3 + 4i$

**SOLUCIÓN** Estos números complejos están graficados en la Figura 8, lo cual nos ayuda a hallar sus argumentos.

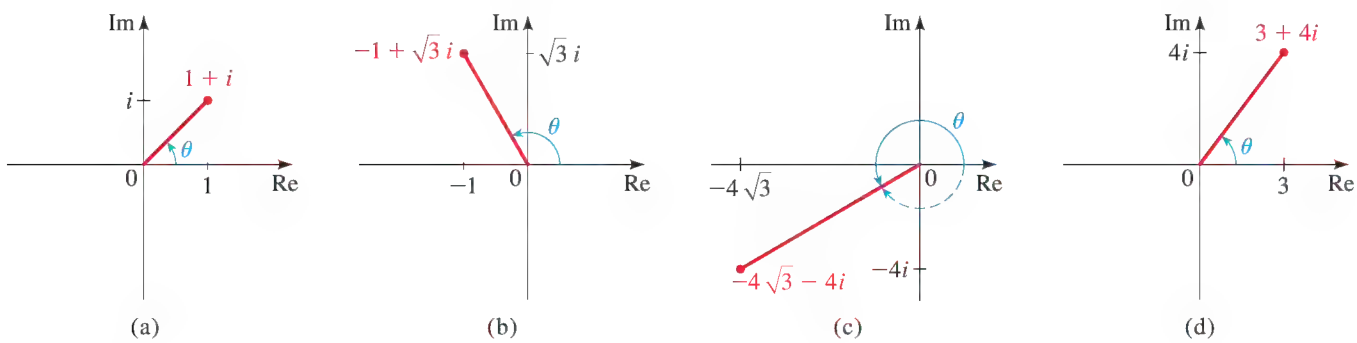



**FIGURA 8**

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

**(a)** Un argumento es $\theta = \pi/4$ y $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. Entonces,

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$\theta = \frac{2\pi}{3}$

**(b)** Un argumento es $\theta = 2\pi/3$ y $r = \sqrt{1 + 3} = 2$. Entonces,

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{-4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}$

**(c)** Un argumento es $\theta = 7\pi/6$ (o podríamos usar $\theta = -5\pi/6$), y $r = \sqrt{48 + 16} = 8$. Entonces

$$-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\theta = \tan^{1}\frac{4}{3}$

**(d)** Un argumento es $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ y $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Por tanto,

$$3 + 4i = 5\left[\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right)\right]$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29, 31** Y **33**

Las Fórmulas de la Adición para Seno y Coseno que estudiamos en la Sección 7.2 simplifican en gran medida la multiplicación y división de números complejos en forma polar. El siguiente teorema nos muestra cómo es esto.

**MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS**

Si los dos números complejos $z_1$ y $z_2$ tienen las formas polares

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad (z_2 \neq 0) \qquad \text{División}$$

Este teorema dice lo siguiente:

*Para multiplicar dos números complejos, multiplique los módulos y sume los argumentos.*
*Para dividir dos números complejos, divida los módulos y reste y los argumentos.*

**DEMOSTRACIÓN** Para probar la Fórmula de la Multiplicación, simplemente multiplicamos los dos números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

En el último paso usamos las Fórmulas de la Adición para Seno y Coseno.

La demostración de la Fórmula de la División se deja como ejercicio.

## EJEMPLO 6 | Multiplicación y división de números complejos

Sea

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{y} \qquad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Encuentre **(a)** $z_1 z_2$ y **(b)** $z_1/z_2$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Por la Fórmula de la Multiplicación

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2)(5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 10\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Para aproximar la respuesta, usamos una calculadora en modo de radianes y obtenemos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &\approx 10(-0.2588 + 0.9659i) \\ &= -2.588 + 9.659i \end{aligned}$$

**(b)** Por la Fórmula de la División

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Usando una calculadora en modo de radianes, obtenemos la respuesta aproximada:

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \tfrac{2}{5}(0.9659 - 0.2588i) = 0.3864 - 0.1035i$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

## Teorema de De Moivre

El uso repetido de la Fórmula de la Multiplicación da la siguiente fórmula útil para elevar un número complejo a una potencia $n$ para cualquier entero positivo $n$.

**TEOREMA DE DE MOIVRE**

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, entonces para cualquier entero $n$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Este teorema dice: *Para determinar la n potencia de un número complejo, tomamos la n-ésima potencia del módulo y multiplicamos el argumento por n.*

**DEMOSTRACIÓN** Por la Fórmula de la Multiplicación

$$\begin{aligned}z^2 = zz &= r^2[\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)\end{aligned}$$

A continuación multiplicamos $z^2$ por $z$ para obtener

$$\begin{aligned}z^3 = z^2 z &= r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)\end{aligned}$$

Repitiendo este argumento, vemos que para cualquier entero positivo $n$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Un argumento similar usando la Fórmula de la División demuestra que esto también se cumple para enteros negativos.

**EJEMPLO 7 | Hallar una potencia usando el Teorema de De Moivre**

Encuentre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$,

**SOLUCION** Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$ , se deduce del Ejemplo 5(a) que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Entonces, por el Teorema de De Moivre

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

## Raíces *n*-ésimas de números complejos

Una **raíz *n*-ésima** de un número complejo $z$ es cualquier número complejo $w$ tal que $w^n = z$. El Teorema de De Moivre nos da un método para calcular las raíces $n$-ésimas de cualquier número complejo.

**$n$-ÉSIMAS RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS**

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$ y $n$ es un entero positivo, entonces $z$ tiene las $n$ raíces $n$-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

**DEMOSTRACIÓN** Para hallar las raíces $n$-ésimas de $z$, necesitamos hallar un número complejo $w$ tal que

$$w^n = z$$

Escribamos $z$ en forma polar:

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Una $n$-ésima raíz de $z$ es

$$w = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{n}\right)$$

porque, por el Teorema de De Moivre, $w^n = z$. Pero el argumento $\theta$ de $z$ puede ser sustituido por $\theta + 2k\pi$ para cualquier entero $k$. Como esta expresión da un valor diferente de $w$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, hemos demostrado la fórmula de este teorema.

Las siguientes observaciones nos ayudan a usar la fórmula precedente.

**HALLAR LAS $n$-ÉSIMAS RAÍCES $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$**

1. módulo de cada raíz $n$-ésima es $r^{1/n}$.
2. El argumento de la primera raíz es $\theta/n$.
3. Repetidamente sumamos $2\pi/n$ para obtener el argumento de cada raíz sucesiva.

Estas observaciones muestran que, cuando se grafican, las raíces $n$-ésimas de $z$ están igualmente espaciadas en la circunferencia de radio $r^{1/n}$.

### EJEMPLO 8 | Hallar raíces de un número complejo

Encuentre las seis raíces sextas de $z = -64$, y grafique estas raíces en el plano complejo.

**SOLUCIÓN** En forma polar, $z = 64(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Aplicando la fórmula para raíces $n$-ésimas con $n = 6$, obtenemos

$$w_k = 64^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Usando $64^{1/6} = 2$, encontramos que las seis raíces sextas de $-64$ son

Sumamos $2\pi/6 = \pi/3$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} \quad i$$

$$w_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

$$w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

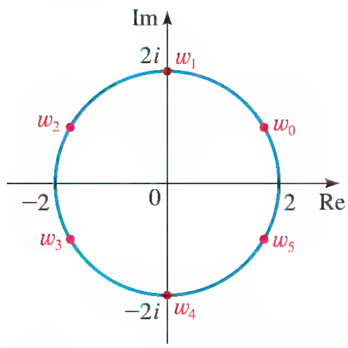



**FIGURA 9** Las seis raíces sextas de $z = -64$

Todos estos puntos se encuentran en una circunferencia de radio 2, como se muestra en la Figura 9.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Cuando se buscan raíces de números complejos, a veces escribimos el argumento $\theta$ del número complejo en grados. En este caso las raíces $n$-ésimas se obtienen a partir de la fórmula

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

## EJEMPLO 9 | Hallar raíces cúbicas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$, y grafique estas raíces en el plano complejo.

**SOLUCIÓN** Primero escribimos $z$ en forma polar usando grados. Tenemos $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45^\circ$. Por lo tanto

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

Aplicando la fórmula para las raíces $n$-ésimas (en grados) con $n = 3$, encontramos que las raíces cúbicas de $z$ son de la forma

$$w_k = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2$. Entonces las tres raíces cúbicas son

Sumamos $360^\circ/3 = 120^\circ$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) \approx 1.366 + 0.366i$$

$(2\sqrt{2})^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$

$$w_1 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = -1 + i$$

$$w_2 = \sqrt{2}(\cos 255^\circ + i \operatorname{sen} 255^\circ) \approx -0.366 - 1.366i$$

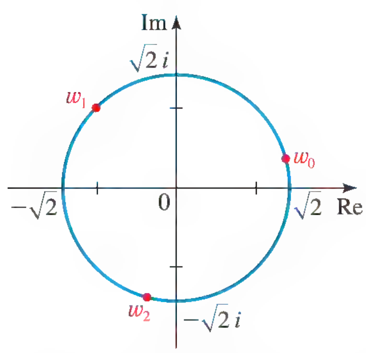



**FIGURA 10** Las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$

Las tres raíces cúbicas de $z$ están graficadas en la Figura 10. Estas raíces están igualmente espaciadas en la circunferencia de radio $\sqrt{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

### EJEMPLO 10 | Resolver una ecuación usando la fórmula para raíces *n*-ésimas

**SOLUCIÓN** Esta ecuación se puede escribir como $z^6 = -64$. Entonces las soluciones son las raíces sextas de $-64$, que encontramos en el Ejemplo 8.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91**

## 8.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Un número complejo $z = a + bi$ tiene dos partes: $a$ es la parte ______, y $b$ es la parte ______. Para graficar $a + bi$ graficamos el par ordenado ( , ) en el plano complejo.

**2.** Sea $z = a + bi$.

**(a)** El módulo de $z$ es $r =$ ____, y un argumento de $z$ es un ángulo $\theta$ que satisface $\tan\theta =$ ___.

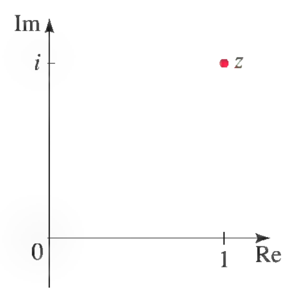
**(b)** Podemos expresar $z$ en forma polar como $z =$ ______, donde $r$ es el módulo de $z$ y $\theta$ es el argumento de $z$.

**3. (a)** El número complejo $z = -1 + i$ en forma polar es

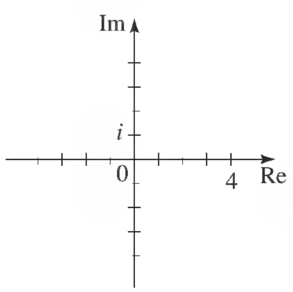
$z =$ ____. El número complejo $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

en forma rectangular es $z =$ __.

**(b)** El número complejo graficado a continuación se puede expresar en forma rectangular como ____o en forma polar como ______.




**4.** ¿Cuántas raíces $n$-ésimas diferentes tiene un número complejo diferente de cero? ____. El número 16 tiene ___raíces cuartas. Estas raíces son ___, ___, ___ y ____. En el plano complejo estas raíces se encuentran en una circunferencia de radio __. Grafique las raíces en la gráfica siguiente.




### HABILIDADES

**5-14** ■ Grafique el número complejo y encuentre su módulo.

**5.** $4i$
**6.** $-3i$
**7.** $-2$
**8.** $6$
**9.** $5 + 2i$
**10.** $7 - 3i$
**11.** $\sqrt{3} + i$
**12.** $-1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$
**13.** $\dfrac{3 + 4i}{5}$
**14.** $\dfrac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

**15-16** ■ Trace el número complejo $z$, y también trace $2z$, $-z$ y $\frac{1}{2}z$ en el mismo plano complejo.

**15.** $z = 1 + i$
**16.** $z = -1 + i\sqrt{3}$

**17-18** ■ Trace el número complejo $z$ y su complejo conjugado $z$ en el mismo plano complejo.

**17.** $z = 8 + 2i$
**18.** $z = -5 + 6i$

**19-20** ■ Trace $z_1$, $z_2$, $z_1 + z_2$, y $z_1z_2$ en el mismo plano complejo.

**19.** $z_1 = 2 - i,\quad z_2 = 2 + i$

**20.** $z_1 = -1 + i,\quad z_2 = 2 - 3i$

**21-28** ■ Trace el conjunto en el plano complejo.

**21.** $\{z = a + bi \mid a \le 0, b \ge 0\}$

**22.** $\{z = a + bi \mid a > 1, b > 1\}$

**23.** $\{z \mid |z| = 3\}$
**24.** $\{z \mid |z| \ge 1\}$

**25.** $\{z \mid |z| < 2\}$
**26.** $\{z \mid 2 \le |z| \le 5\}$

**27.** $\{z = a + bi \mid a + b < 2\}$

**28.** $\{z = a + bi \mid a \ge b\}$

**29-52** ■ Escriba el número complejo en forma polar con argumento $\theta$ entre 0 y $2\pi$.

**29.** $1 + i$
**30.** $1 + \sqrt{3}\,i$
**31.** $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
**32.** $1 - i$
**33.** $2\sqrt{3} - 2i$
**34.** $-1 + i$
**35.** $3i$
**36.** $-3 \quad 3\sqrt{3}\,i$
**37.** $5 + 5i$
**38.** $4$
**39.** $4\sqrt{3} - 4i$
**40.** $8i$
**41.** $-20$
**42.** $\sqrt{3} + i$
**43.** $3 + 4i$
**44.** $i(2 \quad 2i)$
**45.** $3i(1 + i)$
**46.** $2(1 - i)$

**47.** $4(\sqrt{3} + i)$ **48.** $-3 - 3i$ **49.** $2 + i$

**50.** $3 + \sqrt{3}\, i$ **51.** $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ **52.** $-\pi i$

**53-60** ■ Encuentre el producto $z_1 z_2$ y el cociente $z_1/z_2$. Exprese su respuesta en forma polar.

**53.** $z_1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi, \quad z_2 = \cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$

**54.** $z_1 = \cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}, \quad z_2 = \cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}$

**55.** $z_1 = 3\left(\cos \dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 5\left(\cos \dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{4\pi}{3}\right)$

**56.** $z_1 = 7\left(\cos \dfrac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{8}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{8}\right)$

**57.** $z_1 = 4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$,
$z_2 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

**58.** $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$,
$z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

**59.** $z_1 = 4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$,
$z_2 = 25(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

**60.** $z_1 = \frac{4}{5}(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)$,
$z_2 = \frac{1}{5}(\cos 155° + i \operatorname{sen} 155°)$

**61-68** ■ Escriba $z_1$ y $z_2$ en forma polar y, a continuación, encuentre el producto $z_1 z_2$ y los cocientes $z_1/z_2$ y $1/z_1$.

**61.** $z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\, i$

**62.** $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i, \quad z_2 = 1 - i$

**63.** $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = -1 + i$

**64.** $z_1 = -\sqrt{2}\, i, \quad z_2 = -3 - 3\sqrt{3}\, i$

**65.** $z_1 = 5 + 5i, \quad z_2 = 4$ **66.** $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i, \quad z_2 = 8i$

**67.** $z_1 = -20, \quad z_2 = \sqrt{3} + i$ **68.** $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 2 - 2i$

**69-80** ■ Encuentre la potencia indicada usando el Teorema de De Moivre.

**69.** $(1 + i)^{20}$ **70.** $(1 - \sqrt{3}\, i)^5$

**71.** $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **72.** $(1 - i)^8$

**73.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{12}$ **74.** $(\sqrt{3} - i)^{-10}$

**75.** $(2 - 2i)^8$ **76.** $\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{15}$

**77.** $(-1 - i)^7$ **78.** $(3 + \sqrt{3}\, i)^4$

**79.** $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$ **80.** $(1 - i)^{-8}$

**81-90** ■ Encuentre las raíces indicadas y, a continuación, grafique las raíces en el plano complejo.

**81.** Las raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$

**82.** Las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$

**83.** Las raíces cuartas de $-81i$

**84.** Las raíces quintas de 32

**85.** Las raíces octavas de 1

**86.** Las raíces cúbicas de $1 + i$

**87.** Las raíces cúbicas de $i$

**88.** Las raíces quintas de $i$

**89.** Las raíces cuartas de $-1$

**90.** Las raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

**91-96** ■ Resuelva la ecuación.

**91.** $z^4 + 1 = 0$ **92.** $z^8 - i = 0$

**93.** $z^3 - 4\sqrt{3} - 4i = 0$ **94.** $z^6 - 1 = 0$

**95.** $z^3 + 1 = -i$ **96.** $z^3 - 1 = 0$

**97.** **(a)** Sea $w = \cos \dfrac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$ donde $n$ es un entero positivo. Demuestre que $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$ son las $n$ raíces $n$-ésimas distintas de 1.

**(b)** Si $z \neq 0$ es cualquier número complejo y $s^n = z$, demuestre que las $n$ raíces $n$-ésimas distintas son

$$s, sw, sw^2, sw^3, \ldots, sw^{n-1}$$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**98. Sumas de raíces de la unidad** Encuentre los valores exactos de las tres raíces cúbicas de 1 (vea Ejercicio 97) y, a continuación, súmelos. Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál piensa usted que es la suma de las raíces $n$-ésimas de 1 para cualquier $n$?

**99. Productos de raíces de la unidad** Encuentre el producto de las tres raíces cúbicas de 1 (vea Ejercicio 97). Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál piensa usted que es el producto de las raíces $n$-ésimas de 1 para cualquier $n$?

**100. Coeficientes complejos y la fórmula cuadrática** La fórmula cuadrática funciona ya sea que los coeficientes de la ecuación sean reales o complejos. Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática y, si es necesario, el Teorema de De Moivre.

**(a)** $z^2 + (1 + i)z + i = 0$

**(b)** $z^2 - iz + 1 = 0$

**(c)** $z^2 - (2 - i)z - \frac{1}{4}i = 0$

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Fractales**

En este capítulo usamos gráficas de números complejos para crear imágenes fractales. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 8.4 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Curvas planas y ecuaciones paramétricas ▶ Eliminación del parámetro ▶ Hallar ecuaciones paramétricas para una curva ▶ Uso de una calculadora graficadora para graficar curvas paramétricas

Hasta ahora hemos descrito una curva dando una ecuación (en coordenadas rectangulares o polares) en la que las coordenadas de todos los puntos deben satisfacer a la curva. Pero no todas las curvas del plano pueden ser descritas en esta forma. En esta sección estudiamos ecuaciones paramétricas, como un método general para describir cualquier curva.

## ▼ Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Podemos considerar una curva como la trayectoria de un punto que se mueve en el plano; las coordenadas $x$ y $y$ del punto son entonces función del tiempo. Esta idea lleva a la siguiente definición.

### CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Si $f$ y $g$ son funciones definidas sobre un intervalo $I$, entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$, son **ecuaciones paramétricas** para la curva, con **parámetro** $t$.

### EJEMPLO 1 | Trazar una curva plana

Trace la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - t \qquad y = t - 1$$

**SOLUCIÓN** Para todo valor de $t$, obtenemos un punto sobre la curva. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$ y $y = -1$, de modo que el punto correspondiente es $(0, -1)$. En la Figura 1 localizamos los puntos $(x, y)$ determinados por los valores de $t$ que se muestran en la tabla siguiente.

| $t$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| $-2$ | 10 | $-3$ |
| $-1$ | 4 | $-2$ |
| 0 | 0 | $-1$ |
| 1 | $-2$ | 0 |
| 2 | $-2$ | 1 |
| 3 | 0 | 2 |
| 4 | 4 | 3 |
| 5 | 10 | 4 |

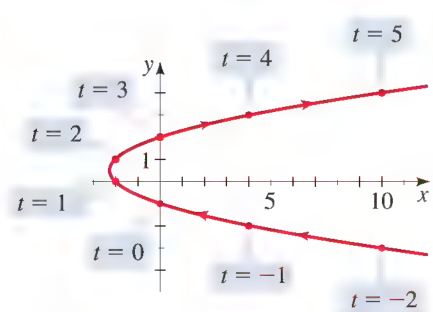



**FIGURA 1**

Cuando $t$ aumenta, una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

© Bettmann/CORBIS

**MARÍA GAETANA AGNESI** (1718-1799) es famosa por haber escrito *Instituzioni Analitiche*, uno de los primeros libros de texto de Cálculo.

María nació de una familia rica de Milán, Italia, la mayor de 21 hijos. Fue niña prodigio que dominaba varios idiomas desde temprana edad, incluyendo latín, griego y hebreo. A los 20 años de edad publicó una serie de ensayos sobre filosofía y ciencias naturales. Después de la muerte de su madre, se echó a cuestas la educación de sus hermanos y, en 1748, publicó su famoso libro que originalmente escribió como texto para educar a sus hermanos; ese libro compilaba y explicaba el conocimiento matemático de su época, el cual contenía numerosos ejemplos cuidadosamente escogidos entre los cuales está la curva ahora conocida como "bruja de Agnesi" (vea el Ejercicio 64 de la página 571). Una publicación considera que este libro es una "exposición por ejemplos y no por teoría" y le ganó inmediato reconocimiento. El papa Benedicto XIV le dio una posición en la Universidad de Bolonia, escribiendo "teníamos la idea de concederle el bien ganado cargo de matemáticas por el que usted no debería agradecernos a nosotros, sino nosotros a usted". Este nombramiento fue un honor extraordinariamente alto para una mujer, dado que a muy pocas mujeres en aquel tiempo se les permitía incluso ingresar a una universidad. Apenas dos años después de esto murió el padre de Agnesi y ella dejó las matemáticas por completo, se hizo monja y dedicó el resto de su vida y su riqueza a cuidar mujeres enfermas y moribundas, muriendo ella misma en la pobreza en una casa pobre de la cual ella había sido directora.

Si sustituimos $t$ por $-t$ en el Ejemplo 1, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 3t \qquad y = -t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (vea Figura 2) es la misma que la curva de la Figura 1, pero trazada en la dirección opuesta. Por otra parte, si sustituimos $t$ por $2t$ en el Ejemplo 1, obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 6t \qquad y = 2t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (vea Figura 3) es otra vez la misma, pero está trazada "el doble de rápido". *Entonces, la parametrización contiene más información que sólo la forma de la curva; también indica* cómo *se traza la curva.*

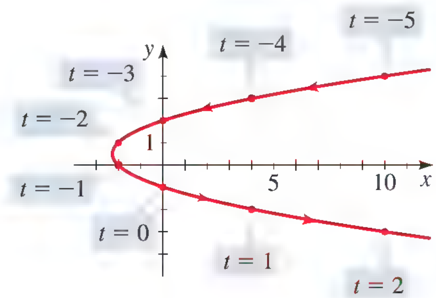



**FIGURA 2** $x = t^2 + 3t,\ y = -t - 1$

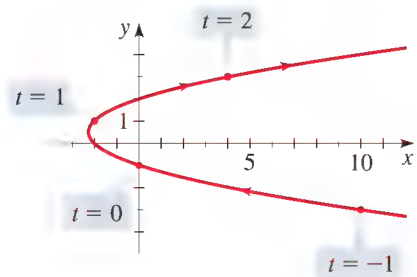



**FIGURA 3** $x = 4t^2 - 6t,\ y = 2t - 1$

## ▼ Eliminación del parámetro

A veces una curva dada por ecuaciones paramétricas también puede estar representada por una sola ecuación rectangular en $x$ y $y$. El proceso de hallar esta ecuación se denomina *eliminación del parámetro*. Una forma de hacer esto es despejar $t$ de una ecuación y, a continuación, sustituir en la otra.

### EJEMPLO 2 | Eliminación del parámetro

Elimine el parámetro de las ecuaciones paramétricas del Ejemplo 1.

**SOLUCIÓN** Primero despejamos $t$ de la ecuación más sencilla y luego sustituimos en la otra ecuación. De la ecuación $y = t - 1$, obtenemos $t = y + 1$. Sustituyendo en la ecuación de $x$, obtenemos

$$x = t^2 - 3t = (y + 1)^2 - 3(y + 1) = y^2 - y - 2$$

Entonces la curva del Ejemplo 1 tiene la ecuación rectangular $x = y^2 - y - 2$, de modo que es una parábola.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

La eliminación del parámetro con frecuencia nos ayuda a identificar la forma de una curva, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

### EJEMPLO 3 | Modelado del movimiento circular

Las siguientes ecuaciones paramétricas modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo $t$ (en segundos).

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad t \geq 0$$

Describa y grafique la trayectoria del cuerpo.

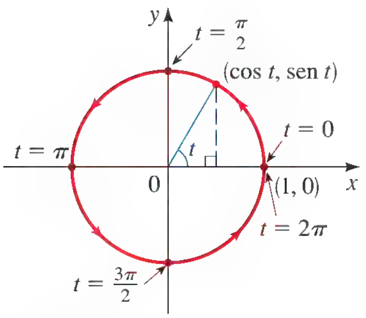



FIGURA 4

**SOLUCIÓN** Para identificar la curva, eliminamos el parámetro. Como $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y como $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ para todo punto $(x, y)$ en la curva, tenemos

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$$

Esto significa que todos los puntos en la curva satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que la gráfica es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Cuando $t$ aumenta de 0 a $2\pi$, el punto dado por las ecuaciones paramétricas arranca en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo, como se ve en la Figura 4. Entonces el cuerpo completa una revolución alrededor del círculo en $2\pi$ segundos. Observe que el parámetro $t$ puede ser interpretado como el ángulo que se muestra en la figura.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## EJEMPLO 4 | Trazar una curva paramétrica

Elimine el parámetro y trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = 2 - \cos^2 t$$

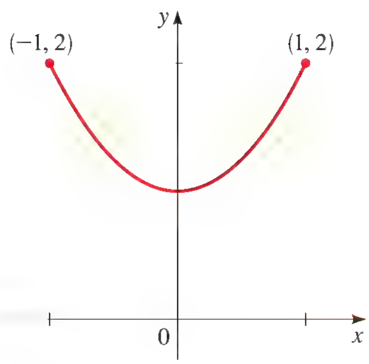



FIGURA 5

**SOLUCIÓN** Para eliminar el parámetro, primero usamos la identidad trigonométrica $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ para cambiar la segunda ecuación:

$$y = 2 - \cos^2 t = 2 - (1 - \operatorname{sen}^2 t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$$

Ahora podemos sustituir $\operatorname{sen} t = x$ de la primera ecuación para obtener

$$y = 1 + x^2$$

de modo que el punto $(x, y)$ se mueve a lo largo de la parábola $y = 1 + x^2$. Sin embargo, como $-1 \le \operatorname{sen} t \le 1$, tenemos $-1 \le x \le 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola entre $x = -1$ y $x = 1$. Como sen $t$ es periódico, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, 2 - \cos^2 t)$ se mueve en vaivén con frecuencia infinita a lo largo de la parábola entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$, como se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## Hallar ecuaciones paramétricas para una curva

A veces es posible hallar ecuaciones paramétricas para una curva usando algunas propiedades geométricas que definen la curva, como en los dos ejemplos siguientes.

## EJEMPLO 5 | Hallar ecuaciones paramétricas para una gráfica

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(2, 6)$.

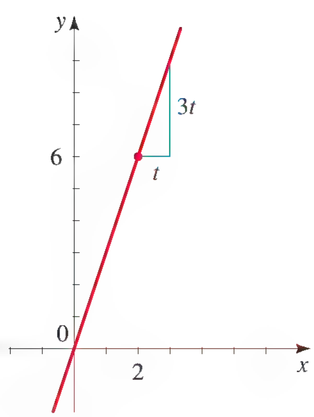



FIGURA 6

**SOLUCIÓN** Empecemos en el punto $(2, 6)$, moviéndonos hacia arriba y a la derecha a lo largo de esta recta. Como la recta tiene pendiente 3, por cada unidad que nos movamos a la derecha debemos subir 3 unidades. En otras palabras, si aumentamos la coordenada $x$ en $t$ unidades, debemos aumentar de manera correspondiente la coordenada $y$ en $3t$ unidades. Esto lleva a las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 6 + 3t$$

Para confirmar que estas ecuaciones dan la recta deseada, eliminamos el parámetro. Despejamos $t$ de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda para obtener

$$y = 6 + 3(x - 2) = 3x$$

Entonces la forma de pendiente y punto de intersección de la ecuación de esta recta es $y = 3x$, que es una recta de pendiente 3 que pasa por $(2, 6)$ como se requirió. La gráfica se ilustra en la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

## EJEMPLO 6 | Ecuaciones paramétricas para la cicloide

Cuando un círculo rueda a lo largo de una recta, la curva trazada por un punto fijo $P$ en la circunferencia del círculo se llama **cicloide** (vea Figura 7). Si el círculo tiene radio $a$ y rueda a lo largo del eje $x$, con una posición del punto $P$ estando en el origen, encuentre ecuaciones paramétricas para la cicloide.

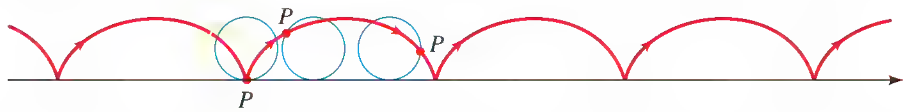



**FIGURA 7**

**SOLUCIÓN** La Figura 8 muestra el círculo y el punto $P$ después que el círculo ha rodado todo un ángulo $\theta$ (en radianes). La distancia $d(O, T)$ que el círculo ha rodado debe ser la misma que la longitud del arco $PT$, que, por la fórmula de la longitud de un arco, es $a\theta$ (vea Sección 6.1). Esto significa que el centro del círculo es $C(a\theta, a)$.

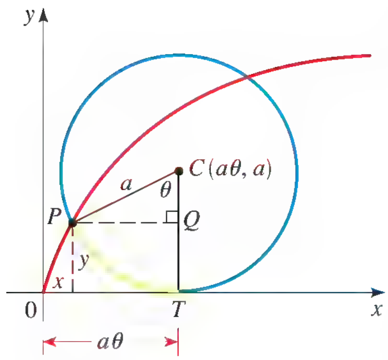



**FIGURA 8**

Sean $(x, y)$ las coordenadas de $P$. Entonces, de la Figura 8 (que ilustra el caso $0 < \theta < \pi/2$), vemos que

$$x = d(O, T) - d(P, Q) = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = d(T, C) - d(Q, C) = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

entonces las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = a(1 - \cos \theta)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57** ■

La cicloide tiene varias propiedades físicas interesantes. Es la "curva de descenso más rápido" en el siguiente sentido. Escojamos dos puntos $P$ y $Q$ que no se encuentren directamente uno sobre el otro, y los unimos con un alambre. Suponga que dejamos que una cuenta se deslice por el alambre por influencia de la gravedad (despreciando la fricción). De todas las formas posibles en las que el alambre pueda doblarse, la cuenta se deslizará con más rapidez de $P$ a $Q$ cuando la forma sea la mitad de un arco de un cicloide invertido (vea Figura 9). La cicloide también es la "curva de igual descenso" en el sentido de que sin importar dónde se coloque la cuenta $b$ en un alambre en forma de cicloide, tardará el mismo tiempo en deslizarse al fondo (vea Figura 10). Estas propiedades más bien sorprendentes del cicloide fueron demostradas (usando cálculo) en el siglo XVII por varios matemáticos y físicos, incluyendo Johann Bernoulli, Blaise Pascal y Christiaan Huygens.

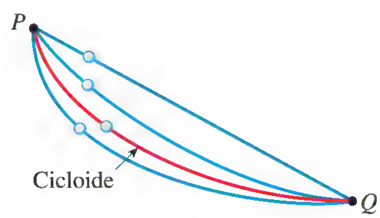



**FIGURA 9**

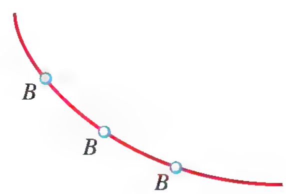



**FIGURA 10**

## ▼ Uso de una calculadora graficadora para graficar curvas paramétricas

Se puede usar la mayor parte de calculadoras graficadoras y programas de gráficas de computadoras para graficar ecuaciones paramétricas. Estos equipos son particularmente útiles para trazar curvas complicadas como la que se muestra en la Figura 11.

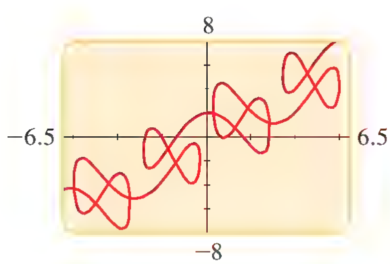


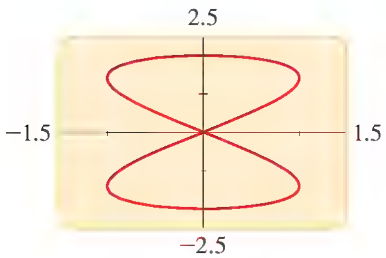

**FIGURA 11** $x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$, $y = t + 2 \cos 5t$

## EJEMPLO 7 | Graficar curvas paramétricas

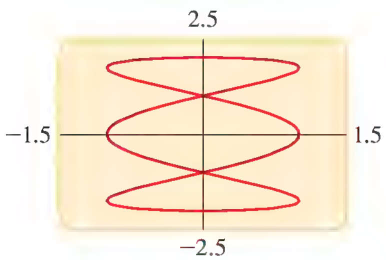
Use una calculadora graficadora para trazar las siguientes curvas paramétricas. Discuta sus similitudes y diferencias.

**(a)** $x = \operatorname{sen} 2t$
$y = 2 \cos t$

**(b)** $x = \operatorname{sen} 3t$
$y = 2 \cos t$




(a) $x = \text{sen } 2t$, $y = 2 \cos t$




(b) $x = \text{sen } 3t$, $y = 2 \cos t$

**FIGURA 12**

**SOLUCIÓN** En los incisos(a) y (b) la gráfica estará dentro del rectángulo dado por $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 2$, porque el seno y el coseno de cualquier número estarán entre $-1$ y 1. Entonces, podemos usar el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2.5, 2.5]$.

**(a)** Como $2 \cos t$ es periódico con período $2\pi$ (vea Sección 5.3) y como sen $2t$ tiene período $\pi$, la variación de $t$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ nos da la gráfica completa, que se muestra en la Figura 12(a).

**(b)** De nuevo, si $t$ toma valores entre 0 y $2\pi$ tendremos la gráfica completa que se ve en la Figura 12(b).

Ambas gráficas son *curvas cerradas,* lo cual significa que forman lazos con el mismo punto inicial y final; también, ambas gráficas se cruzan. No obstante, la gráfica de la Figura 12(a) tiene dos lazos, como la figura de un ocho, en tanto que la gráfica de la Figura 12(b) tiene tres lazos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

Las curvas graficadas en el Ejemplo 7 reciben el nombre de figuras de Lissajous. Una **figura de Lissajous** es la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = A \text{ sen } \omega_1 t \qquad y = B \cos \omega_2 t$$

donde $A$, $B$, $\omega_1$ y $\omega_2$ son constantes reales. Como sen $\omega_1 t$ y cos $\omega_2 t$ están entre $-1$ y 1, una figura de Lissajous estará dentro del rectángulo determinado por $-A \leq x \leq A$, $-B \leq y \leq B$. Esto se puede usar para escoger un rectángulo de vista al graficar una figura de Lissajous, como en el Ejemplo 7.

Recuerde de la Sección 8.1 que las coordenadas rectangulares $(x, y)$ y coordenadas polares $(r, \theta)$ están relacionadas por las ecuaciones $x = r \cos \theta$, $y = r \text{ sen } \theta$. Así, podemos graficar la ecuación polar $r = f(\theta)$ cambiándola a la forma paramétrica como sigue:

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \qquad \text{Porque } r = f(\theta)$$

$$y = r \text{ sen } \theta = f(\theta) \text{ sen } \theta$$

Sustituyendo $\theta$ por la variable paramétrica estándar $t$, tenemos el siguiente resultado.

### ECUACIONES POLARES EN FORMA PARAMÉTRICA

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es la misma que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \cos t \qquad y = f(t) \text{ sen } t$$

## EJEMPLO 8 | Forma paramétrica de una ecuación polar

Considere la ecuación polar $r = \theta$, $1 \leq \theta \leq 10\pi$.

**(a)** Exprese la ecuación en forma paramétrica.

**(b)** Trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas desde el inciso (a).

**SOLUCIÓN**

**(a)** La ecuación polar dada es equivalente a las ecuaciones paramétricas

$$x = t \cos t \qquad y = t \text{ sen } t$$

**(b)** Como $10\pi \approx 31.42$, usamos el rectángulo de vista $[-32, 32]$ por $[-32, 32]$, y hacemos que $t$ varíe de 1 a $10\pi$. La gráfica resultante se muestra en la Figura 13 como una *espiral*.

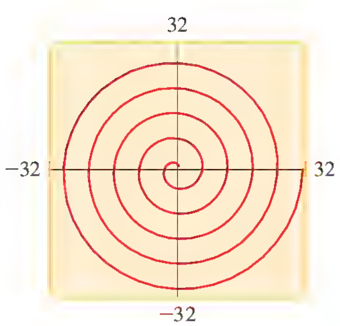



**FIGURA 13** $x = t \cos t$, $y = t \text{ sen } t$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

## 8.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1. (a)** Las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ dan las coordenadas de un punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ para valores apropiados de $t$. La variable $t$ se denomina ______.

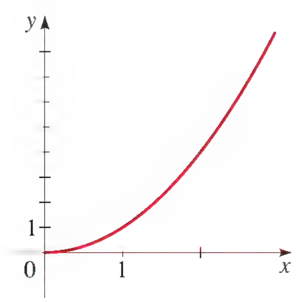
**(b)** Suponga que las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $t \geq 0$ modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo $t$. Cuando $t = 0$, el cuerpo está en ( , ), y cuando $t = 1$, el cuerpo está en ( , ).

**(c)** Si eliminamos el parámetro del inciso (b), obtenemos la ecuación $y =$ ___. Vemos de esta ecuación que la trayectoria del cuerpo en movimiento es una ____.

**2. (a)** *¿Verdadero o falso?* La misma curva puede ser descrita por ecuaciones paramétricas en muchas formas diferentes.

**(b)** Las ecuaciones paramétricas $x = 2t$, $y = (2t)^2$ modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo $t$. Cuando $t = 0$, el cuerpo está en ( , ), y cuando $t = 1$, el cuerpo está en ( , ).

**(c)** Si eliminamos el parámetro, obtenemos la ecuación $y =$ _____, que es la misma ecuación que en el Ejercicio 1(b). Por lo tanto, los cuerpos de los Ejercicios 1(b) y 2(b) se mueven a lo largo de la misma_____ pero atraviesan la trayectoria de manera diferente. Indique la posición de cada uno de los cuerpos cuando $t = 0$ y cuando $t = 1$ en la gráfica siguiente.




### HABILIDADES

**3-24** ■ A continuación se da un par de ecuaciones paramétricas. **(a)** Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas. **(b)** Encuentre una ecuación de coordenadas rectangulares para la curva al eliminar el parámetro.

**3.** $x = 2t, \quad y = t + 6$

**4.** $x = 6t - 4, \quad y = 3t, \quad t \geq 0$

**5.** $x = t^2, \quad y = t - 2, \quad 2 \leq t \leq 4$

**6.** $x = 2t + 1, \quad y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$

**7.** $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

**8.** $x = t^2, \quad y = t^4 + 1$

**9.** $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t + 1$

**10.** $x = t + 1, \quad y = \dfrac{t}{t + 1}$

**11.** $x = 4t^2, \quad y = 8t^3$

**12.** $x = |t|, \quad y = |1 - |t||$

**13.** $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

**14.** $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

**15.** $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^4 t$

**16.** $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$

**17.** $x = \cos t, \quad y = \cos 2t$

**18.** $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

**19.** $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

**20.** $x = \cot t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

**21.** $x = \tan t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi/2$

**22.** $x = \sec t, \quad y = \tan^2 t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

**23.** $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$

**24.** $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

**25-28** ■ La posición de un cuerpo en movimiento circular está modelada por las ecuaciones paramétricas dadas. Describa la trayectoria del cuerpo, indicando el radio del círculo, la posición en el tiempo $t = 0$, la orientación del movimiento (en el sentido de giro de las manecillas del reloj o al contrario), y el tiempo $t$ que tarda en completar una revolución alrededor del círculo.

**25.** $x = 3 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t$

**26.** $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t$

**27.** $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos 2t$

**28.** $x = 4 \cos 3t, \quad y = 4 \operatorname{sen} 3t$

**29-34** ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta con las propiedades dadas.

**29.** Pendiente $\frac{1}{2}$, que pasa por $(4, -1)$

**30.** Pendiente $-2$, que pasa por $(-10, -20)$

**31.** Que pasa por $(6, 7)$ y $(7, 8)$

**32.** Que pasa por $(12, 7)$ y el origen

**33.** Encuentre ecuaciones paramétricas para la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

**34.** Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**35.** Demuestre, por eliminación del parámetro $\theta$, que las siguientes ecuaciones paramétricas representan una hipérbola:

$$x = a \tan \theta \qquad y = b \sec \theta$$

**36.** Demuestre que las siguientes ecuaciones paramétricas representan una parte de la hipérbola del Ejercicio 35:

$$x = a\sqrt{t} \qquad y = b\sqrt{t + 1}$$

**37-40** ■ Trace la curva dada por las ecuaciones paramétricas.

**37.** $x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t, \quad t \geq 0$

**38.** $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

**39.** $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

**40.** $x = \cot t, \quad y = 2 \operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

**41.** Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de $v_0$ pies/s a un ángulo $\alpha$ arriba de la horizontal, entonces su posición después de $t$ segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - 16t^2$$

(donde $x$ y $y$ se miden en pies). Demuestre que la trayectoria del proyectil es una parábola al eliminar el parámetro $t$.

**42.** Con referencia al Ejercicio 41, suponga que un cañón dispara una bala al aire con una velocidad inicial de 2048 pies/s a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal.
**(a)** ¿Después de cuántos segundos llegará la bala al suelo?
**(b)** ¿A qué distancia del cañón llegará la bala al suelo?
**(c)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la bala?

**43-48** ■ Use calculadora graficadora para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

**43.** $x = \operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos 3t$

**44.** $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 4t$

**45.** $x = 3 \operatorname{sen} 5t, \quad y = 5\cos 3t$

**46.** $x = \operatorname{sen} 4t, \quad y = \cos 3t$

**47.** $x = \operatorname{sen}(\cos t), \quad y = \cos(t^{3/2}), \quad 0 \le t \le 2\pi$

**48.** $x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$

**49-52** ■ Nos dan una ecuación polar. **(a)** Exprese la ecuación polar en forma paramétrica. **(b)** Use calculadora graficadora para graficar las ecuaciones paramétricas que encontró en el inciso (a).

**49.** $r = 2^{\theta/12}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

**50.** $r = \operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

**51.** $r = \dfrac{4}{2 \quad \cos\theta}$

**52.** $r = 2^{\operatorname{sen}\theta}$

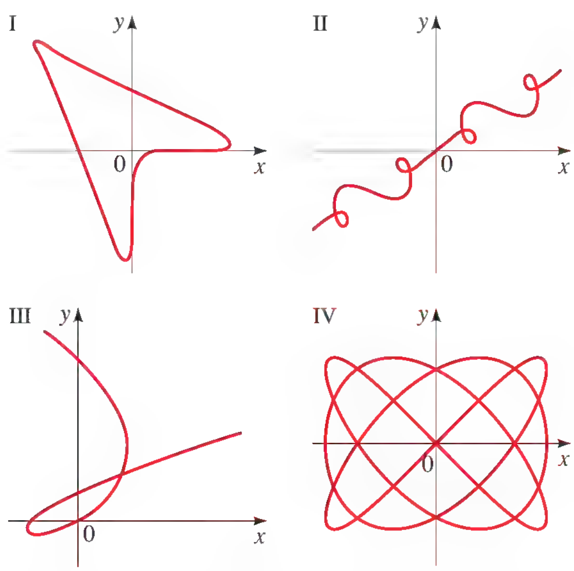
**53-56** ■ Relacione las ecuaciones paramétricas con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

**53.** $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$

**54.** $x = \operatorname{sen} 3t, \quad y = \operatorname{sen} 4t$

**55.** $x = t + \operatorname{sen} 2t, \quad y = t + \operatorname{sen} 3t$

**56.** $x = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} t), \quad y = \cos(t + \cos t)$



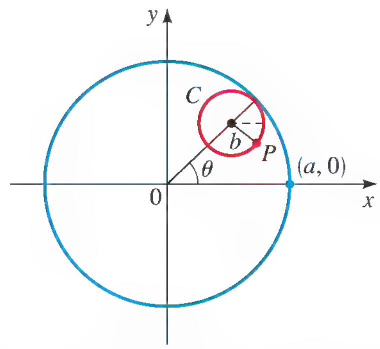

**57.** **(a)** En el Ejemplo 6 suponga que el punto $P$ que traza la curva se encuentra no en el borde del círculo, sino más bien en un punto fijo dentro del borde, a una distancia $b$ del centro (con $b < a$). La curva trazada por $P$ se denomina **epicicloide** (o **trocoide**). Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la epicicloide son

$$x = a\theta - b\operatorname{sen}\theta \qquad y = a - b\cos\theta$$

**(b)** Trace la gráfica usando $a = 3$ y $b = 2$.

**58.** **(a)** En el Ejercicio 57, si el punto $P$ está *fuera* del círculo a una distancia $b$ del centro (con $b > a$), entonces la curva trazada por $P$ recibe el nombre de **cicloide alargada** o **hipocicloide**. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para el hipocicloide son las mismas que las ecuaciones para el epicicloide.
**(b)** Trace la gráfica para el caso en el que $a = 1$ y $b = 2$.

**59.** Un círculo $C$ de radio $b$ rueda en el interior de un círculo más grande de radio $a$ con centro en el origen. Sea $P$ un punto fijo en el círculo más pequeño, con posición inicial en el punto $(a, 0)$ como se ve en la figura. La curva trazada por $P$ recibe el nombre de **hipocicloide.**




**(a)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas para el hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

$$y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

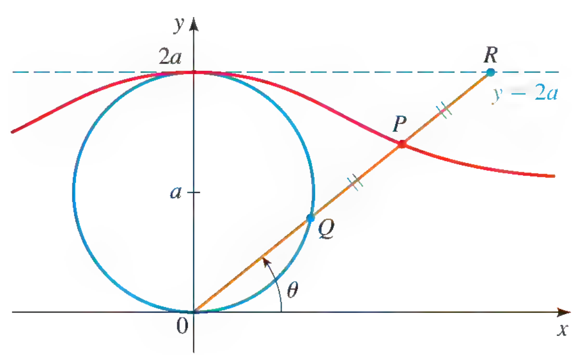
**(b)** Si $a = 4b$, el hipocicloide se denomina **astroide**. Demuestre que en este caso las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a

$$x = a\cos^3\theta \qquad y = a\operatorname{sen}^3\theta$$

Trace la curva. Elimine el parámetro para obtener una ecuación para el astroide en coordenadas rectangulares.

**60.** Si el círculo $C$ del Ejercicio 59 rueda en el *exterior* del círculo más grande, la curva trazada por $P$ se denomina **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

**61.** En la figura, el círculo de radio $a$ está estacionario y, para todo $\theta$, el punto $P$ es el punto medio del segmento $QR$. La curva trazada por $P$ para $0 < \theta < \pi$ se denomina **curva de ballesta**. Encuentre ecuaciones paramétricas para esta curva.

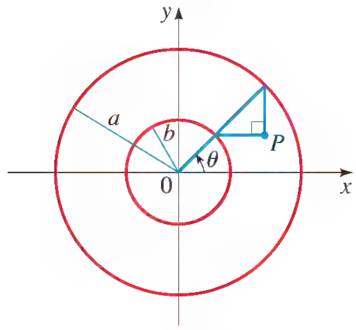


**62.** Dos círculos de radio $a$ y $b$ están centrados en el origen, como se ve en la figura. Cuando aumenta el ángulo $\theta$, el punto $P$ traza una curva que está entre los círculos.

**(a)** Encuentre ecuaciones paramétricas para la curva, usando $\theta$ como parámetro.

**(b)** Grafique la curva usando una calculadora graficadora, con $a = 3$ y $b = 2$.

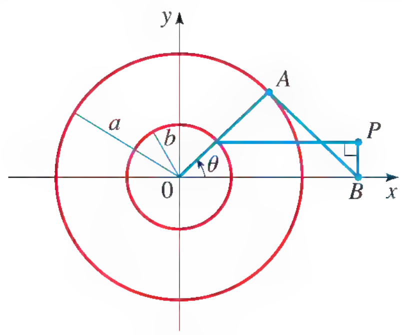
**(c)** Elimine el parámetro e identifique la curva.




**63.** Dos círculos de radio $a$ y $b$ están centrados en el origen, como se ve en la figura.

**(a)** Encuentre ecuaciones paramétricas para la curva trazada por el punto $P$, usando el ángulo $\theta$ como parámetro. (Nótese que el segmento de recta $AB$ está siempre tangente a la circunferencia más grande.)

**(b)** Grafique la curva usando calculadora graficadora, con $a = 3$ y $b = 2$.

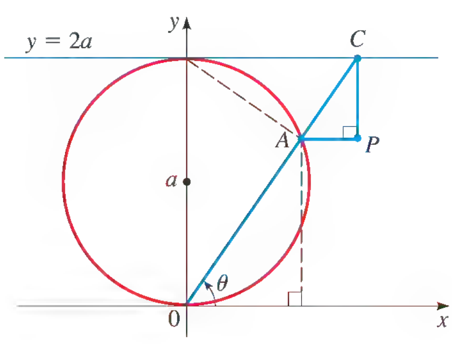



**64.** Una curva, llamada **bruja de Agnesi** (curva cúbica plana) está formada por todos los puntos $P$ determinados como se ve en la figura.

**(a)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

**(b)** Grafique la curva usando una calculadora graficadora, con $a = 3$.




**65.** Elimine el parámetro $\theta$ en las ecuaciones paramétricas para la cicloide (Ejemplo 6), para obtener una ecuación de coordenadas rectangulares para la sección de la curva dada por $0 \le \theta \le \pi$.

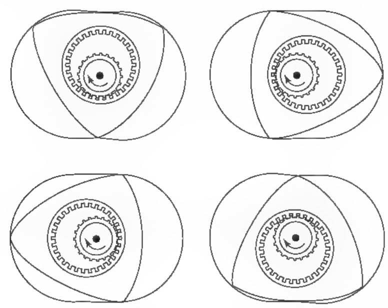
## APLICACIONES

**66. El motor giratorio** El Mazda RX-8 usa un motor no convencional (inventado por Felix Wankel en 1954), en el que los émbolos son sustituidos por un rotor triangular que gira en una caja especial como se ve en la figura. Los vértices del rotor mantienen contacto con la caja en todo momento, mientras que el centro del triángulo traza un círculo de radio $r$, haciendo girar el eje de transmisión. La forma de la caja está dada por las ecuaciones paramétricas siguientes (donde $R$ es la distancia entre los vértices y centro del rotor):

$$x = r \cos 3\theta + R \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} 3\theta + R \operatorname{sen} \theta$$

**(a)** Suponga que el eje de transmisión tiene radio $r = 1$. Grafique la curva dada por las ecuaciones paramétricas para los valores siguientes de $R$: 0.5, 1, 3, 5.

**(b)** ¿Cuál de los cuatro valores de $R$ dados en el inciso (a) parece modelar mejor la caja del motor ilustrada en la figura?



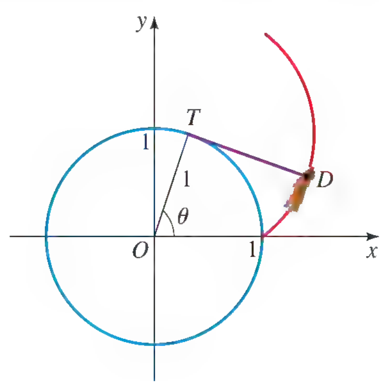
**67. Trayectoria espiral de un perro** Un perro está atado al tronco circular de un árbol de radio 1 pie por una correa larga. El animal se las ha arreglado para rodear toda la correa alrededor del árbol al jugar en el patio, y se encuentra en el punto (1, 0) de la figura. Viendo una ardilla, el perro *corre* alrededor del árbol en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, manteniendo tensa la correa en persecución de la intrusa.

**(a)** Demuestre que las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del perro (llamada **involuta de círculo**) son

$$x = \cos \theta + \theta \operatorname{sen} \theta \qquad y = \operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta$$

[*Sugerencia:* Observe que la correa está siempre tangente al árbol, de modo que $OT$ es perpendicular a $TD$.]

**(b)** Grafique la trayectoria del perro para $0 \le \theta \le 4\pi$.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**68. Más información en ecuaciones paramétricas** En esta sección dijimos que las ecuaciones paramétricas contienen más información que sólo la forma de una curva. Escriba un breve párrafo que explique este enunciado. En su explicación, use el siguiente ejemplo y sus respuestas a las partes (a) y (b) siguientes.

La posición de una partícula está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = \cos t$$

donde $t$ representa el tiempo. Sabemos que la forma de la trayectoria de la partícula es una circunferencia.

**(a)** ¿Cuánto tiempo tarda la partícula en dar una vuelta alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve el doble de rápido alrededor del círculo.

**(b)** ¿La partícula se mueve en el sentido de giro de las manecillas de un reloj o al contrario alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj alrededor del círculo.

**69. Formas diferentes de trazar una curva** Las curvas $C$, $D$, $E$ y $F$ están definidas en forma paramétrica como sigue, donde el parámetro $t$ toma todos los valores reales a menos que se indique de otra forma:

$$C\colon\quad x = t, \quad y = t^2$$
$$D\colon\quad x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$
$$E\colon\quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$
$$F\colon\quad x = 3^t, \quad y = 3^{2t}$$

**(a)** Demuestre que los puntos en las cuatro curvas satisfacen la misma ecuación de coordenadas rectangulares.

**(b)** Trace la gráfica de cada curva y explique en qué forma difieren las curvas entre sí.

# CAPÍTULO 8 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1.** Describa la forma en que las coordenadas polares representan la posición de un punto en el plano.

**2. (a)** ¿Cuáles ecuaciones se usan para cambiar de coordenadas polares a rectangulares?

**(b)** ¿Cuáles ecuaciones se usan para cambiar de coordenadas rectangulares a polares?

**3.** ¿Cómo se traza la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$?

**4.** ¿Qué tipo de curva tiene una ecuación polar de la forma dada?

**(a)** $r = a\cos\theta$ o $r = a \operatorname{sen}\theta$
**(b)** $r = a(1 \pm \cos\theta)$ o $r = a(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$
**(c)** $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$
**(d)** $r = a\cos n\theta$ o $r = a\operatorname{sen} n\theta$

**5.** ¿Cómo se grafica un número complejo $z$? ¿Cuál es la forma polar de un número complejo $z$? ¿Cuál es el módulo de $z$? ¿Cuál es el argumento de $z$?

**6. (a)** ¿Cómo se multiplican dos números complejos si están dados en forma polar?

**(b)** ¿Cómo se dividen dos de estos números?

**7. (a)** Exprese el Teorema de De Moivre.

**(b)** ¿Cómo se encuentran las raíces $n$-ésimas de un número complejo?

**8.** Una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$.

**(a)** ¿Cómo se traza la curva?
**(b)** ¿Cómo se elimina el parámetro?

## EJERCICIOS

**1-6** ■ Un punto $P(r, \theta)$ está dado en coordenadas polares. **(a)** Localice el punto $P$. **(b)** Encuentre coordenadas rectangulares para $P$.

**1.** $\left(12, \frac{\pi}{6}\right)$ **2.** $\left(8, -\frac{3\pi}{4}\right)$

**3.** $\left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$ **4.** $\left(-\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$

**5.** $\left(4\sqrt{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ **6.** $\left(-6\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

**7-12** ■ Nos dan un punto $P(x, y)$ en coordenadas rectangulares. **(a)** Localice el punto $P$. **(b)** Encuentre coordenadas polares para $P$ con $r \geq 0$. **(c)** Encuentre coordenadas polares para $P$ con $r \leq 0$.

**7.** $(8, 8)$ **8.** $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$

**9.** $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$ **10.** $(3\sqrt{3}, 3)$

**11.** $(-3, \sqrt{3})$ **12.** $(4, -4)$

**13-16** ■ **(a)** Convierta la ecuación a coordenadas polares y simplifique. **(b)** Grafique la ecuación. [*Sugerencia:* Use la forma de la ecuación que vea que es más fácil de graficar.]

**13.** $x + y = 4$ **14.** $xy = 1$

**15.** $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ **16.** $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

**17-24** ■ **(a)** Trace la gráfica de la ecuación polar. **(b)** Exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

**17.** $r = 3 + 3\cos\theta$ **18.** $r = 3\operatorname{sen}\theta$

**19.** $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$ **20.** $r = 4\cos 3\theta$

**21.** $r^2 = \sec 2\theta$ **22.** $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

**23.** $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$ **24.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

**25-28** ■ Use calculadora graficadora para graficar la ecuación polar. Escoja el dominio de $\theta$ para asegurarse de obtener toda la gráfica.

**25.** $r = \cos(\theta/3)$

**26.** $r = \operatorname{sen}(9\theta/4)$

**27.** $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

**28.** $r = \theta \operatorname{sen} \theta, \quad -6\pi \le \theta \le 6\pi$

**29-34** ■ Nos dan un número complejo. **(a)** Grafique el número en el plano complejo. **(b)** Encuentre el módulo y argumento. **(c)** Escriba el número en forma polar.

**29.** $4 + 4i$

**30.** $-10i$

**31.** $5 + 3i$

**32.** $1 + \sqrt{3}i$

**33.** $-1 + i$

**34.** $-20$

**35-38** ■ Use el Teorema de De Moivre para hallar la potencia indicada.

**35.** $(1 - \sqrt{3}i)^4$

**36.** $(1 + i)^8$

**37.** $(\sqrt{3} + i)^{-4}$

**38.** $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

**39-42** ■ Encuentre las raíces indicadas.

**39.** Las raíces cuadradas de $-16i$

**40.** Las raíces cúbicas de $4 + 4\sqrt{3}i$

**41.** Las raíces sextas de 1

**42.** Las raíces octavas de $i$

**43-46** ■ Nos dan un par de ecuaciones paramétricas. **(a)** Trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas. **(b)** Encuentre una ecuación de coordenadas rectangulares para la curva eliminando el parámetro.

**43.** $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$

**44.** $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1$

**45.** $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

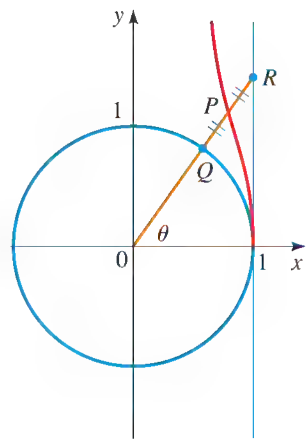
**46.** $x = \dfrac{1}{t} + 2, \quad y = \dfrac{2}{t^2}, \quad 0 < t \le 2$

**47-48** ■ Use calculadora graficadora para trazar la curva paramétrica.

**47.** $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 3t$

**48.** $x = \operatorname{sen}(t + \cos 2t), \quad y = \cos(t + \operatorname{sen} 3t)$

**49.** En la figura, el punto $P$ está en el punto medio del segmento $QR$ y $0 \le \theta < \pi/2$. Usando $\theta$ como el parámetro, encuentre una representación paramétrica para la curva trazada por $P$.



## CAPÍTULO 8 EXAMEN

1. **(a)** Convierta el punto cuyas coordenadas polares son $(8, 5\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

   **(b)** Encuentre dos representaciones de coordenadas polares para el punto de coordenadas rectangulares $(-6, 2\sqrt{3})$, una con $r > 0$ y una con $r < 0$ y ambas con $0 \leq \theta < 2\pi$.

2. **(a)** Grafique la ecuación polar $r = 8\cos\theta$. ¿Qué tipo de curva es ésta?

   **(b)** Convierta la ecuación a coordenadas rectangulares.

3. Grafique la ecuación polar $r = 3 + 6 \operatorname{sen}\theta$. ¿Qué tipo de curva es ésta?

4. Sea $z = 1 + \sqrt{3}i$.

   **(a)** Grafique $z$ en el plano complejo.

   **(b)** Escriba $z$ en forma polar.

   **(c)** Encuentre el número complejo $z^9$.

5. Sea $z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$ y $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$.

   Encuentre $z_1z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$.

6. Encuentre las raíces cúbicas de $27i$, y trace estas raíces en el plano complejo.

7. **(a)** Trace la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 3 \operatorname{sen} t + 3 \qquad y = 2\cos t \qquad (0 \leq t \leq \pi)$$

   **(b)** Elimine el parámetro $t$ del inciso (a) para obtener una ecuación para esta curva en coordenadas rectangulares.

8. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta de pendiente 2 que pasa por el punto (3, 5).

# La trayectoria de un proyectil

Modelar movimiento es una de las ideas más importantes en física clásica y moderna. Gran parte de las obras de Isaac Newton fue para crear un modelo matemático para ver cómo se mueven e interactúan los cuerpos; ésta fue la razón principal de su invención del Cálculo. Albert Einstein ideó su Teoría Especial de la Relatividad a principios del siglo XX para refinar las leyes de Newton del movimiento.

En esa sección usamos geometría de coordenadas para modelar el movimiento de un proyectil, por ejemplo una pelota lanzada hacia arriba al aire, una bala disparada de un fusil o cualquier otro tipo de proyectil. Un modelo similar fue creado por Galileo, pero nosotros tenemos la ventaja de usar nuestra moderna notación matemática para hacer mucho más fácil la descripción del modelo de lo que fue para Galileo.

## Ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un proyectil

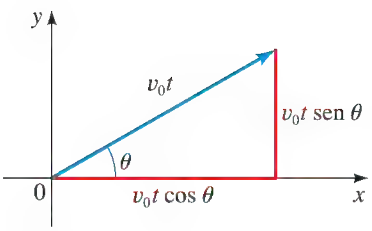



**FIGURA 1**

Suponga que ahora disparamos un proyectil al aire desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial $v_0$ y a un ángulo $\theta$ hacia arriba del suelo. Si no hubiera gravedad (ni resistencia del aire), el proyectil seguiría en movimiento indefinidamente a la misma velocidad y en la misma dirección. Puesto que distancia = velocidad × tiempo, el proyectil recorrería una distancia $v_0t$, de modo que su posición en el tiempo $t$ estaría dada en consecuencia por las siguientes ecuaciones paramétricas (suponiendo que el origen de nuestro sistema de coordenadas se coloque en la ubicación inicial del proyectil; vea Figura 1):

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t \qquad \text{Sin gravedad}$$

Pero, desde luego, sabemos que la gravedad atraerá al proyectil otra vez al nivel del suelo. Con el uso de Cálculo, se puede demostrar que el efecto de la gravedad se puede explicar al restar $\frac{1}{2}gt^2$ de la posición vertical del proyectil. En esta expresión, $g$ es la aceleración gravitacional: $g \approx 32$ pies/s$^2$ $\approx 9.8$ m/s$^2$. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil:

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Con gravedad}$$

### EJEMPLO | La trayectoria de una bala de cañón

Encuentre ecuaciones paramétricas que modelen la trayectoria de una bala de cañón disparada al aire con una velocidad inicial de 150 m/s a un ángulo de 30° de elevación. Trace la trayectoria de la bala de cañón.

**SOLUCIÓN** Sustituyendo la velocidad inicial y ángulo dados en las ecuaciones paramétricas generales de la trayectoria de un proyectil, obtenemos

$$x = (150.0 \cos 30°)t \qquad y = (150.0 \operatorname{sen} 30°)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 \qquad \text{Sustituya } v_0 = 150.0,\ \theta = 30°$$

$$x = 129.9t \qquad y = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Simplifique}$$

La trayectoria está graficada en la Figura 2.

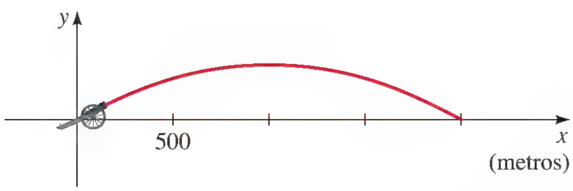



**FIGURA 2** Trayectoria de una bala de cañón

## Alcance de un proyectil

¿Cómo saber en dónde y cuándo caerá al suelo la bala de cañón del ejemplo anterior? Como el nivel del suelo corresponde a $y = 0$, sustituimos este valor por $y$ y despejamos $t$:

$$0 = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Haga } y = 0$$

$$0 = t(75.0 - 4.9t) \qquad \text{Factorice}$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{75.0}{4.9} \approx 15.3 \qquad \text{Despeje}$$

La primera solución, $t = 0$, es el tiempo cuando el cañón se dispara; la segunda solución significa que la bala de cañón cae al suelo después de 15.3 segundos de vuelo. Para ver *dónde* ocurre esto, sustituimos este valor en la ecuación por $x$, la ubicación horizontal de la bala de cañón.

$$x = 129.9(15.3) \approx 1987.5 \text{ m}$$

La bala de cañón recorre casi 2 km antes de caer al suelo.

La Figura 3 muestra las trayectorias de varios proyectiles, todos ellos disparados con la misma velocidad inicial pero a ángulos diferentes. De las gráficas vemos que si el ángulo de disparo es demasiado alto o demasiado bajo, el proyectil no llega muy lejos.

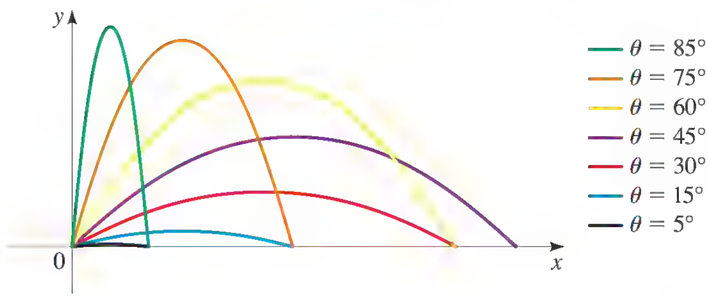



**FIGURA 3** Trayectorias de proyectiles

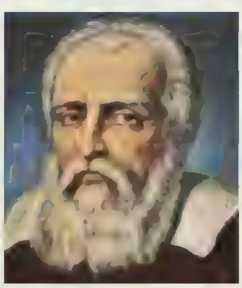
Intentemos hallar el ángulo óptimo de disparo, es decir, el ángulo que dispara el proyectil tan lejos como es posible. Daremos los mismos pasos que dimos en el ejemplo precedente, pero ahora usaremos ecuaciones paramétricas generales. Primero, despejamos el tiempo cuando el proyectil cae al suelo al sustituir $y = 0$:

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Sustituya } y = 0$$

$$0 = t(v_0 \operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{2}gt) \qquad \text{Factorice}$$

$$0 = v_0 \operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{2}gt \qquad \text{Iguale a 0 el segundo factor}$$

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \qquad \text{Despeje } t$$



The Granger Collection, New York

**GALILEO GALILEI** (1564-1642) nació en Pisa, Italia. Estudió medicina pero abandonó esta carrera a favor de las ciencias y matemáticas. A los 25 años de edad, al dejar caer balas de cañón de varios tamaños desde la Torre Inclinada de Pisa, demostró que cuerpos ligeros caen a la misma velocidad que los cuerpos pesados. Esto contradecía el entonces aceptado punto de vista de Aristóteles de que los cuerpos más pesados caen con más rapidez. También demostró que la distancia que un cuerpo cae es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado en caída, y a partir de esto pudo demostrar que la trayectoria de un proyectil es una parábola.

Galileo construyó el primer telescopio y, cuando lo utilizó, descubrió las lunas de Júpiter. Su apoyo a la idea de Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol (en lugar de estar estacionaria) hizo que fuera llevado ante la Inquisición. Para entonces, siendo ya viejo, fue obligado a retractarse de sus ideas pero se dice que musitó: "Y sin embargo se mueve." Galileo revolucionó la ciencia al expresar principios científicos en el idioma de las matemáticas. Dijo: "El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos."

A continuación sustituimos esto en la ecuación para $x$ para ver qué distancia recorrió el proyectil horizontalmente cuando llegó al suelo:

$$
\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\theta)t && \text{Ecuación paramétrica para} \\
&= (v_0 \cos\theta)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}\right) && \text{Sustituya } t = (2v_0 \operatorname{sen}\theta)/g \\
&= \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g} && \text{Simplifique} \\
&= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} && \text{Use la identidad } \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta
\end{aligned}
$$

Deseamos escoger $\theta$ de modo que $x$ sea tan grande como sea posible. El máximo valor que el seno de cualquier ángulo puede tener es 1, el seno de 90°. Entonces buscamos $2\theta = 90°$, o sea $\theta = 45°$. De la última ecuación de la pantalla precedente, podemos ver que recorrerá una distancia $x = v_0^2/g$.

## PROBLEMAS

1. **Las trayectorias son parábolas** De las gráficas de la Figura 3, las gráficas de proyectiles parecen ser parábolas que abren hacia abajo. Elimine el parámetro $t$ de las ecuaciones paramétricas generales para verificar que en verdad sean parábolas.

2. **Trayectoria de una pelota de béisbol** Suponga que una pelota de béisbol es lanzada a 30 pies/s a un ángulo de 60° con la horizontal desde una altura de 4 pies sobre el suelo.
   **(a)** Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota de béisbol y trace su gráfica.
   **(b)** ¿Qué distancia recorre la pelota y cuándo cae al suelo?

3. **Trayectoria de un cohete** Suponga que un cohete es disparado a un ángulo de 5° de la vertical con una velocidad inicial de 1000 pies/s.
   **(a)** Encuentre el tiempo que el cohete está en el aire.
   **(b)** Encuentre la máxima altura que alcanza.
   **(c)** Encuentre la distancia vertical que ha recorrido cuando cae al suelo.
   **(d)** Grafique la trayectoria del cohete.

4. **Disparo de un proyectil** La velocidad inicial de un proyectil es 330 m/s.
   **(a)** ¿A qué ángulo debe ser disparado el proyectil para que haga blanco en un objetivo situado a 10 km de distancia? (Se debe encontrar que hay dos ángulos posibles.) Grafique las trayectorias del proyectil para ambos ángulos.
   **(b)** ¿Para qué ángulo el proyectil hará blanco más pronto en el objetivo?

5. **Máxima altura** Demuestre que la máxima altura alcanzada por un proyectil, como función de su velocidad inicial $v_0$ y de su ángulo de disparo $\theta$, es

$$y = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

6. **Disparo al aire** Suponga que un proyectil se dispara hacia un viento de frente que le ofrece resistencia para reducir su velocidad en una cantidad constante $w$. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil.

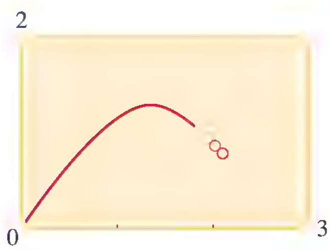
7. **Disparo al aire** Usando las ecuaciones paramétricas deducidas en el Problema 6, trace gráficas de la trayectoria de un proyectil con velocidad inicial $v_0 = 32$ pies/s, disparado hacia un viento de frente de $w = 24$ pies/s, para los ángulos $\theta = 5°, 15°, 30°, 40°, 45°, 55°, 60°$ y $75°$. ¿Todavía es cierto que el máximo alcance se logra al hacer el disparo a 45°? Trace unas pocas más de gráficas para ángulos diferentes, y use estas gráficas para estimar el ángulo óptimo de disparo.

**8. Simulación de la trayectoria de un proyectil** La trayectoria de un proyectil puede simularse en una calculadora graficadora. En una TI-83, use el estilo de gráfica "Path" (Trayectoria) para graficar las ecuaciones paramétricas generales para la trayectoria de un proyectil, y observe el movimiento del cursor circular que simula el movimiento del proyectil. La selección del tamaño de `Tstep` determina la velocidad del "proyectil".

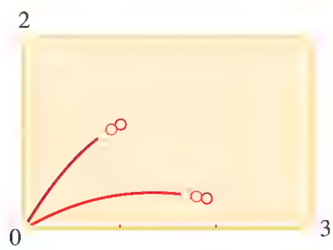
**(a)** Simule la trayectoria de un proyectil. Experimente con varios valores de $\theta$. Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. El inciso (a) de la figura siguiente muestra una de estas trayectorias.

**(b)** Simule la trayectoria de dos proyectiles, disparados en forma simultánea, uno a $\theta = 30°$ y el otro a $\theta = 60°$. Esto puede hacerse en la TI-83 usando el modo `Simul` (modo "simultáneo"). Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. Vea el inciso (b) de la figura. ¿Dónde caen los proyectiles? ¿Cuál llega primero al suelo?

**(c)** Simule la trayectoria de una pelota lanzada en línea recta hacia arriba ($\theta = 90°$). Experimente con valores de $v_0$ entre 5 y 20 pies/s. Use el estilo de gráfica "Animate" y `Tstep` $= 0.02$. Simule la trayectoria de dos pelotas que se lanzan simultáneamente a diferentes velocidades. Para distinguir mejor las dos pelotas, póngalas en diferentes coordenadas $x$ (por ejemplo $x = 1$ y $x = 2$). Vea la parte (c) de la figura. Si se duplica $v_0$, ¿cómo cambia la máxima altura a la que llega la pelota?



(a)



(b)

(c)

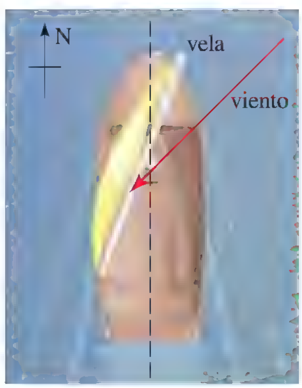
© James L. Amos/SuperStock

CAPÍTULO 9

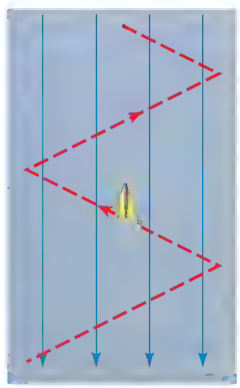
# VECTORES EN DOS Y TRES DIMENSIONES



Muchas cantidades del mundo real son descritas matemáticamente por sólo un número: su “tamaño” o magnitud. Por ejemplo, cantidades como masa, volumen, distancia y temperatura son descritas por su magnitud, pero muchas otras cantidades comprenden magnitud *y* dirección. Estas últimas son descritas matemáticamente por vectores. Por ejemplo, si una persona empuja un carro con cierta fuerza, la dirección en la que empuje en el carro es importante; se obtienen diferentes resultados si se empuja el carro hacia adelante, hacia atrás o quizá a los lados. Entonces, la fuerza es un vector. El resultado de varias fuerzas que actúan sobre un cuerpo se puede evaluar usando vectores. Por ejemplo, veremos cómo podemos combinar las fuerzas vectoriales del viento y el agua en las velas y el casco de un bote de velas para hallar la dirección en la que el bote navegará. El análisis de estas fuerzas vectoriales ayuda a los marinos a navegar contra el viento por medio de virajes. (Vea el Proyecto de Descubrimiento *Navegando contra el viento* citado en la página 597).




Fuerzas vectoriales



Viraje contra el viento

# 9.1 VECTORES EN DOS DIMENSIONES

**Descripción geométrica de vectores ▶ Vectores en el plano coordenado ▶ Uso de vectores para modelar velocidad y fuerza**

En aplicaciones de las matemáticas, ciertas cantidades están determinadas completamente por su magnitud, por ejemplo longitud, masa, área, temperatura y energía. Hablamos de una longitud de 5 m o una masa de 3 kg; sólo es necesario un número para describir cada una de estas cantidades. Esa cantidad se denomina **escalar**.

Por otra parte, para describir el desplazamiento de un cuerpo, se requiere de dos números: la *magnitud* y la *dirección* del desplazamiento. Para describir la velocidad de un objeto en movimiento, debemos especificar la *rapidez* y la *dirección* de viaje. Cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza que comprenden magnitud y dirección se denominan *cantidades dirigidas*. Una forma de representar matemáticamente tales cantidades es por medio del uso de *vectores*.

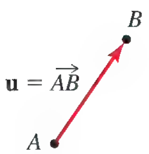



**FIGURA 1**

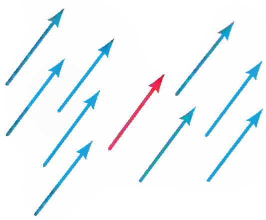


**FIGURA 2**

## ▼ Descripción geométrica de vectores

Un **vector** en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Trazamos un vector como se ve en la Figura 1 con una flecha para especificar la dirección. Denotamos este vector con $\overrightarrow{AB}$. El punto $A$ es el **punto inicial** y $B$ es el **punto terminal** del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta $AB$ recibe el nombre de **magnitud** o **longitud** del vector y está denotado por $|\overrightarrow{AB}|$. Usamos letras negritas para denotar vectores. Entonces, escribimos $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

Dos vectores son considerados **iguales** si tienen igual magnitud y la misma dirección. En consecuencia, todos los vectores de la Figura 2 son iguales. Esta definición de igualdad tiene sentido si consideramos un vector como que representa un desplazamiento. Dos de estos desplazamientos son iguales si tienen iguales magnitudes y la misma dirección. Por lo tanto, los vectores de la Figura 2 pueden ser considerados como el *mismo* desplazamiento aplicado a objetos en diferentes lugares del plano.

Si el desplazamiento $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ es seguido por el desplazamiento $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$ como se muestra en la Figura 3. En otras palabras, el solo desplazamiento representado por el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo efecto que los otros dos desplazamientos juntos. Llamamos al vector $\overrightarrow{AC}$ la **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, y escribimos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (El **vector cero**, denotado por $\mathbf{0}$, no representa desplazamiento.) Entonces, para hallar la suma de cualesquier dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, trazamos vectores iguales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con la punta inicial de uno en el punto terminal del otro (vea Figura 4(a)). Si trazamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ iniciando en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que es la diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que se ve en la Figura 4(b).

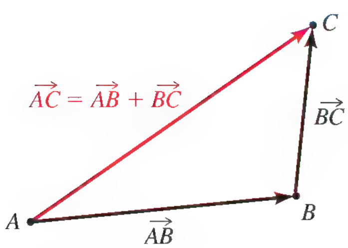



**FIGURA 3**

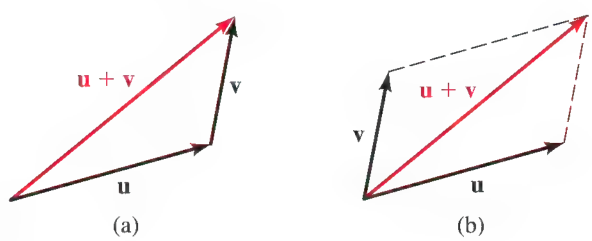



**FIGURA 4** Adición de vectores

Si $a$ es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, definimos un nuevo vector $a\mathbf{v}$ como sigue: el vector $a\mathbf{v}$ tiene magnitud $|a||\mathbf{v}|$ y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $a > 0$ y la dirección opuesta si $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a\mathbf{v} = 0$, el vector cero. Este proceso se denomina **multiplicación de un vector por un escalar**. La multiplicación de un vector por un escalar tiene el efecto de alargar o contraer el vector. La Figura 5 muestra gráficas del vector $a\mathbf{v}$ para diferentes valores de $a$. Escribimos el vector $(-1)\mathbf{v}$ como $-\mathbf{v}$. Entonces, $-\mathbf{v}$ es el vector con la misma longitud que $\mathbf{v}$ pero con la dirección opuesta.

La **diferencia** de dos vectores **u** y **v** está definida por **u** − **v** = **u** + (−**v**). La Figura 6 muestra que el vector **u** − **v** es la otra diagonal del paralelogramo formado por **u** y **v**.

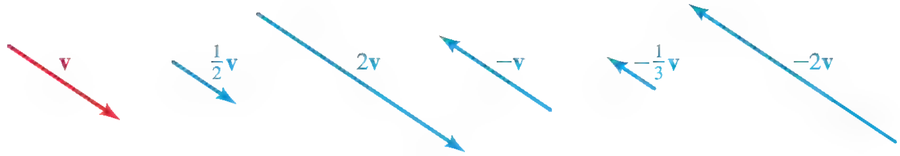



**FIGURA 5** Multiplicación de un vector por un escalar

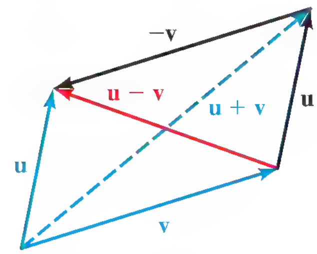



**FIGURA 6** Resta de vectores

## Vectores en el plano coordenado

Hasta este punto, hemos estudiado vectores geométricamente. Al colocar un vector en un plano coordenado, podemos describirlo analíticamente (esto es, mediante uso de componentes). En la Figura 7(a), para pasar del punto inicial del vector **v** al punto terminal, nos movemos *a* unidades a la derecha y *b* unidades hacia arriba. Representamos **v** como un par ordenado de números reales

Nótese la distinción entre el *vector* $\langle a, b\rangle$ y el *punto* $(a, b)$.

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$

donde *a* es el **componente horizontal** de **v** y *b* es el **componente vertical** de **v**. Recuerde que un vector representa una magnitud y una dirección, no una flecha particular en el plano. En consecuencia, el vector $\langle a, b\rangle$ tiene muchas representaciones diferentes, dependiendo de su punto inicial (vea Figura 7(b)).

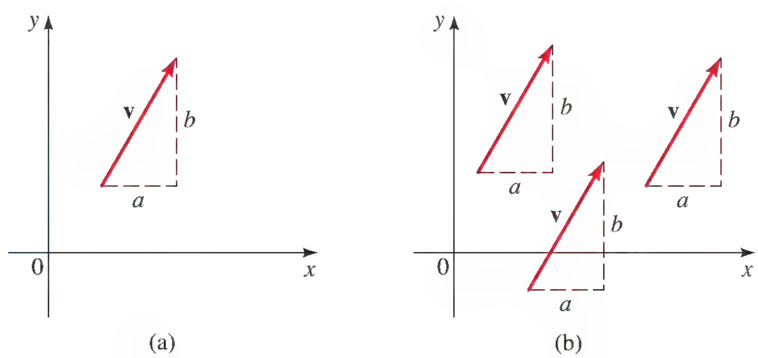



**FIGURA 7**

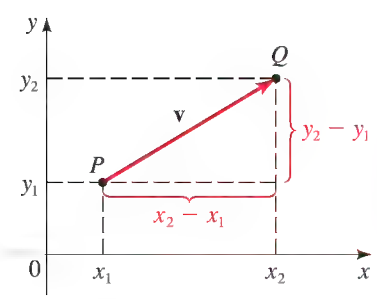



**FIGURA 8**

Usando la Figura 8, podemos expresar la relación entre la representación geométrica y la analítica de un vector como sigue.

**FORMA COMPONENTE DE UN VECTOR**

Si un vector **v** está representado en el plano con punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

**EJEMPLO 1** | Describir vectores en forma de componente

**(a)** Encuentre la forma de componente del vector **u** con punto inicial $(-2, 5)$ y punto terminal $(3, 7)$.

**(b)** Si el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 7\rangle$ se traza con punto inicial $(2, 4)$, ¿cuál es su punto terminal?

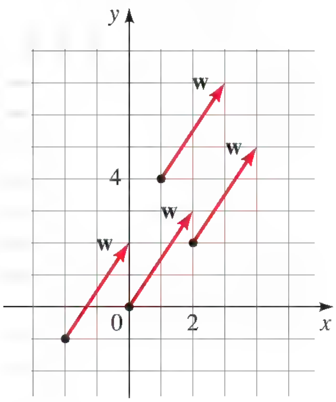



FIGURA 9

(c) Trace representaciones del vector $\mathbf{w} = \langle 2, 3 \rangle$ con puntos iniciales en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 4)$.

**SOLUCIÓN**

(a) El vector deseado es

$$\mathbf{u} = \langle 3 - (-2), 7 - 5 \rangle = \langle 5, 2 \rangle$$

(b) Sea $(x, y)$ el punto terminal de $\mathbf{v}$. Entonces

$$\langle x - 2, y - 4 \rangle = \langle 3, 7 \rangle$$

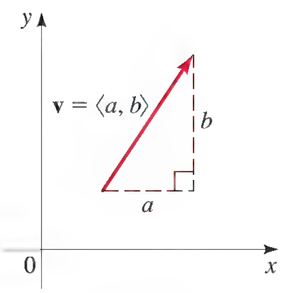
Entonces $x - 2 = 3$ y $y - 4 = 7$, o $x = 5$ y $y = 11$. El punto terminal es $(5, 11)$.

(c) En la Figura 9 están representaciones del vector $\mathbf{w}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11, 19** Y **23**

A continuación damos definiciones analíticas de las diversas operaciones que hemos descrito geométricamente. Empecemos con la igualdad de vectores. Hemos dicho que dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Para los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, esto significa que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. En otras palabras, dos vectores son **iguales** si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Entonces, todas las flechas de la Figura 7(b) representan al mismo vector, al igual que todas las flechas de la Figura 9.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo de la Figura 10, obtenemos la siguiente fórmula para la magnitud de un vector.




$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

FIGURA 10

### MAGNITUD DE UN VECTOR

La **magnitud** o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## EJEMPLO 2 | Magnitudes de vectores

Encuentre la magnitud de cada vector.

(a) $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ (b) $\mathbf{v} = \langle 5, 0 \rangle$ (c) $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

**SOLUCIÓN**

(a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

(b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

(c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

Las siguientes definiciones de suma, resta y multiplicación escalar de vectores corresponde a las descripciones geométricas dadas antes. La Figura 11 muestra cómo es que la definición analítica de suma corresponde a la geométrica.

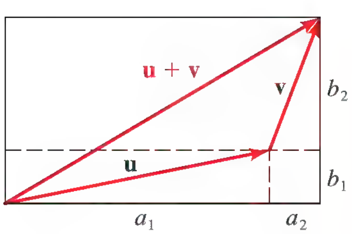



FIGURA 11

### OPERACIONES ALGEBRAICAS SOBRE VECTORES

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, cb_1 \rangle, \qquad c \in \mathbb{R}$$

## EJEMPLO 3 | Operaciones con vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$, encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$, y $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

**SOLUCIÓN** Por las definiciones de las operaciones vectoriales tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle 2, -3\rangle - \langle -1, 2\rangle = \langle 1, -1\rangle \\
\mathbf{u} - \mathbf{v} &= \langle 2, -3\rangle - \langle -1, 2\rangle = \langle 3, -5\rangle \\
2\mathbf{u} &= 2\langle 2, -3\rangle = \langle 4, -6\rangle \\
-3\mathbf{v} &= -3\langle -1, 2\rangle = \langle 3, -6\rangle \\
2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} &= 2\langle 2, -3\rangle + 3\langle -1, 2\rangle = \langle 4, -6\rangle + \langle -3, 6\rangle = \langle 1, 0\rangle
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Las siguientes propiedades para operaciones vectoriales se pueden demostrar fácilmente a partir de las definiciones. El **vector cero** es el vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$. Desempeña la misma función para la suma de vectores que el número 0 para la suma de números reales.

### PROPIEDADES DE VECTORES

| **Suma de vectores** | **Multiplicación por un escalar** |
|---|---|
| $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ |
| $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ | $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ |
| $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u}) = d(c\mathbf{u})$ |
| $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |
| **Vector unitario** | $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ |
| $\lvert c\mathbf{u}\rvert = \lvert c\rvert\,\lvert \mathbf{u}\rvert$ | $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ |

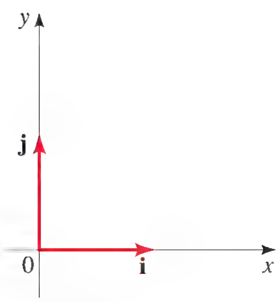



**FIGURA 12**

Un vector de longitud 1 se llama **vector unitario**. Por ejemplo, en el Ejemplo 2(c) el vector $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$ es un vector unitario. Dos vectores unitarios útiles son **i** y **j**, definidos por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$$

(Vea Figura 12.) Estos vectores son especiales porque cualquier vector puede ser expresado en términos de ellos. (Vea Figura 13.)

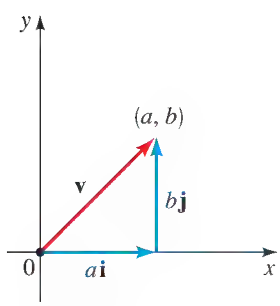



**FIGURA 13**

### VECTORES EN TÉRMINOS DE i Y j

El vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ puede ser expresado en términos de **i** y **j** por

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

## EJEMPLO 4 | Vectores en términos de i y j

**(a)** Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -8\rangle$ en términos de **i** y **j**.

**(b)** Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, escriba $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ en términos de **i** y **j**.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-8)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

**(b)** Las propiedades de adición y multiplicación escalares de vectores demuestran que podemos manipular vectores en la misma forma que expresiones algebraicas. Entonces,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} &= 2(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 5(-\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \\ &= (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} + 34\mathbf{j} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **27** Y **35**

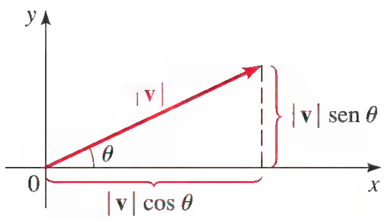


FIGURA 14

Sea **v** un vector en el plano con su punto inicial en el origen. La **dirección** de **v** es $\theta$, el ángulo positivo más pequeño en posición normal formado por el eje $x$ positivo y **v** (vea Figura 14). Si conocemos la magnitud y dirección de un vector, entonces la Figura 14 demuestra que podemos hallar los componentes horizontal y vertical del vector.

### COMPONENTES HORIZONTALES Y VERTICALES DE UN VECTOR

Sea **v** un vector con magnitud $|\mathbf{v}|$ y dirección $\theta$.
Entonces $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, donde

$$a = |\mathbf{v}|\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = |\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto, podemos expresar **v** como

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\cos\theta\,\mathbf{i} + |\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

## EJEMPLO 5 | Componentes y dirección de un vector

**(a)** Un vector **v** tiene longitud 8 y dirección $\pi/3$. Encuentre los componentes horizontales y verticales, y escriba **v** en términos de **i** y **j**.

**(b)** Encuentre la dirección del vector $\mathbf{u} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Tenemos $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, donde los componentes están dados por

$$a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 8\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

Por lo tanto, $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3}\rangle = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\mathbf{j}$.

**(b)** De la Figura 15 vemos que la dirección de $\theta$ tiene la propiedad de que

$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces el ángulo de referencia para $\theta$ es $\pi/6$. Como el punto terminal del vector **u** está en el segundo cuadrante, se deduce que $\theta = 5\pi/6$.

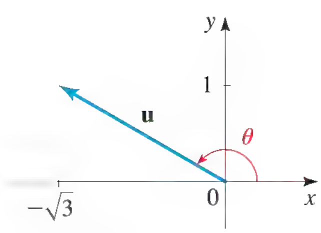


FIGURA 15

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **51**

## Uso de vectores para modelar velocidad y fuerza

La **velocidad** de un cuerpo en movimiento se modela por medio de un vector cuya dirección es la dirección de movimiento y cuya magnitud es la rapidez. La Figura 16 de la página siguiente muestra algunos vectores **u**, que representan la velocidad del viento que corre en la dirección N 30° E, y un vector **v**, que representa la velocidad de un avión que vuela en este viento en el punto $P$. Es obvio por nuestra experiencia que el viento afecta la rapidez y la dirección de un avión.

El uso de rumbos (por ejemplo N 30° E) para describir direcciones se explica en la página 478 de la Sección 6.6.

La Figura 17 indica que la verdadera velocidad del avión (con respecto al suelo) está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

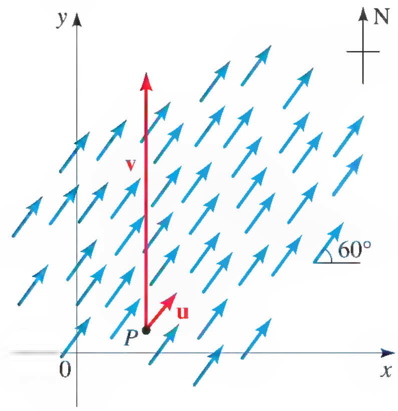



FIGURA 16

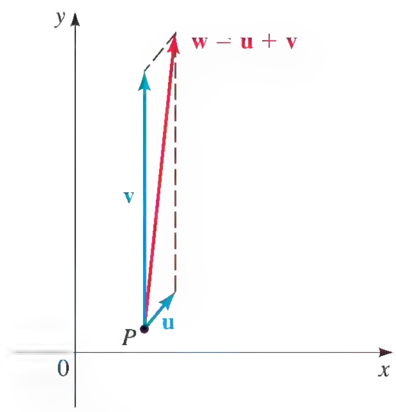



FIGURA 17

## EJEMPLO 6 | Rapidez y dirección verdaderas de un avión

Un avión se dirige al norte a 300 mi/h. Experimenta un viento cruzado en la dirección N 30° E, como se ve en la Figura 16.

**(a)** Exprese la velocidad $\mathbf{v}$ del avión con respecto al aire, y la velocidad $\mathbf{u}$ del viento, en forma de componentes.

**(b)** Encuentre la velocidad verdadera del avión como vector.

**(c)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del avión.

### SOLUCIÓN

**(a)** La velocidad del avión con respecto al aire es $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 300\mathbf{j} = 300\mathbf{j}$. Por las fórmulas para los componentes de un vector, encontramos que la velocidad del viento es

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (40 \cos 60°)\mathbf{i} + (40 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} \\ &= 20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j} \\ &\approx 20\mathbf{i} + 34.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

**(b)** La velocidad verdadera del avión está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j}) + (300\mathbf{j}) \\ &= 20\mathbf{i} + (20\sqrt{3} + 300)\mathbf{j} \\ &\approx 20\mathbf{i} + 334.64\mathbf{j}\end{aligned}$$

**(c)** La rapidez verdadera del avión está dada por la magnitud de $\mathbf{w}$:

$$|\mathbf{w}| \approx \sqrt{(20)^2 + (334.64)^2} \approx 335.2 \text{ mi/h}$$

La dirección del avión es la dirección $\theta$ del vector $\mathbf{w}$. El ángulo $\theta$ tiene la propiedad de que $\tan \theta \approx 334.64/20 = 16.732$, de modo que $\theta \approx 86.6°$. Entonces el avión se está dirigiendo hacia N 3.4° E.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

---

## EJEMPLO 7 | Calcular el rumbo

Una mujer echa un bote al agua desde una orilla de un río recto y desea desembarcar en el punto directamente en la orilla opuesta. Si la rapidez del bote (respecto al agua) es 10 mi/h y el río corre al este a razón de 5 mi/h, ¿en qué dirección debe ella dirigir el bote para llegar al punto deseado de desembarco?

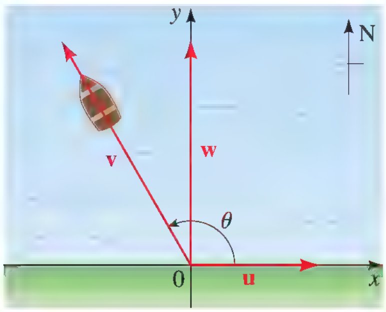



FIGURA 18

**SOLUCIÓN** Escogemos un sistema de coordenadas con el origen en la posición inicial del bote, como se ve en la Figura 18. Represente con **u** y **v** las velocidades del río y del bote, respectivamente. Es claro que **u** = 5**i** y, como la rapidez del bote es 10 mi/h, tenemos $|\mathbf{v}| = 10$, y entonces

$$\mathbf{v} = (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\ \text{sen}\ \theta)\mathbf{j}$$

donde el ángulo $\theta$ es como se muestra en la Figura 16. El curso verdadero del bote está dado por el vector **w** = **u** + **v**. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} + (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\ \text{sen}\ \theta)\mathbf{j}\\ &= (5 + 10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\ \text{sen}\ \theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Como la mujer desea desembarcar en un punto directamente al otro lado del río, la dirección de ella debe tener un componente horizontal de 0. En otras palabras, ella debe escoger $\theta$ de modo que

$$\begin{aligned}5 + 10\cos\theta &= 0\\ \cos\theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= 120°\end{aligned}$$

Por lo tanto, ella debe dirigir el bote en la dirección $\theta = 120°$ (o sea N 30°).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

Una **fuerza** también se representa con un vector. Intuitivamente, podemos considerar una fuerza como describiendo un empuje o atracción de un cuerpo, por ejemplo, el empuje horizontal de un libro por una mesa o la atracción hacia abajo ejercida por la gravedad de la Tierra sobre una pelota. La fuerza se mide en libras (o en newtons, en el sistema métrico). Por ejemplo, un hombre que pesa 200 libras ejerce una fuerza de 200 lb hacia abajo en el suelo. Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, la **fuerza resultante** experimentada por el cuerpo es la suma vectorial de estas fuerzas.

## EJEMPLO 8 | Fuerza resultante

Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con magnitudes 10 y 20 lb, respectivamente, actúan sobre un cuerpo en un punto $P$ como se ve en la Figura 19. Encuentre la fuerza resultante que actúa en $P$.

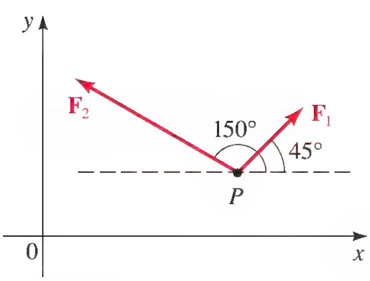



FIGURA 19

**SOLUCIÓN** Escribimos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en forma de componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= (10\cos 45°)\mathbf{i} + (10\ \text{sen}\ 45°)\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\\ &= 5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}\\ \mathbf{F}_2 &= (20\cos 150°)\mathbf{i} + (20\ \text{sen}\ 150°)\mathbf{j} = -20\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 20\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}\\ &= -10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza resultante **F** es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= (5\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\,\mathbf{j}) + (-10\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 10\mathbf{j})\\ &= (5\sqrt{2} - 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10)\mathbf{j}\\ &\approx -10\mathbf{i} + 17\mathbf{j}\end{aligned}$$

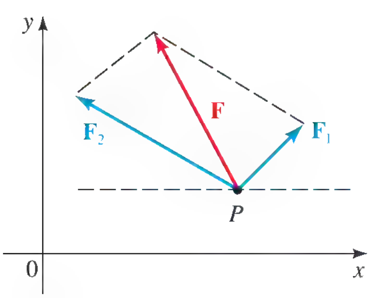



FIGURA 20

La fuerza resultante **F** se ilustra en la Figura 20.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

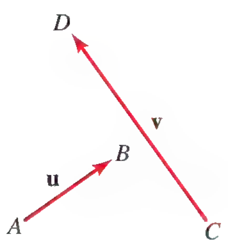
# 9.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

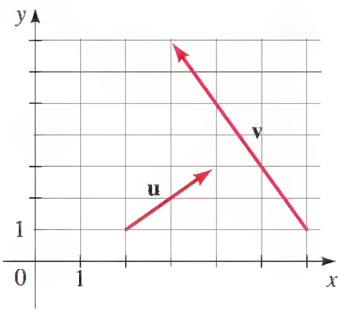
1. **(a)** Un vector en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. En la Figura I siguiente, el vector **u** tiene punto inicial____ y punto final ___. Trace los vectores 2**u** y **u** + **v**.

   **(b)** Un vector en un plano coordenado se expresa mediante el uso de componentes. En la Figura II siguiente, el vector **u** tiene punto inicial ( ___ , ___ ) y punto terminal ( ___ , ___ ).

   En forma de componentes escribimos **u** = ⟨ ___ , ___ ⟩, y **v** = ⟨ ___ , ___ ⟩. Entonces 2**u** = ⟨ ___ , ___ ⟩ y **u** + **v** = ⟨ ___ , ___ ⟩




I




II

2. **(a)** La longitud de un vector **w** = ⟨*a*, *b*⟩ es |**w**| = _____, de modo que la longitud del vector **u** en la Figura II es

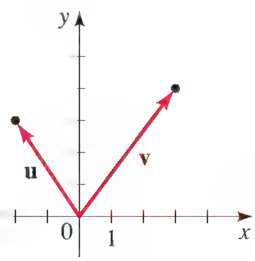
   |**u**| = _____.

   **(b)** Si conocemos la longitud |**w**| y dirección $\theta$ de un vector **w**, entonces podemos expresar el vector en forma de componentes como **w** = ⟨ __________ , __________ ⟩

## HABILIDADES

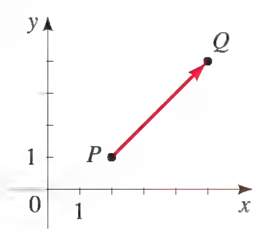
**3-5** ■ Trace el vector indicado. (Los vectores **u** y **v** se muestran en la figura.)

3. 2**u**
4. −**v**
5. **u** + **v**
6. **u** − **v**
7. **v** − 2**u**
8. 2**u** + **v**

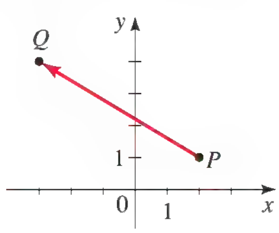



**9-18** ■ Exprese el vector con punto inicial *P* y punto terminal *Q* en forma de componentes.

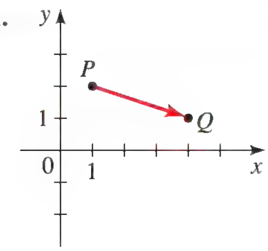
9.



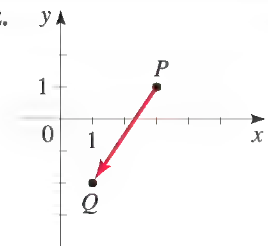

10.




11.




12.




13. $P(3, 2)$, $Q(8, 9)$
14. $P(1, 1)$, $Q(9, 9)$
15. $P(5, 3)$, $Q(1, 0)$
16. $P(-1, 3)$, $Q(-6, -1)$
17. $P(-1, -1)$, $Q(-1, 1)$
18. $P(-8, -6)$, $Q(-1, -1)$

**19-22** ■ Trace el vector dado con punto inicial (4, 3) y encuentre el punto terminal.

19. **u** = ⟨2, 4⟩
20. **u** = ⟨−1, 2⟩
21. **u** = ⟨4, −3⟩
22. **u** = ⟨−8, −1⟩

**23-26** ■ Trace representaciones del vector dado con puntos iniciales en (0, 0), (2, 3) y (−3, 5).

23. **u** = ⟨3, 5⟩
24. **u** = ⟨4, −6⟩
25. **u** = ⟨−7, 2⟩
26. **u** = ⟨0, −9⟩

**27-30** ■ Escriba el vector dado en términos de **i** y **j**.

27. **u** = ⟨1, 4⟩
28. **u** = ⟨−2, 10⟩
29. **u** = ⟨3, 0⟩
30. **u** = ⟨0, −5⟩

**31-36** ■ Encuentre 2**u**, −3**v**, **u** + **v** y 3**u** − 4**v** para los vectores dados **u** y **v**.

31. **u** = ⟨2, 7⟩, **v** = ⟨3, 1⟩
32. **u** = ⟨−2, 5⟩, **v** = ⟨2, −8⟩
33. **u** = ⟨0, −1⟩, **v** = ⟨−2, 0⟩
34. **u** = **i**, **v** = −2**j**
35. **u** = 2**i**, **v** = 3**i** − 2**j**
36. **u** = **i** + **j**, **v** = **i** − **j**

**37–40** ■ Encuentre |**u**|, |**v**|, |2**u**|, |$\frac{1}{2}$**v**|, |**u** + **v**|, |**u** − **v**|, y |**u**| − |**v**|.

37. **u** = 2**i** + **j**, **v** = 3**i** − 2**j**
38. **u** = −2**i** + 3**j**, **v** = **i** − 2**j**
39. **u** = ⟨10, −1⟩, **v** = ⟨−2, −2⟩
40. **u** = ⟨−6, 6⟩, **v** = ⟨−2, −1⟩

**41-46** ■ Encuentre los componentes horizontales y verticales del vector con longitud y dirección dadas, y escriba el vector en términos de los vectores **i** y **j**.

41. |**v**| = 40, $\theta = 30°$
42. |**v**| = 50, $\theta = 120°$
43. |**v**| = 1, $\theta = 225°$
44. |**v**| = 800, $\theta = 125°$
45. |**v**| = 4, $\theta = 10°$
46. |**v**| = $\sqrt{3}$, $\theta = 300°$

**47-52** ■ Encuentre la magnitud y dirección (en grados) del vector.

**47.** $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$ **48.** $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$

**49.** $\mathbf{v} = \langle -12, 5 \rangle$ **50.** $\mathbf{v} = \langle 40, 9 \rangle$

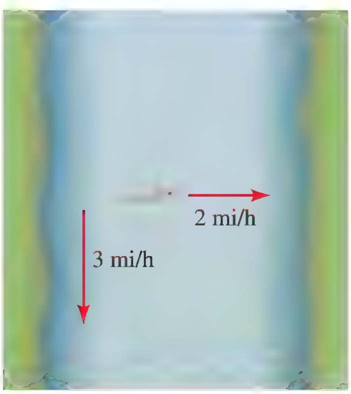
**51.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **52.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

## APLICACIONES

**53. Componentes de una fuerza** Un hombre empuja una podadora de césped con una fuerza de 30 libras ejercida a un ángulo de 30° con respecto al suelo. Encuentre los componentes horizontales y verticales de la fuerza.

**54. Componentes de velocidad** Un avión jet está volando en una dirección N 20° E con una rapidez de 500 mi/h. Encuentre los componentes norte y este de la velocidad.

**55. Velocidad** Un río corre al sur a 3 mi/h. Un nadador que trata de cruzar el río se dirige al este nadando a 2 mi/h con respecto al agua. Encuentre la velocidad verdadera del nadador como vector.




**56. Velocidad** Suponga que en el Ejercicio 55 la corriente está pasando a 1.2 mi/h hacia el sur. ¿En qué dirección debe nadar el atleta para alcanzar un punto de llegada hacia el este de su punto de partida?

**57. Velocidad** La rapidez de un avión es de 300 mi/h con respecto al aire. El viento está soplando al norte con una rapidez de 30 mi/h. ¿En qué dirección debe volar el avión para llegar a un punto al oeste de su posición?

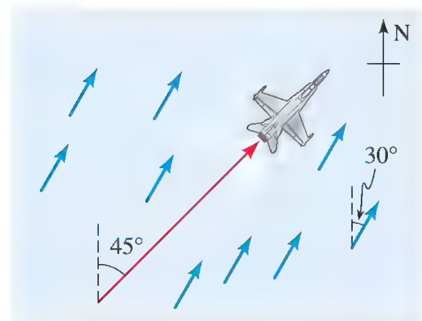
**58. Velocidad** Un salmón migratorio nada en dirección N 45° E, nadando a 5 mi/h con respecto al agua. Las corrientes prevalecientes del océano son hacia el este a 3 mi/h. Encuentre la velocidad verdadera del pez como vector.

**59. Velocidad verdadera de un avión jet** Un piloto vuela su avión hacia el este. El jet tiene una rapidez de 425 mi/h con respecto al aire. El viento está soplando al norte con una rapidez de 40 mi/h.

**(a)** Exprese la velocidad del viento como vector en forma de componentes.
**(b)** Exprese la velocidad del avión con respecto al aire como vector en forma de componentes.
**(c)** Encuentre la velocidad verdadera del jet como vector.
**(d)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del jet.

**60. Velocidad verdadera de un jet** Un avión jet está volando en aire que sopla con una rapidez de 55 mi/h en la dirección N 30° E (vea Figura). El jet tiene una rapidez de 765 mi/h con respecto al aire, y el piloto guía al jet en la dirección N 45° E.

**(a)** Exprese la velocidad del viento como vector en forma de componentes.
**(b)** Exprese le velocidad del jet con respecto al aire como vector en forma de componentes.
**(c)** Encuentre la velocidad verdadera del jet como vector.
**(d)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del jet.

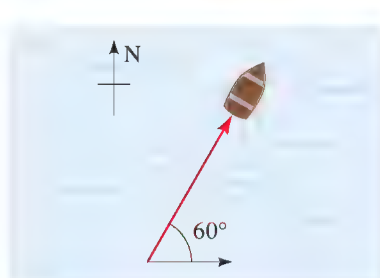



**61. Velocidad verdadera de un jet** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del jet del Ejercicio 60 si el piloto guía su avión en la dirección N 30° O.

**62. Velocidad verdadera de un jet** ¿En qué dirección debe guiar su avión el piloto del Ejercicio 60 para que el curso verdadero sea al norte?

**63. Velocidad de un bote** Un río recto corre al este a una rapidez de 10 mi/h. Un bote arranca en la orilla sur del río y navega en una dirección 60° con respecto a la orilla (vea la figura). El bote de motor tiene una rapidez de 20 mi/h con respecto al agua.

**(a)** Exprese la velocidad del río como vector en forma de componentes.
**(b)** Exprese la velocidad del bote de motor con respecto al agua como vector en forma de componentes.
**(c)** Encuentre la velocidad verdadera del bote.
**(d)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del bote.




**64. Velocidad de un bote** El bote del Ejercicio 63 desea llegar a un punto en la orilla norte del río directamente opuesta al punto de partida. ¿En qué dirección debe navegar el bote?

**65. Velocidad de un bote** Un bote navega en la dirección N 72° E. La rapidez del bote con respecto al agua es 24 mi/h.

El agua corre directamente al sur. Se observa que la dirección verdadera del bote es directamente al este.

**(a)** Exprese la velocidad del bote con respecto al agua como vector en forma de componentes.

**(b)** Encuentre la rapidez del agua y la rapidez verdadera del bote.

**66. Velocidad** Una mujer camina al oeste en la cubierta de un buque transoceánico a 2 mi/h. El barco se mueve al norte a una rapidez de 25 mi/h. Encuentre la rapidez y dirección de la mujer con respecto a la superficie del agua.

**67-72 ■ Equilibrio de fuerzas** Se dice que las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ que actúan en el mismo punto $P$ están en equilibrio si la fuerza resultante es cero, es decir, si $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = 0$. Encuentre **(a)** las fuerzas resultantes que actúan en $P$, y **(b)** la fuerza adicional requerida (si la hay) para que las fuerzas estén en equilibrio.

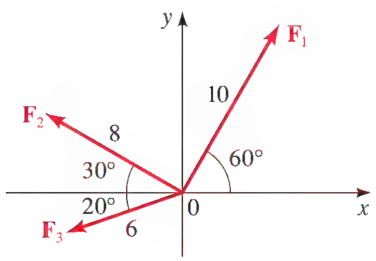
**67.** $\mathbf{F}_1 = \langle 2, 5\rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \langle 3, \ \ 8\rangle$

**68.** $\mathbf{F}_1 = \langle 3, -7\rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \langle 4, -2\rangle, \quad \mathbf{F}_3 = \langle -7, 9\rangle$

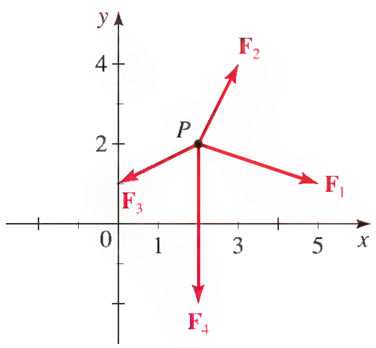
**69.** $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_3 = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

**70.** $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} \ \ \ \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

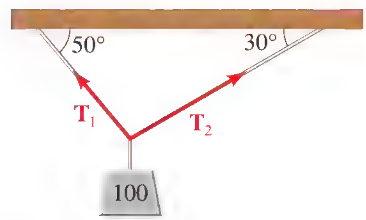
**71.**



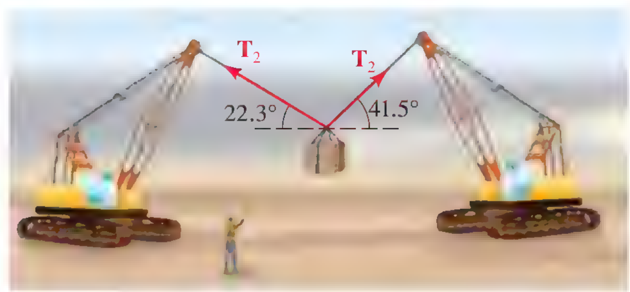

**72.**




**73. Equilibrio de tensiones** Una pesa de 100 lb pende de una cuerda, como se muestra en la figura siguiente. Encuentre las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en la cuerda.

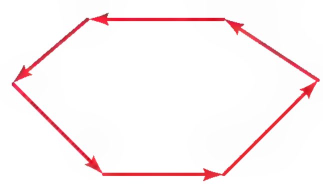



**74. Equilibrio de tensiones** Las grúas de la figura están levantando un cuerpo que pesa 18,278 lb. Encuentre las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**75. Vectores que forman un polígono** Supongamos que $n$ vectores pueden colocarse cabeza con cola en el plano, de modo que formen un polígono. (La figura muestra el caso de un hexágono.) Explique por qué la suma de estos vectores es $\mathbf{0}$.



# 9.2 EL PRODUCTO PUNTO

El producto punto de vectores ▶ El componente de **u** a lo largo de **v** ▶ La proyección de **u** sobre **v** ▶ Trabajo

En esta sección definimos una operación de vectores llamada el producto punto. Este concepto es especialmente útil en cálculo y en aplicaciones de vectores a la física e ingeniería.

## ▼ El producto punto de vectores

Empezamos por definir el producto punto de dos vectores.

### DEFINICIÓN DEL PRODUCTO PUNTO

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$ son vectores, entonces su **producto punto**, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ está definido por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2$$

Por lo tanto, para hallar el producto punto de **u** y **v**, multiplicamos componentes correspondientes y sumamos. El producto punto *no es* un vector; es un número real, o escalar.

## EJEMPLO 1 | Calcular productos punto

**(a)** Si $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 5\rangle$ entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(5) = 2$$

**(b)** Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(5) + (1)(-6) = 4$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5(a)** Y **11(a)**

Las demostraciones de las siguientes propiedades del producto punto se deducen fácilmente de la definición.

### PROPIEDADES DEL PRODUCTO PUNTO

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
4. $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

**DEMOSTRACIÓN** Demostramos sólo la última propiedad. Las demostraciones de las otras se dejan como ejercicios. Sea $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle a, b\rangle \cdot \langle a, b\rangle = a^2 + b^2 = |\mathbf{u}|^2$$

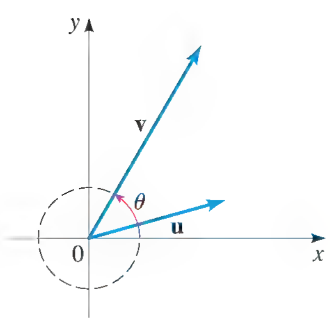



**FIGURA 1**

Sean **u** y **v** vectores, y trácelas con puntos iniciales en el origen. Definimos el **ángulo** $\theta$ **entre u y v** como los más pequeños de los ángulos formados por estas representaciones de **u** y **v** (vea Figura 1). Entonces $0 \le \theta \le \pi$. El siguiente teorema relaciona al ángulo entre dos vectores con su producto punto.

### EL TEOREMA DEL PRODUCTO PUNTO

Si $\theta$ es el ángulo entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

**DEMOSTRACIÓN** Aplicando la Ley de Cosenos al triángulo *AOB* en la Figura 2 tendremos

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

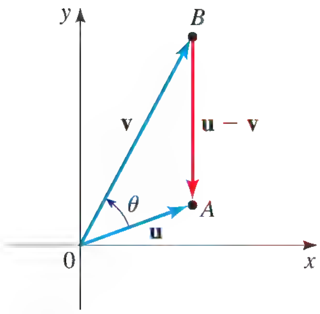



**FIGURA 2**

Usando las propiedades del producto punto, escribimos el lado izquierdo como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Igualando los lados derechos de las ecuaciones indicadas, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \\ 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. ■

El teorema del producto punto es útil porque nos permite hallar el ángulo entre dos vectores si conocemos los componentes del vector. El ángulo se obtiene simplemente despejando $\cos\theta$ de la ecuación del Teorema del Producto Punto.

### ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Si $\theta$ es el ángulo entre dos vectores **u** y **v** diferentes de cero, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

## EJEMPLO 2 | Hallar el ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$.

**SOLUCIÓN** Por la fórmula para el ángulo entre dos vectores tenemos

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(2)(4)+(5)(-3)}{\sqrt{4+25}\sqrt{16+9}} = \frac{-7}{5\sqrt{29}}$$

Entonces el ángulo entre **u** y **v** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{5\sqrt{29}}\right) \approx 105.1°$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5(b)** Y **11(b)** ■

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero se llaman **perpendiculares**, u **ortogonales**, si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. El siguiente teorema muestra que podemos determinar si dos vectores son perpendiculares al hallar su producto punto.

### VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores **u** y **v** diferentes de cero son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

**DEMOSTRACIÓN** Si **u** y **v** son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es $\pi/2$, de modo que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

A la inversa, si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 0$$

Como **u** y **v** son vectores diferentes de cero, concluimos que $\cos\theta = 0$, de modo que $\theta = \pi/2$. Entonces **u** y **v** son ortogonales. ■

## EJEMPLO 3 | Comprobar perpendicularidad de vectores

Determine si son perpendiculares los vectores de los pares siguientes.

**(a)** $\mathbf{u} = \langle 3, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -8 \rangle$ **(b)** $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(2) + (5)(-8) = -34 \neq 0$, de modo que **u** y **v** no son perpendiculares.

**(b)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(\quad 1) + (1)(2) = 0$, de modo que **u** y **v** son perpendiculares.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15** Y **17**

## El componente de u a lo largo de v

Nótese que el componente de **u** a lo largo de **v** es un escalar, no un vector.

El **componente de u a lo largo de v** (o el **componente de u en la dirección de v**) se define como

$$|\mathbf{u}| \cos \theta$$

donde $\theta$ es el ángulo entre **u** y **v**. La Figura 3 da una interpretación geométrica de este concepto. Intuitivamente, el componente de **u** a lo largo de **v** es la magnitud de la parte de **u** que apunta en la dirección de **v**. Observe que el componente de **u** a lo largo de **v** es negativo si $\pi/2 < \theta < \pi$.

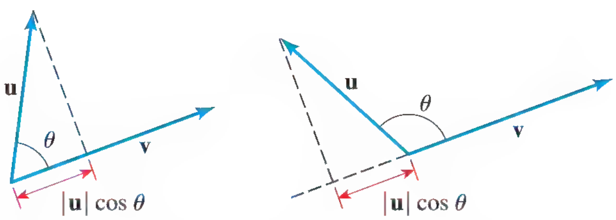



FIGURA 3

Al analizar fuerzas en física e ingeniería, con frecuencia es útil expresar un vector como una suma de dos vectores que se encuentren en direcciones perpendiculares. Por ejemplo, suponga que un auto está estacionado en un carril inclinado como en la Figura 4. El peso del auto es un vector **w** que apunta directamente hacia abajo. Podemos escribir

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

donde **u** es paralelo al carril y **v** es perpendicular al carril. El vector **u** es la fuerza que tiende a hacer rodar el auto hacia abajo del carril, y **v** es la fuerza que experimenta la superficie del carril. Las magnitudes de estas fuerzas son los componentes de **w** a lo largo de **u** y **v**, respectivamente.

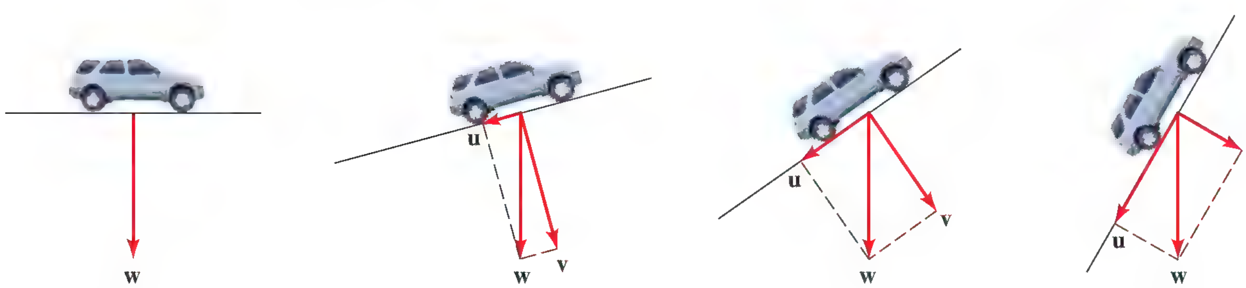



FIGURA 4

## EJEMPLO 4 | Resolver una fuerza en componentes

Un auto que pesa 3000 lb se encuentra estacionado en un carril que está inclinado 15° con respecto a la horizontal, como se ve en la Figura 5.

**(a)** Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que el auto se ruede hacia abajo por el carril.

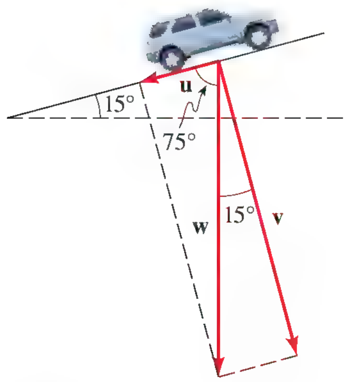



**FIGURA 5**

**(b)** Encuentre la magnitud de la fuerza experimentada por el carril debida al peso del auto.

**SOLUCIÓN** El auto ejerce una fuerza **w** de 3000 lb directamente hacia abajo. Descomponemos **w** en la suma de dos vectores **u** y **v**, uno de ellos paralelo a la superficie del carril y el otro perpendicular al carril, como se muestra en la Figura 5.

**(a)** La magnitud del inciso de la fuerza **w** que hace que el auto se ruede hacia abajo del carril es

$$|\mathbf{u}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{u} = 3000 \cos 75° \approx 776$$

Entonces, la fuerza necesaria para evitar que el auto se ruede hacia abajo por el carril es de unas 776 libras.

**(b)** La magnitud de la fuerza ejercida por el auto sobre el carril es

$$|\mathbf{v}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = 3000 \cos 15° \approx 2898$$

La fuerza experimentada por el carril es alrededor de 2898 libras.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

El componente de **u** a lo largo de **v** se puede calcular usando productos punto:

$$|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Hemos demostrado lo siguiente.

**CÁLCULO DE COMPONENTES**

El componente de **u** a lo largo de **v** es $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

## EJEMPLO 5 | Hallar componentes

Sean $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$. Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

**SOLUCIÓN** Tenemos

$$\text{componente de } \mathbf{u} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1)(-2) + (4)(1)}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## La proyección de u sobre v

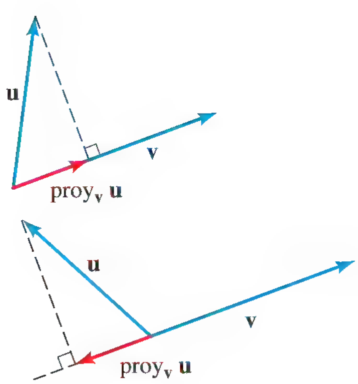



**FIGURA 6**

La Figura 6 muestra representaciones de los vectores **u** y **v**. La proyección de **u** sobre **v**, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, es el vector *paralelo* a **v** y cuya *longitud* es el componente de **u** a lo largo de **v** como se ve en la Figura 6. Para hallar una expresión para $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, primero hallamos un vector unitario en la dirección de **v** y a continuación lo multiplicamos por el componente de **u** a lo largo de **v**:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = (\text{componente de } \mathbf{u} \text{ a lo largo de } \mathbf{v})(\text{vector unitario en la dirección de } \mathbf{v})$$

$$= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right) \mathbf{v}$$

Con frecuencia necesitamos **resolver** un vector **u** en la suma de dos vectores, uno de ellos paralelo a **v** y el otro ortogonal a **v**. Esto es, buscamos escribir $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**. En este caso, $\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ (vea el Ejercicio 43).

**CÁLCULO DE PROYECCIONES**

La **proyección de u sobre v** es el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ dado por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

Si el vector **u** se descompone en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**, entonces

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$$

### EJEMPLO 6 | Descomponer un vector en vectores ortogonales

Sea $\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$.

**(a)** Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

**(b)** Descomponga **u** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Por la fórmula para la proyección de un vector sobre otro, tenemos

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad \text{Fórmula para proyección}$$

$$= \left(\frac{\langle -2, 9\rangle\cdot\langle -1, 2\rangle}{(-1)^2 + 2^2}\right)\langle -1, 2\rangle \qquad \text{Definición de } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v}$$

$$= 4\langle -1, 2\rangle = \langle -4, 8\rangle$$

**(b)** Por la fórmula del cuadro precedente tenemos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -4, 8\rangle \qquad \text{Del inciso (a)}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -2, 9\rangle - \langle -4, 8\rangle = \langle 2, 1\rangle$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

## Trabajo

Uno de los usos del producto punto es calcular un trabajo. En la práctica, el término *trabajo* significa la cantidad total de esfuerzo necesario para ejecutar una tarea. En física, *trabajo* tiene un significa técnico que se ajusta a este significado intuitivo. Si una fuerza constante de magnitud $F$ mueve un cuerpo toda una distancia $d$ a lo largo de una recta, entonces el **trabajo** realizado es

$$W = Fd \qquad \text{o bien,} \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si $F$ se mide en libras y $d$ en pies, entonces la unidad de trabajo es un pie-libra (pies-lb). Por ejemplo, ¿cuánto trabajo se realiza al levantar una pesa de 20 lb a 6 pies del suelo? Como se requiere de una fuerza de 20 lb para levantar este peso y el peso se mueve una distancia de 6 pies, la cantidad de trabajo realizado es

$$W = Fd = (20)(6) = 120 \text{ pies-lb}$$

Esta fórmula aplica sólo cuando la fuerza está dirigida a lo largo de la dirección de movimiento. En el caso general, si **F** mueve un cuerpo de $P$ a $Q$, como en la Figura 7, entonces sólo el componente de la fuerza en la dirección de $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ afecta al cuerpo. En consecuencia, la magnitud efectiva de la fuerza sobre el cuerpo es

$$\text{componente de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } \mathbf{D} = |\mathbf{F}|\cos\theta$$

De manera que el trabajo realizado es

$$W = \text{fuerza} \times \text{distancia} = (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}| = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

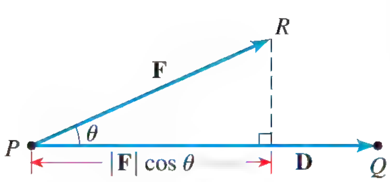



**FIGURA 7**

Hemos obtenido la siguiente fórmula sencilla para calcular trabajo.

**TRABAJO**

El **trabajo** $W$ realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ al moverse a lo largo del vector $\mathbf{D}$ es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

### EJEMPLO 7 | Cálculo de trabajo

Una fuerza está dada por el vector $\mathbf{F} = \langle 2, 3 \rangle$ y mueve un cuerpo del punto $(1, 3)$ al punto $(5, 9)$. Encuentre el trabajo realizado.

**SOLUCIÓN** El vector de desplazamiento es

$$\mathbf{D} = \langle 5 - 1, 9 - 3 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 4, 6 \rangle = 26$$

Si la unidad de fuerza es libras y la distancia se mide en pies, entonces el trabajo realizado es 26 pies-lb.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

### EJEMPLO 8 | Cálculo de trabajo

Un hombre tira horizontalmente de un vagón ejerciendo una fuerza de 20 lb sobre el manubrio. Si el manubrio forma un ángulo de 60° con la horizontal, encuentre el trabajo realizado para mover 100 pies el vagón.

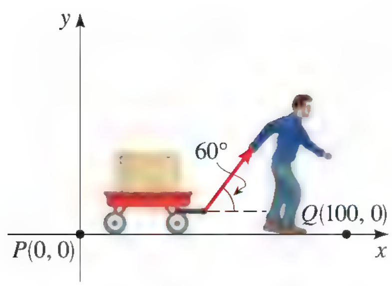



**FIGURA 8**

**SOLUCIÓN** Escogemos un sistema de coordenadas con el origen en la posición inicial del vagón (vea figura 8). Esto es, el vagón se mueve del punto $P(0, 0)$ al punto $Q(100, 0)$. El vector que representa este desplazamiento es

$$\mathbf{D} = 100\,\mathbf{i}$$

La fuerza sobre el manubrio se puede escribir en términos de componentes (Sección 9.1) como

$$\mathbf{F} = (20 \cos 60°)\mathbf{i} + (20 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} = 10\,\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = (10\,\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\,\mathbf{j}) \cdot (100\,\mathbf{i}) = 1000 \text{ pies-libra}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## 9.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores diferentes de cero en el plano, y sea $\theta$ el ángulo entre ellos.

**1.** El producto punto de **a** y **b** está definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ______$$

El producto punto de dos vectores es un ______, no un vector.

**2.** El ángulo $\theta$ satisface

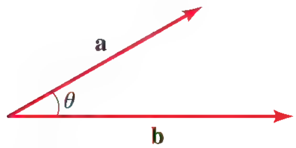
$$\cos\theta = \frac{\quad}{\quad}$$

Por lo tanto, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores son ________.

3. (a) El componente de **a** a lo largo de **b** es el escalar $|\mathbf{a}|\cos\theta$ y puede expresarse en términos del producto punto como ________. Trace este componente en la figura siguiente.

(b) La proyección de **a** sobre **b** es el vector

$\text{proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} =$ ________. Trace esta proyección en la figura siguiente.




4. El trabajo realizado por una fuerza **F** al mover un cuerpo a lo largo del vector **D** es $W =$ _______.

## HABILIDADES

**5-14** ■ Encuentre **(a)** $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y **(b)** el ángulo entre **u** y **v** al grado más cercano.

5. $\mathbf{u} = \langle 2, 0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$
8. $\mathbf{u} = \langle -6, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$
9. $\mathbf{u} = \langle 3, \quad 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = -5\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

**15-20** ■ Determine si los vectores dados son perpendiculares.

15. $\mathbf{u} = \langle 6, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$
16. $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 0\rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle -2, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$
18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -7\mathbf{j}$
19. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
20. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

**21-24** ■ Encuentre la cantidad indicada, suponiendo que

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

21. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
22. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v} + \mathbf{w})$
23. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{v})$
24. $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$

**25-28** ■ Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

25. $\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle \quad 3, 5\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$
27. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{j}$
28. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

**29-34** ■ **(a)** Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$. **(b)** Descomponga **u** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a **v**.

29. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
30. $\mathbf{u} = \langle 7, -4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$
31. $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, \quad 3\rangle$
32. $\mathbf{u} = \langle 11, 3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, -2\rangle$
33. $\mathbf{u} = \langle 2, 9\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle \quad 3, 4\rangle$
34. $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

**35-38** ■ Encuentre el trabajo realizado por la fuerza **F** al mover un cuerpo de $P$ a $Q$.

35. $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}; \quad P(0, 0), Q(3, 8)$
36. $\mathbf{F} = 400\mathbf{i} + 50\mathbf{j}; \quad P( \quad 1, 1), Q(200, 1)$
37. $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad P(2, 3), Q(6, -2)$
38. $\mathbf{F} = -4\mathbf{i} + 20\mathbf{j}; \quad P(0, 10), Q(5, 25)$

**39-42** ■ Sea **u, v** y **w** vectores, y sea $a$ un escalar. Demuestre la propiedad dada.

39. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
40. $(a\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = a(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(a\mathbf{v})$
41. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$
42. $(\mathbf{u} - \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$

43. Demuestre que los vectores $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ son ortogonales.

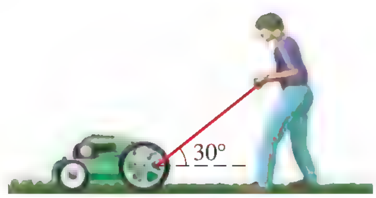
44. Evalúe $\mathbf{v}\cdot\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

## APLICACIONES

45. **Trabajo** La fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ mueve un cuerpo 4 pies a lo largo del eje $x$ en la dirección positiva. Encuentre el trabajo realizado si la unidad de fuerza es la libra.

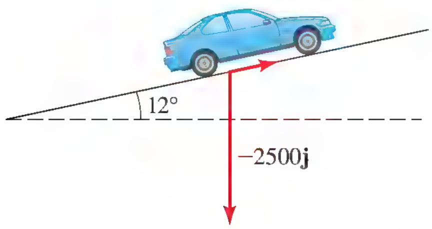
46. **Trabajo** Una fuerza constante $\mathbf{F} = \langle 2, 8\rangle$ mueve un cuerpo a lo largo de la recta del punto (2, 5) al punto (11, 13). Encuentre el trabajo realizado si la distancia se mide en pies y la fuerza se mide en libras.

47. **Trabajo** Una podadora de césped es empujada una distancia de 200 pies, a lo largo de una trayectoria horizontal, por una fuerza de 50 lb. El manubrio de la podadora se mantiene a un ángulo de 30° de la horizontal (vea la figura). Encuentre el trabajo realizado.




48. **Trabajo** Un auto recorre 500 pies en un camino que está inclinado 12° con la horizontal, como se ve en la figura siguiente. El auto pesa 2500 lb. Entonces, la gravedad actúa directamente

hacia abajo en el auto con una fuerza constante $\mathbf{F} = -2500\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado por el auto para vencer la gravedad.

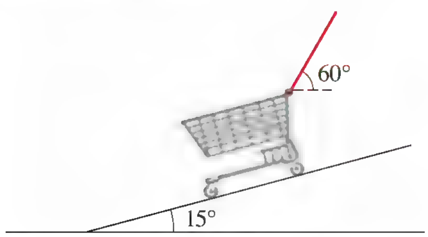



**49. Fuerza** Un auto está en un carril que está inclinado 25° con respecto a la horizontal. Si el auto pesa 2755 lb, encuentre la fuerza necesaria para evitar que se ruede hacia abajo por el carril.

**50.** Un auto está en un carril que está inclinado 10° con respecto a la horizontal. Se requiere una fuerza de 490 lb para evitar que el auto se ruede hacia abajo por el carril.
- **(a)** Encuentre el peso del auto.
- **(b)** Encuentre la fuerza que el auto ejerce contra el carril.

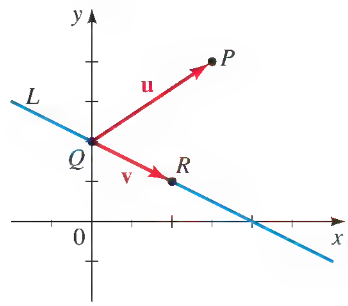
**51. Fuerza** Un paquete que pesa 200 lb es colocado en un plano inclinado. Si una fuerza de 80 lb es apenas suficiente para evitar que el paquete se deslice, encuentre el ángulo de inclinación del plano. (Ignore los efectos de fricción.)

**52. Fuerza** Un carro de supermercado, con peso de 40 lb, se coloca en una rampa inclinada a 15° con respecto a la horizontal. El carro es mantenido en su lugar por una cuerda inclinada a 60° de la horizontal, como se ve en la figura. Encuentre la fuerza que la cuerda debe ejercer en el carro para evitar que se ruede hacia abajo por la rampa.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**53. Distancia de un punto a una recta** Sea $L$ la recta $2x + 4y = 8$ y sea $P$ el punto $(3, 4)$.
- **(a)** Demuestre que los puntos $Q(0, 2)$ y $R(2, 1)$ están en $L$.
- **(b)** Sea $\mathbf{u} = \overrightarrow{QP}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$, como se muestra en la figura. Encuentre $\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.
- **(c)** Trace una gráfica que explique por qué $|\mathbf{u} - \mathbf{w}|$ es la distancia de $P$ a $L$. Encuentre esta distancia.
- **(d)** Escriba un breve párrafo que describa los pasos que daría usted para hallar la distancia desde un punto dado a una recta determinada.




**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Navegando contra el viento**

En este proyecto estudiamos la forma en que los marinos usan el método de tomar una trayectoria en zigzag, o viraje, para navegar contra el viento. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 9.3 GEOMETRÍA DE COORDENADAS EN TRES DIMENSIONES

El sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales ▶ Fórmula de la distancia en tres dimensiones ▶ La ecuación de una esfera

Para localizar un punto en un plano, son necesarios dos puntos. Sabemos que cualquier punto en el plano cartesiano puede estar representado como un par ordenado $(a, b)$ de números reales, donde $a$ es la coordenada $x$ y $b$ es la coordenada $y$. En el espacio tridimensional se agrega una tercera dimensión, de modo que cualquier punto en el espacio está representado por una terna ordenada $(a, b, c)$ de números reales.

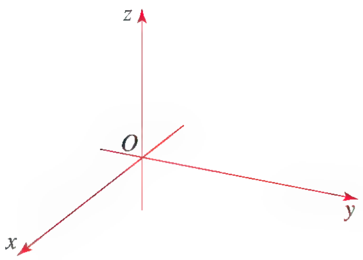



**FIGURA 1** Ejes coordenados

## El sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales

Para representar puntos en el espacio, primero escogemos un punto fijo $O$ (el origen) y tres rectas dirigidas que pasan por $O$ que son perpendiculares entre sí, llamados **ejes coordenados** identificados como eje $x$, eje $y$ y eje $z$. Por lo general consideramos los ejes $x$ y $y$ como horizontales y el eje $z$ como vertical, y trazamos la orientación de los ejes como en la Figura 1.

Los tres ejes coordenados determinan los tres planos coordenados ilustrados en la Figura 2(a). El plano $xy$ es el plano que contiene los ejes $x$ y $y$; el plano $yz$ es el plano que contiene a los ejes $y$ y $z$; el plano $xz$ es el plano que contiene a los ejes $x$ y $z$. Estos tres planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamadas octantes.

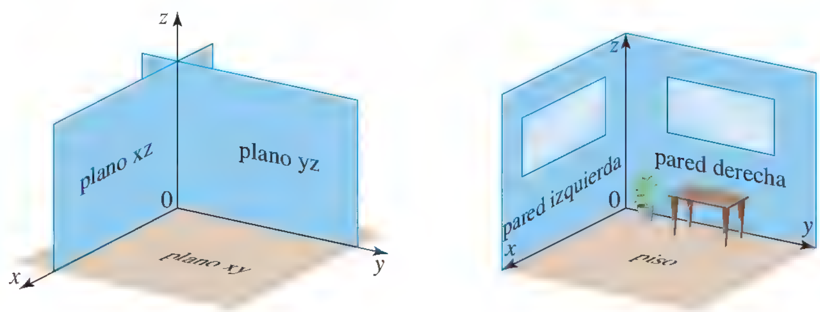



**FIGURA 2** (a) Planos de coordenadas (b) "Paredes" coordenadas

Debido a que muchas personas tienen dificultad para visualizar diagramas de figuras en tres dimensiones, el lector puede encontrar útil hacer lo siguiente (vea Figura 2(b)). Observe cualquier esquina inferior de un cuarto y considérela como el origen. La pared a la izquierda de usted está en el plano $xz$, la pared a su derecha está en el plano $yz$ y el piso está en el plano $xy$. El eje $x$ corre a lo largo de la intersección del piso y la pared izquierda; el eje $y$ corre a lo largo de la intersección del piso y la pared derecha. El eje $z$ corre hacia arriba desde el piso hacia el techo a lo largo de la intersección de las dos paredes.

Ahora cualquier punto $P$ en el espacio puede ser localizado por una **terna ordenada** de números reales $(a, b, c)$, como se muestra en la Figura 3. El primer número $a$ es la coordenada $x$ de $P$, el segundo número $b$ es la coordenada $y$ de $P$, y el tercer número $c$ es la coordenada $z$ de $P$. El conjunto de todas las ternas ordenadas $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ forma el **sistema de coordenadas rectangulares tridimensionales**.

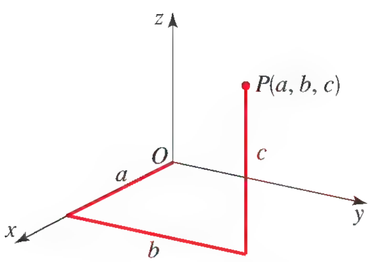



**FIGURA 3** Punto $P(a, b, c)$

### EJEMPLO 1 | Localizar puntos en tres dimensiones

Localice los puntos $(2, 4, 7)$ y $(-4, 3, -5)$.

**SOLUCIÓN** Los puntos están graficados en la Figura 4.

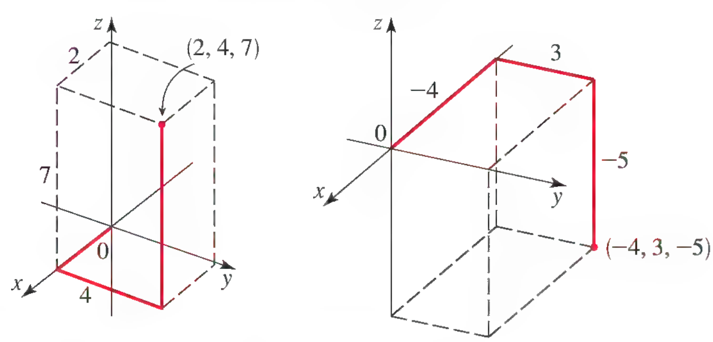



**FIGURA 4**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3(a)**

En geometría de dos dimensiones, la gráfica de una ecuación con $x$ y $y$ es una *curva* en el plano; en geometría de tres dimensiones, una ecuación en $x$, $y$ y $z$ representa una *superficie* en el espacio.

### EJEMPLO 2 | Superficies en espacio tridimensional

Describa y trace las superficies representadas por las siguientes ecuaciones:
**(a)** $z = 3$ **(b)** $y = 5$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La superficie está formada por los puntos $P(x, y, z)$ donde la coordenada $z$ es 3. Éste es el plano horizontal que es paralelo al plano $xy$ y tres unidades arriba del mismo, como se ve en la Figura 5.

**(b)** La superficie está formada por los puntos $P(x, y, z)$ donde la coordenada $y$ es 5. Éste es el plano vertical que es paralelo al plano $xz$ y cinco unidades a la derecha del mismo, como en la Figura 6.

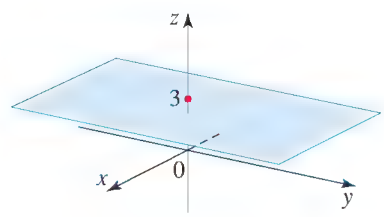



**FIGURA 5** El plano $z = 3$

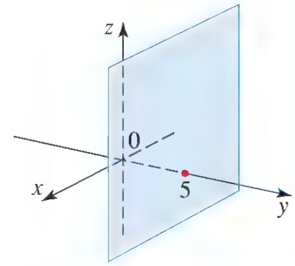



**FIGURA 6** El plano $y = 5$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

## Fórmula de la distancia en tres dimensiones

La conocida fórmula para la distancia entre dos puntos en un plano se extiende fácilmente a la siguiente fórmula de tres dimensiones.

**FÓRMULA DE LA DISTANCIA EN TRES DIMENSIONES**

La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

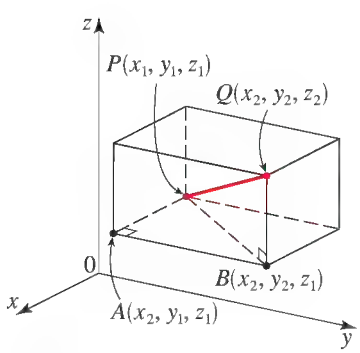



**FIGURA 7**

**DEMOSTRACIÓN** Para demostrar esta fórmula, construimos una caja rectangular como en la Figura 7, donde $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ son vértices diagonalmente opuestos y las caras de la caja son paralelas a los planos de coordenadas. Si $A$ y $B$ son los vértices de la caja que están indicados en la figura, entonces

$$d(P, A) = |x_2 - x_1| \qquad d(A, B) = |y_2 - y_1| \qquad d(Q, B) = |z_2 - z_1|$$

Los triángulos $PAB$ y $PBQ$ son triángulos rectángulos, de modo que por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$(d(P, Q))^2 = (d(P, B))^2 + (d(Q, B))^2$$
$$(d(P, B))^2 = (d(P, A))^2 + (d(A, B))^2$$

Combinando estas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}(d(P, Q))^2 &= (d(P, A))^2 + (d(A, B))^2 + (d(Q, B))^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

## EJEMPLO 3 | Uso de la Fórmula de la Distancia

Encuentre la distancia entre los puntos $P(2, -1, 7)$ y $Q(1, -3, 5)$.

**SOLUCIÓN** Usamos la Fórmula de la Distancia:

$$d(P, Q) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - (-1))^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3(b)**

## La ecuación de una esfera

Podemos usar la Fórmula de la Distancia para hallar una ecuación para una esfera en un espacio de coordenadas tridimensionales.

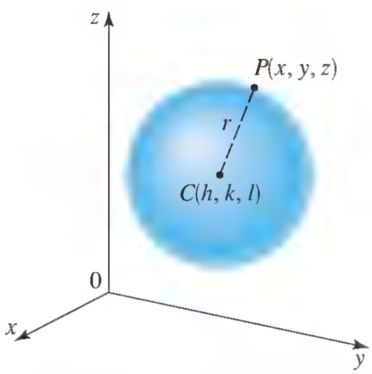



**FIGURA 8** Esfera con radio $r$ y centro $C(h, k, l)$

### ECUACIÓN DE UNA ESFERA

La ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio $r$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

**DEMOSTRACIÓN** Una esfera con radio $r$ es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia desde el centro $C$ es la constante $r$ (vea Figura 8). Por la Fórmula de la Distancia, tenemos

$$[d(P, C)]^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2$$

Como la distancia $d(P, C)$ es igual a $r$, obtenemos la fórmula deseada.

## EJEMPLO 4 | Hallar la ecuación de una esfera

Hállese la ecuación de una esfera con radio 5 y centro $C(-2, 1, 3)$.

**SOLUCIÓN** Usamos la ecuación general de una esfera, con $r = 5$, $h = -2$, $k = 1$, y $l = 3$:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## EJEMPLO 5 | Hallar el centro y radio de una esfera

Demuestre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ es la ecuación de una esfera, y encuentre su centro y radio.

**SOLUCIÓN** Completamos los cuadrados en los términos $x$, $y$ y $z$ para reescribir la ecuación dada en la forma de una ecuación de una esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1 \qquad \text{Complete cuadrados}$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 8 \qquad \text{Factorice}$$

Comparando esto con la ecuación normal de una esfera, podemos ver que el centro es $(-2, 3, -1)$ y el radio es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

La intersección de una esfera con un plano se llama **traza** de la esfera en un plano.

## EJEMPLO 6 | Hallar la traza de una esfera

Describa la traza de la esfera $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 36$ en **(a)** el plano $xy$ y **(b)** el plano $z = 9$.

### SOLUCIÓN

**(a)** En el plano $xy$ la coordenada $z$ es 0. Entonces la traza de la esfera en el plano $xy$ está formada por todos los puntos en la esfera cuya coordenada $z$ es 0. Sustituimos $z$ por 0 en la ecuación de la esfera y obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (0 - 5)^2 = 36 \qquad \text{Sustituya } z \text{ por } 0$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + 25 = 36 \qquad \text{Calcule}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 11 \qquad \text{Reste } 25$$

Entonces la traza de la esfera es la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 11, \qquad z = 0$$

que es una circunferencia de radio $\sqrt{11}$ que está en el plano $xy$, con centro en $(2, 4, 0)$ (vea Figura 9(a)).

**(b)** La traza de la esfera en el plano $z = 9$ está formada por todos los puntos en la esfera cuya coordenada $z$ es 9. Entonces, sustituimos $z$ por 9 en la ecuación de la esfera y obtenemos

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (9 - 5)^2 = 36 \qquad \text{Sustituya } z \text{ por } 0$$

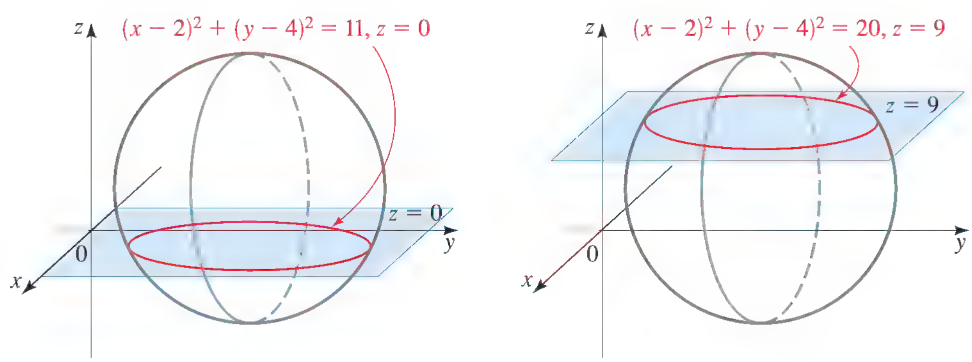
$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + 16 = 36 \qquad \text{Calcule}$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 \qquad \text{Reste } 16$$

Entonces la traza de la esfera es la circunferencia

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20, \qquad z = 9$$

que es una circunferencia de radio $\sqrt{20}$ que está 9 unidades arriba del plano $xy$, con centro en $(2, 4, 9)$ (vea Figura 9(b)).




(a) (b)

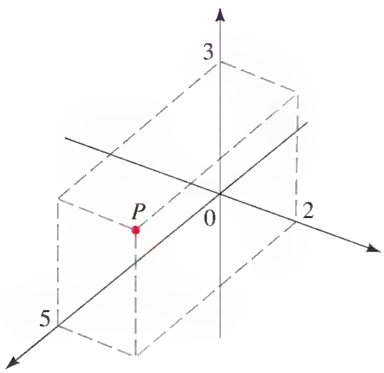
**FIGURA 9** La traza de una esfera en los planos $z = 0$ y $z = 9$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## 9.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Consulte la figura.




1. En un sistema de coordenadas tridimensionales, los tres ejes mutuamente perpendiculares se llaman eje __, eje__ y eje__. Marque los ejes en la figura. El punto $P$ de la figura tiene coordenadas ( , , ). La ecuación del plano que pasa por $P$ y paralelo al plano $xz$ es ____.

2. La distancia entre el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ está dada por la fórmula $d(P, Q) =$ _______. La distancia entre el punto $P$ en la figura y el origen es _______. La ecuación de la esfera con centro en $P$ con radio 3 es ________.

### HABILIDADES

**3-6** ■ Nos dan dos puntos $P$ y $Q$. **(a)** Localice $P$ y $Q$. **(b)** Encuentre la distancia entre $P$ y $Q$.

3. $P(3, 1, 0), Q(-1, 2, -5)$
4. $P(5, 0, 10), Q(3, -6, 7)$
5. $P(\ \ 2,\ \ 1, 0), Q(\ \ 12, 3, 0)$
6. $P(5, -4, -6), Q(8, -7, 4)$

**7-10** ■ Describa y trace la superficie representada por la ecuación dada.

7. $x = 4$
8. $y = -2$
9. $z = 8$
10. $y = -1$

**11-14** ■ Encuentre la ecuación de una esfera con el radio $r$ y centro $C$ dados.

11. $r = 5;\quad C(2, -5, 3)$
12. $r = 3;\quad C(-1, 4, -7)$
13. $r = \sqrt{6};\quad C(3,\ \ 1, 0)$
14. $r = \sqrt{11};\quad C(-10, 0, 1)$

**15-18** ■ Demuestre que la ecuación representa una esfera y encuentre su centro y radio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 8z = 9$
16. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z = 10$
17. $x^2 + y^2 + z^2 = 12x + 2y$
18. $x^2 + y^2 + z^2 = 14y - 6z$

19. Describa la traza de la esfera

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 10)^2 = 100$$

en **(a)** el plano $yz$ y **(b)** el plano $x = 4$.

20. Describa la traza de la esfera

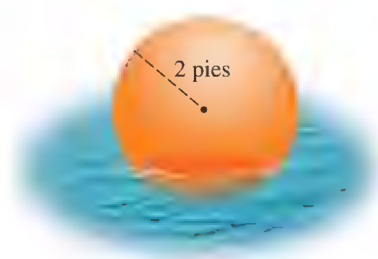
$$x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 144$$

en **(a)** el plano $xz$ y en **(b)** el plano $z = -2$.

### APLICACIONES

21. **Tanque esférico de agua** Un tanque de agua está en la forma de una esfera de 5 pies de radio. El tanque está sostenido en un círculo metálico a 4 pies abajo del centro de la esfera, como se ve en la figura. Encuentre el radio del círculo metálico.

22. **Una boya esférica** Una boya esférica de 2 pies de radio flota en las aguas en calma de un lago. Seis pulgadas de la boya están sumergidas. Ponga un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la esfera.
    **(a)** Encuentre la ecuación de la esfera.
    **(b)** Encuentre la ecuación de la circunferencia formada en la línea del agua de la boya.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**23. Visualización de un conjunto en el espacio** Trate de visualizar el conjunto de todos los puntos $(x, y, z)$ en un espacio de coordenadas que sean equidistantes de los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(0, 3, 0)$. Use la Fórmula de la Distancia para hallar la ecuación para esta superficie, y observe que sea un plano.

**24. Visualización de un conjunto en el espacio** Trate de visualizar el conjunto de todos los puntos $(x, y, z)$ en un espacio de coordenadas que se encuentren al doble de distancia de los puntos $Q(0, 3, 0)$ que del punto $P(0, 0, 0)$. Use la Fórmula de la Distancia para demostrar que el conjunto es una esfera, y encuentre su centro y radio.

# 9.4 VECTORES EN TRES DIMENSIONES

Vectores en el espacio ▶ Combinación de vectores en el espacio ▶ El producto punto para vectores en el espacio ▶ Ángulos directores de un vector

Recuerde que se usan vectores para indicar una cantidad que tiene magnitud y dirección. En la Sección 9.1 estudiamos vectores en el plano coordenado, donde la dirección está restringida a dos dimensiones. Los vectores en el espacio tienen una dirección que está en el espacio tridimensional. Las propiedades que se cumplen para vectores en el plano también se cumplen para vectores en el espacio.

## ▼ Vectores en el espacio

Recuerde de la Sección 9.1 que un vector puede ser descrito geométricamente por su punto inicial y punto terminal. Cuando ponemos un vector **a** en el espacio con su punto inicial en el origen, podemos describirlo algebraicamente como una terna ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

donde $a_1$, $a_2$ y $a_3$ son los **componentes** de **a** (vea Figura 1). Recuerde también que un vector tiene numerosas representaciones diferentes, dependiendo de su punto inicial. La siguiente definición da la relación entre las representaciones algebraica y geométrica de un vector.

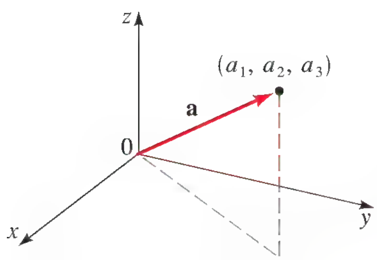



**FIGURA 1** $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$

### FORMA COMPONENTE DE UN VECTOR EN EL ESPACIO

Si un vector **a** está representado en el espacio con punto inicial $P(x_1, y_1, z_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

### EJEMPLO 1 | Describir vectores en forma de componentes

**(a)** Encuentre los componentes del vector **a** con punto inicial $P(1, -4, 5)$ y punto terminal $Q(3, 1, -1)$.

**(b)** Si el vector $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 3\rangle$ tiene punto inicial $(2, 1, -1)$, ¿cuál es su punto terminal?

**SOLUCIÓN**

**(a)** El vector deseado es

$$\mathbf{a} = \langle 3 - 1, 1 - (-4), -1 - 5\rangle = \langle 2, 5, -6\rangle$$

Vea Figura 2.

**(b)** Sea $(x, y, z)$ el punto terminal de **b**. Entonces

$$\mathbf{b} = \langle x - 2, y - 1, z - (-1)\rangle$$

Como $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 3\rangle$ tenemos $x - 2 = -2$, $y - 1 = 1$, y $z + 1 = 3$. Por lo tanto, $x = 0$, $y = 2$ y $z = 2$, y el punto terminal es $(0, 2, 2)$.

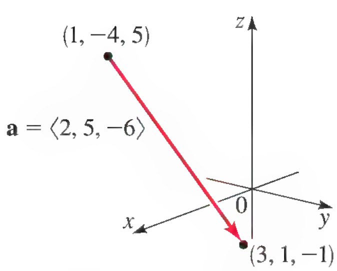



**FIGURA 2** $\mathbf{a} = \langle 2, 5, -6\rangle$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **7** ■

La fórmula siguiente es una consecuencia de la Fórmula de la Distancia, porque el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ en posición normal tiene punto inicial (0, 0, 0) y punto terminal $(a_1, a_2, a_3)$.

**MAGNITUD DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES**

La magnitud del vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

## EJEMPLO 2 | Magnitud de vectores en tres dimensiones

Encuentre la magnitud del vector dado.

**(a)** $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 5 \rangle$ **(b)** $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -1 \rangle$ **(c)** $\mathbf{w} = \langle 0, 0, -1 \rangle$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38}$

**(b)** $|\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

**(c)** $|\mathbf{w}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## Combinación de vectores en el espacio

A continuación damos definiciones de las operaciones algebraicas con vectores en tres dimensiones.

**OPERACIONES ALGEBRAICAS CON VECTORES EN TRES DIMENSIONES**

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, y $c$ es un escalar, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

## EJEMPLO 3 | Operaciones con vectores en tres dimensiones

Si $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 6, -1, 1 \rangle$ encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, y $5\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

**SOLUCIÓN** Usando las definiciones de operaciones algebraicas, tenemos

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 1 + 6, -2 - 1, 4 + 1 \rangle = \langle 7, -3, 5 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 1 - 6, -2 - (-1), 4 - 1 \rangle = \langle -5, -1, 3 \rangle$$

$$5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 5\langle 1, -2, 4 \rangle - 3\langle 6, -1, 1 \rangle = \langle 5, -10, 20 \rangle - \langle 18, -3, 3 \rangle = \langle -13, -7, 17 \rangle$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

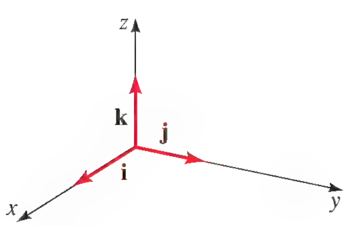



**FIGURA 3**

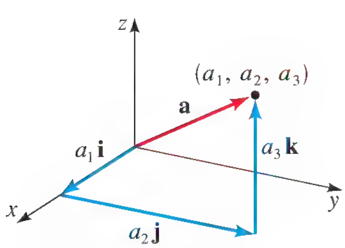



**FIGURA 4**

Recuerde que un vector unitario es un vector de longitud 1. El vector $\mathbf{w}$ en el Ejemplo 2(c) es un ejemplo de un vector unitario. Algunos otros vectores unitarios en tres dimensiones son

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

como se ve en la Figura 3. Cualquier vector en tres dimensiones puede escribirse en términos de estos tres vectores (vea Figura 4).

**EXPRESIÓN DE VECTORES EN TÉRMINOS DE i, j Y k**

El vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ puede ser expresado en términos de **i**, **j** y **k** por

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Todas las propiedades de vectores de la página 583 de la Sección 9.1 se cumplen también para vectores en tres dimensiones. Usamos estas propiedades en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 4 | Vectores en términos de **i**, **j** y **k**.

**(a)** Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ en términos de **i, j** y **k.**

**(b)** Si $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ en términos de **i**, **j** y **k**.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-3)\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

**(b)** Usamos las propiedades de vectores para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} &= 2(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) \\ &= 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} \\ &= 16\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## El producto punto para vectores en el espacio

Definimos el producto punto para vectores en tres dimensiones. Todas las propiedades del producto punto, incluyendo el Teorema del Producto Punto (página 590), se cumplen para vectores en tres dimensiones.

**DEFINICIÓN DEL PRODUCTO PUNTO PARA VECTORES EN TRES DIMENSIONES**

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son vectores en tres dimensiones, entonces su **producto punto** está definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

### EJEMPLO 5 | Cálculo de productos punto para vectores en tres dimensiones

Encuentre el producto punto dado.

**(a)** $\langle -1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 6, 5, -1 \rangle$

**(b)** $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\langle -1, 2, 3 \rangle \cdot \langle 6, 5, -1 \rangle = (-1)(6) + (2)(5) + (3)(-1) = 1$

**(b)** $$\begin{aligned} (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) &= \langle 2, -3, -1 \rangle \cdot \langle -1, 2, 8 \rangle \\ &= (2)(-1) + (-3)(2) + (-1)(8) = -16 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **27**

Recuerde que el coseno del ángulo entre dos vectores puede calcularse usando el producto punto (página 591). La misma propiedad se cumple para vectores en tres dimensiones. Para mayor énfasis, aquí expresamos de nuevo esta propiedad.

**ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES**

Sean **u** y **v** vectores en el espacio y sea $\theta$ el ángulo entre ellos. Entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

En particular, **u** y **v** son **perpendiculares** (u **ortogonales**) si y sólo sí $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

**EJEMPLO 6** | Verificar perpendicularidad de vectores

Demuestre que el vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

**SOLUCIÓN** Encontramos el producto punto.

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = (2)(5) + (2)(-4) + (-1)(2) = 0$$

Como el producto punto es 0, los vectores son perpendiculares. Vea Figura 5.

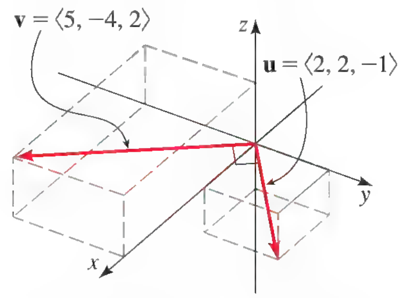



**FIGURA 5** Los vectores **u** y **v** son perpendiculares

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

## Ángulos directores de un vector

Los **ángulos directores** de un vector diferente de cero $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ son los ángulos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ en el intervalo $[0, \pi]$ que el vector forma con los ejes positivos $x$, $y$ y $z$ (vea Figura 6). Los cosenos de estos ángulos, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, se denominan **cosenos directores** del vector **a**. Con el uso de la fórmula para el ángulo entre dos vectores, podemos hallar los cosenos directores de **a**:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{j}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{k}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

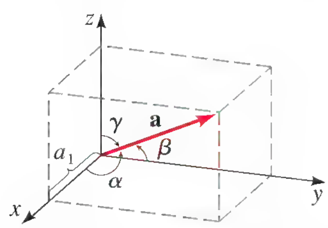



**FIGURA 6** Ángulos directores del vector **a**

### ÁNGULOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un vector diferente de cero en el espacio, los ángulos directores $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ satisfacen

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

En particular, si $|\mathbf{a}| = 1$ entonces los cosenos directores de $\mathbf{a}$ son simplemente los componentes de $\mathbf{a}$.

## EJEMPLO 7 | Hallar los ángulos directores de un vector

Encuentre los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

**SOLUCIÓN** La longitud del vector $\mathbf{a}$ es $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$. Del recuadro anterior obtenemos

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

Como los ángulos directores están en el intervalo $[0, \pi]$ y como $\cos^{-1}$ da ángulos en ese mismo intervalo, obtenemos $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ con sólo tomar el $\cos^{-1}$ de las ecuaciones citadas líneas antes.

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{14}} \approx 74° \qquad \beta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{14}} \approx 58° \qquad \gamma = \cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{14}} \approx 37°$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37** ■

Los ángulos directores de un vector determinan de manera única su dirección, pero no su longitud. Si también conocemos la longitud del vector $\mathbf{a}$, las expresiones para los cosenos directores de $\mathbf{a}$ nos permiten expresar el vector como

$$\mathbf{a} = \langle |\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma \rangle$$

De esto obtenemos

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Como $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es un vector unitario, obtenemos lo siguiente.

### PROPIEDAD DE LOS COSENOS DIRECTORES

Los ángulos directores $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ de un vector $\mathbf{a}$ diferente de cero en el espacio satisfacen la siguiente ecuación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Esta propiedad indica que si conocemos dos de los cosenos directores de un vector, podemos hallar el tercero hasta su signo.

Un ángulo $\theta$ es **agudo** si $0 \le \theta < \pi/2$ y es **obtuso** si $\pi/2 < \theta \le \pi$.

### EJEMPLO 8 | Hallar los ángulos directores de un vector

Un vector forma un ángulo $\alpha = \pi/3$ con el eje $x$ positivo y un ángulo $\beta = 3\pi/4$ con el eje $y$ positivo. Encuentre el ángulo $\gamma$ que el vector forme con el eje $z$ positivo, dado que $\gamma$ es un ángulo obtuso.

**SOLUCIÓN** Por la propiedad de los ángulos directores tenemos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{3\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

Como requerimos que $\gamma$ sea un ángulo obtuso, concluimos que $\gamma = 2\pi/3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## 9.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Un vector en tres dimensiones se puede escribir en cualquiera de dos formas: en forma de coordenadas como $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y en términos de los vectores______ **i**, **j** y **k** como $\mathbf{a} =$ ________. La magnitud del vector **a** es $|\mathbf{a}| =$_________.

   Entonces $\langle 4, -2, 4\rangle =$ ___ $\mathbf{i} +$ ___ $\mathbf{j} +$ ___ $\mathbf{k}$ y $7\mathbf{j} - 24\mathbf{k} = \langle$ ___, ___, ___ $\rangle$.

2. El ángulo $\theta$ entre los vectores **u** y **v** satisface

   $\cos\theta = \dfrac{___}{___}$. Por lo tanto, si **u** y **v** son perpendiculares, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} =$ ____. Si $\mathbf{u} = \langle 4, 5, 6\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -2\rangle$ entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} =$ ____, de modo que **u** y **v** son ________.

### HABILIDADES

**3-6** ■ Encuentre el vector **v** con punto inicial $P$ y punto terminal $Q$.

3. $P(1, -1, 0)$, $Q(0, -2, 5)$
4. $P(1, 2, -1)$, $Q(3, -1, 2)$
5. $P(6, -1, 0)$, $Q(0, -3, 0)$
6. $P(1, -1, -1)$, $Q(0, 0, -1)$

**7-10** ■ Si el vector **v** tiene punto inicial $P$, ¿cuál es su punto terminal?

7. $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2\rangle$, $P(2, 0, 1)$
8. $\mathbf{v} = \langle 0, 0, 1\rangle$, $P(0, 1, -1)$
9. $\mathbf{v} = \langle -2, 0, 2\rangle$, $P(3, 0, -3)$
10. $\mathbf{v} = \langle 23, -5, 12\rangle$, $P(-6, 4, 2)$

**11-14** ■ Encuentre la magnitud del vector dado.

11. $\langle -2, 1, 2\rangle$
12. $\langle 5, 0, -12\rangle$
13. $\langle 3, 5, -4\rangle$
14. $\langle 1, -6, 2\sqrt{2}\rangle$

**15-18** ■ Encuentre los vectores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

15. $\mathbf{u} = \langle 2, -7, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 4, -1\rangle$
16. $\mathbf{u} = \langle 0, 1, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 2, 0\rangle$
17. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
18. $\mathbf{u} = \langle a, 2b, 3c\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4a, b, -2c\rangle$

**19-22** ■ Exprese el vector dado en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

**19.** $\langle 12, 0, 2\rangle$ **20.** $\langle 0, -3, 5\rangle$

**21.** $\langle 3, -3, 0\rangle$ **22.** $\langle -a, \frac{1}{3}a, 4\rangle$

**23-24** ■ Nos dan dos vectores **u** y **v**. Exprese el vector $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ **(a)** en forma de componentes $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y **(b)** en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

**23.** $\mathbf{u} = \langle 0, -2, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -1, 0\rangle$

**24.** $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 0, -5\rangle$

**25-28** ■ Nos dan dos vectores **u** y **v**. Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de ellos.

**25.** $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, -1, 10\rangle$

**26.** $\mathbf{u} = \langle -3, 0, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 4, \frac{1}{2}\rangle$

**27.** $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \frac{5}{6}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**28.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \frac{5}{6}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j}$

**29-32** ■ Determine si los vectores dados son o no son perpendiculares.

**29.** $\langle 4, -2, -4\rangle, \langle 1, -2, 2\rangle$ **30.** $4\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

**31.** $\langle 0.3, 1.2, -0.9\rangle, \langle 10, -5, 10\rangle$

**32.** $\langle x, -2x, 3x\rangle, \langle 5, 7, 3\rangle$

**33-36** ■ Nos dan dos vectores **u** y **v**. Encuentre el ángulo (expresado en grados) entre **u** y **v**.

**33.** $\mathbf{u} = \langle 2, -2, -1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2, 2\rangle$

**34.** $\mathbf{u} = \langle 4, 0, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -1, 0\rangle$

**35.** $\mathbf{u} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

**36.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

**37-40** ■ Encuentre los ángulos directores del vector dado, redondeado al grado más cercano.

**37.** $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **38.** $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**39.** $\langle 2, 3, -6\rangle$ **40.** $\langle 2, -1, 2\rangle$

**41-44** ■ Nos dan dos ángulos directores de un vector. Encuentre el tercer ángulo director, dado que es obtuso o agudo como se indica. (En los Ejercicios 43 y 44, redondee sus respuestas al grado más cercano.)

**41.** $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \quad \gamma = \dfrac{2\pi}{3}$; $\beta$ es agudo

**42.** $\beta = \dfrac{2\pi}{3}, \quad \gamma = \dfrac{\pi}{4}$; $\alpha$ es agudo

**43.** $\alpha = 60°, \quad \beta = 50°$; $\gamma$ es obtuso

**44.** $\alpha = 75°, \quad \gamma = 15°$

**45-46** ■ Explique por qué es imposible que un vector tenga los ángulos directores dados.

**45.** $\alpha = 20°, \quad \beta = 45°$ **46.** $\alpha = 150°, \quad \gamma = 25°$

## APLICACIONES

**47. Resultante de cuatro fuerzas** Un cuerpo situado en el origen en un sistema de coordenadas tridimensionales es mantenido en equilibrio por cuatro fuerzas. Una de ellas tiene magnitud 7 lb y apunta en la dirección del eje $x$ positivo, de modo que está representada por el vector $7\mathbf{i}$. La segunda tiene magnitud de 24 lb y apunta en la dirección del eje $y$ positivo. La tercera tiene magnitud de 25 lb y apunta en la dirección del eje $z$ *negativo*.

**(a)** Use el hecho de que las cuatro fuerzas están en equilibrio (es decir, su suma es **0**) para hallar la cuarta fuerza. Exprésela en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

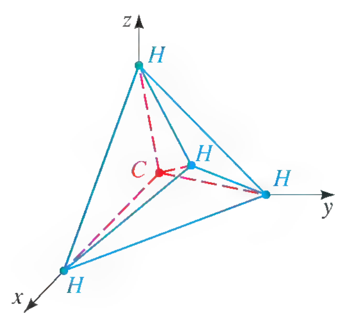
**(b)** ¿Cuál es la magnitud de la cuarta fuerza?

**48. Ángulo central de un tetraedro** Un *tetraedro* es un sólido con cuatro caras triangulares, cuatro vértices y seis aristas, como se muestra en la figura. En un tetraedro *regular*, las aristas son todas de la misma longitud. Considere el tetraedro con vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ y $D(1, 1, 1)$.

**(a)** Demuestre que el tetraedro es regular.

**(b)** El centro del tetraedro es el punto $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (el "promedio" de los vértices). Encuentre el ángulo entre los vectores que unen el centro con cualesquier dos de los vértices (por ejemplo, $\angle AEB$). Este ángulo se denomina *ángulo central* del tetraedro.

NOTA: En una molécula de metano ($CH_4$) los cuatro átomos de hidrógeno forman los vértices de un tetraedro regular con el átomo de carbono en el centro. En este caso, los químicos se refieren al ángulo central como el *ángulo de enlace*. En la figura, se muestra el tetraedro del ejercicio, con los vértices marcados $H$ para hidrógeno y el centro marcado $C$ para el carbono.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**49. Vectores paralelos** Dos vectores diferentes de cero son *paralelos* si apuntan en la misma dirección o en direcciones opuestas. Esto significa que si dos vectores son paralelos, uno de ellos debe ser un múltiplo escalar del otro. Determine si los vectores dados **u** y **v** son paralelos. Si lo son, exprese **v** como un múltiplo escalar de **u**.

**(a)** $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -6, 4, -8\rangle$

**(b)** $\mathbf{u} = \langle -9, -6, 12\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 12, 8, -16\rangle$

**(c)** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

**50. Vectores unitarios** Un *vector unitario* es un vector de magnitud 1. La multiplicación de un vector por un escalar cambia su magnitud pero no su dirección.

**(a)** Si un vector **v** tiene magnitud $m$, ¿qué múltiplo escalar de **v** tiene magnitud 1 (es decir, es un vector unitario)?

**(b)** Multiplique cada uno de los vectores siguientes por un escalar apropiado para cambiarlos a vectores unitarios:

$$\langle 1, -2, 2\rangle \quad \langle -6, 8, -10\rangle \quad \langle 6, 5, 9\rangle$$

**51. Ecuación vectorial de una esfera** Sea $\mathbf{a} = \langle 2, 2, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, -2, 0\rangle$ y $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$.

**(a)** Demuestre que la ecuación vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa una esfera, expandiendo el producto punto y simplificando la ecuación algebraica resultante.

**(b)** Encuentre el centro y radio de la esfera.

**(c)** Interprete el resultado del inciso (a) geométricamente, usando el hecho de que el producto de dos vectores es 0 sólo si los vectores son perpendiculares. [*Sugerencia:* Trace un diagrama que muestre los puntos extremos de los vectores **a**, **b** y **r**, tomando nota de que los puntos extremos de **a** y **b** son los puntos extremos de un diámetro y el punto extremo de **r** es un punto arbitrario en la esfera.]

**(d)** Usando sus observaciones del inciso (a), encuentre una ecuación vectorial para la esfera en la que los puntos (0, 1, 3) y (2, −1, 4) forman los puntos extremos de un diámetro. Simplifique la ecuación vectorial para obtener una ecuación algebraica para la esfera. ¿Cuáles son su centro y radio?

# 9.5 EL PRODUCTO CRUZ

El producto cruz ▶ Propiedades del producto cruz ▶ Área de un paralelogramo ▶ Volumen de un paralelepípedo

En esta sección definimos una operación con vectores que nos permite hallar un vector que es perpendicular a dos vectores determinados.

## ▼ El producto cruz

Dados dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ con frecuencia necesitamos hallar un vector **c** perpendicular a **a** y a **b**. Si escribimos $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, y

$$a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$$
$$b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$$

Se puede verificar que una de las soluciones de este sistema de ecuaciones es el vector $\mathbf{c} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$. Este vector se denomina *producto cruz* de **a** y **b** y está definido por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

### EL PRODUCTO CRUZ

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ son vectores tridimensionales, entonces el **producto cruz** de **a** y **b** es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

El *producto cruz* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores **a** y **b**, a diferencia del producto punto, es un vector (no un escalar). Por esta razón también se le conoce como *producto vectorial*. Observe que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está definido sólo cuando **a** y **b** son vectores en *tres dimensiones*.

Estudiamos determinantes y sus propiedades en la Sección 10.7.

Para ayudarnos a recordar la definición del producto cruz, usamos la notación de determinantes. Un **determinante de orden dos** está definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

**WILLIAM ROWAN HAMILTON** (1805-1865) fue un matemático y físico irlandés. Fue criado por su tío (un lingüista) quien observó que Hamilton tenía una sorprendente habilidad para aprender idiomas. Cuando tenía cinco años de edad, podía leer latín, griego y hebreo; a los ocho, agregó francés e italiano y, cuando tenía diez, había dominado el árabe y el sánscrito.

Hamilton también era un prodigio para calcular y compitió en concursos de aritmética mental. Entró en el Trinity College de Dublín, Irlanda, donde estudió ciencias; fue nombrado profesor de astronomía ahí cuando todavía no terminaba su carrera.

Hamilton hizo numerosas aportaciones a las matemáticas y física, pero es mejor conocido por su invención de los cuaterniones. Hamilton sabía que podemos multiplicar vectores en el plano al considerarlos como números complejos. Buscaba una multiplicación similar para puntos en el espacio. Después de pensar en este problema durante más de 20 años, descubrió la solución en un destello de ingenio cuando caminaba cerca del puente de Brougham en Dublín; vio que una cuarta dimensión es necesaria para hacer que funcionara la multiplicación. En el puente grabó la fórmula para su cuaternión, donde todavía está. Tiempo después, el matemático estadunidense Josiah Willard Gibbs extrajo el producto punto y producto cruz de vectores a partir de las propiedades de multiplicación de cuaterniones. Éstos se usan hoy en gráficas por computadora por su capacidad para describir fácilmente rotaciones especiales.

Un **determinante de orden tres** se define en términos de determinantes de segundo orden como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Observe que cada término del lado derecho de la ecuación anterior contiene un número $a_i$ en el primer renglón del determinante, y $a_i$ es multiplicado por el determinante de segundo orden obtenido del lado izquierdo al eliminar el renglón y columna donde aparece $a_i$. Observe también el signo menos del segundo término. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-4) - 2(6-(-5)) + (-1)(12-0) = -38$$

Podemos escribir la definición del producto cruz usando determinantes como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

Aun cuando el primer renglón del determinante anterior está formado por vectores, lo expandimos como si fuera un determinante ordinario de orden 3. La fórmula simbólica dada por el determinante anterior es probablemente la forma más fácil de recordar y calcular productos cruz.

## EJEMPLO 1 | Hallar un producto cruz

Si $\mathbf{a} = \langle 0, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -1\rangle$, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

**SOLUCIÓN** Usamos la fórmula citada aquí para hallar el producto cruz de **a** y **b**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (1-0)\mathbf{i} - (0-6)\mathbf{j} + (0-(-2))\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Por lo tanto, el vector deseado es $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

## Propiedades del producto cruz

Una de las propiedades más importantes del producto cruz es el siguiente teorema.

**TEOREMA DEL PRODUCTO CRUZ**

El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal (perpendicular) a **a** y **b**.

**DEMOSTRACIÓN** Para demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$, calculamos el producto punto de ambos y demostramos que es 0:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\
&= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Un cálculo similar muestra que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$. ■

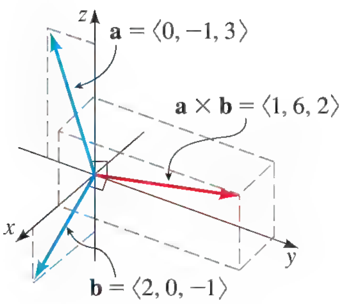



**FIGURA 1** El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

## EJEMPLO 2 | Hallar un vector ortogonal

Si $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$, encuentre un vector unitario que sea ortogonal al plano que contiene los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

**SOLUCIÓN** Por el Teorema del Producto Cruz, el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal al plano que contiene los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. (Vea Figura 1.) En el Ejemplo 1 encontramos $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Para obtener un vector unitario ortogonal, multiplicamos $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ por el escalar $1/|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$:

$$\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{41}}$$

Por lo tanto, el vector buscado es $\dfrac{1}{\sqrt{41}}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9 ■

## EJEMPLO 3 | Hallar un vector perpendicular a un plano

Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

**SOLUCIÓN** Por el Teorema del Producto Cruz, el vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, y por lo tanto es perpendicular al plano que pasa por $P$, $Q$ y $R$. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (-2 - 1)\mathbf{i} + (5 - 4)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k} \\
\overrightarrow{PR} &= (1 - 1)\mathbf{i} + ((-1) - 4)\mathbf{j} + (1 - 6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Calculamos el producto cruz de estos vectores:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \\
&= (-5 - 35)\mathbf{i} - (15 - 0)\mathbf{j} + (15 - 0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}
\end{aligned}$$

En consecuencia, el vector $\langle -40, -15, 15 \rangle$ es perpendicular al plano dado. Observe que cualquier múltiplo escalar diferente de cero de este vector, por ejemplo $\langle -8, -3, 3 \rangle$, es también perpendicular al plano.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 17 ■

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están representados por segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial (como en la Figura 2), entonces el Teorema del Producto Cruz dice que el producto cruz

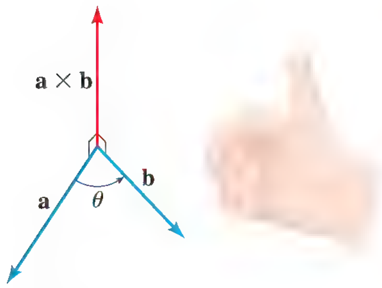



**FIGURA 2** Regla de la mano derecha

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en una dirección perpendicular al plano que pasa por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por la *regla de la mano derecha:* Si los dedos de su mano derecha se doblan en la dirección de una rotación (por un ángulo menor a 180°) de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (como en la Figura 2). Se puede verificar que el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de la Figura 1 satisface la regla de la mano derecha.

Ahora que ya sabemos la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, lo restante que necesitamos es la longitud de $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

**LONGITUD DEL PRODUCTO CRUZ**

Si $\theta$ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (de modo que $0 \leq \theta \leq \pi$) entonces

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$$

En particular, dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ diferentes de cero son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

**DEMOSTRACIÓN** Aplicamos las definiciones del producto cruz y longitud de un vector. Se puede verificar el álgebra en el primer paso al expandir los lados derechos de las rectas primera y segunda y, a continuación, comparar los resultados.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 && \text{Definiciones}\\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 && \text{Verificar álgebra}\\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 && \text{Definiciones}\\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta && \text{Propiedad del Producto Cruz}\\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) && \text{Factorice}\\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\operatorname{sen}^2\theta && \text{Identidad de Pitágoras}
\end{aligned}
$$

El resultado se sigue al tomar raíces cuadradas y observar que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ porque $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ cuando $0 \leq \theta \leq \pi$. ■

En este punto hemos determinado por completo el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ geométricamente. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y su orientación está determinada por la regla de la mano derecha. La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$.

## Área de un paralelogramo

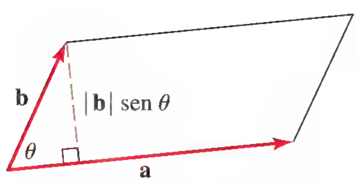



**FIGURA 3** Paralelogramo determinado por **a** y **b**

Podemos usar el producto cruz para hallar el área de un paralelogramo. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están representados por segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial, entonces ellos determinan un paralelogramo con base $|\mathbf{a}|$, altitud $|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$, y área

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

(Vea Figura 3.) Entonces tenemos la siguiente forma de interpretar la magnitud de un producto cruz.

**ÁREA DE UN PARALELOGRAMO**

La longitud del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

### EJEMPLO 4 | Hallar el área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

**SOLUCIÓN** En el Ejemplo 3 calculamos que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes $PQ$ y $PR$ es la longitud de este producto cruz:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

El área $A$ del triángulo $PQR$ es la mitad del área de este paralelogramo, es decir, $\frac{5}{2}\sqrt{82}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **25**

## Volumen de un paralelepípedo

El producto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ se denomina **triple producto escalar** de los vectores **a, b** y **c**. Es posible verificar que el producto escalar triple se puede escribir como el siguiente determinante:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El significado geométrico del producto escalar triple se puede ver si se considera el paralelepípedo* determinado por los vectores **a**, **b** y **c** (vea Figura 4). El área del paralelogramo base es $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Si $\theta$ es el ángulo entre **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, entonces la altura $h$ del paralelepípedo es $h = |\mathbf{a}||\cos\theta|$. (Debemos usar $|\cos\theta|$ en lugar de $\cos\theta$ en caso de $\theta > \pi/2$.) Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

La última igualdad se deduce del Teorema del Producto Punto de la página 590.

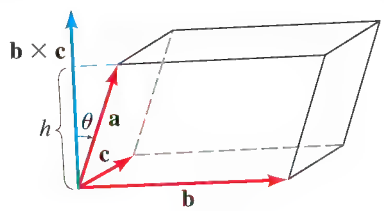



**FIGURA 4** Paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**

Hemos demostrado la siguiente fórmula.

> **VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO**
>
> El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar:
>
> $$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$
>
> En particular, si el volumen del paralelepípedo es 0, entonces los vectores **a**, **b** y **c** son coplanarios.

### EJEMPLO 5 | Vectores coplanarios

Use el producto escalar triple para demostrar que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ son coplanarios, es decir, se encuentran en el mismo plano.

---

* La palabra *paralelepípedo* se deriva de raíces griegas que, juntas, significan "caras paralelas".

**SOLUCIÓN** Calculamos el producto escalar triple:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Entonces el volumen del paralelepípedo es 0 y, en consecuencia, los vectores **a**, **b** y **c** son coplanarios.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29** ■

## 9.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. El producto cruz de los vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es el vector

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{vmatrix}$$

$= ________ \mathbf{i} + ________ \mathbf{j} + ________ \mathbf{k}$

Entonces el producto cruz de $\mathbf{a} = \langle 1, 0, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 3, 0\rangle$

es $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ________$.

2. El producto cruz de dos vectores **a** y **b** es ________ a **a** y a **b**. Por lo tanto, si los dos vectores **a** y **b** están en un plano, el vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es ________ al plano.

### HABILIDADES

**3-8** ■ Para los vectores dados **a** y **b**, encuentre el producto cruz $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -3\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 2, 3, 0\rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 0, \ 4, 1\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 1, \ 2\rangle$
5. $\mathbf{a} = \langle 6, -2, 8\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -9, 3, -12\rangle$
6. $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 4\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle \frac{1}{6}, \ \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\rangle$
7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$
8. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = -3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**9-12** ■ Nos dan dos vectores **a** y **b**. **(a)** Encuentre un vector perpendicular a **a** y a **b**. **(b)** Encuentre un vector unitario perpendicular a **a** y a **b**.

9. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, -1\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -1, 1, -1\rangle$
10. $\mathbf{a} = \langle 2, 5, 3\rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 3, -2, -1\rangle$
11. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
12. $\mathbf{a} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

**13-16** ■ Nos dan las longitudes de dos vectores **a** y **b** y el ángulo $\theta$ entre ellos. Encuentre la longitud de su producto, $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

13. $|\mathbf{a}| = 6, \quad |\mathbf{b}| = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60°$
14. $|\mathbf{a}| = 4, \quad |\mathbf{b}| = 5, \quad \theta = 30°$
15. $|\mathbf{a}| = 10, \quad |\mathbf{b}| = 10, \quad \theta = 90°$
16. $|\mathbf{a}| = 0.12, \quad |\mathbf{b}| = 1.25, \quad \theta = 75°$

**17-20** ■ Encuentre un vector que sea perpendicular al plano que pasa por los tres puntos dados.

17. $P(0, 1, 0), \ Q(1, 2, \ 1), \ R( \ 2, 1, 0)$
18. $P(3, 4, 5), \ Q(1, 2, 3), \ R(4, 7, 6)$
19. $P(1, 1, -5), \ Q(2, 2, 0), \ R(0, 0, 0)$
20. $P(3, 0, 0), \ Q(0, 2, -5), \ R(-2, 0, 6)$

**21-24** ■ Encuentre el área del paralelogramo determinado por los vectores dados.

21. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$
22. $\mathbf{u} = \langle 0, -3, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 5, -6, 0\rangle$
23. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \frac{3}{2}\mathbf{k}$
24. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

**25-28** ■ Encuentre el área de $\triangle PQR$.

25. $P(1, 0, 1), \ Q(0, 1, 0), \ R(2, 3, 4)$
26. $P(2, 1, 0), \ Q(0, 0, -1), \ R(-4, 2, 0)$
27. $P(6, 0, 0), \ Q(0, \ 6, 0), \ R(0, 0, \ 6)$
28. $P(3, -2, 6), \ Q(-1, -4, -6), \ R(3, 4, 6)$

**29-34** ■ Nos dan tres vectores **a**, **b** y **c**. **(a)** Encuentre el triple producto escalar $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. **(b)** ¿Los vectores son coplanarios? Si no es así, encuentre el volumen del paralelepípedo que determinan.

**29.** $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle \;\; 3, 2, 1 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, 8, 10 \rangle$

**30.** $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 7, 4, 0 \rangle$

**31.** $\mathbf{a} = \langle 2, 3, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 4, 0 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 3, -1, 3 \rangle$

**32.** $\mathbf{a} = \langle 1, -1, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -1, 1 \rangle$

**33.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**34.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i}$

## APLICACIONES

**35. Volumen de una pecera** Una pecera de un restaurante elegante tiene forma de paralelepípedo con base rectangular de 300 cm de largo y 120 cm de ancho. Las caras delantera y trasera son verticales, pero las caras izquierda y derecha están inclinadas 30° de la vertical y miden 120 cm por 150 cm. (Vea la figura.)

**(a)** Sean **a, b** y **c** los tres vectores de la figura. Encuentre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. [*Sugerencia:* Recuerde que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ y $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta$.]

**(b)** ¿Cuál es la capacidad del tanque en litros? [*Nota:* 1 L = 1000 $\text{cm}^3$.]

**36. Tetraedro de Rubik** El cubo de Rubik, un furor de acertijos de la década de 1980 que sigue popular en nuestros días, inspiró muchos rompecabezas parecidos. El que se ilustra en la figura se llama Tetraedro de Rubik; tiene forma de tetraedro regular con cada arista de $\sqrt{2}$ pulgadas de largo. El volumen de un tetraedro regular es un sexto del volumen del paralelepípedo determinado por tres aristas cualquiera que se encuentran en una esquina.

**(a)** Use el triple producto para hallar el volumen del tetraedro de Rubik. [*Sugerencia:* Vea el Ejercicio 48 de la Sección 9.4, que da las esquinas de un tetraedro que tiene la misma forma y tamaño que el tetraedro de Rubik.]

**(b)** Construya seis tetraedros regulares idénticos usando plastilina para ello. Experimente a ver cómo se pueden unir para crear un paralelepípedo que esté determinado por tres aristas de uno de los tetraedros (confirmando así el enunciado de líneas antes acerca del volumen de un tetraedro regular).

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**37. Orden de operaciones en el triple producto** Dados tres vectores **u**, **v** y **w**, su triple producto escalar se puede ejecutar en seis órdenes diferentes:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}), \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}),$$
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}), \quad \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$$

**(a)** Calcule cada uno de estos seis triples productos para los vectores:

$$\mathbf{u} = \langle 0, 1, 1 \rangle, \qquad \mathbf{v} = \langle 1, 0, 1 \rangle, \qquad \mathbf{w} = \langle 1, 1, 0 \rangle$$

**(b)** Con base en sus observaciones del inciso (a), haga una conjetura acerca de las relaciones entre estos seis productos.

**(c)** Demuestre la conjetura que hizo en el inciso (b).

# 9.6 ECUACIONES DE RECTAS Y PLANOS

Ecuaciones de rectas ▶ Ecuaciones de planos

En esta sección encontramos ecuaciones para rectas y planos en un espacio tridimensional de coordenadas. Usamos vectores para ayudarnos a hallar tales ecuaciones.

## ▼ Ecuaciones de rectas

El **vector de posición** de un punto $(a_1, a_2, a_3)$ es el vector $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; esto es, es el vector del origen al punto.

Una recta $L$ en el espacio tridimensional está determinada cuando conocemos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre $L$ y la dirección de $L$. En tres dimensiones la dirección de una recta está descrita por un vector $\mathbf{v}$ paralelo a $L$. Si $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición de $P_0$ (esto es, el vector $\overrightarrow{OP_0}$), entonces para todos los números reales $t$, los puntos terminales $P$ de los vectores de posición

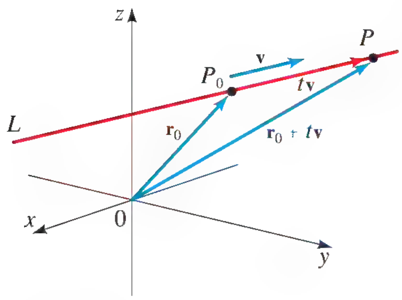



**FIGURA 1**

$\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ trazan una recta paralela a $\mathbf{v}$ y pasa por $P_0$ (vea Figura 1). Cada uno de los valores del parámetro $t$ da un punto $P$ sobre $L$, por lo que la recta $L$ está dada por el vector de posición $\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Ésta es la **ecuación vectorial de una recta**.

Escribamos el vector $\mathbf{v}$ en forma de componentes $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ y sea $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ . Entonces la ecuación vectorial de la recta se convierte en

$$\begin{aligned} \langle x, y, z \rangle &= \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle \\ &= \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle \end{aligned}$$

Como dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales, tenemos el siguiente resultado.

**ECUACIONES PARAMÉTRICAS PARA UNA RECTA**

Una recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ está descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

donde $t$ es cualquier número real.

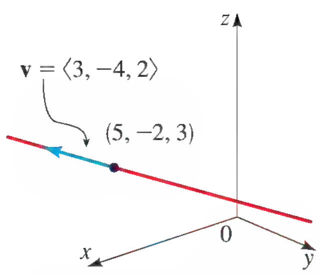



**FIGURA 2** Recta que pasa por $(5, -2, 3)$ con dirección $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 2 \rangle$

## EJEMPLO 1 | Ecuaciones de una recta

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(5, -2, 3)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 2 \rangle$.

**SOLUCIÓN** Usamos esta fórmula para hallar las ecuaciones paramétricas:

$$x = 5 + 3t$$

$$y = -2 - 4t$$

$$z = 3 + 2t$$

donde $t$ es cualquier número real. (Vea Figura 2.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

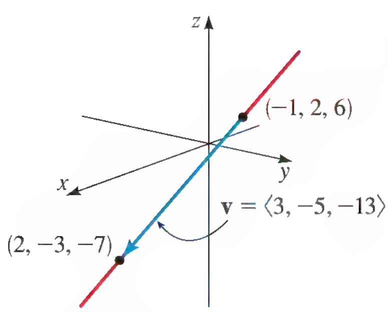



**FIGURA 3** Recta que pasa por $(-1, 2, 6)$ y $(2, -3, -7)$

## EJEMPLO 2 | Ecuaciones de una recta

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(-1, 2, 6)$ y $(2, -3, -7)$.

**SOLUCIÓN** Primero hallamos un vector determinado por los dos puntos:

$$\mathbf{v} = \langle 2 - (-1), -3 - 2, -7 - 6 \rangle = \langle 3, -5, -13 \rangle$$

A continuación usamos $\mathbf{v}$ y el punto $(-1, 2, 6)$ para hallar las ecuaciones paramétricas:

$$x = -1 + 3t$$

$$y = 2 - 5t$$

$$z = 6 - 13t$$

donde $t$ es cualquier número real. Una gráfica de la recta se muestra en la Figura 3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

En el Ejemplo 2 usamos el punto $(-1, 2, 6)$ para obtener las ecuaciones paramétricas de la recta. En su lugar podríamos usar el punto $(2, -3, -7)$. Las ecuaciones paramétricas resultantes se verían de modo diferente pero todavía describen la misma recta (vea Ejercicio 37).

## Ecuaciones de planos

Aun cuando una recta en el espacio está determinada por un punto y una dirección, la "dirección" de un plano no puede ser descrita por un vector en el plano. De hecho, vectores diferentes en un plano pueden tener direcciones diferentes. Pero un vector perpendicular a un plano *sí* especifica por completo la dirección del plano. Entonces un plano en el espacio está determinado por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano y un vector $\mathbf{n}$ que es ortogonal al plano. Este vector ortogonal $\mathbf{n}$ se llama **vector normal**. Para determinar si un punto $P(x, y, z)$ está en el plano, comprobamos si el vector $\overrightarrow{P_0P}$ con punto inicial $P_0$ y punto terminal $P$ es ortogonal al vector normal. Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de $P_0$ y $P$, respectivamente. Entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ está representado por $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ (vea Figura 4). Por lo tanto, el plano está descrito por las puntas de los vectores $\mathbf{r}$ que satisfacen

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Ésta es la **ecuación vectorial del plano**.

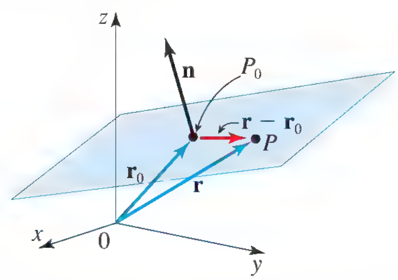



**FIGURA 4**

Escribamos el vector normal $\mathbf{n}$ en forma de componentes $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ y sea $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Entonces la ecuación del plano se convierte en

$$\langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0$$

Si ejecutamos el producto punto, llegamos a la siguiente ecuación del plano con las variables $x$, $y$ y $z$.

> **ECUACIÓN DE UN PLANO**
>
> El plano que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ está descrito por la ecuación
>
> $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

### EJEMPLO 3 | Hallar una ecuación para un plano

Un plano tiene vector normal $\mathbf{n} = \langle 4, -6, 3\rangle$ y pasa por el punto $P(3, -1, -2)$.

**(a)** Encuentre una ecuación del plano.

**(b)** Encuentre los puntos de intersección, y trace una gráfica del plano.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Por la fórmula anterior para la ecuación de un plano tenemos

$$4(x - 3) - 6(y - (-1)) + 3(z - (-2)) = 0 \quad \text{Expanda}$$

$$4x - 12 - 6y - 6 + 3z + 6 = 0 \quad \text{Expanda}$$

$$4x - 6y + 3z = 12 \quad \text{Simplifique}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es $4x - 6y + 3z = 32$

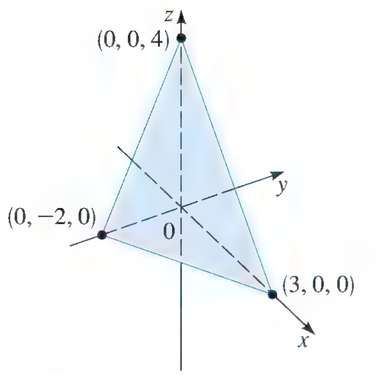



**FIGURA 5** El plano $4x - 6y + 3z = 32$

Observe que, en la Figura 5, los ejes han sido girados de modo que tenemos una mejor vista.

**(b)** Para hallar el punto de intersección $x$, hacemos $y = 0$ y $z = 0$ en la ecuación del plano y despejamos $x$. Análogamente, hallamos los puntos de intersección $y$ y $z$.

punto de intersección $x$: Haciendo $y = 0$, $z = 0$, obtenemos $x = 3$.

punto de intersección $y$: Haciendo $x = 0$, $z = 0$, obtenemos $y = -2$.

punto de intersección $z$: Haciendo $x = 0$, $y = 0$, obtenemos $z = 4$.

Entonces la gráfica del plano cruza los ejes de coordenadas en los puntos $(3, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, y $(0, 0, 4)$. Esto hace posible que tracemos la parte del plano que se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

## EJEMPLO 4 | Hallar una ecuación para el plano

Hállese una ecuación para el plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

**SOLUCIÓN** El vector $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y es, por tanto, perpendicular al plano que pasa por $P$, $Q$ y $R$. En el Ejemplo 3 de la Sección 9.5 encontramos $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15\rangle$. Usando la fórmula para una ecuación de un plano, tenemos

$$-40(x - 1) - 15(y - 4) + 15(z - 6) = 0 \qquad \text{Fórmula}$$
$$-40x + 40 - 15y + 60 + 15z - 90 = 0 \qquad \text{Expanda}$$
$$-40x - 15y + 15z = -10 \qquad \text{Simplifique}$$
$$-8x - 3y + 3z = -2 \qquad \text{Divida entre 5}$$

Entonces la ecuación del plano es $-8x - 3y + 3z = -2$. Una gráfica de este plano se ilustra en la Figura 6.

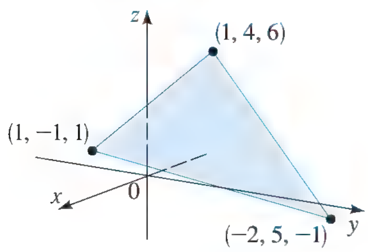



**FIGURA 6** Plano que pasa por tres puntos

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

En el Ejemplo 4 usamos el punto $P$ para obtener la ecuación del plano. El lector puede comprobar que usando $Q$ o $R$ da la misma ecuación.

# 9.6 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Una recta en el espacio está descrita algebraicamente usando ecuaciones ______. La recta que pasa por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ está descrita por las ecuaciones

$x =$ ________, $y =$ ________, $z =$ ________.

**2.** El plano que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ está descrito algebraicamente por la ecuación__________.

## HABILIDADES

**3-8** ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $P$ y es paralela al vector $\mathbf{v}$.

**3.** $P(1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 2, -3\rangle$

**4.** $P(0, -5, 3)$, $\mathbf{v} = \langle 2, 0, -4\rangle$

**5.** $P(3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle 0, -4, 2\rangle$

**6.** $P(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, 5\rangle$

**7.** $P(1, 0, -2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$

**8.** $P(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**9-14** ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$.

**9.** $P(1, -3, 2)$, $Q(2, 1, -1)$

**10.** $P(2, -1, -2)$, $Q(0, 1, -3)$

**11.** $P(1, 1, 0)$, $Q(0, 2, 2)$

**12.** $P(3, 3, 3)$, $Q(7, 0, 0)$

**13.** $P(3, 7, -5)$, $Q(7, 3, -5)$

**14.** $P(12, 16, 18)$, $Q(12, -6, 0)$

**15-20** ■ Un plano tiene vector normal $\mathbf{n}$ y pasa por el punto $P$. **(a)** Encuentre la ecuación para el plano. **(b)** Encuentre los puntos de intersección y trace una gráfica del plano.

**15.** $\mathbf{n} = \langle 1, 1, -1\rangle$, $P(0, 2, -3)$

**16.** $\mathbf{n} = \langle 3, 2, 0\rangle$, $P(1, 2, 7)$

**17.** $\mathbf{n} = \langle 3, 0, -\frac{1}{2} \rangle$, $P(2, 4, 8)$

**18.** $\mathbf{n} = \langle -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \rangle$, $P(-6, 0, -3)$

**19.** $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $P(0, 2, -3)$

**20.** $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $P(1, 0, -9)$

**21-26** ■ Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P$, $Q$ y $R$.

**21.** $P(6, -2, 1)$, $Q(5, -3, -1)$, $R(7, 0, 0)$

**22.** $P(3, 4, 5)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(4, 7, 6)$

**23.** $P(3, \frac{1}{3}, -5)$, $Q(4, \frac{2}{3}, -3)$, $R(2, 0, 1)$

**24.** $P(\frac{3}{2}, 4, -2)$, $Q(-\frac{1}{2}, 2, 0)$, $R(-\frac{1}{2}, 0, 2)$

**25.** $P(6, 1, 1)$, $Q(3, 2, 0)$, $R(0, 0, 0)$

**26.** $P(2, 0, 0)$, $Q(0, 2, -2)$, $R(0, 0, 4)$

**27-30** ■ Nos dan la descripción de una recta. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta.

**27.** La recta cruza el eje $z$ donde $z = 4$ y cruza el plano $xy$ donde $x = 2$ y $y = 5$.

**28.** La recta cruza el eje $x$ donde $x = -2$ y cruza el eje $z$ donde $z = 10$.

**29.** La recta perpendicular al plano $xz$ que contiene el punto $(2, -1, 5)$.

**30.** La recta paralela al eje $y$ que cruza el plano $xz$ donde $x = -3$ y $z = 2$.

**31-34** ■ Nos dan una descripción del plano. Encuentre una ecuación para el plano.

**31.** El plano que cruza el eje $x$ donde $x = 1$, el eje $y$ donde $y = 3$ y el eje $z$ donde $z = 4$.

**32.** El plano que cruza el eje $x$ donde $x = -2$, el eje $y$ donde $y = -1$ y el eje $z$ donde $z = 3$.

**33.** El plano que es paralelo al plano $x - 2y + 4z = 6$ y contiene el origen.

**34.** El plano que contiene la recta $x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = -3t$ y el punto $P(2, 0, -6)$. [*Sugerencia:* Un vector desde cualquier punto en la recta a $P$ estará en el plano.]

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**35. Intersección de una recta y un plano** Una recta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t, \qquad y = 3t, \qquad z = 5 - t$$

y un plano tiene ecuación $5x - 2y - 2z = 1$.

**(a)** ¿Para qué valor de $t$ el punto correspondiente en la recta cruza el plano?

**(b)** ¿En qué punto se cruzan la recta y el plano?

**36. Rectas y planos** Una recta es paralela al vector $\mathbf{v}$, y un plano tiene vector normal $\mathbf{n}$.

**(a)** Si la recta es perpendicular al plano, ¿cuál es la relación entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ (paralelos o perpendiculares)?

**(b)** Si la recta es paralela al plano (esto es, la recta y el plano no se intersectan), ¿cuál es la relación entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ (paralelos o perpendiculares)?

**(c)** Nos dan ecuaciones paramétricas para dos rectas. ¿Cuál recta es paralela al plano $x - y + 4z = 6$? ¿Cuál recta es perpendicular a este plano?

**Recta 1:** $x = 2t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 + 8t$

**Recta 2:** $x = -2t, \quad y = 5 + 2t, \quad z = 3 + t$

**37. Misma recta: ecuaciones paramétricas diferentes** Toda recta puede ser descrita por un número infinito de conjuntos de ecuaciones paramétricas, puesto que *cualquier* punto sobre la recta y *cualquier* vector paralelo a la recta se pueden usar para construir las ecuaciones. Pero, ¿cómo podemos saber si los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas representan la misma recta? Considere los siguientes dos conjuntos de ecuaciones paralelas:

**Recta 1:** $x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = -6 + 5t$

**Recta 2:** $x = -1 + 2t, \quad y = 6 - 6t, \quad z = 4 - 10t$

**(a)** Encuentre dos puntos que se encuentren sobre la Recta 1 haciendo $t = 0$ y $t = 1$ en sus ecuaciones paramétricas. A continuación demuestre que estos puntos también se encuentran sobre la Recta 2 hallando dos valores del parámetro que dé estos puntos cuando se sustituyan en las ecuaciones paramétricas por la Recta 2.

**(b)** Demuestre que las siguientes dos rectas no son las mismas, hallando un punto sobre la Recta 3 y luego demostrando que no se encuentra sobre la Recta 4.

**Recta 3:** $x = 4t, \quad y = 3 - 6t, \quad z = -5 + 2t$

**Recta 4:** $x = 8 - 2t, \quad y = -9 + 3t, \quad z = 6 - t$

# CAPÍTULO 9 | REPASO

## ■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1. (a)** ¿Cuál es la diferencia entre un escalar y un vector?

**(b)** Trace un diagrama para demostrar cómo sumar dos vectores.

**(c)** Trace un diagrama para demostrar cómo restar dos vectores.

**(d)** Trace un diagrama para demostrar cómo multiplicar un vector por los escalares $2, \frac{1}{2}, -2$, y $-\frac{1}{2}$.

**2.** Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son vectores en dos dimensiones y $c$ es un escalar, escriba expresiones para $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, y $c\mathbf{u}$.

**3.** Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son vectores en dos y tres dimensiones, respectivamente, escriba expresiones para sus magnitudes $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$.

**4. (a)** Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$, escriba $\mathbf{u}$ en términos de $\mathbf{i}$ y de $\mathbf{j}$.

**(b)** Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, escriba $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

**5.** Escriba los componentes del vector $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ en términos de su magnitud $|\mathbf{u}|$ y dirección $\theta$.

**6.** Exprese el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en términos de los componentes de los vectores.
   **(a)** $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$
   **(b)** $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

**7.** **(a)** ¿Cómo usa usted el producto punto para hallar el ángulo entre dos vectores?
   **(b)** ¿Cómo usa usted el producto punto para determinar si dos vectores son perpendiculares?

**8.** ¿Cuál es el componente de **u** a lo largo de **v**, y cómo lo calcula?

**9.** ¿Cuál es la proyección de **u** sobre **v**, y cómo la calcula?

**10.** ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza **F** para mover un cuerpo a lo largo de un desplazamiento **D**?

**11.** ¿Cómo encuentra usted la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ en espacio tridimensional?

**12.** ¿Cuál es la ecuación de la esfera con centro $C(a, b, c)$ y radio $r$?

**13.** **(a)** ¿Cómo calcula usted el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ si conoce los componentes de **a** y **b**?
   **(b)** ¿Cómo calcula $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ si conoce las longitudes de **a** y **b** y el ángulo entre ellos?
   **(c)** ¿Cuál es el ángulo entre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ así como **a** y **b**?

**14.** **(a)** ¿Cómo encuentra el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?
   **(b)** ¿Cómo encuentra el volumen del paralelepípedo determinado por **a, b** y **c**?

**15.** Escriba ecuaciones paramétricas para la recta que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$.

**16.** Escriba una ecuación para el plano que contiene el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y tiene vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

**17.** ¿Cómo encuentra ecuaciones paramétricas para la recta que contiene los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$?

**18.** ¿Cómo encuentra una ecuación para el plano que contiene los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ y $R(x_3, y_3, z_3)$?

## ■ EJERCICIOS

*Los Ejercicios 1-24 tratan de vectores en dos dimensiones.*

**1-4** ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

**1.** $\mathbf{u} = \langle -2, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 8, 1 \rangle$

**2.** $\mathbf{u} = \langle 5, -2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, 0 \rangle$

**3.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

**4.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

**5.** Encuentre el vector con punto inicial $P(0, 3)$ y punto terminal $Q(3, -1)$.

**6.** Si el vector $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ está colocado en el plano con su punto inicial en $P(5, 6)$, encuentre su punto terminal.

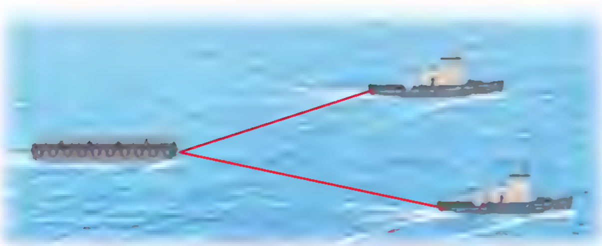
**7-8** ■ Encuentre la longitud y dirección del vector dado.

**7.** $\mathbf{u} = \langle -2, 2\sqrt{3} \rangle$ **8.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

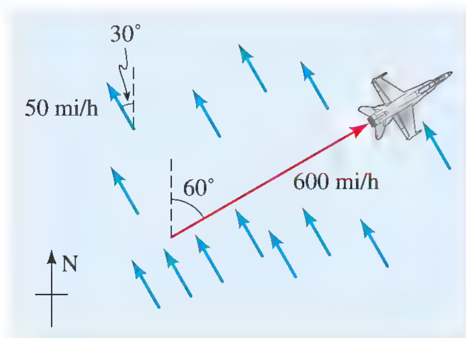
**9-10** ■ Nos dan la longitud $|\mathbf{u}|$ y dirección $\theta$ de un vector **u**. Exprese **u** en forma de componente.

**9.** $|\mathbf{u}| = 20, \quad \theta = 60°$ **10.** $|\mathbf{u}| = 13.5, \quad \theta = 125°$

**11.** Dos remolcadores tiran de una barcaza como se ve en la figura. Uno de ellos tira con una fuerza de $2.0 \times 10^4$ lb en la dirección N 50° E y, el otro, tira con una fuerza de $3.4 \times 10^4$ lb en la dirección S 75° E.
   **(a)** Encuentre la fuerza resultante en la barcaza como un vector.
   **(b)** Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



**12.** Un avión se dirige al N 60° E con rapidez de 600 mi/h con respecto al aire. Un viento empieza a soplar en la dirección N 30° O a 50 mi/h. (Vea la figura.)
   **(a)** Encuentre la velocidad del avión como vector.
   **(b)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del avión.




**13-16** ■ Encuentre los vectores $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

**13.** $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 9, -8 \rangle$

**14.** $\mathbf{u} = \langle 5, 12 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 10, -4 \rangle$

**15.** $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

**16.** $\mathbf{u} = 10\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

**17-20** ■ ¿**u** y **v** son ortogonales? Si no lo son, encuentre el ángulo entre ellos.

**17.** $\mathbf{u} = \langle -4, 2 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

**18.** $\mathbf{u} = \langle 5, 3 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 6 \rangle$

**19.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

**20.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

**21-24** ■ Nos dan dos vectores **u** y **v**.

**(a)** Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

**(b)** Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

**(c)** Descomponga **u** en los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a **v** y $\mathbf{u}_2$ es perpendicular a **v**.

**21.** $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 6, -1 \rangle$

**22.** $\mathbf{u} = \langle -8, 6 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 20, 20 \rangle$

**23.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$

**24.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 10\mathbf{j}$

*Los Ejercicios 25-54 se refieren a geometría de coordenadas tridimensionales.*

**25-26** ■ Localice los puntos dados, y encuentre la distancia entre ellos.

**25.** $P(1, 0, 2), \quad Q(3, -2, 3)$ **26.** $P(0, 2, 4), \quad Q(1, 3, 0)$

**27-28** ■ Encuentre la ecuación de la esfera con el radio $r$ y centro $C$ dados.

**27.** $r = 6, \quad C(0, 0, 0)$ **28.** $r = 2, \quad C(1, -2, 4)$

**29-30** ■ Demuestre que la ecuación representa una esfera, y encuentre su centro y radio.

**29.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z = 2$

**30.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4y + 4z$

**31-32** ■ Encuentre **u** , $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\frac{3}{4}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

**31.** $\mathbf{u} = \langle 4, -2, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 3, -1 \rangle$

**32.** $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**33-36** ■ Nos dan dos vectores **u** y **v**.

**(a)** Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

**(b)** ¿**u** y **v** son perpendiculares? Si no lo son, encuentre el ángulo entre ellos.

**33.** $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1, -2 \rangle$

**34.** $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 5 \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -\frac{1}{2}, -1 \rangle$

**35.** $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**36.** $\mathbf{u} = \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

**37-40** ■ Nos dan dos vectores **a** y **b**.

**(a)** Encuentre el producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

**(b)** Encuentre un vector unitario **u** que sea perpendicular a **a** y a **b**.

**37.** $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5, 0, \ 2 \rangle$

**38.** $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 0 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, 4, -1 \rangle$

**39.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**40.** $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**41.** Encuentre el área del triángulo con vértices $P(2, 1, 1)$, $Q(0, 0, 3)$ y $R(-2, 4, 0)$.

**42.** Encuentre el área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{a} = \langle 4, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 2 \rangle$.

**43.** Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} \quad \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \mathbf{k}$.

**44.** Un paralelepípedo tiene un vértice en el origen; las tres aristas que tienen el origen como un punto extremo se prolongan a los puntos $P(0, 2, 2)$, $Q(3, 1, -1)$ y $R(1, 4, 1)$. Encuentre el volumen del paralelepípedo.

**45-46** ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $P$ y es paralela a **v**.

**45.** $P(2, 0, \ 6), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1, 0 \rangle$

**46.** $P(5, 2, 8), \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

**47-48** ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$.

**47.** $P(6, \ 2, \ 3), \quad Q(4, 1, \ 2)$

**48.** $P(1, 0, 0), \quad Q(3, -4, 2)$

**49-50** ■ Encuentre una ecuación para el plano con vector normal **n** y que pasa por el punto $P$.

**49.** $\mathbf{n} = \langle 2, 3, -5 \rangle, \quad P(2, 1, 1)$

**50.** $\mathbf{n} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad P(-2, 5, 2)$

**51-52** ■ Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $P$, $Q$ y $R$.

**51.** $P(1, 1, 1), \quad Q(3, -4, 2), \quad R(6, -1, 0)$

**52.** $P(4, 0, 0), \quad Q(0, -3, 0), \quad R(0, 0, -5)$

**53.** Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que cruza el eje $x$ donde $x = 2$ y el eje $z$ donde $z = -4$.

**54.** Encuentre la ecuación del plano que contenga la recta $x = 2 + 2t$, $y = 4t$, $z = -6$ y el punto $P(5, 3, 0)$.

# EXAMEN

**1.** Sea **u** el vector con punto inicial $P(3, -1)$ y punto terminal $Q(-3, 9)$.

**(a)** Grafique **u** en el plano de coordenadas.

**(b)** Exprese **u** en términos de **i** y **j**.

**(c)** Encuentre la longitud de **u**.

**2.** Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 2\rangle$.

**(a)** Encuentre $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

**(b)** Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

**(c)** Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

**(d)** ¿**u** y **v** son perpendiculares?

**3.** Sea $\mathbf{u} = (-4\sqrt{3}, 4)$.

**(a)** Grafique **u** en el plano de coordenadas, con punto inicial $(0, 0)$.

**(b)** Encuentre la longitud y dirección de **u**.

**4.** Las aguas de un río corren al este a 8 mi/h. Un hombre se dirige en su bote en la dirección N 30° E en el río. La rapidez del bote con respecto al agua es 12 mi/h.

**(a)** Exprese la velocidad verdadera del bote como vector.

**(b)** Encuentre la rapidez y dirección verdaderas del bote.

**5.** Sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

**(a)** Encuentre el ángulo entre **u** y **v**.

**(b)** Encuentre el componente de **u** a lo largo de **v**.

**(c)** Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

**6.** Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(2, 2)$ al punto $(7, -13)$.

**7.** Sean $P(4, 3, -1)$ y $Q(6, -1, 3)$ dos puntos en el espacio tridimensional.

**(a)** Encuentre la distancia entre $P$ y $Q$.

**(b)** Encuentre una ecuación para la esfera cuyo centro sea $P$ y para la que el segmento $\overrightarrow{PQ}$ es un radio de la esfera.

**(c)** El vector **u** tiene punto inicial $P$ y punto terminal $Q$. Exprese **u** tanto en forma de componentes como usando los vectores **i**, **j** y **k**.

**8.** Calcule la cantidad dada si

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

**(a)** $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

**(b)** $|\mathbf{a}|$

**(c)** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

**(d)** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

**(e)** $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$

**(f)** $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

**(g)** El ángulo entre **a** y **b** (redondeado al grado más cercano)

**9.** Encuentre dos vectores unitarios que sean perpendiculares a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

**10.** **(a)** Encuentre un vector perpendicular al plano que contenga los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(2, 0, -1)$ y $R(1, 4, 3)$.

**(b)** Encuentre una ecuación para el plano que contenga $P$, $Q$ y $R$.

**(c)** Encuentre el área del triángulo $PQR$.

**11.** Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que contenga los puntos $P(2, -4, 7)$ y $Q(0, -3, -5)$.

# Campos vectoriales

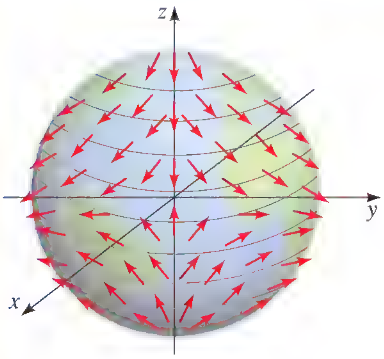



**FIGURA 1** El viento representado por un campo vectorial

Para modelar la fuerza gravitacional cerca de la Tierra o la circulación del viento en la superficie de nuestro planeta, usamos vectores. Por ejemplo, en cada punto sobre la superficie terrestre el aire se mueve con cierta rapidez y dirección. Por medio de vectores representamos las corrientes de aire. Si graficamos muchos de estos vectores obtenemos una "imagen" o gráfica del movimiento del aire. (Vea Figura 1.)

## Campos vectoriales en el plano

Un **campo vectorial** en el plano de coordenadas es una función que asigna un vector a cada punto en el plano (o a cada punto en algún subconjunto del plano). Por ejemplo,

$$\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

es un campo vectorial que asigna el vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ al punto $(x, y)$. Graficamos este campo vectorial en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 1 | Graficar un campo vectorial en el plano

Grafique el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. ¿Qué indica la gráfica?

**SOLUCIÓN** La tabla da el campo vectorial en varios puntos. En la Figura 2 trazamos los vectores en la tabla junto con varios otros vectores en el campo vectorial.

| $(x, y)$ | $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ |
|---|---|
| $(1, 3)$ | $\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ |
| $(3, 3)$ | $3\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ |
| $(-4, 6)$ | $-4\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$ |
| $(-6, -1)$ | $-6\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$ |
| $(6, -6)$ | $6\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j}$ |

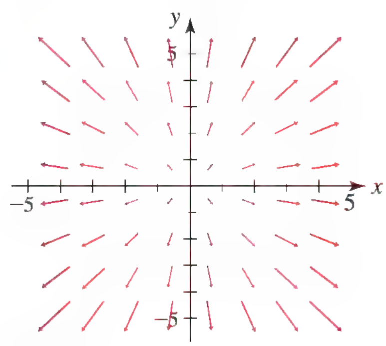



**FIGURA 2**

Vemos de la gráfica que los vectores en el campo apuntan alejándose del origen, y cuanto más lejos del origen mayor es la magnitud del vector.

### EJEMPLO 2 | Graficar un campo vectorial en el plano

La rueda de un alfarero tiene un radio de 5 pulgadas. La velocidad de cada punto en la rueda está dada por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. ¿Qué indica la gráfica?

**SOLUCIÓN** La tabla da el campo vectorial en varios puntos. En la Figura 3 trazamos los vectores en la tabla.

| $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ | $(x, y)$ | $\mathbf{F}(x, y)$ |
|---|---|---|---|
| $(1, 0)$ | $\langle 0, 1\rangle$ | $(-1, 0)$ | $\langle 0, -1\rangle$ |
| $(2, 2)$ | $\langle -2, 2\rangle$ | $(-2, -2)$ | $\langle 2, -2\rangle$ |
| $(3, 0)$ | $\langle 0, 3\rangle$ | $(-3, 0)$ | $\langle 0, -3\rangle$ |
| $(0, 1)$ | $\langle -1, 0\rangle$ | $(0, -1)$ | $\langle 1, 0\rangle$ |
| $(-2, 2)$ | $\langle -2, -2\rangle$ | $(2, -2)$ | $\langle 2, 2\rangle$ |
| $(0, 3)$ | $\langle -3, 0\rangle$ | $(0, -3)$ | $\langle 3, 0\rangle$ |

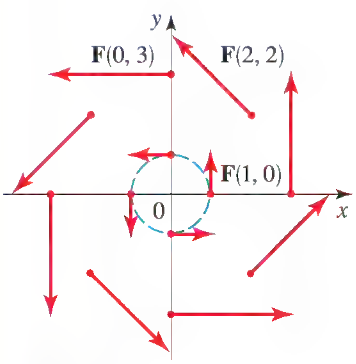



**FIGURA 3**

Vemos de la gráfica que la rueda está girando en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj y que los puntos en el borde de la rueda tienen mayor velocidad que los del centro de la rueda.

Graficar campos vectoriales requiere graficar innumerables vectores. Algunas calculadoras graficadoras y programas de computadora tienen capacidad para graficar campos vectoriales. También se pueden hallar muchos sitios de Internet que tienen applets (aplicaciones breves) para graficar campos vectoriales. El campo vectorial del Ejemplo 2 está graficado con un programa de computadora en la Figura 4. Observe la forma en que la computadora pone en escala las longitudes de los vectores, de modo que no son demasiado largos pero son proporcionales a sus longitudes verdaderas.

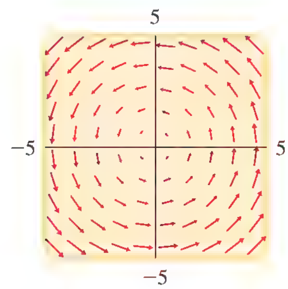



**FIGURA 4**

## Campos vectoriales en el espacio

Un **campo vectorial** en espacio tridimensional es una función que asigna un vector a cada punto en el espacio (o a cada punto en algún subconjunto de espacio). Por ejemplo,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial que asigna el vector $2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ al punto $(x, y, z)$. En general, es difícil trazar manualmente un campo vectorial en el espacio, porque debemos trazar numerosos vectores con la perspectiva apropiada. El campo vectorial del siguiente ejemplo es particularmente sencillo, de modo que lo trazaremos a mano.

### EJEMPLO 3 | Graficar un campo vectorial en espacio

Grafique el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$. ¿Qué indica la gráfica?

**SOLUCIÓN** En la Figura 5 se ve una gráfica. Observe que todos los vectores son verticales y apuntan hacia arriba, por encima del plano $xy$, y hacia abajo por debajo de ese plano. La magnitud de cada vector aumenta con la distancia desde el plano $xy$.

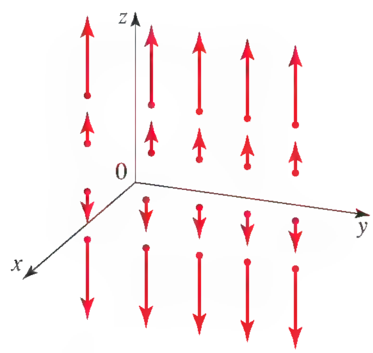



**FIGURA 5**

La atracción gravitacional de nuestro planeta en el espacio circundante está modelada matemáticamente por un campo vectorial. De acuerdo con la Ley de Newton de la Gravitación, la fuerza gravitacional **F** está dirigida fuera del centro de la Tierra y es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de nuestro planeta. La magnitud de la fuerza es

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

donde $M$ es la masa de la Tierra, $m$ es la masa de un cuerpo en la proximidad de la superficie terrestre, $r$ es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra, y $G$ es la constante gravitacional universal.

Para modelar la fuerza gravitacional, pongamos un sistema de coordenadas tridimensionales con el origen en el centro de la Tierra. La fuerza gravitacional en el punto $(x, y, z)$ está dirigida hacia el origen. Un vector unitario que apunta hacia el origen es

$$\mathbf{u} = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Para obtener el campo vectorial gravitacional, multiplicamos este vector unitario por la magnitud apropiada, es decir, $GMm/r^2$. Como la distancia $r$ del punto $(x, y, z)$ al origen es $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se deduce que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Por lo tanto, podemos expresar el campo vectorial gravitacional como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Algunos de los vectores del campo gravitacional **F** se ven en la Figura 6.

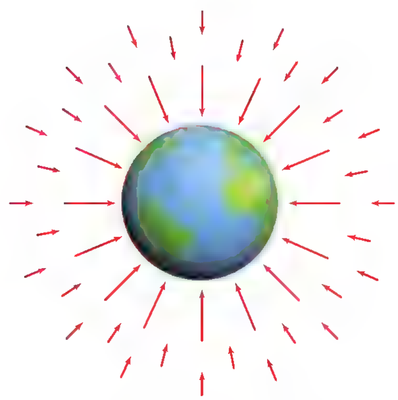


**FIGURA 6** El campo gravitacional

## PROBLEMAS

**1-6** ■ Trace el campo vectorial **F** con un diagrama como en la Figura 3.

**1.** $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

**2.** $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$

**3.** $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

**4.** $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

**5.** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

**6.** $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

**7-10** ■ Trace el campo vectorial **F** con un diagrama como en la Figura 5.

**7.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j}$

**8.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

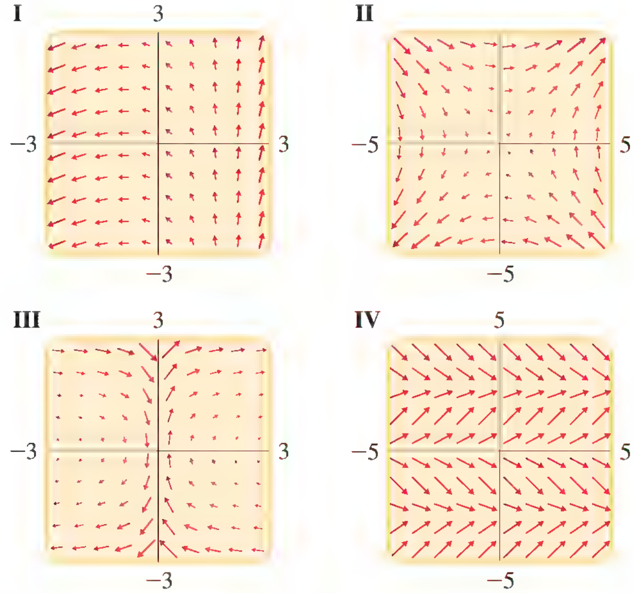
**9.** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$

**10.** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{k}$

**11-14** ■ Relacione el campo vectorial **F** con las gráficas marcadas I-IV.

**11.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$ **12.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \operatorname{sen} y \rangle$

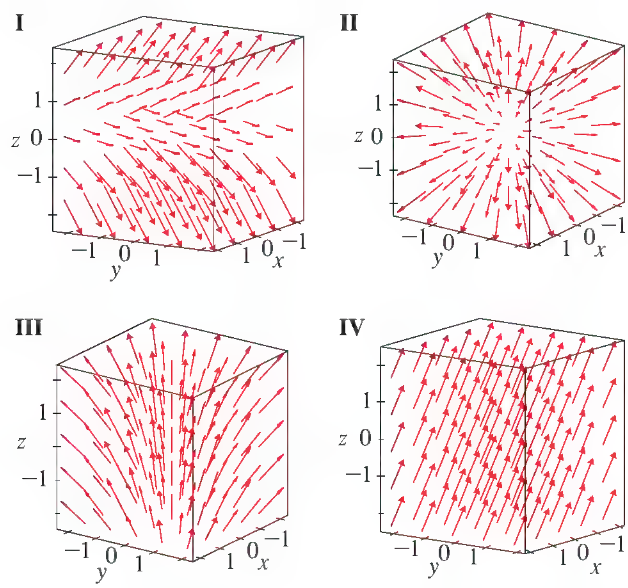
**13.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, y + 1 \rangle$ **14.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$

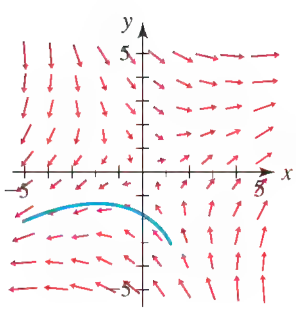



**15-18** ■ Relacione el campo vectorial **F** con las gráficas marcadas I-IV.

**15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **16.** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

**17.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **18.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$



**19. Líneas de flujo en una corriente** La corriente en una bahía turbulenta está descrita por el campo vectorial de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

Se ilustra una gráfica del campo vectorial **F**. Si en esta bahía se coloca un pequeño bote de juguete, podemos decir de la gráfica del campo vectorial cuál trayectoria seguiría el bote. Estas trayectorias reciben el nombre de **líneas de flujo** del campo vectorial. Una línea de flujo que se inicia en $(1, -3)$ se muestra en azul en la figura. Trace líneas de flujo que se inicien en el punto dado.

**(a)** $(1, 4)$ **(b)** $(-2, 1)$ **(c)** $(-1, -2)$

# EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO CAPÍTULOS 8 y 9

**1.** Encuentre dos representaciones de coordenadas polares del punto $(8, -8)$, una con $r > 0$ y una con $r < 0$, y ambas con $0 \leq \theta < 2\pi$.

**2.** La gráfica de la ecuación $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ se llama *rosa de cuatro pétalos*.

**(a)** Trace una gráfica de esta ecuación.

**(b)** Convierta la ecuación a coordenadas rectangulares.

**3.** Sea $z = \sqrt{3} - i$ y sea $w = 6\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right)$.

**(a)** Escriba $z$ en forma polar.

**(b)** Encuentre $zw$ y $z/w$ .

**(c)** Encuentre $z^{10}$.

**(d)** Encuentre las tres raíces cúbicas de $z$.

**4.** **(a)** Trace una gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - \operatorname{sen}^2 t \qquad y = \cos t$$

**(b)** Elimine el parámetro para obtener una ecuación para esta curva en coordenadas rectangulares. ¿Qué tipo de curva es ésta?

**5.** Sean $\mathbf{u} = \langle 8, 6 \rangle$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$.

**(a)** Grafique $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el plano de coordenadas, con punto inicial $(0, 0)$.

**(b)** Encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

**(c)** Suponiendo que $\mathbf{u}$ es un vector fuerza, calcule el trabajo realizado por $\mathbf{u}$ cuando una partícula se mueve bajo su influencia de $(2, 0)$ a $(10, 3)$.

**6.** Sean $P(1, -1, 3)$ y $Q(3, -2, 1)$ dos puntos en espacio tridimensional.

**(a)** Encuentre la distancia entre $P$ y $Q$.

**(b)** Encuentre una ecuación para la esfera que tiene centro $P$ y para la cual $Q$ es un punto en su superficie.

**(c)** Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que contiene $P$ y $Q$.

**7.** Sean $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -3 \rangle$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ dos vectores en espacio tridimensional.

**(a)** Encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. ¿$\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares, paralelos o ninguno de estos dos?

**(b)** Encuentre una ecuación para el plano que es paralelo a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y que contiene el punto $(3, 0, -5)$.

AP Photo/Mark Duncan, File

CAPÍTULO 10

# SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES



En los capítulos precedentes modelamos situaciones reales por medio de ecuaciones, pero un gran número de estas situaciones contienen demasiadas variables para ser modeladas por una sola ecuación. Por ejemplo, el clima depende de la relación entre numerosas variables, incluyendo temperatura, rapidez del viento, presión del aire y humedad. En consecuencia, para modelar (y pronosticar) el clima, los científicos utilizan innumerables ecuaciones con muchas variables cada una de ellas. Estos conjuntos de ecuaciones, llamados sistemas de ecuaciones, *trabajan juntos* para describir el clima. Sistemas de ecuaciones con cientos de variables son utilizados por líneas aéreas para establecer horarios de vuelo consistentes, así como por empresas de telecomunicaciones para hallar rutas eficientes para llamadas telefónicas. En este capítulo aprendemos a resolver sistemas de ecuaciones que están formadas por varias ecuaciones con varias variables.

# 10.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones ▶ Método de sustitución ▶ Método por eliminación ▶ Método gráfico ▶ El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas ▶ Modelado con sistemas lineales

## ▼ Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

La gráfica de una ecuación lineal es una recta (vea Sección 1.10).

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera *cada una* de las ecuaciones. **Resolver** un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Veamos a continuación un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

| **Ecuación 1** | **Ecuación 2** |
|---|---|
| $2x - y = 5$ | $x + 4y = 7$ |
| $2(3) - 1 = 5$ ✔ | $3 + 4(1) = 7$ ✔ |

La solución también se puede escribir como el par ordenado (3, 1).

Observe que las gráficas de las Ecuaciones 1 y 2 son rectas (vea Figura 1). Como la solución (3, 1) satisface cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) se encuentra en cada recta. Por lo tanto, es el punto de intersección de las dos rectas.

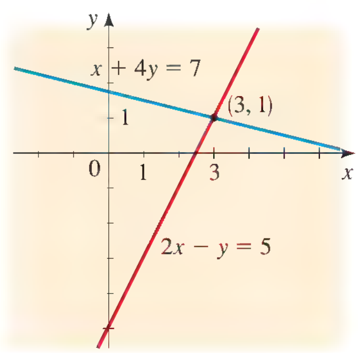



**FIGURA 1**

## ▼ Método de sustitución

En el **método de sustitución** empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra incógnita. El recuadro siguiente describe el procedimiento.

**MÉTODO DE SUSTITUCIÓN**

1. **Despejar una incógnita.** Escoja una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despeje esa incógnita.
3. **Sustituir a la inversa.** En la expresión hallada en el Paso 1, sustituya el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.

## EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Despejar una incógnita. Despejamos $y$ en la primera ecuación.

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despeje } y \text{ en la Ecuación 1}$$

Sustituir. A continuación sustituimos $y$ en la segunda ecuación y despejamos $x$.

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustituya } y = 1 - 2x \text{ en la Ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Expanda} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplifique} \\ -5x &= 10 && \text{Reste 4} \\ x &= -2 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustitución. A continuación sustituimos $x = -2$ en la ecuación $y = 1 - 2x$.

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Entonces, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. La Figura 2 muestra que las gráficas de las dos ecuaciones se cruzan en el punto $(-2, 5)$.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

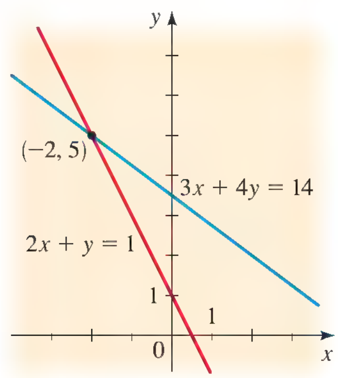



**FIGURA 2**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## Método por eliminación

Para resolver un sistema usando el **método de eliminación**, tratamos de combinar las ecuaciones usando sumas o restas para eliminar una de las incógnitas.

### MÉTODO POR ELIMINACIÓN

1. **Ajustar los coeficientes.** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y, a continuación, despeje la incógnita restante.
3. **Sustituir a la inversa.** En una de las ecuaciones originales, sustituya el valor hallado en el Paso 2 y despeje la incógnita restante.

## EJEMPLO 2 | Método por eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Como los coeficientes de los términos en $y$ son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar $y$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{Sistema}$$

$$4x \quad = 16 \quad \text{Sume}$$

$$x = 4 \quad \text{Despeje } x$$

A continuación sustituimos $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y despejamos $y$. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$x - 2y = 2 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$4 - 2y = 2 \quad \text{Sustituya } x = 4 \text{ en la Ecuación 2}$$

$$-2y = -2 \quad \text{Reste 4}$$

$$y = 1 \quad \text{Despeje } y$$

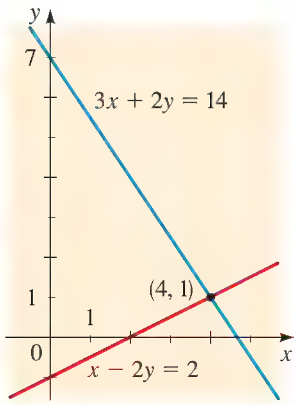



FIGURA 3

La solución es (4, 1). La Figura 3 muestra que las gráficas de las ecuaciones del sistema se cruzan en el punto (4, 1).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

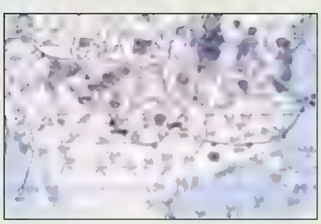
## Método gráfico

En el **método gráfico** usamos calculadora graficadora para resolver el sistema de ecuaciones.

> **MÉTODO GRÁFICO**
>
> 1. **Graficar cada ecuación.** Exprese cada ecuación en una forma apropiada para la calculadora graficadora para despejar $y$ como función de $x$. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
> 2. **Hallar los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas $x$ y $y$ de los puntos de intersección.

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

### Predicción del clima



© Rachel Epstein/Photo Edit

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que pronosticar el clima de mañana. Investigan modelos del clima a largo plazo, el agotamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. No obstante, el pronóstico diario del clima es todavía una parte importante de la meteorología; su valor es medido por las innumerables vidas humanas salvadas cada año por medio de un pronóstico preciso de huracanes, ventiscas y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX unos matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aun cuando este modelo funcionaba en principio, era imposible pronosticar modelos futuros con él por la dificultad para medir con precisión todas las variables y resolver todas las ecuaciones. Hoy en día, nuevos modelos matemáticos, combinados con simulaciones computarizadas de alta velocidad y mejores datos, han mejorado en gran medida el pronóstico del clima y con ello se han evitado numerosos desastres económicos y pérdidas de vida. Los matemáticos de la National Oceanographic and Atmospheric Administration (NOAA) están continuamente investigando mejores métodos para el pronóstico del clima.

## EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 1.35x - 2.13y = -2.36 \\ 2.16x + 0.32y = \phantom{-}1.06 \end{cases}$$

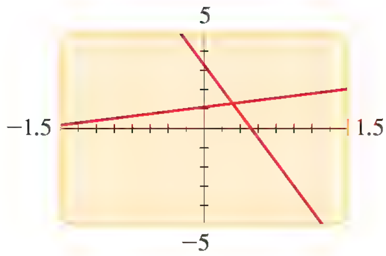



**FIGURA 4**

**SOLUCIÓN** Despejando $y$ en términos de $x$, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = \phantom{-}0.63x + 1.11 \\ y = -6.75x + 3.31 \end{cases}$$

donde hemos redondeado los coeficientes a dos decimales. La Figura 4 muestra que las dos rectas se cruzan; en un acercamiento vemos que la solución es aproximadamente (0.30, 1.3).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **49**

## El número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas

La gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que, para resolver gráficamente el sistema, debemos hallar el (los) punto(s) de intersección de las rectas. Dos rectas pueden cruzarse en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se ve en la Figura 5. Por lo tanto, hay tres posibles resultados para resolver el sistema.

### NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL CON DOS INCÓGNITAS

Para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera. (Vea Figura 5.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema con un infinito de soluciones se llama **consistente indeterminado**.

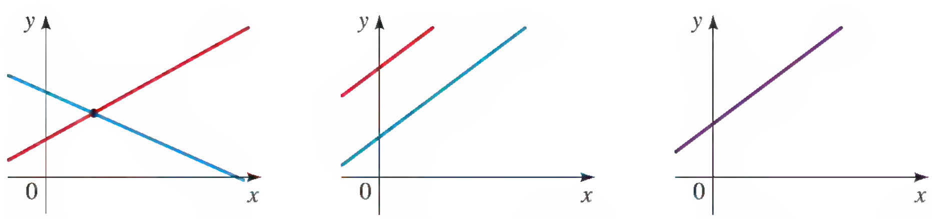



**FIGURA 5**

(a) Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución.

(c) Las rectas coinciden; las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene un infinito de soluciones.

## EJEMPLO 4 | Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - \phantom{2}y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

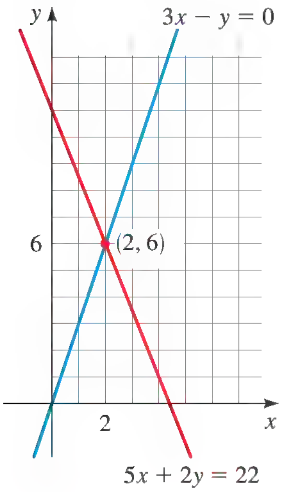



**FIGURA 6**

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 2, \quad y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \checkmark$$

**SOLUCIÓN** Eliminamos $y$ de las ecuaciones y despejamos $x$.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 & \text{2 × Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \end{cases}$$

$$11x \quad = 22 \qquad \text{Sume}$$

$$x = 2 \qquad \text{Despeje } x$$

Ahora sustituimos de nuevo en la primera ecuación y despejamos $y$:

$$6(2) - 2y = 0 \qquad \text{Sustituimos de nuevo } x = 2$$

$$-2y = -12 \qquad \text{Restamos } 6 \times 2 = 12$$

$$y = 6 \qquad \text{Despejamos } y$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la Figura 6 muestra que las rectas del sistema se cruzan en el punto (2, 6).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## EJEMPLO 5 | Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ 12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Esta vez tratamos de hallar una combinación apropiada de las dos ecuaciones para eliminar la variable $y$. La multiplicación de la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2 da

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 & \text{3 × Ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & \text{2 × Ecuación 2} \end{cases}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Sume}$$

La suma de las dos ecuaciones elimina *tanto x como y* en este caso, y terminamos con $0 = 29$, que es obviamente falso. No importa qué valores asignemos a $x$ y a $y$, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de manera que el sistema *no tiene solución*. La Figura 7 muestra que las rectas del sistema son paralelas y no se cruzan. El sistema es inconsistente.

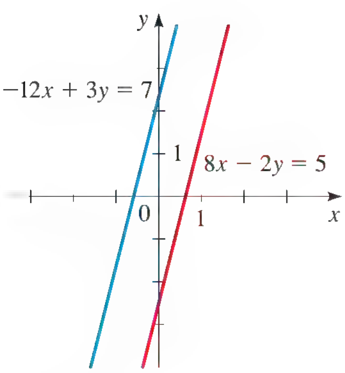



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

## EJEMPLO 6 | Un sistema lineal con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones para eliminar $x$. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & \text{4 × Ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & \text{3 × Ecuación 2} \end{cases}$$

Vemos que las dos ecuaciones del sistema original son simplemente formas diferentes de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta dan

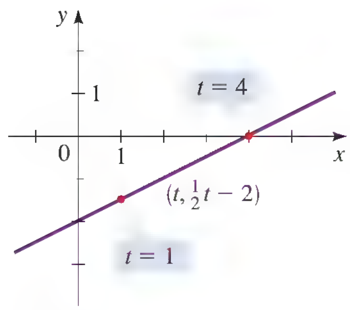



**FIGURA 8**

una solución del sistema. Escribiendo la ecuación en forma de pendiente e intersección, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Por lo tanto, si con $t$ representamos cualquier número real, podemos escribir la solución como

$$x = t$$

$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

También podemos escribir la solución en forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde $t$ es cualquier número real. El sistema tiene un infinito de soluciones (vea Figura 8).

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **37**

En el Ejemplo 3, para obtener soluciones específicas tenemos que asignar valores a $t$. Por ejemplo, si $t = 1$, obtenemos la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. si $t = 4$, obtenemos la solución $(4, 0)$. Para todo valor de $t$ obtenemos una solución diferente. (Vea Figura 8.)

## Modelado con sistemas lineales

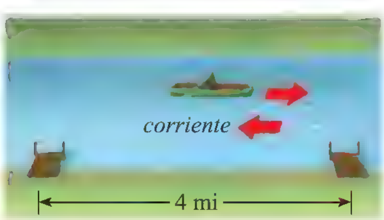
Con frecuencia, cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las ciencias o en otros campos de actividad, obtenemos sistemas como el que acabamos de considerar. Cuando modelamos con sistemas de ecuaciones, usamos las siguientes guías, que son semejantes a las de la Sección 1.6.

### GUÍA PARA MODELAR CON SISTEMAS DE ECUACIONES

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide hallar. Éstas en general se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación para las variables (llámelas $x$ y $y$ o con alguna otra letra).
2. **Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de las variables.** Lea otra vez el problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las variables que haya definido en el Paso 1.
3. **Establezca un sistema de ecuaciones.** Encuentre los datos cruciales del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el Paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. **Resuelva el sistema e interprete los resultados.** Resuelva el sistema que haya encontrado en el Paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar con sistemas de ecuaciones.

### EJEMPLO 7 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo




Una mujer rema un bote aguas arriba desde un punto en un río, a otro punto a 4 millas de distancia, en $1\frac{1}{2}$ horas. El viaje de regreso, a favor de la corriente, le toma sólo 45 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que rema con respecto al agua, y con qué velocidad se mueve la corriente?

**SOLUCIÓN** Identificar las variables. Nos piden hallar la velocidad con la que rema la mujer y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

$$x = \text{velocidad de remar (mi/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (mi/h)}$$

**Expresar cantidades desconocidas en términos de la variable.** La velocidad de la mujer cuando rema aguas arriba es su velocidad para remar menos la velocidad de la corriente; su velocidad aguas abajo es su velocidad para remar más la velocidad de la corriente. Ahora convertimos esta información al lenguaje de álgebra.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Velocidad de remo | $x$ |
| Velocidad de la corriente | $y$ |
| Velocidad aguas arriba | $x - y$ |
| Velocidad aguas abajo | $x + y$ |

**Establecer un sistema de ecuaciones.** La distancia aguas arriba y aguas abajo es 4 millas, de modo que usando el hecho de que velocidad × tiempo = distancia para los dos tramos del viaje, tenemos

velocidad aguas arriba × tiempo aguas arriba = distancia recorrida

velocidad aguas abajo × tiempo aguas abajo = distancia recorrida

En notación algebraica esto se convierte en las ecuaciones siguientes:

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

(Los tiempos se han convertido a horas, porque estamos expresando la rapidez en millas por *hora*.)

**Resolver el sistema.** Multiplicamos las ecuaciones por 2 y 4, respectivamente, para despejar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{Ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x &= 24 && \text{Sume} \\ x &= 4 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de $x$ en la primera ecuación (también funciona la segunda) y despejando $y$, tendremos

$$\begin{aligned} 3(4) - 3y &= 8 && \text{Sustituya } x = 4 \\ -3y &= 8 - 12 && \text{Reste 12} \\ y &= \tfrac{4}{3} && \text{Despeje } y \end{aligned}$$

La mujer rema a 4 mi/h, y la corriente se mueve a $1\tfrac{1}{3}$ mi/h.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

**Velocidad contra la corriente** es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{1\frac{1}{2} \text{ h}} = 2\tfrac{2}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo − flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} - \tfrac{4}{3} \text{ mi/h} = 2\tfrac{2}{3} \text{ mi/h}$$

**Velocidad rio abajo** es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ mi}}{\frac{3}{4} \text{ h}} = 5\tfrac{1}{3} \text{ mi/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo del agua

$$= 4 \text{ mi/h} + \tfrac{4}{3} \text{ mi/h} = 5\tfrac{1}{3} \text{ mi/h}$$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

## EJEMPLO 8 | Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol al agregarle una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante tiene un contenido alcohólico del 16% y llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y la solución de alcohol usa el vinatero?

**SOLUCIÓN** Identificar las variables. Como nos piden las cantidades de vino y alcohol, hacemos

$$x = \text{cantidad de vino utilizado (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol utilizada (L)}$$

Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de la variable. Del hecho que el vino contiene 10% de alcohol y la solución contiene 70% de alcohol, obtenemos lo siguiente.

| En palabras | En álgebra |
|---|---|
| Cantidad de vino utilizada (L) | $x$ |
| Cantidad de solución de alcohol utilizada (L) | $y$ |
| Cantidad de alcohol en vino (L) | $0.10x$ |
| Cantidad de alcohol en solución (L) | $0.70y$ |

Establecer un sistema de ecuaciones. El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero mezcla, y

$$x + y = 1000$$

También, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol aportado por el vino y por la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplifique}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplique por 10 para quitar decimales}$$

En consecuencia, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Resolver el sistema. Restando la primera ecuación de la segunda se elimina la variable $x$ y obtenemos

$$6y = 600 \qquad \text{Reste la Ecuación 1 de la Ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Despeje } y$$

Ahora sustituimos $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos $x$.

$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustituimos } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Despejamos } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

# 10.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

es un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas _________ y _________. Para determinar si $(5, -1)$ es una solución de este sistema, verificamos si $x = 5$ y $y = -1$ satisfacen cada _________ del sistema. ¿Cuáles de las siguientes son soluciones de este sistema?

$$(5, -1), \quad (-1, 3), \quad (2, 1)$$

**2.** Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede ser resuelto por el método de _________, el método de _________ o el método _________.

**3.** Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una solución, _________ solución o _________ _________ soluciones.

**4.** El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

La gráfica de la primera ecuación es la misma que la gráfica de la segunda ecuación, de manera que el sistema tiene _________ _________ soluciones. Expresamos estas soluciones escribiendo

$$x = t$$
$$y = ______$$

donde $t$ es cualquier número real. Algunas de las soluciones de este sistema son $(1, __)$, $(-3, __)$ y $(5, __)$.

## HABILIDADES

**5-8** ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

**5.** $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

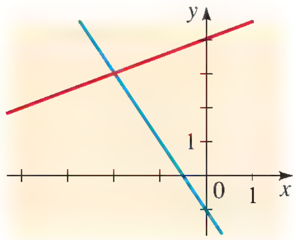
**9-12** ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

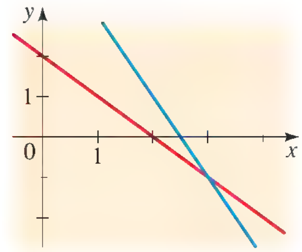
**9.** $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} 2x + 5y = 15 \\ 4x + y = 21 \end{cases}$

**11.** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$

**13-14** ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

**13.** $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$




**15-20** ■ Grafique cada uno de los sistemas lineales siguientes, ya sea manualmente o con calculadora graficadora. Use la gráfica para determinar si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene un infinito de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para hallarla.

**15.** $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$

**17.** $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

**21-48** ■ Resuelva el sistema, o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene un infinito de soluciones, expréselas en la forma de par ordenado dado en el Ejemplo 6.

**21.** $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

45. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ 0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

47. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ 8x + 6y = 10 \end{cases}$

48. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

**49-52** ■ Use calculadora graficadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de vista. (Observe que debe despejar $y$ en términos de $x$ antes de graficar si usa calculadora graficadora.) Resuelva el sistema redondeado a dos lugares decimales, ya sea con acercamiento y usando `TRACE` o usando la función `Intersect`.

49. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13{,}591 \\ 9815x + 992y = 618{,}555 \end{cases}$

52. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

**53-56** ■ Encuentre $x$ y $y$ en términos de $a$ y $b$.

53. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

54. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

55. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

56. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

## APLICACIONES

57. **Problema de números** Encuentre dos números cuya suma es 34 y cuya diferencia es 10.

58. **Problema de números** La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más que el doble del más pequeño. Encuentre los números.

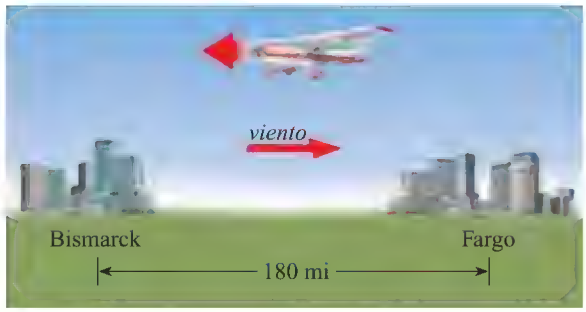
59. **Valor de monedas** Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, todas las cuales son de 10 o de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es \$2.75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

60. **Precio de entrada** El precio de entrada a un parque de diversiones es \$1.50 para niños y \$4.00 para adultos. En cierto día, 2200 personas entraron al parque, y los precios de entrada recolectados sumaron \$5050. ¿Cuántos niños y cuántos adultos entraron?

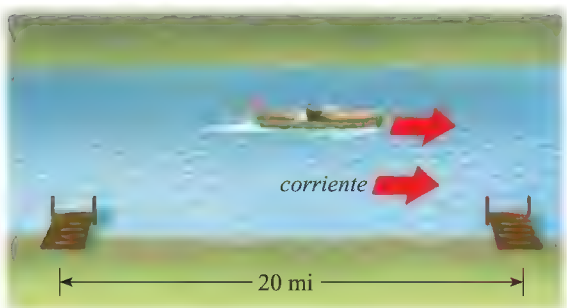
61. **Gasolinera** Una gasolinera vende gasolina regular en \$2.20 el galón y gasolina Premium en \$3.00 el galón. Al final del día se vendieron 280 galones de gasolina y los recibos totalizaron \$680. ¿Cuántos galones de cada tipo se vendieron?

62. **Puesto de frutas** Un puesto de frutas vende dos variedades de fresas: estándar y de lujo. Una caja de fresas estándar se vende en \$7 y una de lujo se vende en \$10. En un día, el puesto vende 135 cajas de fresas en un total de \$1100. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

63. **Velocidad de un avión** Un hombre vuela en un pequeño avión de Fargo a Bismarck, Dakota del Norte, una distancia de 180 millas. Debido a que hizo el vuelo con un viento de frente, el viaje le lleva 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía está soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje le lleva sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del piloto con viento en calma, y con qué velocidad sopla el viento?




64. **Velocidad de un bote** Un bote en un río navega aguas abajo entre dos puntos, a 20 millas de distancia, en una hora. El viaje de regreso contra la corriente toma $2\frac{1}{2}$ horas. ¿Cuál es la velocidad del bote, y con qué velocidad se mueven las aguas del río?




65. **Nutrición** Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22,000 unidades de retinol. Ella usa dos tipos de alimentos comerciales en forma de pastillas. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

**66. Mezclas de café** Un cliente en una cafetería compra una mezcla de dos clases de café: Kenia, que cuesta \$3.50 la libra, y Sri Lanka, que cuesta \$5.60 la libra. Él compra 3 libras de la mezcla, que le cuestan \$11.55. ¿Cuántas libras de cada clase entraron en la mezcla?

**67. Problema de mezclas** Un químico tiene dos grandes contenedores de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. La mezcla de 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda le da una mezcla que es 15% ácida, mientras que si mezcla 100 mL de la primera y 500 mL de la segunda le da una mezcla $12\frac{1}{2}\%$ ácida. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

**68. Problema de mezclas** Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal?

**69. Inversiones** Una mujer invierte un total de \$20,000 en dos cuentas, una paga 5% y la otra paga 8% de interés simple al año. El interés anual que ella percibe es \$1180. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

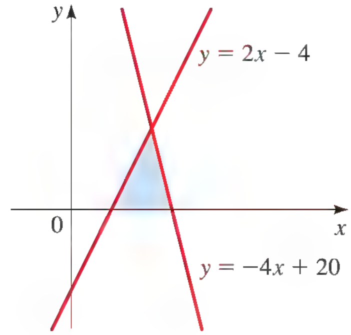
**70. Inversiones** Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una paga 6% y la otra paga 10% de interés simple al año. Él pone el doble en la cuenta que rinde menos porque es de menos riesgo. El interés que él percibe es \$3520. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

**71. Distancia, velocidad y tiempo** Juan y María salen de su casa al mismo tiempo y en auto se dirigen en direcciones opuestas. Juan maneja a 60 mi/h y viaja 35 millas más que María, quien maneja a 40 mi/h. El viaje de María toma 15 minutos más que a Juan. ¿Durante cuánto tiempo manejan ellos?

**72. Ejercicio aeróbico** Una mujer se mantiene en forma haciendo ejercicio en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes ella pasa $1\frac{1}{2}$ horas en cada una de esas actividades, cubriendo un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes corre durante 12 minutos y anda en bicicleta 45 minutos, cubriendo un total de 16 millas. Suponiendo que su velocidad para correr y andar en bicicleta no cambian de un día a otro, encuentre esas velocidades.

**73. Problema de números** La suma de los dígitos de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Encuentre el número.

**74. Área de un triángulo** Encuentre el área del triángulo que se encuentra en el primer cuadrante (con la base sobre el eje $x$) y que está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**75. La recta de mínimos cuadrados** La recta de *mínimos cuadrados* o recta de *regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Estudiamos esta recta en el *Enfoque sobre modelado* que sigue al Capítulo 1 (vea página 130.) Mediante cálculo, se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los $n$ puntos de datos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, . . . , $(x_n, y_n)$ es la recta $y = ax + b$, donde los coeficientes $a$ y $b$ satisfacen el siguiente par de ecuaciones lineales. (La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ representa la suma de todas las $x$. En la Sección 12.1 vea una descripción completa de la notación ($\Sigma$).)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Use estas ecuaciones para hallar la recta de mínimos cuadrados para los siguientes puntos de datos.

$$(1, 3), \quad (2, 5), \quad (3, 6), \quad (5, 6), \quad (7, 9)$$

Trace los puntos y su recta para confirmar que la recta se ajusta bien a estos puntos. Si su calculadora calcula regresión lineal, vea si le da la misma recta que las fórmulas.

# 10.2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON VARIAS INCÓGNITAS

Solución de un sistema lineal ▶ El número de soluciones de un sistema lineal ▶ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Una **ecuación lineal con $n$ incógnitas** es una ecuación que se puede poner en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $c$ son números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas. Si sólo tenemos tres o cuatro incógnitas, en general usamos $x$, $y$, $z$ y $w$ en lugar de $x_1$, $x_2$, $x_3$, y $x_4$. Tales ecuaciones se llaman *lineales* porque si tenemos sólo dos incógnitas, la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. A continuación veamos algunos ejemplos de ecuaciones con tres incógnitas que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

| **Ecuaciones lineales** | **Ecuaciones no lineales** | |
|---|---|---|
| $6x_1 - 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = 10$ | $x^2 + 3y - \sqrt{z} = 5$ | No lineal porque contiene el cuadrado y la raíz cuadrada de una incógnita |
| $x + y + z = 2w - \frac{1}{2}$ | $x_1x_2 + 6x_3 = -6$ | No lineal porque contiene un producto de incógnita |

En esta sección estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con tres o más incógnitas.

## Solución de un sistema lineal

Los siguientes son dos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. El segundo sistema está en **forma triangular**; esto es, la incógnita $x$ no aparece en la segunda ecuación, y las incógnitas $x$ y $y$ no aparecen en la tercera ecuación.

**Un sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

**Un sistema en forma triangular**

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Es fácil resolver un sistema que está en forma triangular si se usa sustitución. Entonces nuestro objetivo en esta sección es empezar con un sistema de ecuaciones lineales, y cambiarlo a un sistema en forma triangular que tiene las mismas soluciones que el sistema original. Empezamos por mostrar cómo usar sustitución para resolver un sistema que ya está en forma triangular.

### EJEMPLO 1 | Resolver un sistema triangular usando sustitución

Resuelva el sistema usando sustitución:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ y + 2z = 5 & \text{Ecuación 2} \\ z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** De la última ecuación sabemos que $z = 3$. Hacemos sustitución de esta ecuación en la segunda ecuación y despejamos $y$.

$$y + 2(3) = 5 \qquad \text{Sustitución de } z = 3 \text{ en la Ecuación 2}$$

$$y = -1 \qquad \text{Despejamos } y$$

A continuación sustituimos $y = -1$ y $z = 3$ en la primera ecuación y despejamos $x$.

$$x - 2(-1) - (3) = 1 \qquad \text{Sustituimos } y = -1 \text{ y } z = 3 \text{ en la Ecuación 1}$$

$$x = 2 \qquad \text{Despejamos } x$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$. También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(2, -1, 3)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

Para cambiar un sistema de ecuaciones lineales a un **sistema equivalente** (esto es, un sistema con las mismas soluciones que el sistema original), usamos el método por eliminación. Esto significa que podemos usar las siguientes operaciones.

**OPERACIONES QUE DAN UN SISTEMA EQUIVALENTE**

1. Sumar un múltiplo diferente de cero de una ecuación a otra.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar las posiciones de dos ecuaciones.

Para resolver un sistema lineal, usamos estas operaciones para cambiar el sistema a un sistema triangular equivalente. Entonces usamos sustitución como en el Ejemplo 1. Este proceso se denomina **eliminación de Gauss**.

## EJEMPLO 2 | Resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Resuelva el sistema usando eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Necesitamos cambiar esto a un sistema triangular, de modo que empezamos por eliminar el término en $x$ de la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ \hline 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} + (-1) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 2} \end{array}$$

Esto nos da un nuevo sistema equivalente que es un paso más cercano a la forma triangular.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora eliminamos el término en $x$ de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y - 5z = 3 & \\ 3x + 6y \quad 9z = -3 & \\ \hline 8y - 14z = 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \\ 4y - 4z = 12 & \\ 8y - 14z = 0 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{Ecuación 1} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora eliminamos el término en $y$ de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{rl} 8y - 14z = 0 & \\ -8y + 8z = -24 & \\ \hline -6z = -24 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \\ 4y - 4z = 12 & \\ -6z = -24 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{Ecuación 2} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero será más fácil de trabajar si dividimos las ecuaciones segunda y la tercera por los factores comunes de cada término.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \\ y - z = 3 & \tfrac{1}{4} \times \text{Ecuación 2} = \text{nueva Ecuación 2} \\ z = 4 & -\tfrac{1}{6} \times \text{Ecuación 3} = \text{nueva Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora usamos sustitución para resolver el sistema. De la tercera ecuación obtenemos $z = 4$. Sustituimos esto en la segunda ecuación y despejamos $y$.

$$\begin{array}{rl} y - (4) = 3 & \text{Sustituimos } z = 4 \text{ en la Ecuación 2} \\ y = 7 & \text{Despejamos } y \end{array}$$

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 3, y = 7, z = 4$:

$$\begin{aligned} (3) - 2(7) + 3(4) &= 1 \\ (3) + 2(7) - (4) &= 13 \\ 3(3) + 2(7) \quad 5(4) &= 3 \quad ✔ \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $y = 7$ y $z = -4$ en la primera ecuación y despejamos $x$.

$$x - 2(7) + 3(4) = 1 \qquad \text{Sustituimos } y = 7 \text{ y } z = 4 \text{ en la Ecuación 1}$$

$$x = 3 \qquad \text{Despejamos } x$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$, que podemos escribir como la terna ordenada $(3, 7, 4)$.

INTENTE AHORA HACER EL EJERCICIO **17**

## El número de soluciones de un sistema lineal

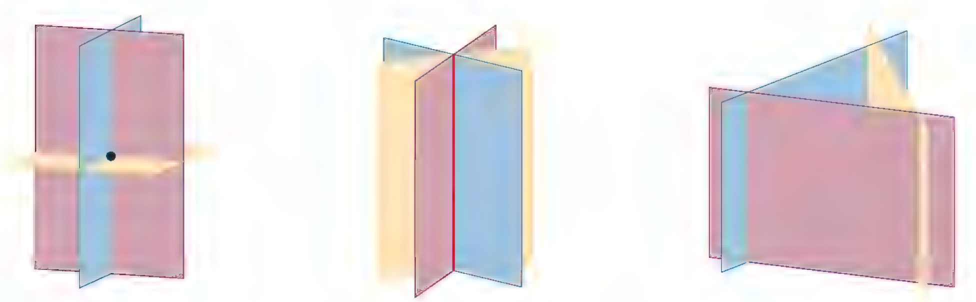
La gráfica de una ecuación lineal con tres incógnitas es un plano en espacio tridimensional (vea Sección 9.6). Un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas representa tres planos en el espacio. Las soluciones del sistema son los puntos donde se cruzan los tres planos. Tres planos se intersectan en un punto, una recta, no se cruzan o los tres planos pueden coincidir. La Figura 1 ilustra algunas de las posibilidades. Verificando estas posibilidades vemos que hay tres posibles resultados cuando se resuelve uno de estos sistemas.

**NÚMERO DE SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL**

Para un sistema de ecuaciones lineales, exactamente uno de lo siguiente es verdadero.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene un infinito de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene soluciones es **inconsistente**, y un sistema con un infinito de soluciones es **consistente indeterminado**. Como vemos en el siguiente ejemplo, un sistema lineal no tiene solución si terminamos con una *ecuación falsa* después de aplicar la eliminación de Gauss al sistema.



(a) Los tres planos se intersectan en un solo punto. El sistema tiene una solución.

(b) Los tres planos se intersectan en más de un punto. El sistema tiene un infinito de soluciones.

(c) Los tres planos no tienen punto en común. El sistema no tiene solución.

**FIGURA 1**

### EJEMPLO 3 | Un sistema que no tiene solución

Resuelva el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Para poner en forma triangular, empezamos por eliminar los términos en $x$ de la segunda ecuación y la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 2

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ -2y + 3z = 2 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–3) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 3

Ahora eliminamos el término en $y$ de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ 0 = 2 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–1) × Ecuación 2 = nueva Ecuación 3

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación dice que $0 = 2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a $x$, $y$ y $z$, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto significa que el sistema *no tiene solución.*

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 4 | Un sistema con un infinito de soluciones

Resuelva el sistema siguiente

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$$ Ecuación 1, Ecuación 2, Ecuación 3

**SOLUCIÓN** Para poner esto en forma triangular, empezamos por eliminar los términos en $x$ de las ecuaciones segunda y tercera.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 2

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 \\ 6y - 12z = 12 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–2) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 3

Ahora eliminamos el término en $y$ de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Ecuación 3 + (–2) × Ecuación 2 = nueva Ecuación 3

La nueva tercera ecuación es verdadera pero no nos da información nueva, de modo que podemos eliminarla del sistema. Sólo nos quedan dos ecuaciones. Podemos usarlas para despejar $x$ y $y$ en términos de $z$, pero $z$ puede tomar cualquier valor, de manera que hay un número infinito de soluciones.

Para hallar la solución completa del sistema, empezamos por despejar $y$ en términos de $z$, usando la nueva segunda ecuación.

$$3y - 6z = 6$$ Ecuación 2

$$y - 2z = 2$$ Multiplique por $\frac{1}{3}$

$$y = 2z + 2$$ Despeje $y$

A continuación despejamos $x$ en términos de $z$, usando la primera ecuación.

$$x - (2z + 2) + 5z = -2 \qquad \text{Sustituya } y = 2z + 2 \text{ en la Ecuación 1}$$

$$x + 3z - 2 = -2 \qquad \text{Simplifique}$$

$$x = -3z \qquad \text{Despeje } x$$

Para describir la solución completa, con $t$ representamos cualquier número real. La solución es

$$x = -3t$$
$$y = 2t + 2$$
$$z = t$$

También podemos escribir esto como la terna ordenada $(-3t, 2t + 2, t)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

En la solución del Ejemplo 4 la variable $t$ se denomina **parámetro**. Para obtener una solución específica, damos un valor específico al parámetro $t$. Por ejemplo, si hacemos $t = 2$, obtenemos

$$x = -3(2) = -6$$
$$y = 2(2) + 2 = 6$$
$$z = 2$$

Por lo tanto, $(-6, 6, 2)$ es una solución del sistema. A continuación veamos algunas otras soluciones del sistema obtenido al sustituir otros valores para el parámetro $t$.

| **Parámetro $t$** | **Solución $(-3t, 2t + 2, t)$** |
|---|---|
| $-1$ | $(3, 0, -1)$ |
| $0$ | $(0, 2, 0)$ |
| $3$ | $(-9, 8, 3)$ |
| $10$ | $(\ \ 30, 22, 10)$ |

El lector debe comprobar que estos puntos satisfagan las ecuaciones originales. Hay un número infinito de opciones para el parámetro $t$, de modo que el sistema tiene un infinito de soluciones.

## ▼ Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Los sistemas lineales se utilizan para modelar situaciones que involucran varias cantidades variables. En el siguiente ejemplo consideramos una aplicación de sistemas lineales a las finanzas.

### EJEMPLO 5 | Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

Jason recibe una herencia de \$50,000. Su asesor financiero le sugiere invertir esto en tres fondos de mutualidad: un fondo de mercado de dinero, un fondo de acciones preferenciales y un fondo de acciones de alta tecnología. El asesor estima que el fondo de mercado de dinero rendirá 5% en el año siguiente, el fondo de acciones preferenciales dará 9% y el fondo de alta tecnología rendirá 16%. Jason desea tener un rendimiento total de \$4000 el primer año. Para evitar riesgo excesivo, decide invertir el triple en el fondo de mercado de dinero que en el fondo de acciones de alta tecnología. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo?

**SOLUCIÓN**

Sea $x$ = cantidad invertida en el fondo de mercado de dinero
$y$ = cantidad invertida en el fondo de acciones preferenciales
$z$ = cantidad invertida en el fondo de acciones de alta tecnología

Convertimos en ecuación cada uno de los datos dados en el problema.

$x + y + z = 50{,}000$ — La cantidad total invertida es \$50,000

$0.05x + 0.09y + 0.16z = 4000$ — El rendimiento total sobre la inversión es \$4000

$x = 3z$ — La cantidad en el mercado de dinero es 3 × cantidad en acciones de alta tecnología

Multiplicando por 100 la segunda ecuación y reescribiendo la tercera tendremos el siguiente sistema, que resolvemos usando eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ 5x + 9y + 16z = 400{,}000 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$ 
100 × Ecuación 2
Reste $3z$

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ 4y + 11z = 150{,}000 \\ -y - 4z = -50{,}000 \end{cases}$$ 
Ecuación 2 + (–5) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 2
Ecuación 3 + (–1) × Ecuación 1 = nueva Ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ -5z = -50{,}000 \\ -y - 4z = -50{,}000 \end{cases}$$ 
Ecuación 2 + 4 × Ecuación 3 = nueva Ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ z = 10{,}000 \\ y + 4z = 50{,}000 \end{cases}$$ 
$\left(-\frac{1}{5}\right)$ × Ecuación 2
(–1) × Ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50{,}000 \\ y + 4z = 50{,}000 \\ z = 10{,}000 \end{cases}$$ 
Intercambie Ecuaciones 2 y 3

Ahora que el sistema está en forma triangular, usamos sustitución para hallar que $x = 30{,}000$, $y = 10{,}000$ y $z = 10{,}000$. Esto significa que Jason debe invertir

\$30,000 en el fondo de mercado de dinero

\$10,000 en el fondo de acciones preferenciales

\$10,000 en el fondo de acciones de alta tecnología

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

## 10.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Estos ejercicios se refieren al sistema siguiente.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

**1.** Si sumamos dos veces la primera ecuación a la segunda ecuación, esta última se convierte en ___________ = ____.

**2.** Para eliminar $x$ de la tercera ecuación, sumamos _______ veces la primera ecuación a la tercera ecuación. La tercera ecuación se convierte en ___________ = ____.

## HABILIDADES

**3-6** ■ Diga si la ecuación o sistema de ecuaciones es lineal.

**3.** $6x - \sqrt{3}y + \frac{1}{2}z = 0$

**4.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

**5.** $\begin{cases} xy - 3y + z = 5 \\ x - y^2 + 5z = 0 \\ 2x + yz = 3 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 5y = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

**7-12** ■ Use sustitución para resolver el sistema triangular.

**7.** $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y + 2z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} x + y - 3z = 8 \\ y - 3z = 5 \\ z = -1 \end{cases}$

**9.** $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y + 3z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2y - z = 2 \\ 3z = 12 \end{cases}$

**11.** $\begin{cases} 2x - y + 6z = 5 \\ y + 4z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} 4x + 3z = 10 \\ 2y - z = -6 \\ \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$

**13-16** ■ Ejecute una operación en el sistema dado que elimine la variable indicada. Escriba el nuevo sistema equivalente.

**13.** $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

Elimine el término en $x$ de la segunda ecuación

**14.** $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ -2x + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

Elimine el término en $x$ de la segunda ecuación

**15.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ -4x + 5y + z = 10 \end{cases}$

Elimine el término en $x$ de la tercera ecuación

**16.** $\begin{cases} x - 4y + z = 3 \\ y - 3z = 10 \\ 3y - 8z = 24 \end{cases}$

Elimine el término en $y$ de la segunda ecuación

**17-36** ■ Encuentre la solución completa del sistema lineal, o demuestre que es inconsistente.

**17.** $\begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2y + z = -1 \\ -x + y - 2z = 5 \end{cases}$

**18.** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 2z = -2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

**20.** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

**21.** $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 5z = 8 \\ 2x - y - 2z = -7 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} -x + 2y + 5z = 4 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 6z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ y - 2z = -3 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

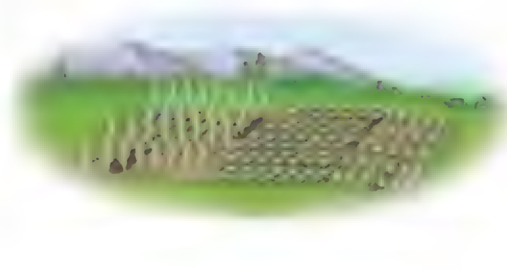
## APLICACIONES

**37-38** ■ **Finanzas** Una inversionista tiene \$100,000 para invertir en tres tipos de bonos: a corto plazo, plazo intermedio y largo plazo. ¿Cuánto debe ella invertir en cada tipo para satisfacer las condiciones dadas?

**37.** Los bonos a corto plazo pagan 4% anualmente, los bonos a plazo intermedio pagan 5% y los bonos a largo plazo pagan 6%. La inversionista desea realizar un ingreso anual total de 5.1%, con iguales cantidades invertidas en bonos de corto y mediano plazos.

**38.** Los bonos a corto plazo pagan 4% anualmente, los de mediano plazo pagan 6% y los de largo plazo pagan 8%. La inversionista desea tener un rendimiento anual total de \$6700 sobre su inversión, con cantidades iguales invertidas en bonos a plazos intermedio y largo.

**39.** **Agricultura** Un agricultor tiene 1200 acres de tierras en las que produce maíz, trigo y frijol de soya. Cuesta \$45 por acre producir maíz, \$60 producir trigo y \$50 producir frijol de soya. Debido a la demanda del mercado, el agricultor producirá el doble de acres de trigo que de maíz. Ha asignado \$63,750 para el costo de producir sus cosechas. ¿Cuántos acres de cada cultivo debe plantar?



**40. Gasolinera** Una gasolinera vende tres tipos de gasolina: regular en $3.00 el galón, Performance Plus en $3.20 el galón y Premium en $3.30 el galón. En un día particular se vendieron 6500 galones de gasolina para un total de $20,050. Se vendieron tres veces más galones de gasolina Regular que de Premium. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron ese día?

**41. Nutrición** Una bióloga está realizando un experimento sobre los efectos de varias combinaciones de vitaminas; desea darle a cada uno de sus conejos de laboratorio una dieta que contiene exactamente 9 mg de niacina y 32 mg de riboflavina. Ella tiene tres tipos diferentes de pastillas cuyo contenido de vitaminas (por onza) se da en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento debe administrarse diariamente a cada conejo para satisfacer los requisitos del experimento?

| | Tipo A | Tipo B | Tipo C |
|---|---|---|---|
| **Niacina (mg)** | 2 | 3 | 1 |
| **Tiamina (mg)** | 3 | 1 | 3 |
| **Riboflavina (mg)** | 8 | 5 | 7 |

**42. Programa de dieta** Nicole inició una nueva dieta que requiere el consumo de 460 calorías en cada comida, 6 gramos de fibra y 11 gramos de grasas. La tabla siguiente muestra el contenido de fibra, grasas y calorías de una porción de cada uno de tres alimentos en el desayuno. ¿Cuántas porciones de cada alimento debe tomar Nicole para seguir su dieta?

| Alimento | Fibra | Grasa | Calorías |
|---|---|---|---|
| Tostada | 2 | 1 | 100 |
| Requesón | 0 | 5 | 120 |
| Fruta | 2 | 0 | 60 |

**43. Mezclas de jugos** La Juice Company ofrece tres clases de bebidas de frutas: Mango Medianoche, Torrente Tropical y Poder de Piña. Cada una contiene las cantidades de jugos que se ven en la tabla siguiente.

| Bebida de frutas | Jugo de mango (oz) | Jugo de piña (oz) | Jugo de naranja (oz) |
|---|---|---|---|
| Mango Medianoche | 8 | 3 | 3 |
| Torrente Tropical | 6 | 5 | 3 |
| Poder de Piña | 2 | 8 | 4 |

En un día particular, la Juice Company utilizó 820 oz (onzas) de jugo de mango, 690 oz de jugo de piña y 450 oz de jugo de naranja. ¿Cuántas bebidas de cada clase se vendieron ese día?

**44. Manufactura de aparatos electrodomésticos** Kitchen Korner produce refrigeradores, lavadoras de loza y estufas en tres fábricas diferentes. La tabla siguiente da el número de cada producto producido en cada fábrica por día. Kitchen Korner recibe un pedido por 110 refrigeradores, 150 lavadoras de loza y 114 estufas. ¿Cuántos días debe programarse cada una de las plantas para satisfacer este pedido?

| Aparato | Fábrica A | Fábrica B | Fábrica C |
|---|---|---|---|
| Refrigeradores | 8 | 10 | 14 |
| Lavadoras de loza | 16 | 12 | 10 |
| Estufas | 10 | 18 | 6 |

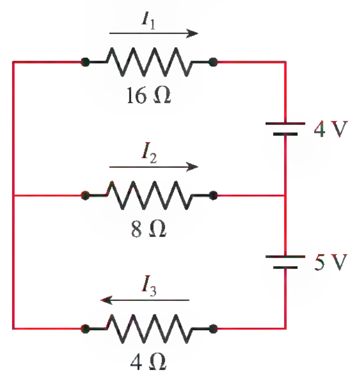
**45. Portafolio de acciones** Un inversionista posee tres acciones: A, B y C. Los precios de las acciones al cierre de tres días sucesivos de operaciones de compraventa se dan en la tabla siguiente.

| | Acción A | Acción B | Acción C |
|---|---|---|---|
| **Lunes** | $10 | $25 | $29 |
| **Martes** | $12 | $20 | $32 |
| **Miércoles** | $16 | $15 | $32 |

A pesar de la volatilidad en los precios de acciones, el valor total de las acciones del inversionista permaneció sin cambio en $74,000 al final de cada uno de estos tres días. ¿Cuántas porciones de cada acción posee ahora el inversionista?

**46. Electricidad** Mediante el uso de las Leyes de Kirchhoff, se puede demostrar que las corrientes $I_1$, $I_2$ e $I_3$ que pasan por las tres ramas del circuito de la figura satisfacen el sistema lineal dado. Resuelva el sistema para hallar $I_1$, $I_2$ e $I_3$.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**47. ¿Un sistema lineal puede tener exactamente dos soluciones?**

**(a)** Suponga que $(x_0, y_0, z_0)$ y $(x_1, y_1, z_1)$ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}, \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también una solución.

**(b)** Use el resultado del inciso (a) para demostrar que si el sistema tiene dos soluciones diferentes, entonces tiene un número infinito de soluciones.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Mejor ajuste contra ajuste exacto**

En este proyecto usamos sistemas lineales para hallar funciones cuadráticas cuyas gráficas pasan por un conjunto de puntos dados. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 10.3 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Matrices ▶ La matriz aumentada de un sistema lineal ▶ Operaciones elementales de renglones ▶ Eliminación de Gauss ▶ Eliminación de Gauss-Jordan ▶ Sistemas inconsistentes y consistentes indeterminados ▶ Modelado con sistemas lineales

Una *matriz* es simplemente un conjunto rectangular de números. Las matrices* se usan para organizar información en categorías que corresponden a los renglones y columnas de la matriz. Por ejemplo, un científico podría organizar información sobre una población de ballenas en peligro como sigue:

| | Inmaduras | Juveniles | Adultas |
|---|---|---|---|
| **Machos** | 12 | 52 | 18 |
| **Hembras** | 15 | 42 | 11 |

Ésta es una forma compacta de decir que hay 12 machos inmaduros, 15 hembras inmaduras, 18 machos adultos, etcétera.

En esta sección representamos un sistema lineal por medio de una matriz, llamada *matriz aumentada* del sistema:

**Sistema lineal** **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Ecuación 1} \\ \text{Ecuación 2} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$x \quad y$

La matriz aumentada contiene la misma información que el sistema, pero en una forma más sencilla. Las operaciones que aprendimos para solucionar sistemas de ecuaciones se pueden realizar ahora en la matriz aumentada.

## ▼ Matrices

Empezamos por definir los diversos elementos que conforman una matriz.

### DEFINICIÓN DE MATRIZ

Una **matriz** de $m \times n$ es un conjunto rectangular de números con $m$ **renglones** y $n$ **columnas**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \leftarrow m \text{ renglones}$$

$n$ columnas

Decimos que la matriz tiene **dimensión** $m \times n$. Los números $a_{ij}$ son las **entradas** de la matriz. El subíndice de la entrada $a_{ij}$ indica que está en el $i$-ésimo renglón y la $j$-ésima columna.

*El plural de *matriz* es *matrices*.

Veamos a continuación algunos ejemplos de matrices.

| Matriz | Dimensión | |
|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ | $2 \times 3$ | 2 renglones por 3 columnas |
| $\begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $1 \times 4$ | 1 renglón por 4 columnas |

## La matriz aumentada de un sistema lineal

Podemos escribir un sistema de ecuaciones lineales como una matriz, llamada la **matriz aumentada** del sistema, al escribir sólo los coeficientes y constantes que aparecen en las ecuaciones. Aquí un ejemplo.

| Sistema lineal | Matriz aumentada |
|---|---|
| $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ -x + 4z = 11 \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$ |

Observe que una variable faltante en una ecuación corresponde a una entrada 0 en la matriz aumentada.

### EJEMPLO 1 | Hallar la matriz aumentada de un sistema lineal

Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Primero escribimos el sistema lineal con las variables alineadas en columnas.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x \qquad + 3z = 1 \\ \qquad 7y + z = 5 \end{cases}$$

La matriz aumentada es la matriz cuyas entradas son los coeficientes y las constantes en este sistema.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **2**

## Operaciones elementales de renglones

Las operaciones que utilizamos en la Sección 10.2 para resolver sistemas lineales corresponden a operaciones en los renglones de la matriz aumentada del sistema. Por ejemplo, sumar un múltiplo de una ecuación a otro corresponde a sumar un múltiplo de un renglón a otro.

**OPERACIONES ELEMENTALES DE RENGLONES**

1. Sumar un múltiplo de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Observe que realizar cualquiera de estas operaciones en la matriz aumentada de un sistema no cambia su solución. Usamos la siguiente notación para describir las operaciones elementales de renglones:

| Símbolo | Descripción |
|---|---|
| $R_i + kR_j \rightarrow R_i$ | Cambia el $i$-ésimo renglón al sumar $k$ veces el renglón $j$ a él, y luego regresa el resultado al renglón $i$. |
| $kR_i$ | Multiplica el $i$-ésimo renglón por $k$. |
| $R_i \leftrightarrow R_j$ | Intercambia los renglones $i$-ésimo y $j$-ésimo. |

En el siguiente ejemplo comparamos las dos formas de escribir sistemas de ecuaciones lineales.

### EJEMPLO 2 | Uso de operaciones elementales de renglones para resolver un sistema lineal

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Nuestro objetivo es eliminar el término en $x$ de la segunda ecuación y los términos en $x$ y $y$ de la tercera ecuación. Por comparación, escribimos el sistema de ecuaciones y su matriz aumentada.

**Sistema** | **Matriz aumentada**

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Sume $(-1) \times$ Ecuación 1 a Ecuación 2.
Sume $(-3) \times$ Ecuación 1 a Ecuación 3.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases} \qquad \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplique Ecuación 3 por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sume $(-3) \times$ Ecuación 3 a Ecuación 2 (para eliminar $y$ de la Ecuación 2).

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 - 3R_3 \rightarrow R_2} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Intercambie Ecuaciones 2 y 3

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A continuación usamos sustitución para hallar que $x = 2$, $y = 7$ y $z = 3$. La solución es (2, 7, 3).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## Eliminación de Gauss

En general, para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando su matriz aumentada, usamos operaciones elementales de renglones para llegar a una matriz de cierta forma. Esta forma se describe en el recuadro siguiente.

### FORMA ESCALONADA POR RENGLONES Y FORMA ESCALONADA POR RENGLONES REDUCIDA DE UNA MATRIZ

Una matriz está en forma **escalonada por renglones** si satisface las siguientes condiciones.

1. El primer número diferente de cero de cada renglón (leyendo de izquierda a derecha) es 1. Éste se llama **entrada inicial**.
2. La entrada inicial de cada renglón está a la derecha de la entrada inicial del renglón situado inmediatamente arriba de él.
3. Todos los renglones formados enteramente de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Una matriz está en **forma escalonada por renglones reducida** si está en la forma escalonada por renglones y también satisface la siguiente condición.

4. Todo número arriba y debajo de cada entrada inicial es un 0.

En las siguientes matrices, la primera no está en forma escalonada por renglones. La segunda *está* en forma escalonada por renglones y la tercera está en forma escalonada por renglones reducida. Los elementos en rojo son los elementos iniciales.

**No en forma escalonada por renglones**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales *no se* cambian a la derecha en renglones sucesivos

**Forma escalonada por renglones**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales se cambian a la derecha en renglones sucesivos

**Forma escalonada por renglones reducida**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 iniciales tienen números 0 arriba y abajo de ellos

A continuación veamos una forma sistemática de poner una matriz en forma escalonada por renglones usando operaciones elementales de renglones:

- Empiece por obtener 1 en la esquina superior izquierda. A continuación obtenga ceros abajo del 1 al sumar múltiplos apropiados del primer renglón a los renglones debajo de él.
- A continuación, obtenga un 1 inicial en el siguiente renglón, y luego obtenga ceros debajo de ese 1.
- En cada etapa asegúrese que toda entrada inicial está a la derecha de la entrada inicial en el renglón arriba de él; reacomode los renglones si es necesario.
- Continúe este proceso hasta que llegue a una matriz en forma escalonada por renglones.

Ésta es la forma en que el proceso puede trabajar para una matriz de $3 \times 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Una vez que una matriz aumentada esté en forma escalonada por renglones, podemos resolver el sistema lineal correspondiente usando sustitución. Esta técnica se llama **eliminación gaussiana**, en honor a su inventor, el matemático alemán C. F. Gauss (vea página 272).

### SOLUCIÓN DE UN SISTEMA USANDO ELIMINACIÓN GAUSSIANA

1. **Matriz aumentada.** Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. **Forma escalonada por renglones.** Use operaciones elementales de renglón para cambiar la matriz aumentada a forma escalonada por renglones.
3. **Sustitución.** Escribimos el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada y resolvemos por medio de sustitución.

## EJEMPLO 3 | Solución de un sistema usando forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando eliminación gaussiana.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Primero escribimos la matriz aumentada del sistema y luego usamos operaciones elementales de renglones para ponerla en forma escalonada por renglones.

Matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{4} & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix} \quad \text{Necesita un 1 aquí}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ \textcircled{3} & 8 & 5 & -11 \\ \textcircled{-2} & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix} \quad \text{Necesita ceros aquí}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \textcircled{2} & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{Necesita un 1 aquí}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & \textcircled{5} & 10 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{Necesita un cero aquí}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{-10} & 20 \end{bmatrix} \quad \text{Necesita un 1 aquí}$$

Forma escalonada por renglones:

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones, y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad\;\; y + 4z = -7 \\ \quad\quad\quad\;\; z = -2 \end{cases}$$

Sustitución: Usamos sustitución para resolver el sistema.

| | |
|---|---|
| $y + 2(-2) = -3$ | Sustituimos $z = -2$ en la Ecuación 2 |
| $y = 1$ | Despejamos $y$ |
| $x + 2(1) - (-2) = 1$ | Sustituimos $y = 1$ y $z = -2$ en la Ecuación 1 |
| $x = -3$ | Despejamos $x$ |

Entonces la solución del sistema es $(-3, 1, -2)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21** ■

```
ref([A])
   [[1 2 -1   1]
    [0 1   2 -3]
    [0 0   1 -2]]
```

**FIGURA 1**

Las calculadoras graficadoras tienen un comando "row-echelon form" (forma escalonada por renglones) que pone una matriz en forma escalonada por renglones. (En la TI-83 este comando es `ref`.) Para la matriz aumentada del Ejemplo 3 el comando `ref` da la salida que se muestra en la Figura 1. Nótese que la forma escalonada por renglones que se obtiene con la

calculadora difiere de la que obtuvimos en el Ejemplo 3. Esto es porque la calculadora emplea diferentes operaciones de renglones que las que usamos nosotros. El lector debe verificar que la forma escalonada por renglones de su calculadora lleve a la misma solución que la nuestra.

## Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en forma escalonada por renglones *reducida*, entonces no necesitamos sustitución para resolver el sistema. Para poner una matriz en forma escalonada por renglones *reducida*, usamos los pasos siguientes:

- Use operaciones elementales de renglón para poner la matriz en forma escalonada por renglones.
- Obtenga ceros arriba de cada entrada inicial al sumar múltiplos del renglón que contenga esa entrada a los renglones arriba de él. Empiece con la útima entrada inicial y trabaje hacia arriba.

Veamos a continuación cómo funciona el proceso para una matriz de $3 \times 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

El uso de la forma escalonada por renglones reducida para resolver un sistema se llama **eliminación de Gauss-Jordan**. El proceso se ilustra en el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 4 | Solución de un sistema usando forma escalonada por renglones reducida

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales, usando eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** En el Ejemplo 3 usamos eliminación de Gauss en la matriz aumentada de este sistema, para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones. Continuamos usando operaciones elementales de renglón en la última matriz del Ejemplo 3 para llegar a una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Necesita ceros aquí

Necesita un cero aquí

$$\xrightarrow[R_1 + R_3 \to R_1]{R_2 - 4R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en forma escalonada por renglones reducida, y el correspondiente sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Como el sistema está en forma escalonada por renglones reducida, no se requiere sustitución para llegar a la solución.

En consecuencia, de inmediato llegamos a la solución $(-3, 1, -2)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

```
rref([A])
    [[1 0 0 -3]
     [0 1 0 1 ]
     [0 0 1 -2]]
```

**FIGURA 2**

Las calculadoras graficadoras también tienen un comando que pone una matriz en forma escalonada por renglones reducida. (En la TI-83 este comando es `rref`.) Para la matriz aumentada del Ejemplo 4, el comando `rref` da la salida que se ve en la Figura 2. La calculadora da la misma forma escalonada por renglones reducida como la que obtuvimos en el Ejemplo 4. Esto es porque toda matriz tiene una *única* forma escalonada por renglones reducida.

## ▼ Sistemas inconsistentes y consistentes indeterminados

Los sistemas de ecuaciones lineales que consideramos en los Ejemplos 1-4 tenían exactamente una solución pero, como sabemos de la Sección 10.2, un sistema lineal puede tener una solución, ninguna solución o un infinito de soluciones. Por fortuna, la forma escalonada por renglones de un sistema nos permite determinar cuál de estos casos aplica, como se describe en el cuadro siguiente.

Primero necesitamos alguna terminología. Una **incógnita inicial** en un sistema lineal es aquella que corresponde a una entrada inicial en la forma escalonada por renglones de la matriz aumentada del sistema.

### SOLUCIONES DE UN SISTEMA LINEAL EN FORMA ESCALONADA POR RENGLONES

Suponga que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales ha sido transformada por eliminación de Gauss a la forma escalonada por renglones. Entonces, exactamente uno de lo siguiente es verdadero.

1. **No hay solución.** Si la forma escalonada por renglones contiene un renglón que representa la ecuación $0 = c$, donde $c$ es un número diferente de cero, entonces el sistema no tiene solución. Un sistema que no tiene solución se denomina **inconsistente**.
2. **Una solución.** Si cada una de las incógnitas en la forma escalonada por renglones es una incógnita inicial, entonces el sistema tiene exactamente una solución que encontramos usando sustitución o eliminación de Gauss-Jordan.
3. **Un infinito de soluciones.** Si las incógnitas en la forma escalonada por renglones no son todas ellas incógnitas iniciales y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene un número infinito de las soluciones. En este caso el sistemase conoce como **consistente indeterminado**. Resolvemos el sistema al poner la matriz en forma escalonada por renglones reducida y luego expresar las incógnitas iniciales en términos de las incógnitas no iniciales. Las variables no iniciales pueden tomar cualesquier números reales como sus valores.

Las matrices siguientes, todas en forma escalonada por renglones, ilustran los tres casos descritos en el cuadro.

**No hay solución**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Última ecuación dice $0 = 1$

**Una solución**

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Cada incógnita es una incógnita inicial

**Número infinito de soluciones**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$z$ no es incógnita inicial

### EJEMPLO 5 | Un sistema donde no hay solución

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
ref([A])
[[1 -2.5 2.5 7   ]
 [0 1    1   -10]
 [0 0    0    1 ]]
```

**FIGURA 3**

Esta última matriz está en forma escalonada por renglones, de modo que podemos detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si convertimos el último renglón en forma de ecuación, obtenemos $0x + 0y + 0z = 1$, o $0 = 1$, lo cual es falso. No importa qué valores escojamos para $x$, $y$ y $z$, la última ecuación nunca será un enunciado verdadero. Esto significa que el sistema *no tiene solución.*

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

La Figura 3 muestra la forma escalonada por renglones producida por una calculadora TI-83 para la matriz aumentada del Ejemplo 5. El lector debe comprobar que ésta dé la misma solución.

## EJEMPLO 6 | Un sistema con un infinito de soluciones

Encuentre la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x \qquad\quad + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada por renglones reducida en la calculadora TI-83.

```
rref([A])
   [[1 0 -7 -5 ]
    [0 1 -3 1  ]
    [0 0 0  0 ]]
```

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0 = 0$. Esta ecuación es siempre verdadera, no importa cuáles valores se usen para $x$, $y$ o $z$. Como la ecuación no agrega más información nueva acerca de las incógnitas, podemos eliminarla del sistema. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 7z = -5 \\ \qquad y - 3z = 1 \end{cases}$$

Ecuación 1

Ecuación 2

Incógnitas iniciales

A continuación despejamos las incógnitas iniciales $x$ y $y$ en términos de la incógnita no inicial $z$:

$x = 7z - 5$ Despeje $x$ en la Ecuación 1

$y = 3z + 1$ Despeje $y$ en la Ecuación 2

Para obtener la solución completa, con $t$ representamos cualquier número real y expresamos $x$, $y$ y $z$ en términos de $t$:

$$\begin{aligned} x &= 7t - 5 \\ y &= 3t + 1 \\ z &= t \end{aligned}$$

También podemos escribir la solución como la terna ordenada $(7t - 5, 3t + 1, t)$, donde $t$ es cualquier número real.

AHORA INNTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

En el Ejemplo 6, para obtener soluciones específicas, damos un valor específico a $t$. Por ejemplo, si $t = 1$, entonces

$$\begin{aligned} x &= 7(1) - 5 = 2 \\ y &= 3(1) + 1 = 4 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

A continuación veamos algunas otras soluciones del sistema obtenidas sustituyendo otros valores para el parámetro $t$.

| **Parámetro $t$** | **Solución $(7t - 5, 3t + 1, t)$** |
|---|---|
| $-1$ | $(-12, -2, -1)$ |
| $0$ | $(-5, 1, 0)$ |
| $2$ | $(9, 7, 2)$ |
| $5$ | $(30, 16, 5)$ |

## EJEMPLO 7 | Un sistema con un infinito de soluciones

Encuentre la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x + 3y - 3z - 4w = 15 \\ 2x + 2y - 6z - 8w = 10 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Transformamos el sistema en forma escalonada por renglones reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 15 \\ 2 & 2 & -6 & -8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{R_3 - 2R_1 \to R_3}]{\mathrm{R_2 - R_1 \to R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{R_3 + 2R_2 \to R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathrm{R_1 - 2R_2 \to R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto está en forma escalonada por renglones reducida. Como el último renglón representa la ecuación $0 = 0$, podemos eliminarlo. En consecuencia, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \quad - 3z - 4w = 0 \\ \quad y \qquad\qquad = 5 \end{cases}$$

Incógnitas iniciales

Para obtener la solución completa, despejamos las incógnitas iniciales $x$ y $y$ en términos de las incógnitas no iniciales $z$ y $w$, y hacemos $z$ y $w$ que sean cualesquier números reales. Entonces la solución completa es

$$\begin{aligned} x &= 3s + 4t \\ y &= 5 \\ z &= s \\ w &= t \end{aligned}$$

donde $s$ y $t$ son cualesquier números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Observe que $s$ y $t$ *no tienen* que ser *el mismo* número real en la solución para el Ejemplo 7. Podemos escoger valores arbitrarios para cada una si deseamos construir una solución específica para el sistema. Por ejemplo, si hacemos $s = 1$ y $t = 2$, entonces obtenemos la solución $(11, 5, 1, 2)$. Es necesario verificar que esto satisfaga realmente las tres ecuaciones originales del Ejemplo 7.

Los Ejemplos 6 y 7 ilustran este dato general: si un sistema en forma escalonada por renglones tiene $n$ ecuaciones diferentes de cero en $m$ incógnitas $(m > n)$, entonces la solución completa tendrá $m - n$ incógnitas no iniciales. Por ejemplo, en el Ejemplo 6 llegamos a *dos* ecuaciones diferentes de cero con las *tres* incógnitas $x$, $y$ y $z$, que da $3 - 2 = 1$ incógnita no inicial.

## Modelado con sistemas lineales

Las ecuaciones lineales, a veces conteniendo cientos o hasta miles de incógnitas, se presentan con frecuencia en las aplicaciones de álgebra para ciencias y otros campos. Por ahora, consideremos un ejemplo que contiene sólo tres incógnitas.

### EJEMPLO 8 | Análisis nutricional usando un sistema de ecuaciones lineales

Un nutriólogo está realizando un experimento en estudiantes voluntarios. Él desea alimentar a uno de sus sujetos con una dieta diaria de una combinación de tres alimentos comerciales de dieta: MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Para el experimento, es importante que el sujeto consuma exactamente 500 mg de potasio, 75 g de proteína y 1150 unidades de vitamina D cada día. Las cantidades de estos nutrientes en una onza de cada alimento se dan en la tabla siguiente. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe consumir el sujeto cada día para satisfacer exactamente las necesidades de nutrientes?

| | MiniCal | LiquiFast | SlimQuick |
|---|---|---|---|
| **Potasio (mg)** | 50 | 75 | 10 |
| **Proteína (g)** | 5 | 10 | 3 |
| **Vitamina D (unidades)** | 90 | 100 | 50 |

**SOLUCIÓN** Represente con $x$, $y$ y $z$ el número de onzas de MiniCal, LiquiFast y SlimQuick, respectivamente, que el sujeto debe comer cada día. Esto significa que obtendrá $50x$ mg de potasio del Minical, $75y$ mg del LiquiFast y $10z$ mg del SlimQuick, para un total de $50x + 75y + 10z$ mg de potasio en todos. Como las necesidades de potasio son de 500 mg, obtenemos la primera ecuación siguiente. Un razonamiento similar para las necesidades de proteína y vitamina D lleva al sistema

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potasio} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Proteína} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamina D} \end{cases}$$

```
rref([A])
   [[1  0  0  5  ]
    [0  1  0  2  ]
    [0  0  1  10]]
```

**FIGURA 4**

Dividiendo la primera ecuación entre 5 y la tercera entre 10 da el sistema

$$\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema usando eliminación de Gauss, o podemos usar una calculadora graficadora para hallar la forma escalonada por renglones reducida de la matriz aumentada del sistema. Usando el comando `rref` en la TI-83, obtenemos la salida de la Figura 4. De la forma escalonada por renglones reducida vemos que $x = 5$, $y = 2$, $z = 10$. Al sujeto deben administrársele 5 oz de MiniCal, 2 oz de LiquiFast y 10 oz de SlimQuick todos los días.

**VERIFIQUE SU RESPUESTA**

$x = 5, y = 2, z = 10$:

$$\begin{cases} 10(5) + 15(2) + 2(10) = 100 \\ 5(5) + 10(2) + 3(10) = 75 \\ 9(5) + 10(2) + 5(10) = 115 \end{cases} \checkmark$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55** ■

Una aplicación más práctica podría involucrar docenas de alimentos y nutrientes en lugar de sólo tres. Tales problemas llevan a sistemas con grandes números de incógnitas y ecuaciones. Calculadoras graficadoras y computadoras son esenciales para resolver sistemas tan grandes.

# 10.3 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Si un sistema de ecuaciones lineales tiene un número infinito de soluciones, entonces el sistema se denomina ________. Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, entonces el sistema se denomina _________.

**2.** Escriba la matriz aumentada del siguiente sistema de ecuaciones.

| Sistema | Matriz aumentada |
|---|---|
| $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ | $\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$ |

**3.** La siguiente matriz es la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales con las variables $x$, $y$ y $z$. (Se da en forma escalonada por renglones reducida.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**(a)** Las incógnitas iniciales son_______.

**(b)** ¿El sistema es inconsistente o consistente indeterminado?___

**(c)** La solución del sistemas es: $x =$ ____, $y =$ ____, $z =$____

**4.** La matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales está dada en forma escalonada por renglones reducida. Encuentre la solución del sistema.

**(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(a) $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____

(b) $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____

(c) $x =$ _____, $y =$ _____, $z =$ _____

## HABILIDADES

**5-10** ■ Exprese la dimensión de la matriz.

**5.** $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}$

**8.** $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**11-18** ■ Nos dan una matriz. **(a)** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones. **(b)** Determine si la matriz está en forma escalonada por renglones reducida. **(c)** Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

**11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

**13.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**15.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**17.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**19-28** ■ El sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única. Encuentre la solución usando eliminación de Gauss o eliminación de Gauss-Jordan.

**19.** $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x + y + 6z = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

**21.** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 17 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - z = 10 \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} 10x + 10y - 20z = 60 \\ 15x + 20y + 30z = -25 \\ -5x + 30y - 10z = 45 \end{cases}$

**29-38** ■ Determine si el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente o consistente indeterminado. Si es consistente indeterminado, encuentre la solución completa.

**29.** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} x + 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ -y + 8z = 8 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} 2x - 3y - 9z = -5 \\ x + 3z = 2 \\ -3x + y - 4z = -3 \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ -2x + 6y - 11z = 1 \\ 3x - 16y - 20z = -26 \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 4x - 8y + 32z = 24 \\ 2x - 3y + 11z = 4 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} -2x + 6y - 2z = -12 \\ x - 3y + 2z = 10 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x + 4y - 2z = -3 \\ 2x - y + 5z = 12 \\ 8x + 5y + 11z = 30 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} 3r + 2s - 3t = 10 \\ r - s - t = -5 \\ r + 4s - t = 20 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} 2x + y - 2z = 12 \\ -x - \frac{1}{2}y + z = -6 \\ 3x + \frac{3}{2}y - 3z = 18 \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} y - 5z = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 3x + 10z = 80 \end{cases}$

**39-54** ■ Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

**39.** $\begin{cases} 4x - 3y + z = -8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 14 \\ 4x - y - 2z = -17 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} 2x + y + 3z = 9 \\ -x - 7z = 10 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$

**42.** $\begin{cases} -4x - y + 36z = 24 \\ x - 2y + 9z = 3 \\ -2x + y + 6z = 6 \end{cases}$

**43.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ -2x - 4y - 6z = 10 \\ 3x + 7y - 2z = -13 \end{cases}$

**44.** $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -4x + 3y + z = 4 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$

**45.** $\begin{cases} x - y + 6z = 8 \\ x + z = 5 \\ x + 3y - 14z = -4 \end{cases}$

**46.** $\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ 4x - 2y + z = -7 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

**47.** $\begin{cases} x + 2y + z - 3w = 3 \\ 3x - 4y + z + w = 9 \\ -x - y + z + w = 0 \\ 2x + y + 4z - 2w = 3 \end{cases}$

**48.** $\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - y + 4w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$

**49.** $\begin{cases} x + y + 2z - w = -2 \\ 3y + z + 2w = 2 \\ x + y + 3w = 2 \\ -3x + z + 2w = 5 \end{cases}$

**50.** $\begin{cases} x - 3y + 2z + w = -2 \\ x - 2y - 2w = -10 \\ z + 5w = 15 \\ 3x + 2z + w = 3 \end{cases}$

**51.** $\begin{cases} x - y + w = 0 \\ 3x - z + 2w = 0 \\ x - 4y + z + 2w = 0 \end{cases}$

**52.** $\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 5 \\ -x + y + 4z - w = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$

**53.** $\begin{cases} x + z + w = 4 \\ y - z = -4 \\ x - 2y + 3z + w = 12 \\ 2x - 2z + 5w = -1 \end{cases}$

**54.** $\begin{cases} y - z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + w = 0 \\ 2x + 4w = 12 \\ -2x - 2z + 5w = 6 \end{cases}$

## APLICACIONES

**55. Nutrición** Un médico recomienda que un paciente tome 50 mg de niacina, de riboflavina y de tiamina diariamente para aliviar una deficiencia vitamínica. En su maletín de medicinas en casa, el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitamina. Las cantidades de las vitaminas relevantes por píldora se dan en la tabla siguiente. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe tomar a diario para obtener 50 mg de cada vitamina?

| | VitaMax | Vitron | VitaPlus |
|---|---|---|---|
| Niacina (mg) | 5 | 10 | 15 |
| Riboflavina (mg) | 15 | 20 | 0 |
| Tiamina (mg) | 10 | 10 | 10 |

**56. Mezclas** Una química tiene tres soluciones ácidas de varias concentraciones. La primera es 10% ácida; la segunda, 20% y, la tercera, 40%. ¿Cuántos mililitros de cada una debe ella usar para hacer 100 mL de una solución al 18%, si tiene que usar cuatro veces más de la solución al 10% que de la solución al 40%?

**57. Distancia, velocidad y tiempo** Amanda, Bryce y Corey entran a una competencia en la que deben correr, nadar y andar en bicicleta en una ruta marcada. Sus magnitudes de velocidad promedio se dan en la tabla. Corey termina primero con un tiempo total de 1 h 45 min. Amanda llega en segundo lugar con

un tiempo de 2 h 30 min. Bryce termina al último con un tiempo de 3 h. Encuentre la distancia (en millas) para cada parte de la carrera.

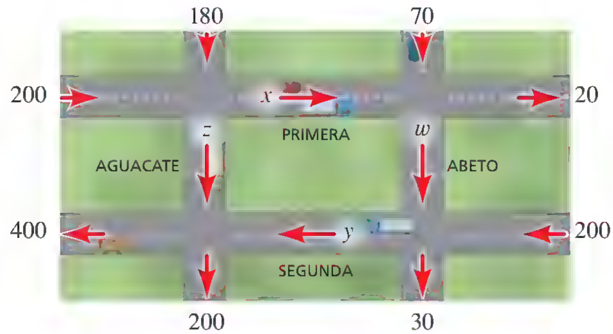
| | Promedio de velocidad (mi/h) | | |
|---|---|---|---|
| | **Correr** | **Nadar** | **Bicicleta** |
| **Amanda** | 10 | 4 | 20 |
| **Bryce** | $7\frac{1}{2}$ | 6 | 15 |
| **Corey** | 15 | 3 | 40 |

**58. Uso de salón de clase** Una pequeña escuela tiene 100 estudiantes que ocupan tres salones: A, B y C. Después del primer período del día de clase, la mitad de los estudiantes del salón A pasan al salón B, un quinto de los estudiantes del salón B pasan al salón C, y un tercio de los estudiantes del salón C pasan al salón A. No obstante, el número total de estudiantes en cada salón es igual para ambos períodos. ¿Cuántos estudiantes ocupan cada salón?

**59. Manufactura de muebles** Una fábrica de muebles construye mesas, sillas y armarios, todos de madera. Cada pieza de mueble requiere tres operaciones: corte de madera, ensamble y acabado. Cada operación requiere el número de horas (h) dado en la tabla siguiente. Los trabajadores de la fábrica pueden trabajar 300 horas de corte, 400 horas de ensamble y 590 horas de acabado en cada semana de trabajo. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios deben ser producidos para que se usen todas las horas de trabajo disponibles? ¿O, es esto imposible?

| | **Mesa** | **Silla** | **Armario** |
|---|---|---|---|
| **Corte (h)** | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |
| **Ensamble(h)** | $\frac{1}{2}$ | $1\frac{1}{2}$ | 1 |
| **Acabado (h)** | 1 | $1\frac{1}{2}$ | 2 |

**60. Flujo de tránsito** En la figura siguiente se ve una sección de la red de calles de una ciudad. Las flechas indican calles con circulación en un sentido, con números que indican cuántos autos entran o salen de esta sección de la ciudad por la calle indicada en cierto período de una hora. Las variables $x$, $y$, $z$ y $w$ representan el número de autos que se mueven a lo largo de partes de las calles Primera, Segunda, Aguacate y Abeto durante este período. Encuentre $x$, $y$, $z$ y $w$, suponiendo que ninguno de los autos se detenga o se estacione en ninguna de las calles mostradas.




## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**61. Polinomios determinados por un conjunto de puntos** Todos sabemos que dos puntos determinan de manera única una recta $y = ax + b$ en el plano de coordenadas. Del mismo modo, tres puntos determinan de manera única una función polinomial cuadrática (segundo grado)

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuatro puntos determinan de manera única una función polinomial cúbica (tercer grado)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y así sucesivamente. (Algunas excepciones a esta regla son si los tres puntos en realidad se encuentran sobre una recta, o los cuatro puntos están en una cuadrática o recta, etcétera.) Para el siguiente conjunto de cinco puntos, encuentre la recta que contenga los primeros dos puntos, la cuadrática que contenga los primeros tres puntos, la cúbica que contenga los primeros cuatro puntos, y la función polinomial de cuarto grado que contenga los cinco puntos.

$$(0, 0), \quad (1, 12), \quad (2, 40), \quad (3, 6), \quad (-1, -14)$$

Grafique los puntos y funciones en el mismo rectángulo de vista usando una calculadora graficadora.

# 10.4 El álgebra de matrices

Igualdad de matrices ▶ Suma, resta y multiplicación por escalares de matrices ▶ Multiplicación de matrices ▶ Propiedades de multiplicación de matrices ▶ Aplicaciones de multiplicación de matrices ▶ Gráficas por computadora

Hasta este punto, hemos empleado matrices simplemente por comodidad para resolver sistemas lineales. Las matrices tienen otros muchos usos en matemáticas y ciencias y, para la mayor parte de estas aplicaciones, un conocimiento de álgebra de matrices es esencial. Al igual que los números, las matrices se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. En esta sección aprendemos a realizar estas operaciones algebraicas con matrices.

## ▼ Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen las mismas entradas en las mismas posiciones.

**Matrices iguales**

$$\begin{bmatrix} \sqrt{4} & 2^2 & e^0 \\ 0.5 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

**Matrices diferentes**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

### IGUALDAD DE MATRICES

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y sólo si tienen la misma dimensión $m \times n$, y sus entradas correspondientes son iguales, esto es,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

### EJEMPLO 1 | Matrices iguales

Encuentre $a$, $b$, $c$ y $d$, si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Como las dos matrices son iguales, las entradas correspondientes deben ser iguales. Entonces debemos tener $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ y $d = 2$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## Suma, resta y multiplicación por escalares de matrices

Dos matrices se pueden sumar o restar si tienen la misma dimensión. (De otro modo, su suma o diferencia no está definida.) Sumamos o restamos las matrices al sumar o restar sus entradas correspondientes. Para multiplicar una matriz por un número, multiplicamos toda entrada de la matriz por ese número. Esto recibe el nombre de *producto por escalar.*

### SUMA, DIFERENCIA Y PRODUCTO POR ESCALAR DE MATRICES

Sea $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de la misma dimensión $m \times n$, y sea $c$ cualquier número real.

1. La **suma** $A + B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al sumar entradas correspondientes de $A$ y $B$.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2. La **diferencia** $A - B$ es la matriz de $m \times n$ obtenida al restar entradas correspondientes de $A$ y $B$.

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

3. El **producto por escalar** $cA$ es la matriz de $m \times n$ obtenida al multiplicar por $c$ cada entrada de $A$.

$$cA = [ca_{ij}]$$

### EJEMPLO 2 | Realizar operaciones algebraicas con matrices

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Courtesy UC Berkeley Office of Media Relations

**JULIA ROBINSON** (1919-1985) nació en St. Louis, Missouri, y creció en Point Loma, California. Debido a una enfermedad, perdió dos años de escuela pero después, con ayuda de un tutor, completó los grados quinto, sexto, séptimo y octavo, todos en un solo año. Posteriormente, en la Universidad de San Diego, la lectura de biografías de matemáticos en la obra *Men of Mathematics* de E. T. Bell, despertó en ella lo que fue su pasión de toda la vida por las matemáticas. Dijo: "No puedo recalcar en exceso la importancia de esos libros… en la vida intelectual de un estudiante." Robinson es famosa por su trabajo sobre el décimo problema de Hilbert (página 683), que pide un procedimiento general para determinar si una ecuación tiene soluciones enteras. Las ideas llevaron a una respuesta completa del problema. Curiosamente, la respuesta contenía ciertas propiedades de los números de Fibonacci (página 787) descubiertas por el matemático ruso Yuri Matihasevic, entonces de 22 años. Como resultado de su brillante trabajo sobre el décimo problema de Hilbert, a Robinson le dieron un profesorado en la Universidad de California, Berkeley, y fue la primera mujer matemática elegida a la Academia Nacional de Ciencias. También fungió como directora de la American Mathematical Society.

Realice cada una de las operaciones indicadas, o explique por qué no se puede realizar.

**(a)** $A + B$ **(b)** $C - D$ **(c)** $C + A$ **(d)** $5A$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \\ 9 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

**(b)** $$C - D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

**(c)** $C + A$ no está definida porque no podemos sumar matrices de diferentes dimensiones.

**(d)** $$5A = 5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 25 \\ 35 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **23**

Las propiedades del cuadro siguiente se deducen de las definiciones de suma de matrices y de multiplicación escalar, así como de las propiedades correspondientes de números reales.

### PROPIEDADES DE SUMA Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR DE MATRICES

Sean $A$, $B$ y $C$ matrices de $m \times n$, y sean $c$ y $d$ escalares.

| | |
|---|---|
| $A + B = B + A$ | Propiedad conmutativa de suma de matrices |
| $(A + B) + C = A + (B + C)$ | Propiedad asociativa de suma de matrices |
| $c(dA) = cdA$ | Propiedad asociativa de multiplicación por escalar |
| $(c + d)A = cA + dA$<br>$c(A + B) = cA + cB$ | Propiedades distributivas de multiplicación por escalar |

## EJEMPLO 3 | Solución de una ecuación matricial

De la ecuación matricial

$$2X - A = B$$

despeje la matriz desconocida $X$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Usamos las propiedades de matrices para despejar $X$.

| | |
|---|---|
| $2X - A = B$ | Ecuación dada |
| $2X = B + A$ | Sume la matriz $A$ a cada lado |
| $X = \frac{1}{2}(B + A)$ | Multiplique cada lado por el escalar $\frac{1}{2}$ |

$$\text{Entonces,}\quad X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{Sustituya las matrices } A \text{ y } B$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{Sume matrices}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Multiplique por el escalar } \tfrac{1}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

## Multiplicación de matrices

La multiplicación de dos matrices es más difícil de describir que otras operaciones de matrices. En ejemplos posteriores veremos por qué multiplicar la multiplicación de matrices comprende un procedimiento más bien complejo, que describimos a continuación.

Primero, el producto $AB$ (o $A \cdot B$) de dos matrices $A$ y $B$ está definido sólo cuando el número de columnas en $A$ es igual al número de renglones en $B$. Esto significa que si escribimos sus dimensiones una al lado de la otra, los dos números internos deben ser iguales:

| | | |
|---|---|---|
| **Matrices** | $A$ | $B$ |
| **Dimensiones** | $m \times n$ | $n \times k$ |
| | Columnas en $A$ | Renglones en $B$ |

Si consideramos el renglón de $A$ y la columna de $B$ como vectores, entonces su producto interno es igual que su producto punto (vea Secciones 9.2 y 9.4).

Si las dimensiones de $A$ y $B$ coinciden de este modo, entonces el producto $AB$ es una matriz de dimensión $m \times k$. Antes de describir el procedimiento para obtener los elementos de $AB$, definimos el *producto interno* de un renglón de $A$ y una columna de $B$

Si $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ es un renglón de $A$, y si $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una columna de $B$, entonces su **producto interno** es el número $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Por ejemplo, tomando el producto interno de

$$[2 \quad -1 \quad 0 \quad 4] \text{ y } \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ da}$$

$$2\cdot 5 + (-1)\cdot 4 + 0\cdot(-3) + 4\cdot\tfrac{1}{2} = 8$$

Ahora definimos el **producto** $AB$ de dos matrices.

### MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

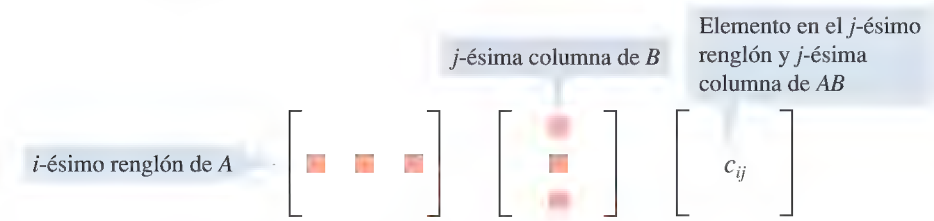
Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz de $n \times k$ entonces su producto es la matriz de $m \times k$

$$C = [c_{ij}]$$

donde $c_{ij}$ es el producto interno del $i$-ésimo renglón de $A$ y la $j$-ésima columna de $B$. Escribimos el producto como

$$C = AB$$

Esta definición de producto matricial dice que cada elemento en la matriz $AB$ se obtiene de un *renglón* de $A$ y una *columna* de $B$ como sigue: el elemento $cij$ del $i$-ésimo renglón y la $j$-ésima columna de la matriz $AB$ se obtiene multiplicando los elementos del $i$-ésimo renglón de $A$ con los correspondientes elementos de la $j$-ésima columna de $B$ y sumando los resultados.




## EJEMPLO 4 | Multiplicación de matrices

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule, si posible, los productos $AB$ y $BA$.

Los números internos son iguales, de modo que el producto está definido

$2 \times 2 \quad 2 \times 3$

Los números externos dan dimensiones de producto: $2 \times 3$

**SOLUCIÓN** Como $A$ tiene dimensión $2 \times 2$ y $B$ tiene dimensión $2 \times 3$, el producto $AB$ está definido y tiene dimensión $2 \times 3$. Por lo tanto, podemos escribir

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

donde los signos de interrogación deben ser llenados usando la regla que define el producto de dos matrices. Si definimos $C = AB = [c_{ij}]$, entonces la entrada $c_{11}$ es el producto interno del primer renglón de $A$ y la primera columna de $B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1$$

Análogamente, calculamos los elementos restantes del producto como sigue.

| Elemento | Producto interno de: | Valor | Matriz producto |
|---|---|---|---|
| $c_{12}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ | $1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 17$ | $\begin{bmatrix} -1 & 17 & \\ & & \end{bmatrix}$ |
| $c_{13}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ | $1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 23$ | $\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ & & \end{bmatrix}$ |
| $c_{21}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ | $(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1$ | $\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & & \end{bmatrix}$ |
| $c_{22}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ | $(-1) \cdot 5 + 0 \cdot 4 = -5$ | $\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & \end{bmatrix}$ |
| $c_{23}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ | $(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 7 = -2$ | $\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ |

Entonces, tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

El producto $BA$ no está definido, sin embargo, porque las dimensiones de $B$ y $A$ son

$$2 \times 3 \quad \text{y} \quad 2 \times 2$$

No iguales, de modo que el producto no está definido

$2 \times 3 \quad 2 \times 2$

Los dos números internos no son iguales, de modo que el número de renglones y columnas no se iguala cuando tratamos de calcular el producto.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

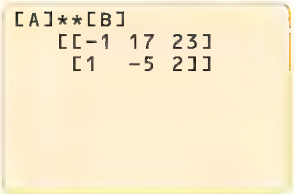



**FIGURA 1**

Las calculadoras graficadoras y computadoras son capaces de realizar álgebra matricial. Por ejemplo, si ingresamos las matrices del Ejemplo 4 en las variables [A] y [B] matriciales en una calculadora TI-83, entonces la calculadora encuentra su producto como se ve en la Figura 1.

## Propiedades de multiplicación de matrices

Aun cuando la multiplicación de matrices no es conmutativa, obedece las Propiedades Asociativa y Distributiva.

**PROPIEDADES DE MULTIPLICACIÓN DE MATRICES**

Sean $A$, $B$ y $C$ matrices para las cuales están definidos los siguientes productos. Entonces

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{Propiedad Asociativa}$$

$$\left.\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)A &= BA + CA \end{aligned}\right\} \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

El siguiente ejemplo muestra que aun cuando $AB$ y $BA$ están definidas, no son necesariamente iguales. Este resultado demuestra que la multiplicación de matrices *no es* conmutativa.

### EJEMPLO 5 | La multiplicación de matrices no es conmutativa

Sean $$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule los productos $AB$ y $BA$.

**SOLUCIÓN** Como las matrices $A$ y $B$ tienen dimensiones $2 \times 2$, los productos $AB$ y $BA$ están definidos, y cada producto también es una matriz de $2 \times 2$.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1 + 7\cdot 9 & 5\cdot 2 + 7\cdot(-1) \\ (-3)\cdot 1 + 0\cdot 9 & (-3)\cdot 2 + 0\cdot(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 68 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot(-3) & 1\cdot 7 + 2\cdot 0 \\ 9\cdot 5 + (-1)\cdot(-3) & 9\cdot 7 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 48 & 63 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esto demuestra que, en general, $AB \neq BA$. De hecho, en este ejemplo $AB$ y $BA$ ni siquiera tienen una entrada en común.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## Aplicaciones de multiplicación de matrices

A continuación consideramos algunos ejemplos aplicados que dan indicación de por qué los matemáticos escogen definir el producto matricial en esa forma aparentemente extraña. El Ejemplo 6 muestra cómo nuestra definición de producto matricial nos permite expresar un sistema de ecuaciones lineales como una sola ecuación matricial.

## EJEMPLO 6 | Escribir un sistema lineal como ecuación matricial

Demuestre que la siguiente ecuación matricial es equivalente al sistema de ecuaciones del Ejemplo 2 de la Sección 10.3.

Ecuaciones matriciales como ésta están descritas en más detalle en la página 677.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Si realizamos multiplicación matricial en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x - y + 3z \\ x + 2y - 2z \\ 3x - y + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Debido a que dos matrices son iguales sólo si sus entradas correspondientes son iguales, igualamos las entradas para obtener

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Éste es exactamente el sistema de ecuaciones del Ejemplo 2 de la Sección 10.3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## EJEMPLO 7 | Representar datos demográficos mediante matrices

En cierta ciudad, las proporciones de electores de cada grupo de edades que están registradas como demócratas, republicanos o independientes, están dadas por la siguiente matriz.

| | Edad | | |
|---|---|---|---|
| | **18–30** | **31–50** | **Más de 50** |
| **Demócrata** | 0.30 | 0.60 | 0.50 |
| **Republicano** | 0.50 | 0.35 | 0.25 |
| **Independiente** | 0.20 | 0.05 | 0.25 |

$$= A$$

La siguiente matriz da la distribución, por edad y sexo, de la población de electores de esta ciudad.

| Edad | | **Hombre** | **Mujer** |
|---|---|---|---|
| | **18–30** | 5,000 | 6,000 |
| | **31–50** | 10,000 | 12,000 |
| | **Más de 50** | 12,000 | 15,000 |

$$= B$$

Para este problema, hagamos la suposición (muy poco realista) de que dentro de cada grupo de edades, la preferencia política no está relacionada con el género. Esto es, el porcentaje de hombres demócratas del grupo de 18-30, por ejemplo, es igual que el porcentaje de mujeres demócratas de este grupo.

**(a)** Calcule el producto $AB$.

**(b)** ¿Cuántos hombres están registrados como demócratas en esta ciudad?

**(c)** ¿Cuántas mujeres están registradas como republicanas?

**OLGA TAUSSKY-TODD** (1906-1995) contribuyó en el perfeccionamiento de aplicaciones de teoría de matrices. Descrita como "enamorada de todo lo que pueden hacer las matrices", con todo éxito aplicó matrices a la aerodinámica, campo empleado en el diseño de aviones y cohetes. Taussky-Todd también fue famosa por su trabajo en teoría de los números, que se refiere a números primos y divisibilidad. Aun cuando la teoría de los números ha sido considerada como la rama menos aplicable de las matemáticas, ahora se usa de manera importante en toda la industria de computadoras.

Taussky-Todd estudió matemáticas en un tiempo en que las jóvenes raras veces aspiraban a ser matemáticas. Ella decía: "Cuando entré a la universidad no tenía idea de lo que significaba estudiar matemáticas." Una de las matemáticas más respetadas de su tiempo, fue durante muchos años profesora de matemáticas en el Caltech de Pasadena.

**SOLUCIÓN**

**(a)** $$AB = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.50 \\ 0.50 & 0.35 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,000 & 6,000 \\ 10,000 & 12,000 \\ 12,000 & 15,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,500 & 16,500 \\ 9,000 & 10,950 \\ 4,500 & 5,550 \end{bmatrix}$$

**(b)** Cuando tomamos el producto interno de un renglón en $A$ con una columna en $B$, estamos sumando el número de personas de cada grupo de edades que pertenece a la categoría en cuestión. Por ejemplo, el elemento $c_{21}$ de $AB$ (9000) se obtiene tomando el producto interno del renglón de republicanos en $A$ con la columna de Hombres en $B$. Este número es, por lo tanto, el número total de hombres republicanos en esta ciudad. Podemos marcar los renglones y columnas de $AB$ como sigue.

| | Hombres | Mujeres | |
|---|---|---|---|
| Demócrata | 13,500 | 16,500 | |
| Republicano | 9,000 | 10,950 | $= AB$ |
| Independiente | 4,500 | 5,550 | |

Entonces, 13,500 hombres están registrados como demócratas en esta ciudad.

**(c)** Hay 10,950 mujeres registradas como republicanas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

En el Ejemplo 7 los elementos de cada columna de $A$ ascienden a 1. (¿Puede ver por qué esto tiene que ser cierto, dado lo que describe la matriz?) Una matriz con esta propiedad se denomina **estocástica**. Las matrices estocásticas se usan extensamente en estadística, donde aparecen con frecuencia en situaciones como la descrita aquí.

## Gráficas por computadora

Un uso importante de matrices es en la representación digital de imágenes. Una cámara digital o un escáner convierten una imagen en una matriz al dividir la imagen en un conjunto rectangular de elementos llamados píxeles. A cada píxel se le asigna un valor que representa el color, brillo o alguna otra función en ese lugar. Por ejemplo, en una imagen a escala gris de nivel 256 a cada píxel se le asigna un valor entre 0 y 255, donde 0 representa blanco, 255 representa negro, y los números intermedios representan graduaciones crecientes de gris. Las graduaciones de una escala mucho más sencilla de gris de nivel 8 se ven en la Figura 2. Usamos esta escala de nivel 8 para ilustrar el proceso.

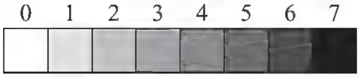
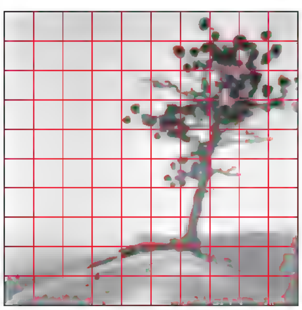



**FIGURA 2**

Para digitalizar la imagen en blanco y negro de la Figura 3(a), ponemos una cuadrícula sobre la imagen como se ve en la Figura 3(b). Cada celda de la cuadrícula se compara con la escala gris y luego se le asigna un valor entre 0 y 7, dependiendo de cuál cuadro gris de la escala se compara más cercanamente con la "oscuridad" de la celda. (Si la celda no es uni-

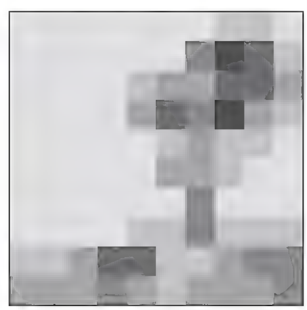
(a) Imagen original



(b) Cuadrícula 10 × 10

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(c) Representación matricial



(d) Imagen digital

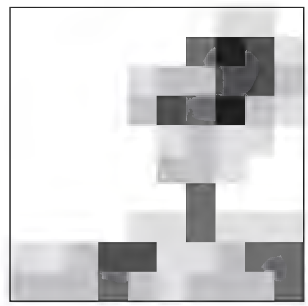
**FIGURA 3**

formemente gris, se le asigna un valor promedio.) Los valores se guardan en la matriz que se muestra en la Figura 3(c). La imagen digital correspondiente a esta matriz se muestra en la Figura 3(d). Obviamente, la cuadrícula que hemos empleado hasta este punto es demasiado burda para dar una buena resolución de imagen. En la práctica, las cámaras digitales de alta resolución existentes hoy en día usan matrices con dimensiones de hasta $2040 \times 2048$.

Una vez que la imagen se guarda en una matriz, se puede manipular con el uso de operaciones matriciales. Por ejemplo, para oscurecer la imagen, sumamos una constante a cada entrada de la matriz; para aclarar la imagen, restamos una constante. Para aumentar el contraste, oscurecemos las áreas más oscuras y aclaramos las áreas más claras, de modo que podríamos sumar 1 a cada entrada que sea 4, 5 o 6, y restamos 1 de cada entrada que sea 1, 2 o 3. (Observe que no podemos oscurecer una entrada de 7 o aclarar un 0.) La aplicación de este proceso a la matriz de la Figura 3(c) produce una nueva matriz en la Figura 4(a). Esto genera la imagen de alto contraste de la Figura 4(b).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 5 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 6 & 1 & 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Matriz modificada para aumentar contraste



(b) Imagen de alto contraste

**FIGURA 4**

Otras formas de representar y manipular imágenes usando matrices se estudian en los Proyectos de descubrimiento *Computer Graphics I* y *II* en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com.**

## 10.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Podemos sumar (o restar) dos matrices sólo si tienen las mismas ________.

**2. (a)** Podemos multiplicar dos matrices sólo si el número de _______ de la primera matriz es igual que el número de _______ de la segunda matriz.

**(b)** Si $A$ es una matriz de $3 \times 3$ y $B$ es una matriz de $3 \times 4$, ¿cuáles de las siguientes multiplicaciones de matrices son posibles?

(i) $AB$ (ii) $BA$ (iii) $AA$ (iv) $BB$

**3.** ¿Cuáles de las siguientes operaciones podemos realizar para una matriz $A$ de cualquier dimensión?

(i) $A + A$ (ii) $2A$ (iii) $A \cdot A$

**4.** Llene los elementos faltantes en la matriz producto.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \blacksquare & -7 \\ 7 & -7 & \blacksquare \\ \blacksquare & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

### HABILIDADES

**5-6** ■ Determine si las matrices $A$ y $B$ son iguales.

**5.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$

**6.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \ln 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ \sqrt{4} & \frac{6}{2} \end{bmatrix}$

**7-14** ■ Ejecute la operación matricial, o si es imposible, explique por qué.

**7.** $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

**8.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

**9.** $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

**10.** $2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

**11.** $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

**12.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

**13.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

**15-20** ■ De la ecuación matricial despeje la matriz desconocida $X$, o explique por qué no existe solución.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 20 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

**15.** $2X + A = B$ **16.** $3X - B = C$

**17.** $2(B - X) = D$ **18.** $5(X - C) = D$

**19.** $\frac{1}{5}(X + D) = C$ **20.** $2A = B - 3X$

**21-34** ■ Las matrices $A, B, C, D, E, F, G$ y $H$ están definidas como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Realice la operación algebraica indicada, o explique por qué no se puede realizar.

**21.** **(a)** $B + C$ **(b)** $B + F$

**22.** **(a)** $C - B$ **(b)** $2C - 6B$

**23.** **(a)** $5A$ **(b)** $C - 5A$

**24.** **(a)** $3B + 2C$ **(b)** $2H + D$

**25.** **(a)** $AD$ **(b)** $DA$

**26.** **(a)** $DH$ **(b)** $HD$

**27.** **(a)** $AH$ **(b)** $HA$

**28.** **(a)** $BC$ **(b)** $BF$

**29.** **(a)** $GF$ **(b)** $GE$

**30.** **(a)** $B^2$ **(b)** $F^2$

**31.** **(a)** $A^2$ **(b)** $A^3$

**32.** **(a)** $(DA)B$ **(b)** $D(AB)$

**33.** **(a)** $ABE$ **(b)** $AHE$

**34.** **(a)** $DB + DC$ **(b)** $BF + FE$

**35–38** ■ Despeje $x$ y $y$.

**35.** $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x & -6y \end{bmatrix}$ **36.** $3\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

**37.** $2\begin{bmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

**38.** $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

**39-42** ■ Escriba el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial (vea Ejemplo 6).

**39.** $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 6x - y + z = 12 \\ 2x + z = 7 \\ y - 2z = 4 \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

**42.** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y - z = 2 \\ x + y + 5z = 2 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$

**43.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine cuáles de los siguientes productos están definidos, y calcule los que estén.

$ABC \quad ACB \quad BAC$

$BCA \quad CAB \quad CBA$

**44.** **(a)** Demuestre que si $A$ y $B$ son matrices de $2 \times 2$, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

**(b)** Si $A$ y $B$ son matrices de $2 \times 2$, ¿es necesariamente cierto que

$$(A + B)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AB + B^2?$$

## APLICACIONES

**45. Ventas de comida rápida** Una pequeña cadena de restaurantes de comida rápida, con sucursales en Santa Monica, Long Beach y Anaheim vende sólo hamburguesas, perros calientes y malteadas. En cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz.

| | Número de piezas vendidas | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **Santa Monica** | **Long Beach** | **Anaheim** | |
| **Hamburguesas** | 4000 | 1000 | 3500 | $= A$ |
| **Perros calientes** | 400 | 300 | 200 | |
| **Malteadas** | 700 | 500 | 9000 | |

El precio de cada pieza está dado en la matriz siguiente.

| **Hamburguesa** | **Perro caliente** | **Malteada** | |
|---|---|---|---|
| [$0.90 | $0.80 | $1.10] | $= B$ |

**(a)** Calcule el producto $BA$.
**(b)** Interprete las entradas de la matriz producto $BA$.

**46. Utilidades de fabricación de autos** Un fabricante de autos especiales tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Se producen tres modelos, con producción diaria dada en la siguiente matriz.

**Autos producidos cada día**

| | Modelo K | Modelo R | Modelo W | |
|---|---|---|---|---|
| **Auburn** | 12 | 10 | 0 | |
| **Biloxi** | 4 | 4 | 20 | = $A$ |
| **Chattanooga** | 8 | 9 | 12 | |

Debido a aumentos de salarios, las utilidades en febrero son más bajas que las de enero. La utilidad por auto está tabulada por modelo en la siguiente matriz.

| | Enero | Febrero | |
|---|---|---|---|
| **Modelo K** | \$1000 | \$500 | |
| **Modelo R** | \$2000 | \$1200 | = $B$ |
| **Modelo W** | \$1500 | \$1000 | |

**(a)** Calcule $AB$.
**(b)** Suponiendo que se vendieran todos los autos producidos, ¿cuál fue la utilidad diaria en enero en la planta Biloxi?
**(c)** ¿Cuál fue la utilidad diaria total (de las tres plantas) en febrero?

**47. Productos de tomate enlatados** Jaeger Foods produce salsa de tomate y pasta de tomate, enlatadas en latas pequeñas, medianas, grandes y gigantes. La matriz $A$ da el tamaño (en onzas) de cada recipiente.

| | Pequeñas | Medianas | Grandes | Gigantes | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Onzas** | [6 | 10 | 14 | 28] | = $A$ |

La matriz $B$ tabula la producción de un día de salsa de tomate y pasta de tomate.

| | Latas de salsa | Latas de pasta | |
|---|---|---|---|
| **Pequeñas** | 2000 | 2500 | |
| **Medianas** | 3000 | 1500 | = $B$ |
| **Grandes** | 2500 | 1000 | |
| **Gigantes** | 1000 | 500 | |

**(a)** Calcule el producto de $AB$.
**(b)** Interprete las entradas de la matriz producto $AB$.

**48. Ventas de productos agrícolas** Los tres hijos de un agricultor, Amy, Beth y Chad, trabajan durante los meses de verano en tres puestos de venta situados al lado de una carretera. En un fin de semana todos venden sandías, calabacitas amarillas y tomates. Las matrices $A$ y $B$ tabulan el número de libras de cada producto vendido por cada hermano en sábado y domingo.

**Sábado**

| | Sandías | Calabacitas | Tomates | |
|---|---|---|---|---|
| **Amy** | 120 | 50 | 60 | |
| **Beth** | 40 | 25 | 30 | = $A$ |
| **Chad** | 60 | 30 | 20 | |

**Domingo**

| | Sandías | Calabacitas | Tomates | |
|---|---|---|---|---|
| **Amy** | 100 | 60 | 30 | |
| **Beth** | 35 | 20 | 20 | = $B$ |
| **Chad** | 60 | 25 | 30 | |

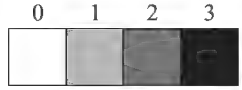
La matriz $C$ da el precio por libra (en dólares) por cada tipo de producto que vendan.

| | Precio por libra | |
|---|---|---|
| **Sandías** | 0.10 | |
| **Calabacitas** | 0.50 | = $C$ |
| **Tomates** | 1.00 | |

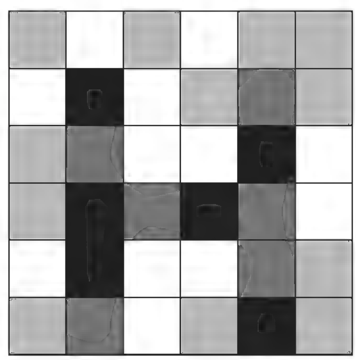
Realice cada una de las siguientes operaciones e interprete las entradas en cada resultado.

**(a)** $AC$ **(b)** $BC$ **(c)** $A + B$ **(d)** $(A + B)C$

**49. Imágenes digitales** A continuación se muestra una escala en gris de cuatro niveles




**(a)** Use la escala gris para hallar una matriz de $6 \times 6$ que digitalmente representa la imagen de la figura.



**(b)** Encuentre una matriz que represente una versión más oscura de la imagen de la figura.
**(c)** El **negativo** de una imagen se obtiene invirtiendo claros y oscuros, como en el negativo de una fotografía. Encuentre la matriz que representa el negativo de la imagen de la figura. ¿Cómo cambia usted las entradas de la matriz para crear el negativo?
**(d)** Aumente el contraste de la imagen cambiando cada 1 a 0 y cada 2 a 3 en la matriz que encontró en el inciso (b). Trace la imagen representada por la matriz resultante. ¿Aclara esto la imagen?

(e) Trace la imagen representada por la matriz $I$. ¿Puede usted reconocer cuál es ésta? Si no puede, trate de aumentar el contraste.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**50. ¿Cuándo están definidos ambos productos?** ¿Qué debe ser cierto acerca de las dimensiones de las matrices $A$ y $B$ si ambos productos $AB$ y $BA$ están definidos?

**51. Potencias de una matriz** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que usted detecte un patrón. Escriba una fórmula general para $A^n$.

**52. Potencias de una matriz** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para $A^n$.

**53. Raíces cuadradas de matrices** Una **raíz cuadrada** de una matriz $B$ es una matriz $A$ con la propiedad de que $A^2 = B$. (Ésta es la misma definición que para una raíz cuadrada de un número.) Encuentre tantas raíces cuadradas como pueda de cada matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

[*Sugerencia:* Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, escriba las ecuaciones que $a$, $b$, $c$ y $d$ tendrían que satisfacer si $A$ es la raíz cuadrada de la matriz dada.]

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **¿Sobrevivirán las especies?**

En este proyecto investigamos modelos de matrices para poblaciones de especies y la forma en que la multiplicación por una matriz de transición puede predecir futuras tendencias de poblaciones. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 10.5 INVERSAS DE MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES

La inversa de una matriz ▶ Hallar la inversa de una matriz de $2 \times 2$ ▶ Hallar la inversa de una matriz de $n \times n$ ▶ Ecuaciones matriciales ▶ Modelado con ecuaciones matriciales

En la sección precedente vimos que cuando las dimensiones son apropiadas, se pueden sumar, restar y multiplicar matrices. En esta sección investigamos la división de matrices. Con esta operación podemos resolver ecuaciones que contienen matrices.

## ▼ La inversa de una matriz

Primero, definimos *matrices identidad*, que desempeñan la misma función para multiplicación matricial que el número 1 para multiplicación ordinaria de números; es decir, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todos los números $a$. Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene el mismo número de renglones que de columnas. La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por las entradas cuyos números de renglón y columna son los mismos. Estas entradas se extienden diagonalmente por la matriz, desde arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha.

**MATRIZ IDENTIDAD**

La **matriz identidad** $I_n$ es la matriz de $n \times n$ para la cual cada entrada de la diagonal principal es un 1 y para la cual todos los otros elementos son 0.

Entonces, las matrices identidad de $2 \times 2$, $3 \times 3$ y $4 \times 4$ son

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices identidad se comportan como el número 1 en el sentido de que

$$A \cdot I_n = A \qquad \text{y} \qquad I_n \cdot B = B$$

siempre que estos productos estén definidos.

### EJEMPLO 1 | Matrices identidad

Los siguientes productos matriciales muestran la forma en que multiplicar una matriz por una matriz identidad de dimensión apropiada deja sin cambio a la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **1(a), (b)** ■

Si $A$ y $B$ son matrices de $n \times n$, y si $AB = BA = I_n$, entonces decimos que $B$ es la *inversa* de $A$ y escribimos $B = A^{-1}$. El concepto de la inversa de una matriz es análogo al del recíproco de un número real.

**INVERSA DE UNA MATRIZ**

Sea $A$ una matriz cuadrada de $n \times n$. Si existe una matriz de $n \times n$ $A^{-1}$ con la propiedad de que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces decimos que $A^{-1}$ es la **inversa** de $A$.

### EJEMPLO 2 | Verificar que una matriz es una inversa

Verifique que $B$ es la inversa de $A$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Ejecutamos las multiplicaciones de matrices para demostrar que $AB = I_2$ y $BA = I_2$.

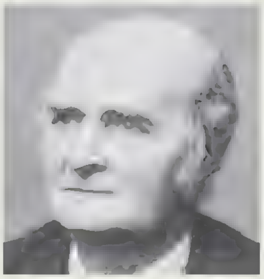
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1(-5) & 2(-1) + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 3(-5) & 5(-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1)5 & 3 \cdot 1 + (-1)3 \\ (-5)2 + 2 \cdot 5 & (-5)1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3** ■

## ▼ Hallar la inversa de una matriz de 2 × 2

La regla siguiente da una forma sencilla de hallar la inversa de una matriz de 2 × 2, cuando existe. Para matrices más grandes hay un procedimiento más general de hallar inversas, que consideramos más adelante en esta sección.



The Granger Collection, New York

**ARTHUR CAYLEY** (1821-1895) fue un matemático inglés que contribuyó en el perfeccionamiento de la teoría de matrices. Fue el primero en usar un solo símbolo tal como *A* para representar una matriz, introduciendo así la idea de que una matriz es una sola entidad en lugar de sólo una colección de números. Cayley practicó leyes hasta los 42 años de edad, pero su interés principal desde adolescente fueron las matemáticas, y publicó casi 200 artículos sobre el tema en su tiempo libre. En 1863 aceptó un cargo de profesor de matemáticas en Cambridge, donde enseñó hasta su muerte. La obra de Cayley sobre matrices fue de interés puramente teórico en su tiempo, pero en el siglo XX muchos de sus resultados encontraron aplicación en física, ciencias sociales, finanzas y otros campos. Uno de los usos más comunes de matrices hoy en día es en computadoras, donde las matrices se utilizan para almacenamiento de datos, corrección de errores, manipulación de imágenes y muchos otros propósitos. Estas aplicaciones han hecho que el álgebra de matrices sea más útil que nunca.

### INVERSA DE UNA MATRIZ DE 2 × 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces $A$ no tiene inversas.

### EJEMPLO 3 | Hallar la inversa de una matriz de 2 × 2

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre $A^{-1}$, y verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

**SOLUCIÓN** Usando la regla para la inversa de una matriz de 2 × 2, tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para verificar que esta matriz es realmente la inversa de $A$, calculamos $AA^{-1}$ y $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{3}{2} + 5(-1) & 4(-\frac{5}{2}) + 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 3(-1) & 2(-\frac{5}{2}) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4 + (-\frac{5}{2})2 & \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{5}{2})3 \\ (-1)4 + 2 \cdot 2 & (-1)5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

La cantidad $ad - bc$ que aparece en la regla para calcular la inversa de una matriz de 2 × 2 se denomina **determinante** de la matriz. Si el determinante es 0, entonces la matriz no tiene inversa (porque no podemos dividir entre 0).

## ▼ Hallar la inversa de una matriz de $n \times n$

Para matrices de 3 × 3 y mayores, la técnica siguiente da la forma más eficiente de calcular sus inversas. Si $A$ es una matriz de $n \times n$, primero construimos la matriz de $n \times 2n$ que tiene las entradas de $A$ a la izquierda y los de la matriz identidad $I_n$ a la derecha:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

A continuación usamos operaciones elementales de renglón en esta nueva matriz grande para cambiar el lado izquierdo a la matriz identidad. (Esto significa que estamos cambiando la matriz grande a forma escalonada por renglones reducida.) El lado derecho se transforma automáticamente en $A^{-1}$. (Omitimos la demostración de este dato.)

## EJEMPLO 4 | Hallar la inversa de una matriz de 3 × 3

Sea $A$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

**(a)** Encuentre $A^{-1}$.
**(b)** Verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Empezamos con la matriz de 3 × 6 cuya mitad izquierda es $A$ y cuya mitad derecha es la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación transformamos la mitad izquierda de esta nueva matriz en la matriz identidad realizando la siguiente secuencia de operaciones elementales de renglón en *toda* la nueva matriz.

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 \quad 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Hemos transformado ahora la mitad izquierda de esta matriz en una matriz identidad. (Esto significa que hemos puesto toda la matriz en forma escalonada por renglones reducida.) Nótese que, para hacer esto en una forma tan sistemática como sea posible, primero cambiamos a ceros las entradas debajo de la diagonal principal, como lo haríamos si estuviéramos usando eliminación de Gauss. A continuación cambiamos a un 1 cada una de las entradas de la diagonal principal al multiplicar por la(s) constante(s) apropiada(s). Por último, completamos el proceso cambiando a ceros las entradas restantes del lado izquierdo.

La mitad derecha es ahora $A^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**(b)** Calculamos $AA^{-1}$ y $A^{-1}A$ y verificamos que ambos productos dan la matriz identidad $I_3$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

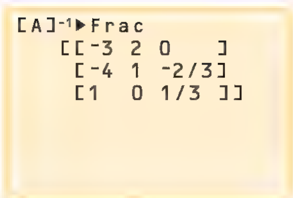



**FIGURA 1**

Las calculadoras graficadoras también tienen capacidad para calcular inversas de matrices. En las TI-83 y TI-84, las matrices se guardan en memoria usando nombres como `[A]`, `[B]`, `[C]`, . . . . Para hallar la inversa de `[A]`, tecleamos

`[A]` `x⁻¹` `ENTER`

Para la matriz del Ejemplo 4 esto resulta en la salida que se ve en la Figura 1 (donde hemos empleado el comando `▶Frac` para exhibir la salida en forma de fracción en lugar de forma decimal).

El siguiente ejemplo muestra que no toda matriz cuadrada tiene una inversa.

## EJEMPLO 5 | Una matriz que no tiene inversa

Encuentre la inversa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Procedemos como sigue.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 - 2R_2 \to R_1]{R_3 + R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{array}\right]$$

En este punto nos gustaría cambiar el 0 de la posición (3, 3) a un 1 sin cambiar los ceros de las posiciones (3, 1) y (3, 2). Pero no hay forma de lograr esto, porque no importa qué múltiplo de los renglones 1 y/o 2 sumemos al renglón 3, no podemos cambiar el tercer cero del renglón 3 sin cambiar también el cero primero o segundo. Entonces no podemos cambiar la mitad izquierda a la matriz identidad, de modo que la matriz original no tiene inversa.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

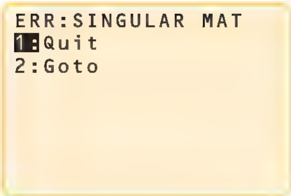



**FIGURA 2**

Si encontramos un renglón de ceros a la izquierda cuando tratemos de hallar una inversa, como en el Ejemplo 5, entonces la matriz original no tiene inversa. Si tratamos de calcular la inversa de la matriz del Ejemplo 5 en una calculadora TI-83, obtenemos el mensaje de error que se muestra en la Figura 2. (Una matriz que no tiene inversa se llama *singular.*)

## Ecuaciones matriciales

Vimos en el Ejemplo 6 de la Sección 10.4 que un sistema de ecuaciones lineales puede escribirse como una sola ecuación matricial. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x - 2y \quad 4z = 7 \\ 2x - 3y - \quad 6z = 5 \\ -3x + 6y + 15z = 0 \end{cases}$$

es equivalente a la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces esta ecuación matricial se puede escribir como

$$AX = B$$

La matriz $A$ recibe el nombre de **matriz coeficiente**.

Resolvemos esta ecuación matricial multiplicando cada lado por la inversa de $A$ (siempre que exista esta inversa):

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B && \text{Multiplique a la izquierda por } A^{-1} \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B && \text{Propiedad Asociativa} \\ I_3X &= A^{-1}B && \text{Propiedad de inversas} \\ X &= A^{-1}B && \text{Propiedad de matriz identidad} \end{aligned}$$

Resolver la ecuación $AX = B$ es muy semejante a resolver la ecuación simple de números reales

$$3x = 12$$

que hacemos al multiplicar cada lado por el recíproco (inversa) de 3.

$$\tfrac{1}{3}(3x) = \tfrac{1}{3}(12)$$

$$x = 4$$

En el Ejemplo 4 demostramos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces, de $X = A^{-1}B$ tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} -11 \\ -23 \\ 7 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, $x = -11$, $y = -23$, $z = 7$ es la solución del sistema original.

Hemos demostrado que la ecuación matricial $AX = B$ puede resolverse por el siguiente método.

> **RESOLVER UNA ECUACIÓN MATRICIAL**
>
> Si $A$ es una matriz cuadrada de $n \times n$ que tiene inversa $A^{-1}$ y si $X$ es una matriz incógnita y $B$ es una matriz conocida, ambas con $n$ renglones, entonces la solución de la ecuación matricial
>
> $$AX = B$$
>
> está dada por:
>
> $$X = A^{\;1}B$$

## EJEMPLO 6 | Resolver un sistema usando la inversa de una matriz

Nos dan un sistema de ecuaciones.

**(a)** Escribimos el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.
**(b)** Resolvemos el sistema por medio de la ecuación matricial.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Escribimos el sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$A \qquad X \quad = \quad B$$

**(b)** Usando la regla para encontrar la inversa de una matriz de $2 \times 2$, obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{1} = \frac{1}{2(-6) - (-5)3} \begin{bmatrix} -6 & -(-5) \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando cada lado de la ecuación matricial por su matriz inversa, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$X \quad = \qquad A^{-1} \qquad B$$

Por lo tanto, $x = 30$ y $y = 9$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

## Modelado con ecuaciones matriciales

Suponga que necesitamos resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficiente. Entonces, convertir los sistemas a ecuaciones matriciales da un método eficiente para obtener las soluciones, porque necesitamos hallar la inversa de la matriz de coeficientes

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

Art Wolfe/Stone/Getty Images

**Ecología matemática**

En la década de 1970 las ballenas jorobadas fueron el centro de una controversia. Los ambientalistas creían que la caza de ballenas amenazaba a éstas con una inminente extinción; los balleneros vieron que su medio de vida estaba amenazado por cualquier intento de parar la cacería de ballenas. ¿Las ballenas están realmente amenazadas hasta la extinción por su cacería? ¿Qué nivel de cacería de ballenas es seguro para garantizar la supervivencia de las ballenas? Estas preguntas motivaron a matemáticos a estudiar más de cerca a patrones de población de ballenas y otras especies.

Desde principios de la década de 1920, Lotka y Volterra habían fundado el campo de la biología matemática al crear modelos de depredador-presa. Sus modelos, que hacían uso de una rama de las matemáticas llamada ecuaciones diferenciales, toman en cuenta los porcentajes a los que el depredador devora la presa y los porcentajes de crecimiento de cada población. Nótese que a medida que el depredador devora la presa, disminuye la población de la presa; esto significa menos alimento para depredadores, de modo que la población de éstos empieza a disminuir; con menos depredadores, la población de la presa empieza a aumentar, y así sucesivamente. Normalmente, se forma un estado de equilibrio y las dos poblaciones se alternan entre un mínimo y un máximo. Observe que si los depredadores devoran la presa con demasiada rapidez, se quedarán sin alimento y aseguran así su propia extinción.

Desde los tiempos de Lotka y Volterra, se han desarrollado modelos matemáticos más desarrollados de poblaciones de animales. Para numerosas especies, la población está dividida en varias etapas: inmadura, juvenil, adulta, etcétera. La proporción de cada etapa que sobrevive o se reproduce en un tiempo determinado se introduce en una matriz (llamada matriz de transición); se usa entonces una multiplicación de matrices para predecir la población en períodos sucesivos. (Vea el Proyecto de descubrimiento *¿Sobrevivirán las especies?* En el sitio web acompañante de este libro: www.stewartmath.com.)

Como se puede ver, el poder de las matemáticas para modelar y predecir es una herramienta de valor incalculable en el actual debate sobre el medio ambiente.

sólo una vez. Este procedimiento es particularmente útil si usamos una calculadora graficadora para ejecutar las operaciones de matrices, como en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 7 | Modelado de necesidades nutrimentales usando ecuaciones matriciales

El propietario de una tienda de mascotas alimenta a sus hámster y jerbos con mezclas diferentes de tres tipos de alimento para roedores: KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow. Él desea darles a sus animales la cantidad correcta de cada marca para satisfacer exactamente sus necesidades diarias de proteína, grasa y carbohidratos. Suponga que los hámster requieren 340 mg de proteína, 280 mg de grasa y 440 mg de carbohidratos, y que los jerbos necesitan 480 mg de proteína, 360 mg de grasa y 680 mg de carbohidratos al día. La cantidad de cada nutriente (en mg) en un gramo de cada marca está dada en la siguiente tabla. ¿Cuántos gramos de cada alimento debe dar diariamente el propietario de la tienda a hámster y jerbos para satisfacerles sus necesidades de nutrientes?

| | KayDee Food | Pet Pellets | Rodent Chow |
|---|---|---|---|
| **Proteína (mg)** | 10 | 0 | 20 |
| **Grasa (mg)** | 10 | 20 | 10 |
| **Carbohidratos (mg)** | 5 | 10 | 30 |

**SOLUCIÓN** Sean $x_1, x_2$ y $x_3$ las respectivas cantidades (en gramos) de KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow que los hámster deben comer, y sean $y_1$, $y_2$ y $y_3$ las correspondientes cantidades para los jerbos. Entonces buscamos resolver las ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para hámster}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para jerbos}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos escribir estas ecuaciones matriciales como

$$AX = B \qquad \text{Ecuación para hámster}$$

$$AY = C \qquad \text{Ecuación para jerbos}$$

Buscamos despejar $X$ y $Y$, de modo que multiplicamos por $A^{-1}$ ambos lados de cada ecuación, la inversa de la matriz coeficiente. Podríamos hallar $A^{-1}$ manualmente, pero es mejor usar una calculadora graficadora como se muestra en la Figura 3.

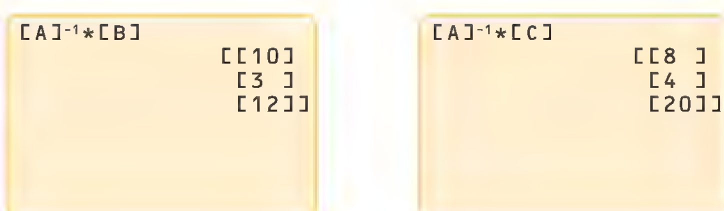



**FIGURA 3** (a) (b)

Entonces

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad Y = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, cada hámster debe alimentarse con 10 g de KayDee Food, 3 g de Pet Pellets y 12 g de Rodent Chow; y cada jerbo debe alimentarse con 8 g de KayDee Food, 4 g de Pet Pellets y 20 g de Rodent Chow diariamente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

## 10.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** **(a)** La matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se denomina matriz _________.

**(b)** Si $A$ es una matriz de $2 \times 2$, entonces $A \times I_2 =$ _________ e $I_2 \times$ _________.

**(c)** Si $A$ y $B$ son matrices de $2 \times 2$ con $AB = I_2$, entonces $B$ es la _________ de $A$.

**2.** **(a)** Escriba el siguiente sistema como ecuación matricial $AX = B$.

| Sistema | Ecuación matricial |
| --- | --- |
| | $A \cdot X = B$ |
| $\begin{aligned} 5x + 3y &= 4 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned}$ | $\begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$ |

**(b)** La inversa de $A$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$.

**(c)** La solución de la ecuación matricial es $X = A^{-1}B$.

$$\begin{matrix} X & = & A^{-1} & B \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$$

**(d)** La solución del sistema es $x =$ _____, $y =$ _____.

### HABILIDADES

**3-6** ■ Calcule los productos $AB$ y $BA$ para verificar que $B$ es la inversa de $A$.

**3.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

**4.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

**5.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**6.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -12 & 14 & 11 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**7-8** ■ Encuentre la inversa de la matriz y verifique que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ y $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

**7.** $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

**8.** $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

**9-24** ■ Encuentre la inversa de la matriz si existe.

**9.** $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

**10.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

**11.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

**12.** $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

**13.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

**14.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

**15.** $\begin{bmatrix} 0.4 & -1.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

**16.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**17.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

**18.** $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

**19.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}$

**20.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**21.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

**22.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

**23.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**24.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**25-32** ■ Resuelva el sistema de ecuaciones convirtiendo a una ecuación matricial y usando la inversa de la matriz de coeficientes, como en el Ejemplo 6. Use las inversas contenidas en los Ejercicios 9-12, 17, 18, 21 y 23.

**25.** $\begin{cases} -3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ -5x - 13y = 20 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} 7x + 4y = 0 \\ 8x - 5y = 100 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} 5x + 7y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$

**31.** $\begin{aligned} -2y + 2z &= 12 \\ 3x + y + 3z &= -2 \\ x - 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$

**32.** $\begin{cases} x + 2y + 3w = 0 \\ y + z + w = 1 \\ y + w = 2 \\ x + 2y + 2w = 3 \end{cases}$

**33-38** ■ Use una calculadora que pueda ejecutar operaciones de matrices para resolver el sistema, como en el Ejemplo 7.

**33.** $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 5z = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} 3x + 4y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ 5x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} 12x + \frac{1}{2}y - 7z = 21 \\ 11x - 2y + 3z = 43 \\ 13x + y - 4z = 29 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 4 \\ x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = 7 \\ x + y - z = -6 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} x + y - 3w = 0 \\ x - 2z = 8 \\ 2y - z + w = 5 \\ 2x + 3y - 2w = 13 \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x - y + z - w = 5 \\ x + 2y + 3z + 4w = 26 \\ x - 2y + 3z - 4w = 2 \end{cases}$

**39-40** ■ Resuelva la ecuación matricial multiplicando cada lado por la matriz inversa apropiada.

**39.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**40.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**41-42** ■ Encuentre la inversa de la matriz.

**41.** $\begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}$

$(a \neq 0)$

**42.** $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

$(abcd \neq 0)$

**43-46** ■ Encuentre la inversa de la matriz. ¿Para qué valor(es) de $x$, si lo hay, la matriz no tiene inversa?

**43.** $\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$

**44.** $\begin{bmatrix} e^x & -e^{2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix}$

**45.** $\begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**46.** $\begin{bmatrix} x & 1 \\ -x & \dfrac{1}{x-1} \end{bmatrix}$

## APLICACIONES

**47. Nutrición** Un nutricionista está estudiando los efectos de los nutrientes de ácido fólico, colina e inositol. Él tiene tres tipos de alimento a su disposición, y cada tipo contiene las siguientes cantidades de estos nutrientes por onza.

| | Tipo A | Tipo B | Tipo C |
|---|---|---|---|
| **Ácido fólico (mg)** | 3 | 1 | 3 |
| **Colina (mg)** | 4 | 2 | 4 |
| **Inositol (mg)** | 3 | 2 | 4 |

**(a)** Encuentre la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

y úsela para resolver las partes restantes de este problema.

**(b)** ¿Cuántas onzas de cada alimento debe administrar el nutricionista a sus ratas de laboratorio si desea que la dieta diaria de ellas contenga 10 mg de ácido fólico, 14 mg de colina y 13 mg de inositol?

**(c)** ¿Cuánto de cada alimento es necesario para suministrar 9 mg de ácido fólico, 12 mg de colina y 10 mg de inositol?

**(d)** ¿Alguna combinación de estos alimentos dará 2 mg de ácido fólico, 4 mg de colina y 11 mg de inositol?

**48. Nutrición** Consulte el Ejercicio 47. Suponga que el alimento tipo C ha sido incorrectamente etiquetado, y que en realidad contiene 4 mg de ácido fólico, 6 mg de colina y 5 mg de inositol por onza. ¿Todavía sería posible usar inversión de matrices para resolver los incisos (b), (c) y (d) del Ejercicio 47? ¿Por qué sí o por qué no?

**49. Comisiones de ventas** Una vendedora de enciclopedias trabaja para una compañía que ofrece tres grados diferentes de encuadernación para sus enciclopedias: estándar, de lujo y en piel. Por cada enciclopedia que venda, gana una comisión basada en el grado de encuadernación de la enciclopedia. Una semana ella vende una estándar, una de lujo y dos en piel que hacen una comisión de \$675. A la semana siguiente vende dos estándar, una de lujo y una en piel para una comisión de \$600. La tercera semana vende una estándar, dos de lujo y una en piel, ganando una comisión de \$625.

**(a)** Represente con $x$, $y$ y $z$ la comisión que ella gana en estándar, de lujo y en piel, respectivamente. Convierta la información dada a un sistema de ecuaciones con $x$, $y$ y $z$.

**(b)** Exprese el sistema de ecuaciones que encontró en el inciso (a) como ecuación matricial de la forma $AX = B$.

**(c)** Encuentre la inversa de la matriz coeficiente $A$ y úsela para resolver la ecuación matricial del inciso (b). ¿Cuánto de comisión gana la vendedora en un juego de enciclopedias de cada grado de encuadernación?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**50. No hay propiedad de producto cero para matrices** Hemos utilizado la Propiedad del Producto Cero para resolver ecuaciones algebraicas. Las matrices *no tienen* esta propiedad. Con $O$ represente la **matriz cero de 2 × 2**

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre matrices $A \neq 0$ y $B \neq 0$ de $2 \times 2$ tales que $AB = 0$. ¿Puede usted hallar una matriz $A \neq 0$ tal que $A^2 = O$?

# 10.6 DETERMINANTES Y REGLA DE CRAMER

Determinante de una matriz de $2 \times 2$ ▶ Determinante de una matriz de $n \times n$ ▶ Transformaciones de renglón y columna ▶ Regla de Cramer ▶ Áreas de triángulos usando determinantes

Si una matriz es **cuadrada** (es decir, si tiene el mismo número de renglones que de columnas), entonces podemos asignarle un número llamado *determinante*. Se pueden usar determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como veremos más adelante en esta sección. También son útiles para determinar si una matriz tiene una inversa.

## ▼ Determinante de una matriz de 2 × 2

Denotamos el determinante de una matriz cuadrada $A$ por el símbolo $\det(A)$ o $|A|$. Primero definimos $\det(A)$ para los casos más sencillos. Si $A = [a]$ es una matriz $1 \times 1$, entonces $\det(A) = a$. El recuadro siguiente da la definición de un determinante de $2 \times 2$.

Usaremos ambas notaciones, $\det(A)$ y $|A|$, para el determinante de $A$. Aun cuando el símbolo $|A|$ se ve como el símbolo de valor absoluto, será claro por el contexto cuál significado se persigue.

### DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE 2 × 2

El **determinante** de la matriz de $2 \times 2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

### EJEMPLO 1 | Determinante de una matriz de 2 × 2

Evalúe $|A|$ para $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Para evaluar un determinante de $2 \times 2$, tomamos el producto de la diagonal de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha y restamos el producto de arriba a la derecha hacia abajo a la izquierda, como lo indican las flechas.

**SOLUCIÓN**

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - (-3)2 = 18 - (-6) = 24$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5 ■

## ▼ Determinante de una matriz de $n \times n$

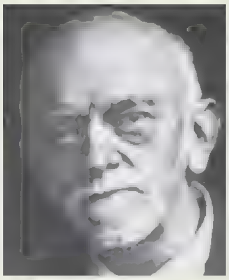
Para definir el concepto de determinante para una matriz de $n \times n$ arbitraria, necesitamos la siguiente terminología.

### MENORES Y COFACTORES

Sea $A$ una matriz de $n \times n$.

1. El **menor** $M_{ij}$ de la entrada $a_{ij}$ es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el $i$-ésimo renglón y la $j$-ésima columna de $A$.
2. El **cofactor** $A_{ij}$ del elemento $a_{ij}$ es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$





**DAVID HILBERT** (1862-1943) nació en Königsberg, Alemania, y fue profesor en la Universidad de Göttingen. Es considerado por muchos como el más grande matemático del siglo XX. En el Congreso Internacional de Matemáticas efectuado en París en 1900, Hilbert fijó la dirección de las matemáticas a principios del siglo XX al plantear 23 problemas que consideró de importancia esencial. Dijo que "hay problemas cuyas soluciones esperamos del futuro". Casi todos los problemas han sido ya resueltos (vea Julia Robinson, página 663, y Alan Turing, página 100), y sus soluciones han llevado a nuevos e importantes campos de investigación matemática. No obstante, al entrar en el nuevo milenio, algunos de los problemas de Hilbert siguen sin ser resueltos. En su obra, Hilbert hizo hincapié en la estructura, lógica y fundamentos de las matemáticas. Parte de su genio está en su capacidad para ver el enunciado más general posible de un problema. Por ejemplo, Euler demostró que todo número entero es la suma de cuatro cuadrados; Hilbert demostró un enunciado similar para todas las potencias de enteros positivos.

Por ejemplo, si $A$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces el menor $M_{12}$ es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el primer renglón y la segunda columna de $A$. Así,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0(6) - 4(-2) = 8$$

Por lo tanto, el cofactor $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -8$. Análogamente,

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 4$$

En consecuencia, $A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 4$.

Nótese que el cofactor de $a_{ij}$ es simplemente el menor de $a_{ij}$ multiplicado ya sea por 1 o por $-1$, dependiendo de si $i + j$ es par o impar. Así, en una matriz de $3 \times 3$ obtenemos el cofactor de cualquier elemento al poner como prefijo en su menor el signo obtenido de la siguiente forma de tablero de ajedrez.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ahora estamos listos para definir el determinante de cualquier matriz cuadrada.

### EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si $A$ es una matriz de $n \times n$ entonces el **determinante** de $A$ se obtiene multiplicando cada elemento del primer renglón por su cofactor y a continuación sumando los resultados. En símbolos,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

## EJEMPLO 2 | Determinante de una matriz de 3 × 3

Evalúe el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 6 - 4 \cdot 5) - 3[0 \cdot 6 - 4(-2)] - [0 \cdot 5 - 2(-2)]$$

$$= -16 - 24 - 4$$

$$= -44$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

En nuestra definición del determinante utilizamos únicamente los cofactores de elementos del primer renglón. Esto se llama **expandir el determinante por el primer renglón**. De hecho, *podemos expandir el determinante por cualquier renglón o columna en la misma forma y obtener el mismo resultado en cada caso* (aun cuando no demostraremos esto). El siguiente ejemplo ilustra este principio.

## EJEMPLO 3 | Expandir un determinante alrededor de un renglón o columna

Sea $A$ la matriz del Ejemplo 2. Evalúe el determinante de $A$ al expandir

**(a)** por el segundo renglón

**(b)** por la tercera columna

Verifique que cada expansión dé el mismo valor.

**SOLUCIÓN**

**(a)** La expansión por el segundo renglón da

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2[2 \cdot 6 - (-1)(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)]$$

$$= 0 + 20 - 64 = -44$$

**(b)** La expansión por la tercera da

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[0 \cdot 5 - 2(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)] + 6(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0)$$

$$= -4 - 64 + 24 = -44$$

Las calculadoras graficadoras son capaces de calcular determinantes. A continuación aparece la salida cuando se usa la TI-83 para calcular el determinante del Ejemplo 3:

```
[A]
        [[2  3 -1]
         [0  2 4 ]
         [-2 5 6 ]]
det([A])
                -44
```

En ambos casos obtenemos el mismo valor para el determinante que cuando expandimos por el primer renglón del Ejemplo 2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

El siguiente criterio nos permite determinar si una matriz cuadrada tiene una inversa sin calcular en realidad la inversa. Éste es uno de los usos más importantes del determinante en álgebra de matrices, y es la razón para el nombre de *determinante.*

**CRITERIO DE INVERTIBILIDAD**

Si $A$ es una matriz cuadrada, entonces $A$ tiene una inversa si y solamente si $\det(A) \neq 0$.

No probaremos este dato, pero de la fórmula para la inversa de una matriz de $2 \times 2$ (página 674) se puede ver por qué es verdadera en el caso $2 \times 2$.

## EJEMPLO 4 | Uso del determinante para demostrar que una matriz no es invertible

Demuestre que la matriz $A$ no tiene inversas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Empezamos por calcular el determinante de $A$. Como todos los elementos del segundo renglón, excepto uno, son cero, expandimos el determinante por el segundo renglón. Si hacemos esto, vemos de la siguiente ecuación que sólo el cofactor $A_{24}$ tendrá que calcularse.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= -0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 0 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{24} = 3A_{24}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Expanda esto por la columna 3}$$

$$= 3(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2)(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0$$

Como el determinante de $A$ es cero, $A$ no puede tener una inversa, por el Criterio de Invertibilidad.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## Transformaciones de renglón y columna

El ejemplo precedente muestra que si expandimos un determinante alrededor de un renglón o columna que contenga muchos ceros, nuestro trabajo se reduce considerablemente porque no tenemos que evaluar los cofactores de los elementos que son cero. Es frecuente que el siguiente principio simplifique el proceso de hallar un determinante al introducir ceros en la matriz sin cambiar el valor del determinante.

The Granger Collection, New York

**EMMY NOETHER** (1882-1935) fue una de las principales matemáticas de principios del siglo xx. Sus trabajos de investigación en álgebra abstracta constituyeron gran parte de las bases para este campo, y su trabajo sobre teoría de invariantes fue esencial en el perfeccionamiento de la teoría general de la relatividad de Einstein. Aun cuando a las mujeres no se les permitía estudiar en universidades alemanas en ese tiempo, ella asistió como oyente a cursos y continuó de manera no oficial hasta recibir un doctorado en Erlangen, *summa cum laude*, a pesar de la oposición del senado académico que declaró que las mujeres estudiantes "derribarían todo el orden académico". Posteriormente, ella enseñó matemáticas en Göttingen, Moscú y Frankfurt. En 1933 salió de Alemania para escapar de la persecución nazi, aceptando una posición en el Colegio Bryn Mawr en los suburbios de Filadelfia. Ahí dio conferencias y en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey, hasta su prematura muerte en 1935.

**TRANSFORMACIONES DE RENGLÓN Y COLUMNA DE UN DETERMINANTE**

Si $A$ es una matriz cuadrada y si la matriz $B$ se obtiene de $A$ al sumar un múltiplo de un renglón a otro o un múltiplo de una columna a otra, entonces $\det(A) = \det(B)$.

### EJEMPLO 5 | Uso de transformaciones de renglón y columna para calcular un determinante

Encuentre el determinante de la matriz $A$. ¿Tiene una inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 24 & 6 & 1 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

**SOLUCIÓN** Si sumamos $-3$ veces el renglón 1 al renglón 3, cambiamos todos los elementos del renglón 3 a ceros, excepto uno:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz tiene el mismo determinante que $A$, y si expandimos su determinante por el tercer renglón, obtenemos

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora, sumando 2 veces la columna 3 a la columna 1 en este determinante tendremos

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 25 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{Expandir esto por la columna 1}$$

$$= 4(-25)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-25)[2(-1) - (-4)2] = -600$$

Como el determinante de $A$ no es cero, $A$ no tiene una inversa.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## Regla de Cramer

Las soluciones de ecuaciones lineales a veces pueden expresarse usando determinantes. Para ilustrar lo anterior, del siguiente par de ecuaciones lineales despejemos la variable $x$.

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Para eliminar la variable $y$, multiplicamos la primera ecuación por $d$ y la segunda por $b$ y restamos.

$$\begin{aligned} adx + bdy &= rd \\ bcx + bdy &= bs \\ \hline adx - bcx &= rd - bs \end{aligned}$$

Factorizando el lado izquierdo, obtenemos $(ad - bc)x = rd - bs$. Suponiendo que $ad - bc \neq 0$, de esta ecuación podemos ahora despejar $x$:

$$x = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

Del mismo modo, podemos hallar

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}$$

El numerador y denominador de las fracciones para $x$ y $y$ son determinantes de matrices de $2 \times 2$. Por lo tanto, podemos expresar la solución del sistema usando determinantes como sigue.

## REGLA DE CRAMER PARA SISTEMAS CON DOS VARIABLES

El sistema lineal

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

tiene la solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

siempre que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$

Usando la notación

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D_x = \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}$$

Matriz coeficiente

Sustituya la primera columna de $D$ por $r$ y $s$

Sustituya la segunda columna de $D$ por $r$ y $s$

podemos escribir la solución del sistema como

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad \text{y} \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

### EJEMPLO 6 | Uso de la Regla de Cramer para resolver un sistema con dos variables

Use la Regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x + 6y = -1 \\ x + 8y = 2 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Para este sistema tenemos

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 10$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)8 - 6 \cdot 2 = -20$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)1 = 5$$

La solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

La Regla de Cramer se puede extender para aplicar a cualquier sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas en las que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Como vimos en la sección precedente, cualquiera de estos sistemas se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por analogía con nuestra derivación de la Regla de Cramer en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, hacemos que $D$ sea la matriz coeficiente de este sistema, y que $D_{x_i}$ sea la matriz obtenida al sustituir la $i$-ésima columna de $D$ por los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que aparecen a la derecha del signo igual. La solución del sistema está dada entonces por la siguiente regla.

#### REGLA DE CRAMER

Si un sistema de $n$ ecuaciones lineales con las $n$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es equivalente a la ecuación matricial $DX = B$, y si $|D \neq 0$, entonces sus soluciones son

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|} \qquad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

donde $D_{x_i}$ es la matriz obtenida al sustituir la $i$-ésima columna de $D$ por la matriz $B$ de $n \times 1$.

**EJEMPLO 7** | Uso de la Regla de Cramer para resolver un sistema con tres variables

Use la Regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x \phantom{- 3y} + 6z = 0 \\ 3x - 2y \phantom{+ 4z} = 5 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Primero, evaluamos los determinantes que aparecen en la Regla de Cramer. Observe que $D$ es la matriz de coeficiente y que $D_x$, $D_y$ y $D_z$ se obtienen sustituyendo las columnas primera, segunda y tercera de $D$ por los términos constantes.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -38 \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -78$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -22 \qquad |D_z| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

A continuación usamos la Regla de Cramer para obtener la solución:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{78}{-38} = \frac{39}{19} \qquad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-22}{-38} = \frac{11}{19}$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{13}{-38} = -\frac{13}{38}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

La solución del sistema del Ejemplo 7 usando eliminación de Gauss comprende matrices cuyos elementos son fracciones con denominadores más bien grandes. Entonces, en casos como los Ejemplos 6 y 7, la Regla de Cramer nos da una forma eficiente de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero, en sistemas con más de tres ecuaciones, evaluar los diversos determinantes que aparezcan es en general un trabajo largo y tedioso (a menos que se use una calculadora graficadora). Además, la regla no aplica si $|D| = 0$ o si $D$ no es una matriz cuadrada. Por lo tanto, la Regla de Cramer es una alternativa útil para la eliminación de Gauss, pero sólo en algunas situaciones.

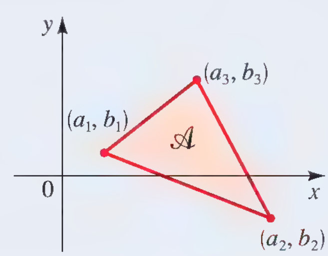
## Áreas de triángulos usando determinantes

Los determinantes son una forma sencilla de calcular el área de un triángulo del plano de coordenadas.

### ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Si un triángulo en el plano coordenado tiene vértices $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ y $(a_3, b_3)$, entonces su área es

$$\mathcal{A} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$




donde el signo se escoge para hacer que el área sea positiva.

Pedimos al lector demuestre esta fórmula en el Ejercicio 63.

## EJEMPLO 8 | Área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo que se muestra en la Figura 1.

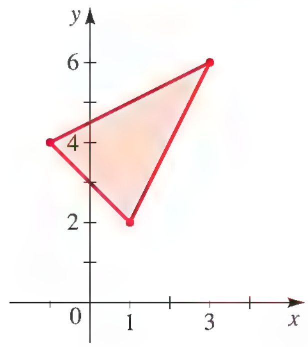



**FIGURA 1**

**SOLUCIÓN** Los vértices son (1, 2), (3, 6) y (−1, 4). Usando la fórmula del recuadro precedente, tenemos

$$\mathcal{A} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm\tfrac{1}{2}(-12)$$

Podemos calcular manualmente el determinante o usando calculadora graficadora.

```
[A]
          [[-1  4  1]
           [3   6  1]
           [1   2  1]]
det([A])
                  -12
```

Para hacer que el área sea positiva, escogemos el signo negativo en la fórmula. Entonces, el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = -\tfrac{1}{2}(-12) = 6$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55** ■

## 10.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. *¿Verdadero o falso?* det(*A*) está definido sólo por una matriz cuadrada *A*.
2. *¿Verdadero o falso?* det(*A*) es un número, no una matriz.
3. *¿Verdadero o falso?* Si det(*A*) = 0, entonces *A* no es invertible.
4. Llene los espacios en blanco con los números apropiados para calcular el determinante. Donde haya "±", escoja el signo apropiado (+ o −).

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ = ■■ − ■■ = ______

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ = ±■(■■ − ■■) ± ■(■■ − ■■)

± ■(■■ − ■■) = ______

### HABILIDADES

**5-12** ■ Encuentre el determinante de la matriz, si existe.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2.2 & -1.4 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

**13-18** ■ Evalúe el menor y cofactor usando la matriz *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

13. $M_{11}, A_{11}$
14. $M_{33}, A_{33}$
15. $M_{12}, A_{12}$
16. $M_{13}, A_{13}$
17. $M_{23}, A_{23}$
18. $M_{32}, A_{32}$

**19-26** ■ Encuentre el determinante de la matriz. Determine si la matriz tiene una inversa, pero no calcule la inversa.

**19.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

**21.** $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**23.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

**25.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**27-30** ■ Evalúe el determinante, usando operaciones de renglón o columna siempre que sea posible para simplificar su trabajo.

**27.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **28.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

**29.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 10 & 8 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

**31.** Sea

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**(a)** Evalúe det($B$) expandiendo por el segundo renglón.
**(b)** Evalúe det($B$) expandiendo por la tercera columna.
**(c)** ¿Concuerdan sus resultados en los incisos (a) y (b)?

**32.** Considere el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ 3x \quad 6y + 5z = 8 \\ 2x + 6y + 9z = 7 \end{cases}$$

**(a)** Verifique que $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ es una solución del sistema.
**(b)** Encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.
**(c)** Sin resolver el sistema, determine si hay algunas otras soluciones.
**(d)** ¿Puede usarse la Regla de Cramer para resolver este sistema? ¿Por qué sí o por qué no?

**33-48** ■ Use la Regla de Cramer para resolver el sistema.

**33.** $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 6x + 12y = 33 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{4}x \quad \frac{1}{6}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 0.4 \\ 1.2x + 1.6y = 3.2 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 10x \quad 17y = 21 \\ 20x - 31y = 39 \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 5x - 3y + z = 6 \\ 4y - 6z = 22 \\ 7x + 10y = -13 \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} -2a + c = 2 \\ a + 2b - c = 9 \\ 3a + 5b + 2c = 22 \end{cases}$

**43.** $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{10} \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{2}z = \frac{11}{10} \\ x - \frac{4}{5}y + z = \frac{9}{5} \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 3z = 19 \\ 4y + 7z = 17 \end{cases}$

**45.** $\begin{cases} 3y + 5z = 4 \\ 2x - z = 10 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x + y - z = 8 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}$

**47.** $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + w = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + w = 3 \\ w - x = 4 \end{cases}$

**49-50** ■ Evalúe los determinantes.

**49.** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ **50.** $\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

**51-54** ■ Despeje $x$.

**51.** $\begin{vmatrix} x & 12 & 13 \\ 0 & x-1 & 23 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ **52.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

**53.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **54.** $\begin{vmatrix} a & b & x-a \\ x & x+b & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

**55-58** ■ Trace el triángulo con los vértices dados, y use un determinante para hallar su área.

**55.** $(0, 0), (6, 2), (3, 8)$ **56.** $(1, 0), (3, 5), (-2, 2)$

**57.** $(-1, 3), (2, 9), (5, -6)$ **58.** $(-2, 5), (7, 2), (3, -4)$

**59.** Demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$

## APLICACIONES

**60. Compra de fruta** Un puesto de frutas situado a la vera de un camino vende manzanas a \$0.75 la libra, duraznos a \$0.90 la libra y peras a \$0.60 la libra. Muriel compra 18 libras de fruta a un costo total de \$13.80. Sus duraznos y peras juntos costaron \$1.80 más que sus manzanas.

**(a)** Establezca un sistema lineal para hallar el número de libras de manzanas, duraznos y peras que ella compró.

**(b)** Resuelva el sistema usando la Regla de Cramer.

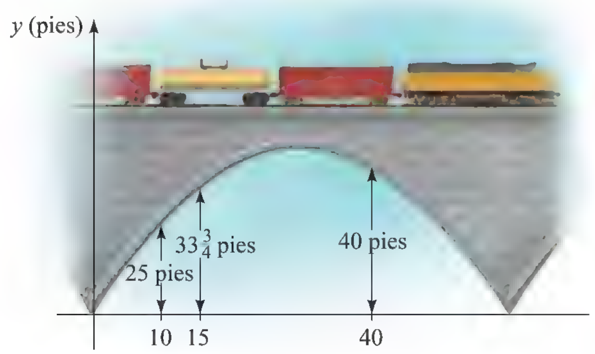
**61. El arco de un puente** La abertura o vano de un puente de ferrocarril sobre una vía es en forma de parábola. Un topógrafo mide las alturas de los tres puntos sobre el puente, como se ilustra en la figura. Él desea hallar una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

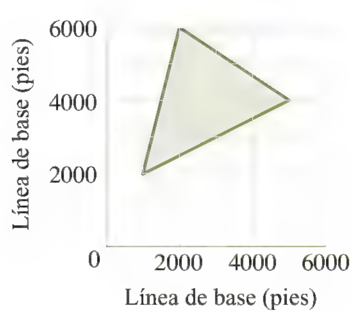
para modelar la forma del arco.

**(a)** Use los puntos medidos para establecer un sistema de ecuaciones lineales y hallar los coeficientes desconocidos $a$, $b$ y $c$.

**(b)** Resuelva el sistema usando la Regla de Cramer.




**62. Un terreno triangular** Un club de deportes al aire libre está comprando un terreno para construir un área de conservación. La última parte que necesitan comprar es el terreno triangular que se ve en la figura. Use la fórmula de determinantes para el área de un triángulo para hallar el área del terreno.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

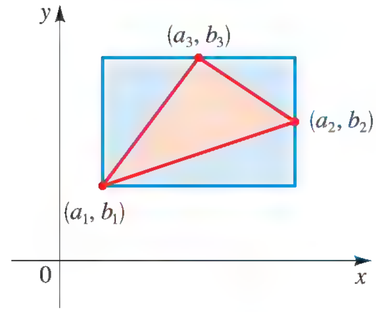
**63. Fórmula de determinantes para el área de un triángulo** La figura siguiente muestra un triángulo en el plano con vértices $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ y $(a_3, b_3)$.

**(a)** Encuentre las coordenadas de los vértices del rectángulo circundante, y encuentre su área.

**(b)** Encuentre el área del triángulo rojo al restar las áreas de los tres triángulos azules del área del rectángulo.

**(c)** Use su respuesta al inciso (b) para demostrar que el área del triángulo rojo está dada por

$$\text{área} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$




**64. Puntos colineales y determinantes**

**(a)** Si tres puntos se encuentran sobre una recta, ¿cuál es el área del "triángulo" que determinan? Use la respuesta a esta pregunta, junto con la fórmula de determinantes para el área de un triángulo, para explicar por qué los puntos $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ y $(a_3, b_3)$ son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**(b)** Use un determinante para comprobar si cada conjunto de puntos es colineal. Grafíquelos para verificar su respuesta.

(i) $(-6, 4), (2, 10), (6, 13)$

(ii) $(-5, 10), (2, 6), (15, -2)$

**65. Forma determinante para la ecuación de una recta**

**(a)** Use el resultado del Ejercicio 64(a) para demostrar que la ecuación de la recta que contiene los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**(b)** Use el resultado del inciso (a) para hallar una ecuación para la recta que contiene los puntos $(20, 50)$ y $(-10, 25)$.

**66. Matrices con determinante cero** Use la definición de determinante y operaciones elementales de renglón y columna para explicar por qué matrices de los tipos siguientes tienen determinante 0.

**(a)** Una matriz con un renglón o columna formada enteramente de ceros

**(b)** Una matriz con dos renglones iguales o dos columnas iguales

**(c)** Una matriz en la que un renglón es un múltiplo de otro renglón, o una columna es un múltiplo de otra columna

**67. Solución de sistemas lineales** Supongamos que el lector tiene que resolver un sistema lineal con cinco ecuaciones y cinco incógnitas, sin ayudarse de calculadora o computadora. ¿Cuál método preferiría: la Regla de Cramer o eliminación de Gauss? Escriba un breve párrafo que explique las razones de su respuesta.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Gráficas por computadora I**

En este proyecto investigamos cómo se usan matrices para manipular imágenes en una pantalla de computadora, al comprimir, alargar, reflejar y cortar. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 10.7 FRACCIONES PARCIALES

Factores lineales distintos ▶ Factores lineales repetidos ▶ Factores cuadráticos irreductibles ▶ Factores cuadráticos irreductibles repetidos

Común denominador →

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{3x}{2x^2 \cdot x \quad 1}$$

← Fracciones parciales

Para escribir una suma o diferencia de expresiones fraccionarias como una sola fracción, buscamos un común denominador. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{(2x+1)+(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{3x}{2x^2-x-1}$$

Pero, para algunas aplicaciones de álgebra para cálculo debemos invertir este proceso, es decir, debemos expresar una fracción como $3x/(2x^2-x-1)$ como la suma de las fracciones más sencillas $1/(x-1)$ y $1/(2x+1)$. Estas fracciones más sencillas reciben el nombre de *fracciones parciales*; en esta sección aprendemos cómo hallarlas.

Sea $r$ la fracción racional

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de $P$ es menor que el de $Q$. Por el Teorema de Factores Lineales y Cuadráticos de la Sección 3.6, todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar completamente en factores cuadráticos lineales e irreductibles, es decir, factores de la forma $ax+b$ y $ax^2+bx+c$, donde $a$, $b$ y $c$ son números reales. Por ejemplo,

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Después de haber factorizado completamente $r$ del denominador $Q$, podemos expresar $r(x)$ como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{y} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Esta suma se llama **descomposición de fracción parcial** de $r$. Examinemos los detalles de cuatro posibles casos.

## ▼ Factores lineales distintos

Primero consideramos el caso en el que el denominador se factoriza en factores lineales distintos.

**CASO 1: EL DENOMINADOR ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES DISTINTOS**

Suponga que podemos factorizar $Q(x)$ como

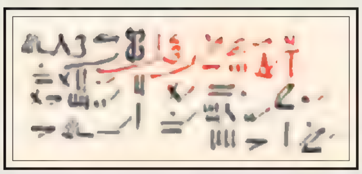
$$Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

sin ningún factor repetido. En este caso la descomposición en fracción parcial de $P(x)/Q(x)$ toma la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

**El papiro de Rhind** es el documento matemático más antiguo. Es un rollo egipcio escrito en 1650 a.C. por el escriba Ahmes, que explica que es una copia exacta de un rollo escrito 200 años antes. Ahmes dice que su papiro contiene "un estudio completo de todas las cosas, idea de todo lo que existe, conocimiento de todos los oscuros secretos". En realidad, el documento contiene reglas aritméticas que incluyen multiplicación y división de fracciones y varios ejercicios con soluciones. El ejercicio mostrado aquí dice: "Un montón y su séptimo hacen 19; ¿qué tan grande es el montón?" Para resolver problemas de este tipo, los egipcios usaban fracciones parciales porque su sistema numérico requería que todas las fracciones se escribieran como sumas de recíprocos de números enteros. Por ejemplo, $\frac{7}{12}$ se escribiría como $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

El papiro da una fórmula correcta para el volumen de una pirámide truncada, que los antiguos egipcios usaban cuando construyeron las pirámides de Giza. También da la fórmula $A = (\frac{8}{9}d)^2$ para el área de un círculo con diámetro $d$. ¿Qué tan cercano es esto al área real?



Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se determinan como en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 1 | Factores lineales distintos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

**SOLUCIÓN** El denominador se factoriza como sigue.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= x^2(x + 2) - (x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

Esto nos da la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Multiplicando cada lado por el común denominador, $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= A(x + 1)(x + 2) + B(x - 1)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1) \\ &= A(x^2 + 3x + 2) + B(x^2 + x - 2) + C(x^2 - 1) && \text{Expanda} \\ &= (A + B + C)x^2 + (3A + B)x + (2A - 2B - C) && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

Si dos polinomios son iguales, entonces sus coeficientes son iguales. Así, como $5x + 7$ no tiene término en $x^2$, tenemos $A + B + C = 0$. Del mismo modo, comparando los coeficientes de $x$ vemos que $3A + B = 5$, y al comparar términos constantes obtenemos $2A - 2B - C = 7$. Esto lleva al siguiente sistema de ecuaciones lineales para $A$, $B$ y $C$.

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & \text{Ecuación 1: Coeficientes de } x^2 \\ 3A + B \quad = 5 & \text{Ecuación 2: Coeficientes de } x \\ 2A \quad 2B \quad C = 7 & \text{Ecuación 3: Coeficientes constantes} \end{cases}$$

Usamos eliminación de Gauss para resolver este sistema.

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & \\ -2B - 3C = 5 & \text{Ecuación 2} + (-3) \times \text{Ecuación 1} \\ -4B - 3C = 7 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{Ecuación 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 & \\ -2B - 3C = 5 & \\ 3C = -3 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

De la tercera ecuación obtenemos $C = -1$. Sustituyendo a la inversa, encontramos que $B = -1$ y $A = 2$. Entonces, la descomposición en fracción parcial es

$$\frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{2}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 2}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **13**

El mismo método funciona en los casos restantes. Establecemos descomposición en fracciones parciales con las constantes desconocidas $A$, $B$, $C$,.... Entonces multiplicamos cada lado de la ecuación resultante por el común denominador, simplificamos el lado derecho de la ecuación e igualamos coeficientes. Esto da un conjunto de ecuaciones lineales que siempre tendrán una solución única (siempre que la descomposición en fracciones parciales se haya establecido correctamente).

## Factores lineales repetidos

A continuación consideramos el caso en el que el denominador se factoriza en factores lineales, algunos de los cuales son repetidos.

**CASO 2: EL DENOMINADOR ES UN PRODUCTO DE FACTORES LINEALES, ALGUNOS DE LOS CUALES SON REPETIDOS**

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene el factor lineal $ax + b$ repetido $k$ veces; esto es, $(ax + b)^k$ es un factor de $Q(x)$. Entonces, correspondiendo a cada factor, la descomposición en fracciones parciales para $P(x)/Q(x)$ contiene

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

## EJEMPLO 2 | Factores lineales repetidos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^2 + 1}{x(x - 1)^3}$.

**SOLUCIÓN** Como el factor $x - 1$ está repetido tres veces en el denominador, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} + \frac{D}{(x - 1)^3}$$

Multiplicando cada lado por el común denominador, $x(x - 1)^3$, da

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= A(x - 1)^3 + Bx(x - 1)^2 + Cx(x - 1) + Dx \\ &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + C(x^2 - x) + Dx && \text{Expanda} \\ &= (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A && \text{Combine términos semejantes} \end{aligned}$$

Igualando coeficientes, obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{Coeficientes de } x^3 \\ -3A - 2B + C = 1 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ 3A + B - C + D = 0 & \text{Coeficientes de } x \\ -A = 1 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

Si reacomodamos estas ecuaciones al poner la última en la primera posición, fácilmente podemos ver (usando sustitución) que la solución del sistema es $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, de modo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2 + 1}{x(x - 1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^3}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **29**

## Factores cuadráticos irreductibles

Ahora consideramos el caso en el que el denominador tiene factores cuadráticos irreductibles distintos.

**CASO 3: EL DENOMINADOR TIENE FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES, NINGUNO DE LOS CUALES ESTÁ REPETIDO**

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene el factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ (que no se puede factorizar más). Entonces, en correspondencia con esto, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

### EJEMPLO 3 | Factores cuadráticos distintos

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$.

**SOLUCIÓN** Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, que no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Igualando coeficientes tendremos las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 2 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ C = -1 & \text{Coeficientes de } x \\ 4A = 4 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **37**

## Factores cuadráticos irreductibles repetidos

A continuación consideramos el caso en el que el denominador tiene factores cuadráticos irreductibles, algunos de los cuales están repetidos.

**CASO 4: EL DENOMINADOR TIENE UN FACTOR CUADRÁTICO IRREDUCTIBLE REPETIDO**

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene el factor $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ no se pueden factorizar más. Entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

### EJEMPLO 4 | Factores cuadráticos repetidos

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

**SOLUCIÓN**

$$\begin{aligned} &\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3} \\ &\quad = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 + 2} + \frac{Hx + I}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Jx + K}{(x^2 + 2)^3} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **41**

Para hallar los valores de $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ y $K$ en el Ejemplo 4, tendríamos que resolver un sistema de 11 ecuaciones lineales. Aun cuando es posible, esto ciertamente requeriría de una gran cantidad de trabajo.

Las técnicas que hemos descrito en esta sección aplican sólo a funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las que el grado de $P$ es menor que el grado de $Q$. Si éste no es el caso, primero debemos usar división larga para dividir $Q$ en $P$.

### EJEMPLO 5 | Uso de división larga para preparar para fracciones parciales

Encuentre la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

**SOLUCIÓN** Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, usamos división larga para obtener

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 \overline{\smash{)}\,2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7} \\ 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x \\ \hline 5x + 7 \end{array}$$

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

El término restante ahora satisface el requisito de que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. En este punto proseguimos como en el Ejemplo 1 para obtener la descomposición

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{2}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43** ■

## 10.7 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ Para cada función racional $r$, escoja de (i)-(iv) la forma apropiada para su descomposición en fracciones parciales.

**1.** $r(x) = \dfrac{4}{x(x - 2)^2}$

(i) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2}$ (ii) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{(x - 2)^2}$

(iii) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{C}{(x - 2)^2}$ (iv) $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{Cx + D}{(x - 2)^2}$

**2.** $r(x) = \dfrac{2x + 8}{(x - 1)(x^2 + 4)}$

(i) $\dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x^2 + 4}$

(ii) $\dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 4}$

(iii) $\dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 2} + \dfrac{C}{x^2 + 4}$

(iv) $\dfrac{Ax + B}{x - 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 4}$

### HABILIDADES

**3-12** ■ Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función (como en el Ejemplo 4). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

**3.** $\dfrac{1}{(x - 1)(x + 2)}$ **4.** $\dfrac{x}{x^2 + 3x - 4}$

**5.** $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{(x - 2)^2(x + 4)}$ **5.** $\dfrac{1}{x^4 - x^3}$

**7.** $\dfrac{x^2}{(x - 3)(x^2 + 4)}$ **8.** $\dfrac{1}{x^4 - 1}$

**9.** $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$ **10.** $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2(x^2 + 4)^2}$

**11.** $\dfrac{x^3 + x + 1}{x(2x - 5)^3(x^2 + 2x + 5)^2}$ **12.** $\dfrac{1}{(x^3 - 1)(x^2 - 1)}$

**13-44** ■ Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

**13.** $\dfrac{2}{(x - 1)(x + 1)}$ **14.** $\dfrac{2x}{(x - 1)(x + 1)}$

**15.** $\dfrac{5}{(x-1)(x+4)}$

**16.** $\dfrac{x+6}{x(x+3)}$

**17.** $\dfrac{12}{x^2-9}$

**18.** $\dfrac{x-12}{x^2-4x}$

**19.** $\dfrac{4}{x^2-4}$

**20.** $\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$

**21.** $\dfrac{x+14}{x^2-2x-8}$

**22.** $\dfrac{8x-3}{2x^2-x}$

**23.** $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$

**24.** $\dfrac{7x-3}{x^3+2x^2-3x}$

**25.** $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

**26.** $\dfrac{-3x^2-3x+27}{(x+2)(2x^2+3x-9)}$

**27.** $\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$

**28.** $\dfrac{3x^2+5x-13}{(3x+2)(x^2-4x+4)}$

**29.** $\dfrac{2x}{4x^2+12x+9}$

**30.** $\dfrac{x-4}{(2x-5)^2}$

**31.** $\dfrac{4x^2-x-2}{x^4+2x^3}$

**32.** $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

**33.** $\dfrac{-10x^2+27x-14}{(x-1)^3(x+2)}$

**34.** $\dfrac{-2x^2+5x-1}{x^4-2x^3+2x-1}$

**35.** $\dfrac{3x^3+22x^2+53x+41}{(x+2)^2(x+3)^2}$

**36.** $\dfrac{3x^2+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

**37.** $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$

**38.** $\dfrac{3x^2-2x+8}{x^3-x^2+2x-2}$

**39.** $\dfrac{2x^3+7x+5}{(x^2+x+2)(x^2+1)}$

**40.** $\dfrac{x^2+x+1}{2x^4+3x^2+1}$

**41.** $\dfrac{x^4+x^3+x^2-x+1}{x(x^2+1)^2}$

**42.** $\dfrac{2x^2-x+8}{(x^2+4)^2}$

**43.** $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

**44.** $\dfrac{x^5-3x^4+3x^3-4x^2+4x+12}{(x-2)^2(x^2+2)}$

**45.** Determine $A$ y $B$ en términos de $a$ y $b$.

$$\frac{ax+b}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

**46.** Determine $A$, $B$, $C$ y $D$ en términos de $a$ y $b$.

$$\frac{ax^3+bx^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**47. Reconocimiento de descomposiciones en fracciones parciales** Para cada expresión, determine si ya es una descomposición en fracciones parciales o si puede descomponerse más.

**(a)** $\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x+1}$ **(b)** $\dfrac{x}{(x+1)^2}$

**(c)** $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2}$ **(d)** $\dfrac{x+2}{(x^2+1)^2}$

**48. Ensamble y desensamble de fracciones parciales** La siguiente expresión es una descomposición en fracciones parciales

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

Use un común denominador para combinar los términos en una fracción. A continuación, use las técnicas de esta sección para hallar su descomposición en fracciones parciales. ¿Obtuvo usted de nuevo la expresión original?

# 10.8 SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Métodos de sustitución y eliminación ▶ Método gráfico

En esta sección resolvemos sistemas de ecuaciones en las que las ecuaciones no son todas lineales. Los métodos que aprendimos en la Sección 10.1 también se pueden usar para resolver sistemas no lineales.

## ▼ Métodos de sustitución y eliminación

Para resolver un sistema de ecuaciones no lineales, podemos usar el método de sustitución o eliminación, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

### EJEMPLO 1 | Método de sustitución

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - y = 10 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

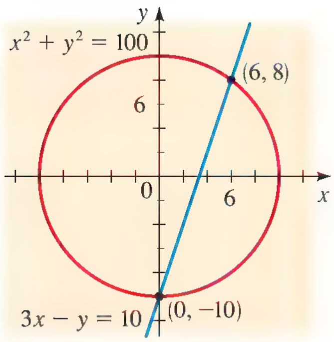



**FIGURA 1**

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \checkmark$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \checkmark$$

**SOLUCIÓN** Despeje una variable. Empezamos por despejar $y$ de la segunda ecuación:

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despejamos } y \text{ de la Ecuación 2}$$

Sustituya. A continuación sustituimos $y$ en la primera ecuación y despejamos $x$:

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustituya } y = 3x - 10 \text{ en la Ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Expanda} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplifique} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorice} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad x &= 6 && \text{Despeje } x \end{aligned}$$

Sustituya. Ahora sustituimos de nuevo estos valores de $x$ en la ecuación $y = 3x - 10$:

$$\begin{aligned} &\text{Para } x = 0: && y = 3(0) - 10 = -10 && \text{Sustitución hacia atrás} \\ &\text{Para } x = 6: && y = 3(6) - 10 = 8 && \text{Sustitución hacia atrás} \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; la Figura 1 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## EJEMPLO 2 | Método de eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 26 & \text{Ecuación 1} \\ 5x^2 + 7y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

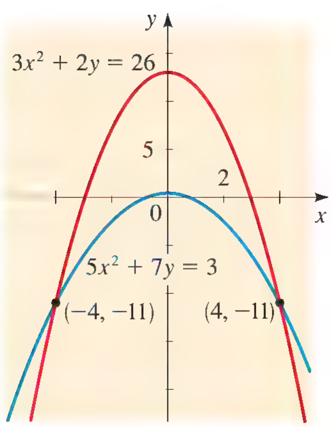



**FIGURA 2**

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = -4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(-4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(-4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

$x = 4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \checkmark$$

**SOLUCIÓN** Escogemos eliminar el término en $x$, de modo que multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por $-3$. A continuación sumamos las dos ecuaciones y despejamos $y$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 15x^2 + 10y = 130 \\ -15x^2 - 21y = -9 \end{cases} && \begin{aligned} &5 \times \text{Ecuación 1} \\ &(-3) \times \text{Ecuación 2} \end{aligned} \\ -11y = 121 && \text{Sumamos} \\ y = -11 && \text{Despejamos } y \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $y = -11$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo $3x^2 + 2y = 26$ y despejamos $x$.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2(-11) &= 26 && \text{Sustituya } y = -11 \text{ en la Ecuación 1} \\ 3x^2 &= 48 && \text{Sumamos 22} \\ x^2 &= 16 && \text{Dividamos entre 3} \\ x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 4 && \text{Despejamos } x \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Las gráficas de ambas ecuaciones son parábolas (vea Sección 3.1). La Figura 2 muestra que las gráficas se cruzan en los dos puntos $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## ▼ Método gráfico

El método gráfico es particularmente útil para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

### EJEMPLO 3 | Método gráfico

Encuentre todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Grafique cada ecuación. Despejando $y$ en términos de $x$, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Encuentre puntos de intersección. La Figura 3 muestra que las gráficas de estas ecuaciones se cruzan en dos puntos. Si hacemos acercamiento, vemos que las soluciones son

$$(-1, -1) \quad \text{y} \quad (3, 7)$$

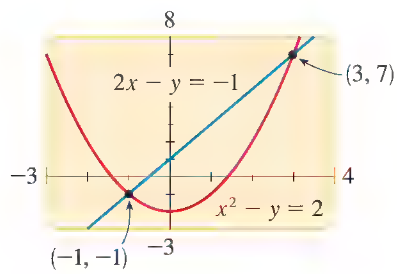



**FIGURA 3**

**VERIFIQUE SUS RESPUESTAS**

$x = -1, y = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) = 2 \\ 2(-1) - (-1) = -1 \end{cases} \checkmark$$

$x = 3, y = 7$:

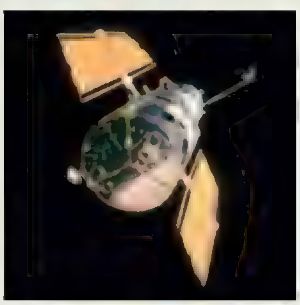
$$\begin{cases} 3^2 - 7 = 2 \\ 2(3) - 7 = -1 \end{cases} \checkmark$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

---

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

### Sistema de Posicionamiento Global (GPS)



Cortesía de NASA

En un día frío y con niebla en 1707 una flota naval inglesa navegaba hacia su puerto de base a paso rápido. Los navegantes de la flota no lo sabían, pero estaban a sólo unas pocas yardas de las rocosas costas de Inglaterra; en el consiguiente desastre la flota quedó totalmente destruida, tragedia que pudo haberse evitado si sus navegantes hubieran conocido sus posiciones. En aquellos días, la latitud se determinaba por la posición de la Estrella Polar (y esto podía hacerse sólo de noche y con buen clima), y la longitud por la posición del Sol con respecto a donde estaría en Inglaterra *a la misma hora*. En consecuencia, la navegación requería de un método preciso de conocer la hora en sus barcos. (La invención de relojes accionados por un resorte produjo la solución final.)

Desde entonces, se han perfeccionado varios métodos diferentes para determinar la posición y todos se apoyan fuertemente en las matemáticas (vea LORAN, página 747). El método más reciente, llamado Sistema de Posicionamiento Global (GPS), utiliza triangulación. En este sistema, 24 satélites están estratégicamente ubicados sobre la superficie terrestre. Un aparato portátil de GPS mide la distancia desde un satélite, usando el tiempo de transmisión de señales de radio emitidas desde el satélite. El conocimiento de las distancias a tres satélites diferentes nos indica que estamos en el punto de intersección de tres esferas diferentes. Esto determina de manera única nuestra posición (vea Ejercicio 47, página 703).

## EJEMPLO 4 | Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Encuentre todas las soluciones del sistema, correctas a un lugar decimal.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & \text{Ecuación 1} \\ y = 2x^2 - 5x & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda es una parábola. Para graficar la circunferencia en una calculadora graficadora primero debemos despejar $y$ en términos de $x$ (vea Sección 1.9).

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 12 - x^2 \qquad \text{Aísle } y^2 \text{ en el lado izquierdo}$$

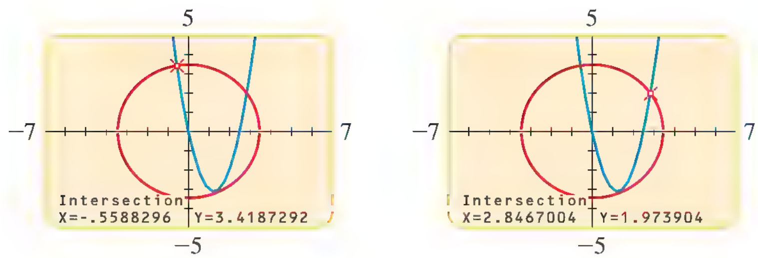
$$y = \pm\sqrt{12 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para graficar la circunferencia, debemos graficar ambas funciones.

$$y = \sqrt{12 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{12 - x^2}$$

En la Figura 4 la gráfica de la circunferencia se muestra en rojo, y la parábola se ve en azul. Las gráficas se cruzan en los cuadrantes primero y segundo. Con un acercamiento, o usando el comando `Intersect`, vemos que los puntos de intersección son $(-0.599, 3.419)$ y $(2.847, 1.974)$. También parece haber un punto de intersección en el cuarto cuadrante, pero, cuando hacemos acercamiento, vemos que las curvas se acercan entre sí pero no se cruzan (vea Figura 5). Entonces el sistema tiene dos soluciones; redondeadas al décimo más cercano, son

$$(-0.6, 3.4) \qquad \text{y} \qquad (2.8, 2.0)$$




(a) (b)

**FIGURA 4** $x^2 + y^2 = 12,\ y = 2x^2 - 5x$

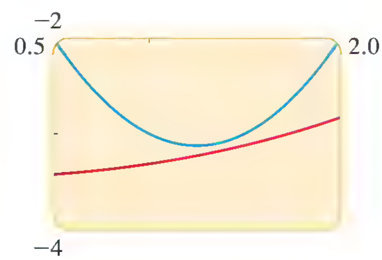



**FIGURA 5** Acercamiento

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

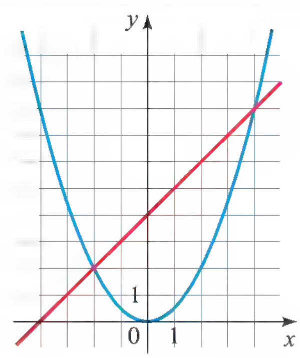
## 10.8 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

está graficado a la derecha.




**1.** Use la gráfica para hallar la(s) solución(es) del sistema.

**2.** Verifique que las soluciones que encontró en el Ejercicio 1 satisfagan el sistema.

## HABILIDADES

**3-8** ■ Use el método de sustitución para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

**3.** $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 12 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x^2 + y = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y^2 = 75 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x^2 + 3y = 17 \end{cases}$

**9-14** ■ Use el método de eliminación para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

**9.** $\begin{cases} x^2 - 2y = 1 \\ x^2 + 5y = 29 \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 17 \\ 2x^2 + 5y = 2 \end{cases}$

**11.** $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} 2x^2 + 4y = 13 \\ x^2 - y^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

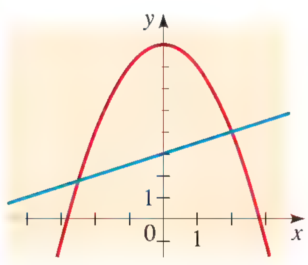
**13.** $\begin{cases} x - y^2 + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

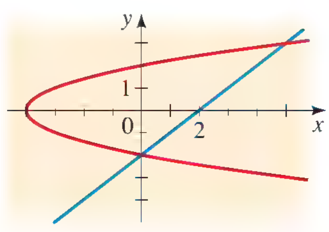
**14.** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 = x + 3 \end{cases}$

**15-18** ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas al resolver el sistema.

**15.** $\begin{cases} x^2 + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

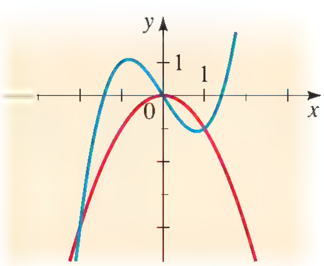
**16.** $\begin{cases} x - y^2 = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

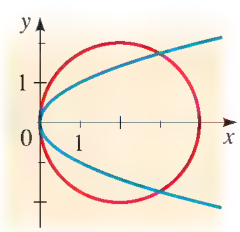



**17.** $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^3 - 2x - y = 0 \end{cases}$

**18.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = y^2 \end{cases}$




**19-32** ■ Encuentre todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

**19.** $\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ y + 4x = 16 \end{cases}$

**20.** $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$

**21.** $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y^2 - x^2 = 2x + 4 \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12 \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} xy = 24 \\ 2x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} x^2y = 16 \\ x^2 + 4y + 16 = 0 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 0 \\ y^2 - 4x^2 = 12 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x^2 - 3y = 15 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} 2x^2 - 8y^3 = 19 \\ 4x^2 + 16y^3 = 34 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} x^4 + y^3 = 17 \\ 3x^4 + 5y^3 = 53 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} = 1 \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{y^4} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{y^4} = 0 \end{cases}$

**33-40** ■ Use el método gráfico para hallar todas las soluciones del sistema de ecuaciones, redondeadas a dos lugares decimales.

**33.** $\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = 2x + 16 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - 2x + y^2 = 13 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1 \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32 \\ x^2 + 2x + y = 0 \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} y = e^x + e^{-x} \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$

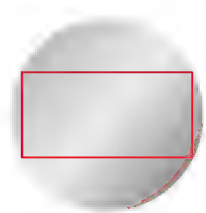
## APLICACIONES

**41. Lados de un rectángulo** Un rectángulo tiene un área de 180 $cm^2$ y un perímetro de 54 cm. ¿Cuáles son las longitudes de sus lados?

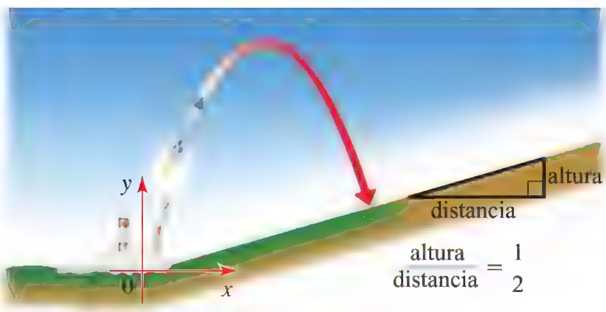
**42. Catetos de un triángulo rectángulo** Un triángulo rectángulo tiene un área de 84 $pies^2$ y una hipotenusa de 25 pies de largo. ¿Cuáles son las longitudes de sus otros dos lados?

**43. Lados de un rectángulo** El perímetro de un rectángulo es 70, y su diagonal es 25. Encuentre su longitud y ancho.

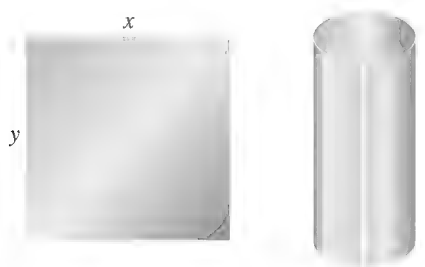
**44. Lados de un rectángulo** Una hoja metálica circular tiene un diámetro de 20 pulgadas. Los lados han de cortarse para formar un rectángulo de 160 $pulg.^2$ de área (vea figura). ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo?



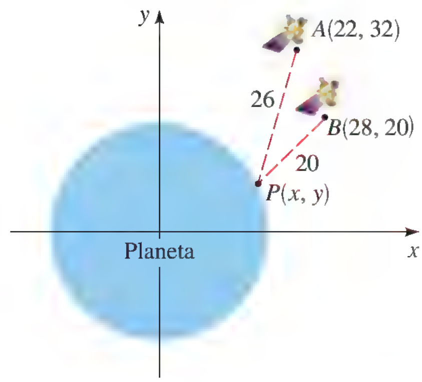
**45. Vuelo de un cohete** Una colina está inclinada de modo que su “pendiente” es $\frac{1}{2}$, como se ve en la figura siguiente. Introducimos un sistema de coordenadas con el origen en la base de la colina y con las escalas en los ejes medidas en metros. Un cohete es lanzado desde la base de la colina de forma tal que su trayectoria es la parábola $y = -x^2 + 401x$. ¿En qué punto cae el cohete en la ladera? ¿A qué distancia está este punto de la colina (al centímetro más cercano)?




**46. Construcción de una chimenea de estufa** Una hoja metálica rectangular con área de 1200 pulg.$^2$ ha de doblarse en una sección cilíndrica de chimenea de estufa con volumen de 600 pulg.$^3$ ¿Cuáles son las longitudes de los lados de la hoja metálica?




**47. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)** El Sistema de Posicionamiento Global determina la ubicación de un objeto a partir de sus distancias a satélites en órbita alrededor de nuestro planeta. En la situación bidimensional simplificada que se ve en la figura siguiente, determine las coordenadas de $P$ por el hecho de que $P$ está a 26 unidades del satélite A y 20 unidades del satélite B.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**48. Intersección de una parábola y una recta** En una hoja de papel de gráficas, o usando calculadora electrónica, trace la parábola $y = x^2$. A continuación trace las gráficas de la ecuación lineal $y = x + k$ en el mismo plano de coordenadas para varios valores de $k$. Trate de escoger valores de $k$ para que la recta y la parábola se crucen en dos puntos para algunos de los valores de $k$ y no para otros. ¿Para qué valor de $k$ hay exactamente un punto de intersección? Use los resultados de su experimento para hacer una conjetura acerca de los valores de $k$ para los que el sistema siguiente tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución. Demuestre su conjetura.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + k \end{cases}$$

**49. Algunos sistemas más engañosos** Siga las sugerencias y resuelva los sistemas.

**(a)** $\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ 2 \log x - \log y = 0 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones.]

**(b)** $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 4^x + 4^y = 68 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Nótese que $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$.]

**(c)** $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 387 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Factorice el lado izquierdo de la segunda ecuación.]

**(d)** $\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ xy + y^2 = 3 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones y factorice el resultado.]

# 10.9 SISTEMAS DE DESIGUALDADES

Gráfica de una desigualdad ▶ Sistemas de desigualdades ▶ Sistemas de desigualdades lineales ▶ Aplicación: regiones factibles

En esta sección estudiamos sistemas de desigualdades con dos variables desde un punto de vista gráfico.

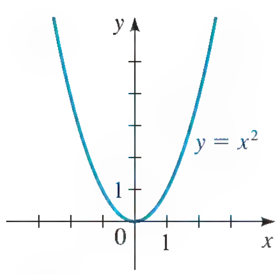



**FIGURA 1**

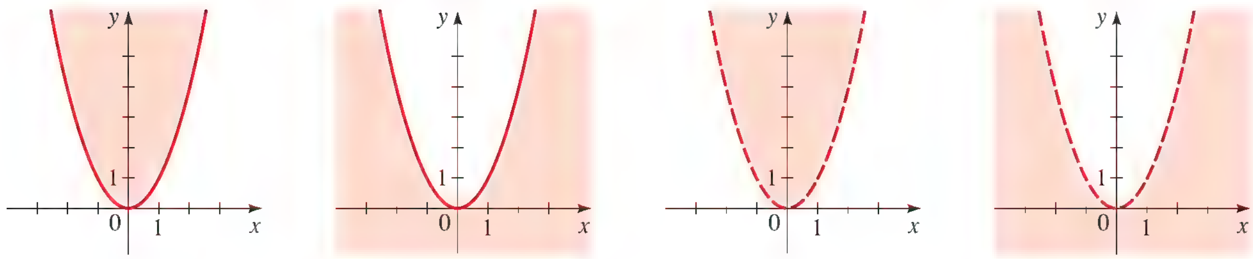
## ▼ Gráfica de una desigualdad

Empezamos por considerar la gráfica de una sola desigualdad. Ya sabemos que la gráfica de $y = x^2$, por ejemplo, es la *parábola* de la Figura 1. Si sustituimos el signo igual por el símbolo $\geq$, obtenemos la *desigualdad*

$$y \geq x^2$$

Su gráfica está formada no sólo por la parábola de la Figura 1, sino también por todo punto cuya coordenada $y$ sea *más grande* que $x^2$. Indicamos la solución en la Figura 2(a) sombreando los puntos *arriba* de la parábola.

Análogamente, la gráfica de $y \leq x^2$ en la Figura 2(b) está formada por todos los puntos en y *debajo de* la parábola. No obstante, las gráficas de $y > x^2$ y $y < x^2$ no incluyen los puntos en la parábola en sí, como está indicado por las curvas de líneas interrumpidas de las Figuras 2(c) y 2(d).



(a) $y \geq x^2$ (b) $y \leq x^2$ (c) $y > x^2$ (d) $y < x^2$

**FIGURA 2**

La gráfica de una desigualdad, en general, consta de una región del plano cuyo límite es la gráfica de la ecuación obtenida al sustituir el signo de desigualdad ($\geq$, $\leq$, $>$ o $<$) por un signo igual. Para determinar cuál lado de la gráfica da el conjunto de solución de la desigualdad, necesitamos sólo verificar **puntos de prueba**.

### GRÁFICA DE DESIGUALDADES

Para graficar una desigualdad, ejecutamos los siguientes pasos.

1. **Graficar la ecuación.** Grafique la ecuación correspondiente a la desigualdad. Use la curva interrumpida para $>$ o $<$ y una curva continua para $\leq$ o $\geq$.
2. **Pruebe puntos.** Pruebe un punto en cada región formada por la gráfica del Paso 1. Si el punto satisface la desigualdad, entonces todos los puntos en esa región satisfacen la desigualdad. (En ese caso, se debe sombrear la región para indicar que es parte de la gráfica.) Si el punto de prueba no satisface la desigualdad, entonces la región no es parte de la gráfica.

## EJEMPLO 1 | Gráficas de desigualdades

Grafique cada una de las desigualdades siguientes.

**(a)** $x^2 + y^2 < 25$ **(b)** $x + 2y \geq 5$

### SOLUCIÓN

**(a)** La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Los puntos en la circunferencia misma no satisfacen la desigualdad porque es de la forma $<$, de modo que graficamos la circunferencia con una curva interrumpida, como se ve en la Figura 3.

Para determinar si el interior o el exterior de la circunferencia satisface la desigualdad, usamos los puntos de prueba (0, 0) en el interior y (6, 0) en el exterior. Para hacer esto, sustituimos las coordenadas de cada punto en la desigualdad y comprobamos si el resultado satisface la desigualdad. (Observe que *cualquier* punto dentro o fuera de la circunferencia pueden servir como punto de prueba. Hemos escogido estos puntos para mayor sencillez.)

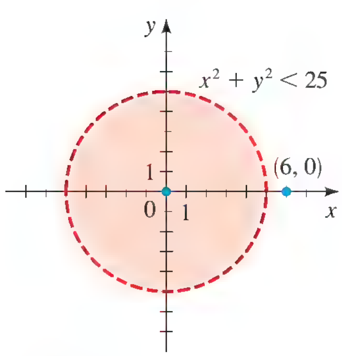



**FIGURA 3**

| Punto de prueba | $x^2 + y^2 < 25$ | Conclusión |
|---|---|---|
| (0, 0) | $0^2 + 0^2 = 0 < 25$ | Parte de gráfica |
| (6, 0) | $6^2 + 0^2 = 36 \not< 25$ | No es parte de gráfica |

Entonces, la gráfica de $x^2 + y^2 < 25$ es el conjunto de todos los puntos *dentro* de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ (vea Figura 3).

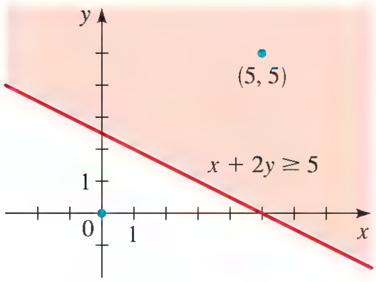



**FIGURA 4**

**(b)** La gráfica de $x + 2y = 5$ es la recta mostrada en la Figura 4. Usamos los puntos de prueba (0, 0) y (5, 5) en lados opuestos de la recta.

| Punto de prueba | $x + 2y \geq 5$ | Conclusión |
|---|---|---|
| (0, 0) | $0 + 2(0) = 0 \not\geq 5$ | No es parte de gráfica |
| (5, 5) | $5 + 2(5) = 15 \geq 5$ | Parte de gráfica |

Nuestra prueba muestra que los puntos *arriba* de la recta satisfacen la desigualdad.

En forma opcional, podríamos poner la desigualdad en forma de pendiente e intersección y graficarla directamente:

$$x + 2y \geq 5$$
$$2y \geq -x + 5$$
$$y \geq -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

De esta forma vemos que la gráfica incluye todos los puntos cuyas coordenadas $y$ son *más grandes* que las de la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; esto es, la gráfica está formada por los puntos *en o arriba* de esta recta, como se muestra en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **15**

## Sistemas de desigualdades

A continuación consideramos *sistemas* de desigualdades. La solución de tal sistema es el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas que satisface toda desigualdad del sistema.

### EJEMPLO 2 | Un sistema de dos desigualdades

Grafique la solución del sistema de desigualdades y asigne coordenadas a sus vértices.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN** Éstas son las dos desigualdades del Ejemplo 1. En este ejemplo deseamos graficar sólo aquellos puntos que simultáneamente satisfagan ambas desigualdades. La solución está formada por la intersección de las gráficas del Ejemplo 1. En la Figura 5(a) mostramos las dos regiones en el mismo plano de coordenadas (en colores diferentes), y en la Figura 5(b) mostramos su intersección.

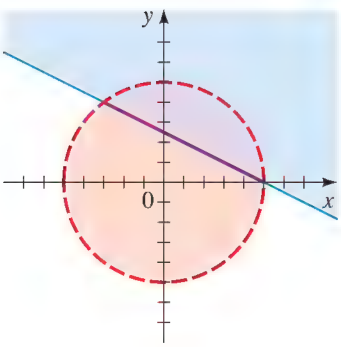
**Vértices** Los puntos $(-3, 4)$ y $(5, 0)$ de la Figura 5(b) son los **vértices** del conjunto de solución. Se obtienen al resolver el sistema de *ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

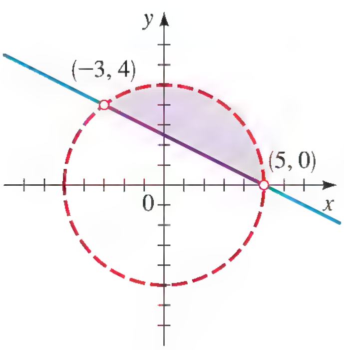
Resolvemos este sistema de ecuaciones por sustitución. Despejando $x$ en la segunda ecuación tendremos $x = 5 - 2y$, y sustituyendo esto en la primera ecuación resulta

$$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25 \qquad \text{Sustituya } x = 5 - 2y$$
$$(25 - 20y + 4y^2) + y^2 = 25 \qquad \text{Expanda}$$
$$-20y + 5y^2 = 0 \qquad \text{Simplifique}$$
$$-5y(4 - y) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

Así, $y = 0$ o $y = 4$. Cuando $y = 0$, tenemos $x = 5 - 2(0) = 5$, y cuando $y = 4$ tenemos $x = 5 - 2(4) = -3$. Por lo tanto, los puntos de intersección de estas curvas son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$.




(a)




(b)

**FIGURA 5** $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$

Observe que en este caso los vértices no son parte del conjunto de solución, porque no satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 25$ (por lo cual están graficados como círculos abiertos en la figura). Simplemente muestran en dónde están las "esquinas" del conjunto de solución.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

## Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si se puede poner en una de las formas siguientes:

$$ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by > c \qquad ax + by < c$$

En el siguiente ejemplo graficamos el conjunto de solución de un sistema de desigualdades lineales.

### EJEMPLO 3 | Un sistema de cuatro desigualdades lineales

Grafique el conjunto de solución del sistema y asigne coordenadas a sus vértices.

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + \phantom{3}y \leq 8 \\ \phantom{x + 3}x \geq 0 \\ \phantom{x + 3}y \geq 0 \end{cases}$$

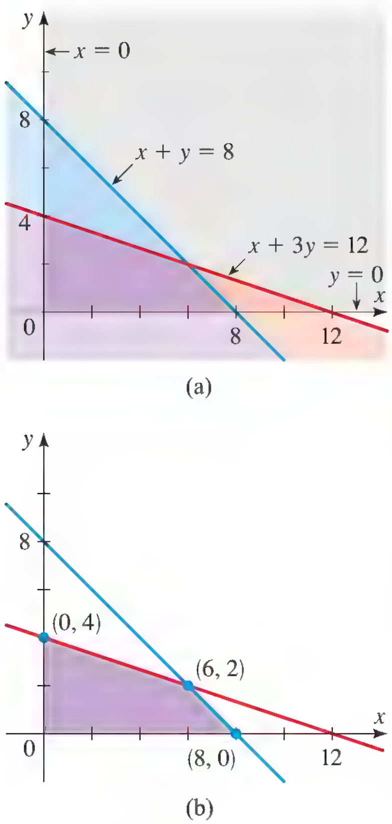



**FIGURA 6**

**SOLUCIÓN** En la Figura 6 primero graficamos las rectas dadas por las ecuaciones que corresponden a cada desigualdad. Para determinar las gráficas de las desigualdades lineales, necesitamos comprobar sólo un punto de prueba. Para mayor sencillez usemos el punto (0, 0).

| Desigualdad | Punto de prueba (0, 0) | Conclusión |
|---|---|---|
| $x + 3y \leq 12$ | $0 + 3(0) = 0 \leq 12$ | Satisface desigualdad |
| $x + y \leq 8$ | $0 + 0 = 0 \leq 8$ | Satisface desigualdad |

Como (0, 0) está debajo de la recta $x + 3y = 12$, nuestra prueba muestra que la región en la recta o debajo de ésta debe satisfacer la desigualdad. Del mismo modo, como (0, 0) está debajo de la recta $x + y = 8$, nuestra prueba muestra que la región en la recta o debajo de ésta debe satisfacer la desigualdad. Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ dicen que $x$ y $y$ son no negativos. Estas regiones están trazadas en la Figura 6(a) y la intersección, o sea conjunto de solución, está trazada en la Figura 6(b).

**Vértices** Las coordenadas de cada vértice se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones de las rectas que se cruzan en ese vértice. Del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x + \phantom{3}y = \phantom{1}8 \end{cases}$$

obtenemos el vértice (6, 2). El origen (0, 0) claramente también es un vértice. Los otros dos vértices están en los puntos de intersección $x$ y $y$ de las rectas correspondientes: (8, 0) y (0, 4). En este caso todos los vértices *son* parte del conjunto de solución.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

### EJEMPLO 4 | Un sistema de desigualdades lineales

Grafique el conjunto de solución del sistema

$$\begin{cases} \phantom{-}x + 2y \geq 8 \\ -x + 2y \leq 4 \\ \phantom{-}3x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

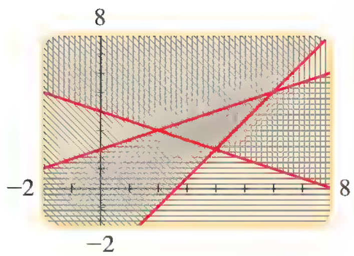


**FIGURA 7**

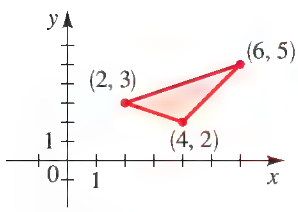



**FIGURA 8**

**SOLUCIÓN** Debemos graficar las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones apropiadas, como en el Ejemplo 3. Usaremos una calculadora graficadora, de modo que debemos primero aislar $y$ en el lado izquierdo de cada desigualdad.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$$

Usando la función de sombrear de la calculadora, obtenemos la gráfica de la Figura 7. El conjunto de solución es la región triangular que está sombreada en los tres patrones. A continuación usamos TRACE o el comando `Intersect` para hallar los vértices de la región. El conjunto de solución está graficado en la Figura 8.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

Cuando una región del plano pueda ser cubierta por un círculo (suficientemente grande), se dice que está **limitada**. Una región que no está limitada se denomina **no limitada**. Por ejemplo, las regiones graficadas en las Figuras 3, 5(b), 6(b) y 8 son limitadas, mientras que las de las Figuras 2 y 4 son no limitadas. Una región no limitada no puede ser "rodeada por una cerca", porque se prolonga infinitamente en al menos una dirección.

## Aplicación: regiones factibles

Numerosos problemas aplicados involucran *restricciones* en las variables. Por ejemplo, el gerente de una fábrica tiene sólo cierto número de trabajadores que pueden ser asignados para ejecutar trabajos en el piso de la fábrica. Un agricultor que determina cuáles cosechas cultivar tiene sólo cierta cantidad de tierras que pueda sembrar. Estas restricciones o limitaciones pueden expresarse fácilmente como sistemas de desigualdades. Cuando trabajemos con desigualdades aplicadas, por lo general nos referimos al conjunto de solución de un sistema como una *región factible,* porque los puntos del conjunto de solución representan valores factibles (o posibles) para las cantidades que están bajo estudio.

### EJEMPLO 5 | Restricción de salidas de contaminantes

Una fábrica produce dos plaguicidas agrícolas, A y B. Por cada barril de A, la fábrica emite 0.25 kg de monóxido de carbono (CO) y 0.60 kg de dióxido de azufre ($SO_2$); y por cada barril de B, emite 0.50 kg de CO y 0.20 de $SO_2$. Las leyes contra la contaminación restringen la salida de CO de la fábrica a un máximo de 75 kg y de $SO_2$ a un máximo de 90 kg por día.

**(a)** Encuentre un sistema de desigualdades que describa el número de barriles de cada plaguicida que la fábrica pueda producir y todavía satisfacer las leyes contra la contaminación. Grafique la región factible.

**(b)** ¿Sería legal que la fábrica produzca 100 barriles de A y 80 barriles de B por día?

**(c)** ¿Sería legal que la fábrica produzca 60 barriles de A y 160 barriles de B por día?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Para establecer las desigualdades requeridas, es útil organizar la información dada en una tabla.

| | A | B | Máximo |
|---|---|---|---|
| **CO (kg)** | 0.25 | 0.50 | 75 |
| **$SO_2$ (kg)** | 0.60 | 0.20 | 90 |

Hacemos

$x$ = número de barriles de A producidos por día

$y$ = número de barriles de B producidos por día

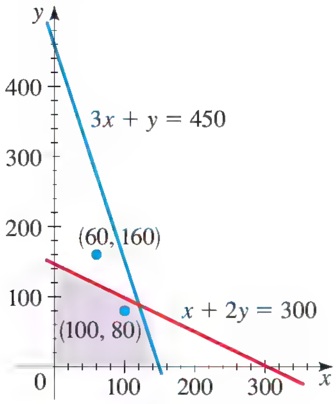



**FIGURA 9**

De los datos de la tabla y el hecho de que $x$ y $y$ no pueden ser negativas, obtenemos las desigualdades siguientes.

$$\begin{cases} 0.25x + 0.50y \leq 75 & \text{Desigualdad de CO} \\ 0.60x + 0.20y \leq 90 & \text{Desigualdad de } SO_2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera desigualdad por 4 y la segunda por 5 simplifica esto a

$$\begin{cases} x + 2y \leq 300 \\ 3x + y \leq 450 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de desigualdades, mostrada en la Figura 9.

**(b)** Como el punto (100, 80) se encuentra dentro de la región factible, este plan de producción es legal (vea Figura 9).

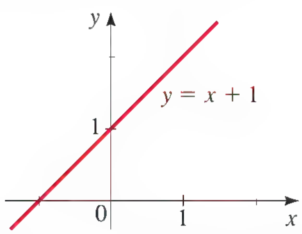
**(c)** Como el punto (60, 160) se encuentra fuera de la región factible, este plan de producción no es legal. Viola la restricción de CO, aun cuando no viola la restricción de $SO_2$ (vea Figura 9).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

## 10.9 EJERCICIOS

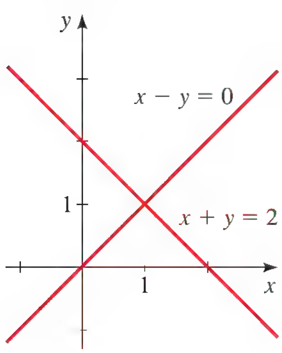
### CONCEPTOS

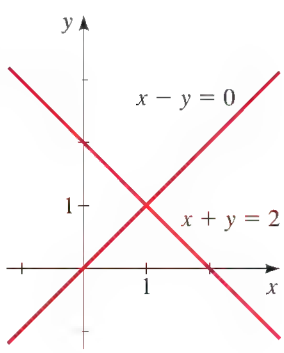
**1.** Para graficar una desigualdad, primero graficamos la ________ correspondiente. Por lo tanto, para graficar $y \leq x + 1$, primero graficamos la ecuación ________. Para determinar cuál lado de la gráfica de la ecuación es la gráfica de la desigualdad, usamos puntos ________. Usando (0, 0) como tal punto, grafique la desigualdad al sombrear la región apropiada.



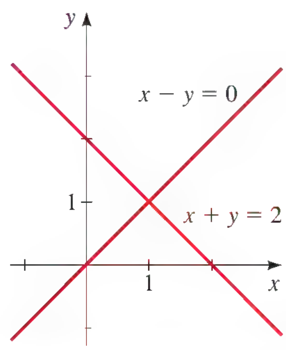

**2.** Haga sombreado de la solución de cada sistema de desigualdades en la gráfica dada.

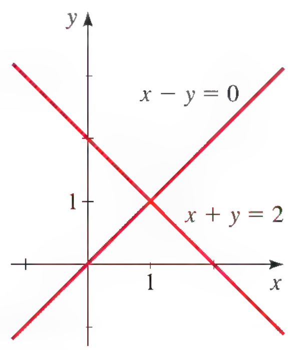
**(a)** $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$




**(c)** $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$




### HABILIDADES

**3-16** ■ Grafique la desigualdad.

**3.** $x < 3$

**4.** $y \geq -2$

**5.** $y > x$

**6.** $y < x + 2$

**7.** $y \leq 2x + 2$

**8.** $y < -x + 5$

**9.** $2x - y \leq 8$

**10.** $3x + 4y + 12 > 0$

**11.** $4x + 5y < 20$

**12.** $-x^2 + y \geq 10$

**13.** $y > x^2 + 1$

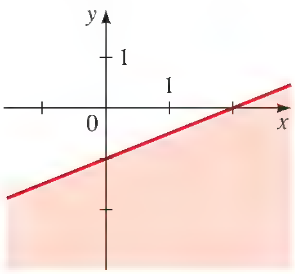
**14.** $x^2 + y^2 \geq 9$

**15.** $x^2 + y^2 \leq 25$

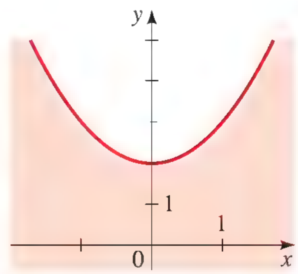
**16.** $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

**17-20** ■ Nos dan una ecuación y su gráfica. Encuentre una desigualdad cuya solución es la región sombreada.

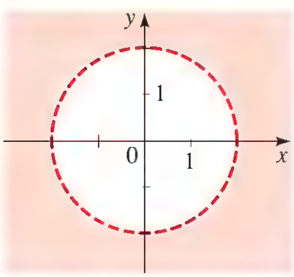
**17.** $y = \frac{1}{2}x - 1$



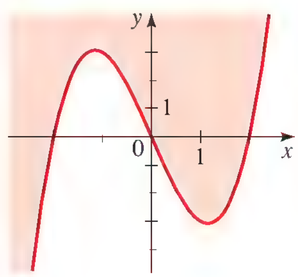

**18.** $y = x^2 + 2$




**19.** $x^2 + y^2 = 4$




**20.** $y = x^3 - 4x$




**21-46** ■ Grafique la solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto de solución es limitado.

**21.** $\begin{cases} x + y \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} 2x + 3y > 12 \\ 3x - y < 21 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} y < \frac{1}{4}x + 2 \\ y \ge 2x - 5 \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} x - y > 0 \\ 4 + y \le 2x \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} y \le -2x + 8 \\ y \le -\frac{1}{2}x + 5 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} 4x + 3y \le 18 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 5y \le 15 \\ 3x + 2y \le 9 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} x > 2 \\ y < 12 \\ 2x - 4y > 8 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} y \le 9 - x^2 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} y < 9 - x^2 \\ y \ge x + 3 \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} y \ge x^2 \\ x + y \ge 6 \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x - y > 0 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 10 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x^2 - y \le 0 \\ 2x^2 + y \le 12 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ 2x + y^2 \ge 1 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - y \ge 0 \\ x - y \ge 2 \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} y < x + 6 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 5 \\ x + y \le 7 \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 4 \\ 2x + y \le 8 \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} y > x + 1 \\ x + 2y \le 12 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

**42.** $\begin{cases} x + y > 12 \\ y < \frac{1}{2}x - 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$

**43.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8 \\ x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

**44.** $\begin{cases} x^2 - y \ge 0 \\ x + y < 6 \\ x - y < 6 \end{cases}$

**45.** $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y > 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

**46.** $\begin{cases} y \ge x^3 \\ y \le 2x + 4 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

**47-50** ■ Use calculadora graficadora para graficar la solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices, redondeadas a un lugar decimal.

**47.** $\begin{cases} y \ge x - 3 \\ y \ge -2x + 6 \\ y \le 8 \end{cases}$

**48.** $\begin{cases} x + y \ge 12 \\ 2x + y \le 24 \\ x - y \ge -6 \end{cases}$

**49.** $\begin{cases} y \le 6x - x^2 \\ x + y \ge 4 \end{cases}$

**50.** $\begin{cases} y \ge x^3 \\ 2x + y \ge 0 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$

## APLICACIONES

**51. Publicar libros** Una compañía editorial publica un total de no más de 100 libros al año. Al menos 20 de éstos no son de ficción, pero la compañía siempre publica al menos tantos libros de ficción como de no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que describa los posibles números de libros de ficción y de no ficción, que la compañía puede producir cada año, consistente con estas políticas. Grafique el conjunto de solución.

**52. Manufactura de muebles** Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabados. Cada mesa requiere 3 horas de corte y 1 hora de ensamble. Cada silla requiere 2 horas de corte y 2 horas de ensamble. Entre los dos, pueden poner hasta 12 horas de trabajo de corte y 8 horas de ensamble al día. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibles combinaciones de mesas y sillas que puedan hacer diariamente. Grafique el conjunto de solución.

**53. Mezcla de café** Un comerciante en café vende dos mezclas diferentes de café. La mezcla estándar usa 4 oz de granos de arábiga y 12 oz de granos de robusta por paquete; la mezcla Deluxe usa 10 oz de arábiga y 6 oz de robusta por paquete. El comerciante tiene disponibles 80 lb de granos arábiga y 90 lb de robusta. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de paquetes estándar y Deluxe que el comerciante pueda hacer. Grafique el conjunto de solución.

**54. Nutrición** Un fabricante de alimento para gatos usa productos derivados de pescado y de carne de res. El de pescado contiene 12 g de proteína y 3 g de grasa por onza; el de carne de res contiene 6 g de proteína y 9 g de grasa por onza. Cada lata de alimento para gatos debe contener al menos 60 g de proteína y 45 g de grasa. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de onzas de pescado y de res que puedan usarse en cada lata para satisfacer estos requerimientos mínimos. Grafique el conjunto de solución.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**55. Sombreado de regiones no deseadas** Para graficar la solución de un sistema de desigualdades, hemos sombreado la solución de cada desigualdad en un color diferente; la solución del sistema es la región donde todas las partes sombreadas se traslapan. Veamos ahora un método diferente: para cada desigualdad, haga sombreado de la región que *no* satisface la desigualdad. Explique por qué la parte del plano que se deje sin sombrear es la solución del sistema. Resuelva el siguiente sistema por ambos métodos. ¿Cuál prefiere usted? ¿Por qué?

$$\begin{cases} x + 2y > 4 \\ -x + y < 1 \\ x + 3y < 9 \\ \quad\quad\; x < 3 \end{cases}$$

# CAPÍTULO 10 | REPASO

## REVISIÓN DE CONCEPTOS

**1.** Supongamos que al lector se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Explique cómo resolvería el sistema

**(a)** por el método de sustitución
**(b)** por el método de eliminación
**(c)** gráficamente

**2.** Supongamos que al lector se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones *lineales* con dos variables.

**(a)** ¿Preferiría usar el método de sustitución o el método de eliminación?
**(b)** ¿Cuántas soluciones son posibles? Trace diagramas para ilustrar las posibilidades.

**3.** ¿Qué operaciones se pueden ejecutar en un sistema lineal que resulte en un sistema equivalente?

**4.** Explique cómo funciona la eliminación de Gauss. Su explicación debe incluir una discusión de los pasos seguidos para obtener un sistema en forma triangular y sustitución inversa.

**5.** ¿Qué significa decir que $A$ es una matriz con dimensión $m \times n$?

**6.** ¿Cuál es la matriz aumentada de un sistema? Describa la función de operaciones elementales de renglón, forma escalonada por renglones, sustitución inversa y variables iniciales cuando se resuelve un sistema en forma de matriz.

**7. (a)** ¿Qué significa un sistema inconsistente?
**(b)** ¿Qué significa un sistema consistente indeterminado?

**8.** Suponga que ha utilizado usted eliminación de Gauss para transformar la matriz aumentada de un sistema lineal en forma escalonada por renglones. ¿Cómo se puede saber si el sistema tiene

**(a)** exactamente una solución?
**(b)** no tiene solución?
**(c)** un número infinito de soluciones?

**9.** ¿Cómo se puede saber si una matriz está en forma escalonada por renglones?

**10.** ¿Cómo difieren la eliminación de Gauss y la eliminación de Gauss-Jordan? ¿Qué ventaja tiene la eliminación de Gauss-Jordan?

**11.** Si $A$ y $B$ son matrices con la misma dimensión y $k$ es un número real, ¿cómo se encuentra $A + B$, $A - B$ y $kA$?

**12. (a)** ¿Qué debe ser verdadero de las dimensiones de $A$ y $B$ para que sea definido el producto $AB$?
**(b)** Si el producto $AB$ está definido, ¿cómo se calcula?

**13. (a)** ¿Cuál es la matriz de identidad $I_n$?
**(b)** Si $A$ es una matriz cuadrada de $n \times n$, ¿cuál es su matriz inversa?
**(c)** Escriba una fórmula para la inversa de una matriz de $2 \times 2$.
**(d)** Explique cómo encontraría la inversa de una matriz de $3 \times 3$.

**14. (a)** Explique cómo expresar un sistema lineal como ecuación matricial de la forma $AX = B$.
**(b)** Si $A$ tiene inversa, ¿cómo resolvería la ecuación matricial $AX = B$?

**15.** Suponga que $A$ es una matriz de $n \times n$.

**(a)** ¿Qué quiere decir menor $M_{ij}$ del elemento $a_{ij}$?
**(b)** ¿Cuál es el cofactor $A_{ij}$?
**(c)** ¿Cómo se encuentra el determinante de $A$?
**(d)** ¿Cómo se puede saber si $A$ tiene inversa?

**16.** Exprese la Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales en términos de determinantes. ¿Prefiere usted usar la Regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Explique.

**17.** Explique cómo hallar la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional. Incluya en su explicación una discusión de cada uno de los cuatro casos que aparecen.

**18.** ¿Cómo se grafica una desigualdad con dos variables?

**19.** ¿Cómo se grafica el conjunto de solución de un sistema de desigualdades?

## EJERCICIOS

**1-6** ■ Resuelva el sistema de ecuaciones y grafique las rectas.

**1.** $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = \frac{2}{7}x - 4 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -4 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 10 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 3y = 1 \\ 7x \quad 2y = 14 \end{cases}$

**7-10** ■ Resuelva el sistema de ecuaciones.

**7.** $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 6 + x \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x + 2 \end{cases}$

**9.** $\begin{cases} 3x + \dfrac{4}{y} = 6 \\ x - \dfrac{8}{y} = 4 \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2y^2 - 7y = 0 \end{cases}$

**11-14** ■ Use calculadora graficadora para resolver el sistema, redondeado al centésimo más cercano.

**11.** $\begin{cases} 0.32x + 0.43y = 0 \\ 7x - 12y = 341 \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} \sqrt{12}x - 3\sqrt{2}y = 660 \\ 7137x + 3931y = 20{,}000 \end{cases}$

**13.** $\begin{cases} x - y^2 = 10 \\ x = \frac{1}{22}y + 12 \end{cases}$

**14.** $\begin{cases} y = 5^x + x \\ y = x^5 + 5 \end{cases}$

**15-20** ■ Nos dan una matriz.

**(a)** Exprese la dimensión de la matriz.
**(b)** ¿Está la matriz en forma escalonada por renglones?
**(c)** ¿Está la matriz en forma escalonada por renglones reducida?
**(d)** Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

**15.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**17.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**18.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**19.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**20.** $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**21-42** ■ Encuentre la solución completa del sistema o demuestre que el sistema no tiene solución.

**21.** $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x + 5z = 12 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x \quad 6z = 6 \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} x \quad 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x - 7y + 11z = 2 \end{cases}$

**24.** $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 2x - 3z = 5 \\ x - 2y + 4w = 9 \\ x + y + 2z + 3w = 5 \end{cases}$

**25.** $\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 7 \end{cases}$

**26.** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$

**27.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x - 7y + 11z = -9 \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + 5z = 10 \end{cases}$

**29.** $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - 4z - w = -1 \\ x - 2y + 4w = -7 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = -3 \end{cases}$

**30.** $\begin{cases} x + 3z = -1 \\ y \quad 4w = 5 \\ 2y + z + w = 0 \\ 2x + y + 5z \quad 4w = 4 \end{cases}$

**31.** $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 4x - y + 15z = 5 \end{cases}$

**32.** $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 5y + 9z = 13 \\ 2x + 7z = 0 \end{cases}$

**33.** $\begin{cases} -x + 4y + z = 8 \\ 2x - 6y + z = -9 \\ x - 6y - 4z = -15 \end{cases}$

**34.** $\begin{cases} x - z + w = 2 \\ 2x + y - 2w = 12 \\ 3y + z + w = 4 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 4z = 4 \end{cases}$

**36.** $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 3x - y - z - w = 2 \end{cases}$

**38.** $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} x \quad y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 5z = 1 \\ 4x + 3y + z = 6 \end{cases}$

**41.** $\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + 2w = 2 \\ 2x + 4y - 4z - 2w = 6 \end{cases}$

**42.** $\begin{cases} x - y - 2z + 3w = 0 \\ y - z + w = 1 \\ 3x - 2y - 7z + 10w = 2 \end{cases}$

**43.** Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas, una que paga 6% de interés por año y la otra paga 7%. Él tiene el doble invertido en la cuenta que paga 7% que la que paga 6%, y su ingreso anual de intereses es $600. ¿Cuánto está invertido en cada cuenta?

**44.** Una alcancía tiene 50 monedas, todas ellas de 5 centavos, 10 centavos o de 25 centavos. El valor total de las monedas es $5.60, y el valor de las monedas de 10 es cinco veces el valor de las de 5. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

**45.** Clarita invierte $60,000 en cuentas de mercado de dinero en tres bancos diferentes. El banco A paga 2% de interés por año, el banco B paga 2.5% y el Banco C paga 3%. Ella decide invertir

el doble en el banco B que en los otros dos bancos. Después de un año, Clarita ha ganado \$1575 en intereses. ¿Cuánto invirtió en cada banco?

**46.** Un pescador comercial captura abadejo, róbalo y huachinango (también llamado *pargo*). Le pagan \$1.25 la libra de abadejo, \$0.75 la de róbalo y \$2.00 la libra de huachinango. Ayer capturó 560 lb de pescado con valor de \$575. El abadejo y el huachinango juntos valen \$320. ¿Cuántas libras de cada pez capturó?

**47-58** ■ Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Ejecute la operación indicada o explique por qué no se puede ejecutar.

**47.** $A + B$ **48.** $C - D$ **49.** $2C + 3D$

**50.** $5B - 2C$ **51.** $GA$ **52.** $AG$

**53.** $BC$ **54.** $CB$ **55.** $BF$

**56.** $FC$ **57.** $(C + D)E$ **58.** $F(2C - D)$

**59-60** ■ Verifique que las matrices $A$ y $B$ sean inversas entre sí al calcular los productos $AB$ y $BA$.

**59.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**60.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

**61-66** ■ De la ecuación matricial despeje la matriz desconocida, $X$, o demuestre que no existe solución, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**61.** $A + 3X = B$ **62.** $\frac{1}{2}(X - 2B) = A$

**63.** $2(X - A) = 3B$ **64.** $2X + C = 5A$

**65.** $AX = C$ **66.** $AX = B$

**67-74** ■ Encuentre el determinante y, si es posible, la inversa de la matriz.

**67.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ **68.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

**69.** $\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **70.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**71.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **72.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

**73.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **74.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**75-78** ■ Exprese el sistema de ecuaciones lineales como ecuación matricial. A continuación resuelva la ecuación matricial multiplicando cada lado por la inversa de la matriz de coeficiente.

**75.** $\begin{cases} 12x - 5y = 10 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 8x - 7y = -1 \end{cases}$

**77.** $\begin{cases} 2x + y + 5z = \frac{1}{3} \\ x + 2y + 2z = \frac{1}{4} \\ x + 3z = \frac{1}{6} \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} 2x + 3z = 5 \\ x + y + 6z = 0 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$

**79-82** ■ Resuelva el sistema usando la Regla de Cramer.

**79.** $\begin{cases} 2x + 7y = 13 \\ 6x + 16y = 30 \end{cases}$

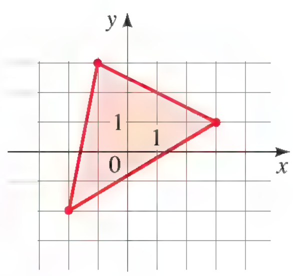
**80.** $\begin{cases} 12x - 11y = 140 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

**81.** $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ -x + 7y = 9 \\ 5x + 4y + 3z = -9 \end{cases}$

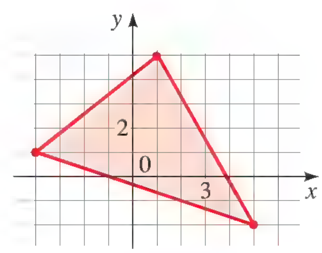
**82.** $\begin{cases} 3x + 4y - z = 10 \\ x - 4z = 20 \\ 2x + y + 5z = 30 \end{cases}$

**83-84** ■ Use la fórmula de determinantes para el área de un triángulo para hallar el área del triángulo de la figura.

**83.**




**84.**




**85-90** ■ Encuentre la descomposición de fracción parcial de la función racional.

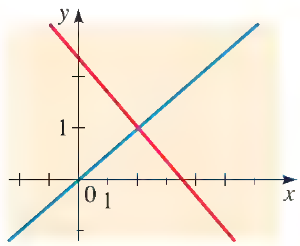
**85.** $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 2x - 15}$ **86.** $\dfrac{8}{x^3 - 4x}$

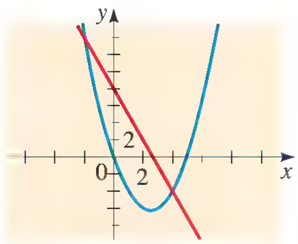
**87.** $\dfrac{2x - 4}{x(x - 1)^2}$ **88.** $\dfrac{x + 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$

**89.** $\dfrac{2x - 1}{x^3 + x}$ **90.** $\dfrac{5x^2 - 3x + 10}{x^4 + x^2 - 2}$

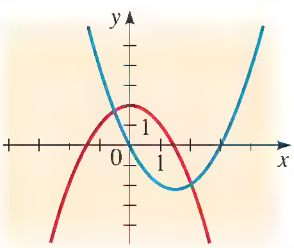
**91-94** ■ Nos dan dos ecuaciones y sus gráficas. Encuentre el (los) punto(s) de intersección de las gráficas al resolver el sistema.

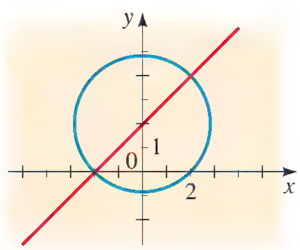
**91.** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ **92.** $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$



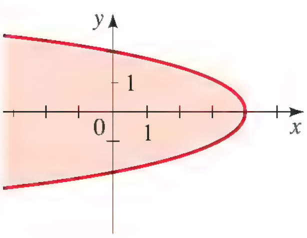

**93.** $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x^2 - 3x - y = 0 \end{cases}$ **94.** $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 4 \end{cases}$

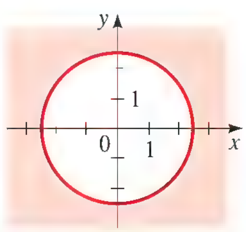



**95-96** ■ Nos dan una ecuación y su gráfica. Encuentre una desigualdad cuya solución es la región sombreada.

**95.** $x + y^2 = 4$ **96.** $x^2 + y^2 = 8$



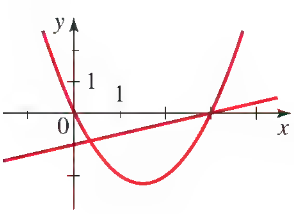

**97-100** ■ Grafique la desigualdad.

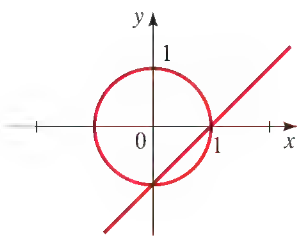
**97.** $3x + y \leq 6$ **98.** $y \geq x^2 - 3$

**99.** $x^2 + y^2 > 9$ **100.** $x - y^2 < 4$

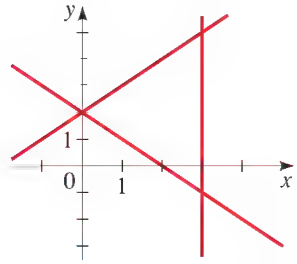
**101-104** ■ La figura muestra las gráficas de las ecuaciones correspondientes a las desigualdades dadas. Haga el sombreado del conjunto de solución del sistema de desigualdades.

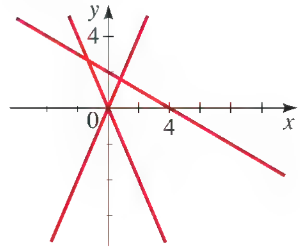
**101.** $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ y \leq \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$ **102.** $\begin{cases} y \geq x - 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$




**103.** $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ y - x \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$ **104.** $\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 2x \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$




**105-108** ■ Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto de solución es limitado o no limitado.

**105.** $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y < 0 \end{cases}$

**106.** $\begin{cases} y - x^2 \geq 4 \\ y < 20 \end{cases}$

**107.** $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ y \leq x + 4 \end{cases}$

**108.** $\begin{cases} x \geq 4 \\ x + y \geq 24 \\ x \leq 2y + 12 \end{cases}$

**109-110** ■ Despeje $x$, $y$ y $z$ en términos de $a$, $b$ y $c$.

**109.** $\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

**110.** $\begin{cases} ax + by + cz = a - b + c \\ bx + by + cz = c \\ cx + cy + cz = c \end{cases}$ $(a \neq b, b \neq c, c \neq 0)$

**111.** ¿Para qué valores de $k$ las tres rectas siguientes tienen un punto común de intersección?

$$x + y = 12$$
$$kx - y = 0$$
$$y - x = 2k$$

**112.** ¿Para qué valor de $k$ el sistema siguiente tiene un infinito de soluciones?

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$$

## CAPÍTULO 10 EXAMEN

**1-2** ■ Nos dan un sistema de ecuaciones. **(a)** Determine si el sistema es lineal o no lineal. **(b)** Encuentre todas las soluciones del sistema.

**1.** $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 6x + y^2 = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

**3.** Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones del sistema redondeadas a dos lugares decimales.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

**4.** En $2\frac{1}{2}$ horas, un avión vuela 600 km contra el viento. Tarda 50 minutos en volar 300 km con el viento a favor. Encuentre la velocidad del viento y la velocidad del avión en viento en calma.

**5.** Determine si cada matriz es en forma escalonada por renglones reducida, forma escalonada por renglones o ninguna de estas formas.

**(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**6.** Use eliminación de Gauss para hallar la solución completa del sistema, o demuestre que no existe solución.

**(a)** $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -5 \\ 2y - 3z = 5 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + y + 5z = 4 \end{cases}$

**7.** Use eliminación de Gauss-Jordan para hallar la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

**8.** Anne, Barry y Cathy entran a una cafetería. Anne ordena dos cafés, un jugo y dos rosquillas y paga \$6.25. Barry ordena un café y tres rosquillas y paga \$3.75. Cathy ordena tres cafés, un jugo y cuatro rosquillas y paga \$9.25. Encuentre el precio del café, jugo y rosquillas en esta cafetería.

**9.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejecute la operación indicada, o explique por qué no se puede ejecutar.

**(a)** $A + B$ **(b)** $AB$ **(c)** $BA - 3B$ **(d)** $CBA$
**(e)** $A^{-1}$ **(f)** $B^{-1}$ **(g)** $\det(B)$ **(h)** $\det(C)$

**10.** **(a)** Escriba una ecuación matricial equivalente al siguiente sistema.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$$

(b) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes y úsela para resolver el sistema.

**11.** Sólo una de las matrices siguientes tiene una inversa. Encuentre el determinante de cada matriz y use los determinantes para identificar la que tiene una inversa. A continuación, encuentre la inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**12.** Resuelva usando la Regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}-y} - z = 14 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

**13.** Encuentre la descomposición de fracción parcial de la función racional.

**(a)** $\dfrac{4x \quad 1}{(x-1)^2(x+2)}$ **(b)** $\dfrac{2x \quad 3}{x^3 + 3x}$

**14.** Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Asigne coordenadas a los vértices.

**(a)** $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x - y \geq -2 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} x^2 + y \leq 5 \\ y \leq 2x + 5 \end{cases}$

# Programación lineal

La **programación lineal** es una técnica de modelado que se utiliza para determinar la asignación óptima de recursos en finanzas, en las fuerzas militares y en otros campos de la actividad humana. Por ejemplo, un fabricante que produce varios artículos diferentes a partir de la misma materia prima puede usar programación lineal para determinar cuánto de cada producto debe producirse para maximizar la utilidad. Esta técnica de modelado es probablemente la aplicación práctica más importante de sistemas de desigualdades lineales. En 1975 Leonid Kantorovich y T. C. Koopmans ganaron el Premio Nobel en economía por su trabajo en el desarrollo de esta técnica.

Aun cuando la programación lineal puede aplicarse a problemas muy complejos con cientos o hasta miles de variables, consideramos sólo unos pocos ejemplos sencillos a los que se pueden aplicar métodos gráficos de la Sección 10.9. (Para números grandes de variables se utiliza un método de programación lineal con matrices.) Examinemos un problema típico.

## EJEMPLO 1 | Manufacturas para máxima utilidad

Una pequeña empresa fabricante de calzado hace dos estilos de zapatos: choclo y mocasín. En el proceso se utilizan dos máquinas: una cortadora y una máquina de coser. Cada tipo de calzado requiere 15 minutos por par en la cortadora. Los choclos requieren 10 min de costura por par; los mocasines, 20 minutos. Debido a que el fabricante puede contratar sólo un operador por cada máquina, puede disponerse de cada proceso sólo 8 horas por día. Si la utilidad es $15 en cada par de choclos y $20 en cada par de mocasines, ¿cuántos pares de cada tipo deben ser producidos al día para máxima utilidad?

Debido a que los mocasines producen más utilidad, parecería mejor manufacturar sólo mocasines. Para sorpresa, ésta no resulta ser la solución más rentable.

### SOLUCIÓN

Primero organizamos en una tabla la información dada. Para ser consistentes, convirtamos todos los tiempos a horas.

| | Choclos | Mocasines | Tiempo disponible |
|---|---|---|---|
| **Tiempo en cortadora (h)** | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 8 |
| **Tiempo en máquina de coser (h)** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | 8 |
| **Utilidad** | $15 | $20 | |

Describimos el modelo y resolvemos el problema en cuatro pasos.

▶ **Escoger las variables.** Para hacer un modelo matemático, primero damos nombres a las cantidades variables. Para este problema hacemos

$$x = \text{número de pares de choclos hechos diariamente}$$

$$y = \text{número de pares de mocasines hechos diariamente}$$

▶ **Hallar la función objetivo.** Nuestro objetivo es determinar cuáles valores para $x$ y $y$ dan máxima utilidad. Como cada par de choclos da $15 de utilidad y cada par de mocasines da $20, la utilidad total está dada por

$$P = 15x + 20y$$

Esta función recibe el nombre de *función objetivo.*

▶ **Graficar la región factible.** Cuanto más grandes sean $x$ y $y$, mayor es la utilidad. Pero no podemos seleccionar de manera arbitraria valores grandes para estas variables debido a las restricciones, o *limitantes*, en el problema. Cada restricción es una desigualdad en las variables.

En este problema, el número total de horas de corte necesarias es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$. Como sólo se dispone de 8 horas en la cortadora, tenemos

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \leq 8$$

Análogamente, si consideramos el tiempo necesario y disponible en la máquina de coser, obtenemos

$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \leq 8$$

No podemos producir un número negativo de zapatos, por lo cual también tenemos

$$x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad y \geq 0$$

Así, $x$ y $y$ deben satisfacer las restricciones

$$\begin{cases} \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \leq 8 \\ \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos por 4 la primera desigualdad y por 6 la segunda, obtenemos el sistema simplificado

$$\begin{cases} x + \phantom{2}y \leq 32 \\ x + 2y \leq 48 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

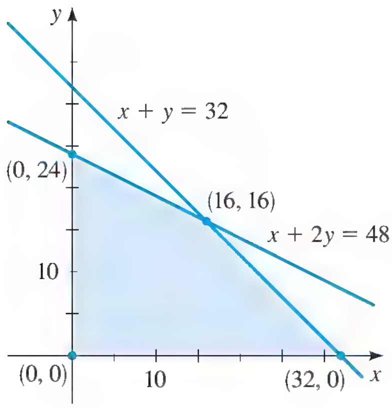



**FIGURA 1**

La solución de este sistema (con vértices con coordenadas) está trazada en la Figura 1. Los únicos valores que satisfacen las restricciones del problema son los que corresponden a puntos de la región sombreada de la Figura 1. Ésta recibe el nombre de *región factible* para el problema.

La **programación lineal** ayuda a la industria telefónica a determinar la forma más eficiente de dirigir llamadas telefónicas. Las decisiones computarizadas de dirección deben hacerse muy rápidamente para que las personas que hagan llamadas no estén en espera de recibir conexión. Como la base de datos de clientes y rutas es enorme, es esencial un método extremadamente rápido para resolver problemas de programación lineal. En 1984 el matemático **Narendra Karmarkar,** de 28 años de edad, trabajando para los Laboratorios Bell en Murray Hill, Nueva Jersey, descubrió uno de tales métodos. Su idea es tan ingeniosa y su método tan rápido que el descubrimiento causó sensación en el mundo de las matemáticas. Aun cuando los descubrimientos matemáticos raras veces hacen noticia, éste fue reportado en la revista *Time* del 3 de diciembre de 1984. Hoy en día las líneas aéreas en forma cotidiana usan la técnica de Karmarkar para reducir al mínimo los costos en la programación de pasajeros, personal de vuelo, combustible, equipaje y trabajadores de mantenimiento.

▶ **Encontrar la utilidad máxima.** Cuando aumentan $x$ o $y$, también aumenta la utilidad. Así, parece razonable que la utilidad máxima ocurrirá en un punto en uno de los lados externos de la región factible, donde es imposible aumentar $x$ o $y$ sin salirse de la región. De hecho, se puede demostrar que el valor máximo ocurre en un vértice. Esto significa que necesitamos verificar la utilidad sólo en los vértices. El valor máximo de $P$ se presenta en el punto (16, 16), donde $P = \$560$. En consecuencia, el fabricante debe hacer 16 pares de choclos y 16 pares de mocasines, para una utilidad diaria máxima de \$560.

| Vértice | $P = 15x + 20y$ |
|---|---|
| (0, 0) | 0 |
| (0, 24) | $15(0) + 20(24) = \$480$ |
| (16, 16) | $15(16) + 20(16) = \$560$ ← Utilidad máxima |
| (32, 0) | $15(32) + 20(0) = \$480$ |

Los problemas de programación lineal que consideramos siguen todos ellos el patrón del Ejemplo 1. Cada problema contiene dos variables. El problema describe restricciones, llamadas **limitantes**, que llevan a un sistema de desigualdades lineales cuya solución se denomina **región factible**. La función que deseamos maximizar o reducir al mínimo se llama **función objetivo**. Esta función siempre alcanza sus valores máximo y mínimo en los **vértices** de la región factible. Esta técnica de modelado comprende cuatro pasos, resumidos en el recuadro siguiente.

**GUÍA PARA PROGRAMACIÓN LINEAL**

1. **Escoger las variables.** Determine cuáles cantidades variables del problema deben recibir el nombre de $x$ y $y$.
2. **Encontrar la función objetivo.** Escriba una expresión para la función que deseamos maximizar o minimizar.
3. **Graficar la región factible.** Exprese las restricciones como un sistema de desigualdades, y grafique la solución de este sistema (la región factible).
4. **Encontrar el máximo o mínimo.** Evalúe la función objetivo en los vértices de la región factible para determinar su valor máximo o mínimo.

## EJEMPLO 2 | Un problema de envíos

Un distribuidor de automóviles tiene almacenes en Millville y Trenton y centros de distribución en Camden y Atlantic City. Todo auto que se venda en estos centros de distribución debe ser entregado desde uno de los almacenes. En cierto día en Camden los distribuidores venden 10 autos, y los distribuidores de Camden venden 12 autos. El almacén de Millville tiene 15 autos disponibles y el almacén de Trenton tiene 10. El costo de enviar un auto es \$50 de Millville a Camden, \$40 de Millville a Atlantic City, \$60 de Trenton a Camden y \$55 de Trenton a Atlantic City. ¿Cuántos autos deben enviarse de cada almacén a cada centro de distribución para cumplir con los pedidos al mínimo costo?

**SOLUCIÓN** Nuestro primer paso es organizar la información dada. Más que construir una tabla, trazamos un diagrama para mostrar el movimiento de autos de los almacenes a los centros de distribución (vea la Figura 2 a continuación). El diagrama muestra el número de autos disponibles en cada almacén o requeridos en cada centro de distribución y el costo de envío entre estos lugares.

▶ **Escoger las variables.** Las flechas de la Figura 2 indican cuatro posibles rutas, de modo que el problema parece contener cuatro variables. Pero hacemos

$x$ = número de autos a enviarse de Millville a Camden

$y$ = número de autos a enviarse de Millville a Atlantic City

Para cumplir los pedidos, debemos tener

$10 - x$ = número de autos enviados de Trenton a Camden

$12 - y$ = número de autos enviados de Trenton a Atlantic City

Entonces las únicas variables del problema son $x$ y $y$.

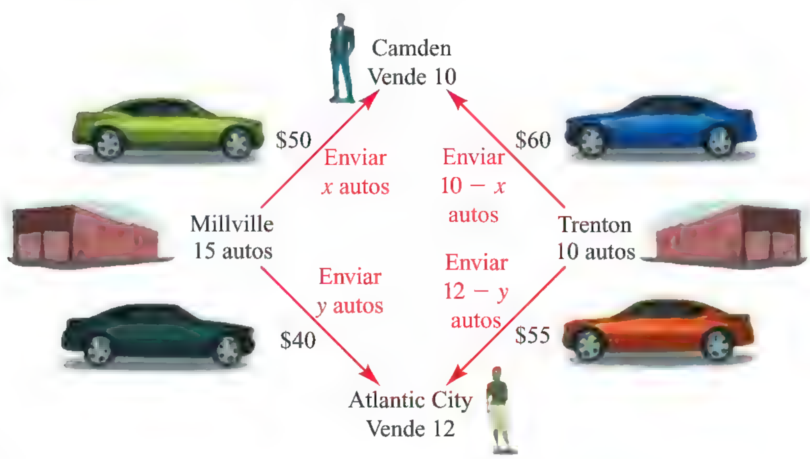



**FIGURA 2**

▶ **Hallar la función objetivo.** El objetivo de este problema es reducir el costo al mínimo. De la Figura 2 vemos que el costo total $C$ de enviar los autos es

$$\begin{aligned} C &= 50x + 40y + 60(10 - x) + 55(12 - y) \\ &= 50x + 40y + 600 - 60x + 660 - 55y \\ &= 1260 - 10x - 15y \end{aligned}$$

Ésta es la función objetivo.

▶ **Graficar la región factible.** A continuación derivamos las desigualdades de restricción que definen la región factible. Primero, el número de autos enviados en cada ruta no puede ser negativo, de modo que tenemos

$$\begin{array}{cc} x \geq 0 & y \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 & 12 - y \geq 0 \end{array}$$

En segundo término, el número total de autos enviados desde cada uno de los almacenes no puede exceder del número de autos disponibles ahí, de modo que

$$\begin{aligned} x + y &\leq 15 \\ (10 - x) + (12 - y) &\leq 10 \end{aligned}$$

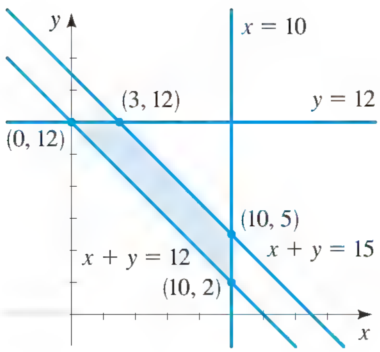



**FIGURA 3**

Simplificando la última desigualdad, tenemos

$$\begin{aligned} 22 - x - y &\leq 10 \\ -x - y &\leq -12 \\ x + y &\geq 12 \end{aligned}$$

Las desigualdades $10 - x \geq 10$ y $12 - y \geq 0$ se pueden reescribir como $x \leq 10$ y $y \leq 12$. Entonces la región factible está descrita por las restricciones

$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ x + y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

La región factible está graficada en la Figura 3.

▶ **Hallar el costo mínimo.** Verificamos el valor de la función objetivo en cada vértice de la región factible.

| Vértice | $C = 1260 - 10x - 15y$ |
|---|---|
| (0, 12) | 1260 − 10(0) − 15(12) = $1080 |
| (3, 12) | 1260 − 10(3) − 15(12) = $1050 ← Costo mínimo |
| (10, 5) | 1260 − 10(10) − 15(5) = $1085 |
| (10, 2) | 1260 − 10(10) − 15(2) = $1130 |

El costo más bajo se incurre en el punto (3, 12). Entonces, el distribuidor debe enviar

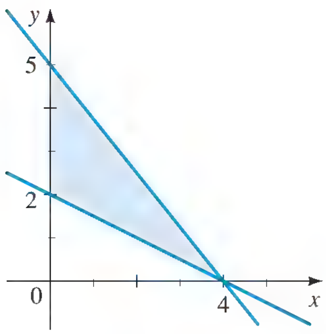
4 autos de Millville a Camden
12 autos de Millville a Atlantic City
7 autos de Trenton a Camden
0 autos de Trenton a Atlantic City

En la década de 1940 los matemáticos crearon métodos matriciales para resolver problemas de programación lineal que contenían más de dos variables. Estos métodos fueron utilizados primero por los Aliados en la Segunda Guerra Mundial para resolver problemas de abastecimiento similares pero, por supuesto, mucho más complicados que los del Ejemplo 2. Mejorar estos métodos matriciales es un campo activo y sensacional de la investigación matemática de nuestro tiempo.

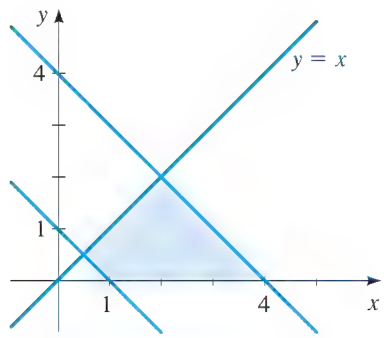
## PROBLEMAS

**1-4** ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada en la región factible indicada.

**1.** $M = 200 - x - y$




**2.** $N = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 40$




**3.** $P = 140 - x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + \phantom{4}y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 28 \end{cases}$$

**4.** $Q = 70x + 82y$

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x \leq 10, y \leq 20 \\ x + \phantom{2}y \geq 5 \\ x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

**5. Manufactura de muebles** Un fabricante de muebles hace mesas y sillas de madera. En el proceso de producción intervienen dos tipos de trabajo: carpintería y acabado. Una mesa requiere 2 horas de carpintería y 1 hora de acabado, y una silla requiere 3 horas de carpintería y ½ hora de acabado. La utilidad es \$35 por mesa y \$20 por silla. Los empleados del fabricante pueden ejecutar un máximo de 108 horas de trabajo de carpintería y 20 horas de trabajo de acabado por día. ¿Cuántas mesas y sillas deben fabricarse al día para llevar al máximo la utilidad?

**6. Un proyecto habitacional** Una contratista de viviendas ha subdividido una granja en 100 lotes para construcción. Ella ha diseñado dos tipos de casas para estos lotes: colonial y estilo ranchero. Una casa colonial requiere \$30,000 de capital y produce una utilidad de \$4000 cuando se venda. Una casa estilo ranchero requiere \$40,000 de capital y da una utilidad de \$8000. Si la contratista tiene \$3.6 millones de capital a la mano, ¿cuántas casas de cada tipo debe construir para obtener máxima utilidad? ¿Quedarán vacíos algunos de los lotes?

**7. Transporte de frutas** Un transportista lleva cítricos de Florida a Montreal. Cada caja de naranjas tiene 4 pies$^3$ de volumen y pesa 80 lb. Cada caja de toronjas tiene un volumen de 6 pies$^3$ y pesa 100 lb. Su camión tiene una capacidad máxima de 300 pies$^3$ y no puede llevar más de 5600 lb. Además, no se le permite llevar más cajas de toronjas que cajas de naranjas. Si su utilidad es \$2.50 por cada caja de naranjas y \$4 por cada caja de toronjas, ¿cuántas cajas de cada cítrico debe transportar para obtener máxima utilidad?

8. **Manufactura de calculadoras** Un fabricante de calculadoras produce dos modelos: estándar y científica. La demanda a largo plazo para los dos modelos recomienda que la compañía fabrique al menos 100 calculadoras estándar y 80 científicas al día. No obstante, debido a limitaciones en la capacidad de producción, no más de 200 calculadoras estándar y 170 científicas pueden manufacturarse al día. Para satisfacer un contrato de envíos, un total de al menos 200 calculadoras deben enviarse por día.
   **(a)** Si el costo de producción es $5 por una calculadora estándar y $7 por una científica, ¿cuántas de cada modelo deben ser producidas al día para minimizar este costo?
   **(b)** Si cada calculadora estándar resulta en una pérdida de $2 pero cada científica produce una utilidad de $5, ¿cuántas de cada modelo deben hacerse al día para que la utilidad sea máxima?

9. **Envío de estéreos** Una cadena de tiendas de descuento de aparatos electrónicos tiene una venta de cierta marca de estéreos. La cadena tiene tiendas en Santa Mónica y El Toro y almacenes en Long Beach y Pasadena. Para satisfacer pedidos urgentes, deben enviarse 15 aparatos de los almacenes a la tienda de Santa Mónica y 19 a la tienda de El Toro. El costo de enviar un aparato es $5 de Long Beach a Santa Mónica, $6 de Long Beach a El Toro, $4 de Pasadena a Santa Mónica y $5.50 de Pasadena a El Toro. Si el almacén de Long Beach tiene 24 aparatos y el almacén de Pasadena tiene 18 aparatos en existencia, ¿cuántos aparatos deben ser enviados de cada almacén a cada tienda para satisfacer los pedidos a un mínimo costo de envío?

10. **Entrega de madera contrachapada** Un hombre tiene dos tiendas de material de construcción, una en el lado oriente y la otra en el lado poniente de una ciudad. Dos clientes solicitan madera contrachapada de ½ pulgada. El cliente A necesita 50 hojas y el cliente B necesita 70 hojas. La tienda del oriente tiene en existencia 80 hojas y la del poniente tiene 45 hojas de esta madera. Los costos de entrega de la tienda del oriente son $0.50 por pieza al cliente A y $0.60 al cliente B. Los costos de entrega de la tienda del poniente son $0.40 por pieza al cliente A y $0.55 al cliente B. ¿Cuántas hojas deben enviarse de cada tienda a cada cliente para reducir al mínimo los costos de envío?

11. **Empaque de nueces** Un confitero vende dos tipos de mezcla de nueces. El paquete de mezcla estándar contiene 100 g de nueces de la India (también llamados *anacardos*) y 200 g de cacahuates y se vende en $1.95. El paquete de mezcla de lujo contiene 150 g de nueces de la India y 50 g de cacahuates y se vende en $2.25. El confitero tiene disponibles 15 kg de nueces de la India y 20 kg de cacahuates. Con base en la venta de pastas, el confitero necesita tener listos al menos tantos paquetes estándar como de lujo. ¿Cuántas bolsas de cada mezcla debe envasar para que su ingreso sea máximo?

12. **Alimento de conejos de laboratorio** Un biólogo desea alimentar conejos de laboratorio con una mezcla de dos tipos de alimento. El tipo I contiene 8 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 2 g de proteína por onza; el tipo II contiene 12 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 1 g de proteína por onza. El tipo I cuesta $0.20 por onza y, el tipo II, $0.30 por onza. Cada conejo recibe un mínimo diario de 24 g de grasa, 36 g de carbohidratos y 4 g de proteína, pero no más de 5 onzas de alimento por día. ¿Cuántas onzas de alimento de cada tipo debe darse a cada conejo para satisfacer las necesidades de dieta al mínimo costo?

13. **Inversión en bonos** Una mujer desea invertir $12,000 en tres tipos de bonos: bonos municipales que pagan 7% de interés al año, certificados bancarios de inversión que pagan 8%, y bonos de alto riesgo que pagan 12%. Por razones de impuestos, ella desea que la cantidad invertida en bonos municipales sea al menos tres veces la cantidad invertida en certificados bancarios. Para que su nivel de riesgo sea manejable, ella invertirá no más de $2000 en bonos de alto riesgo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de bono para maximizar su rendimiento anual de intereses? [*Sugerencia:* Sea $x$ = cantidad en bonos municipales y $y$ = cantidad en certificados bancarios. Entonces la cantidad en bonos de alto riego será $12{,}000 - x - y$.]

14. **Rendimiento anual de intereses** Consulte el Problema 13. Suponga que la inversionista decide aumentar el máximo invertido en bonos de alto riesgo a $3000 pero deja sin cambio las otras condiciones. ¿En cuánto aumentará su rendimiento de intereses máximo posible?

15. **Estrategia financiera** Una pequeña compañía de software publica juegos de computadora y software educacional y de utilería. Su estrategia financiera es vender un total de 36 nuevos programas al año, al menos cuatro de los cuales son juegos. El número de programas de utilería publicados nunca es mayor al doble del número de programas educacionales. En promedio, la compañía obtiene una utilidad anual de $5000 en cada juego de computadora,

\$8000 en cada programa educacional y \$6000 en cada programa de utilería. ¿Cuántos de cada tipo de software debe publicar anualmente la compañía para tener máxima utilidad?

**16. Región factible** Todas las partes de este problema se refieren a la siguiente región factible y función objetivo.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$P = x + 4y$$

**(a)** Grafique la región factible.

**(b)** En su gráfica del inciso (a), trace las gráficas de las ecuaciones lineales obtenidas al hacer $P$ igual a 40, 36, 32 y 28.

**(c)** Si usted continúa reduciendo el valor de $P$, ¿en qué vértice de la región factible tocarán primero estas rectas la región factible?

**(d)** Verifique que el valor máximo de $P$ en la región factible se presente en el vértice que escogió usted en el inciso (c).

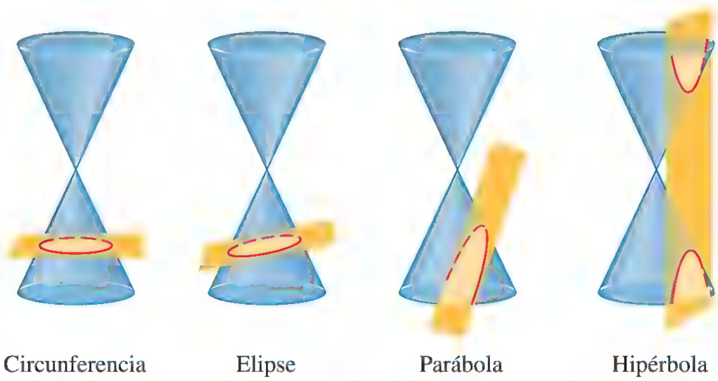
CAPÍTULO 11

SCE/Sandia National Laboratory

# Secciones cónicas



Las secciones cónicas son las curvas que obtenemos cuando hacemos un corte recto en un cono, como se ve en la figura. Por ejemplo, si un cono se corta horizontalmente, la sección transversal es una circunferencia. Entonces, una circunferencia es una sección cónica. Otras formas de cortar un cono producen parábolas, elipses e hipérbolas.




Nuestro objetivo en este capítulo es hallar ecuaciones cuyas gráficas son las secciones cónicas. Ya sabemos de la Sección 1.8 que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es una circunferencia. Encontraremos ecuaciones para cada una de las otras secciones al analizar sus propiedades *geométricas.*

Las secciones cónicas tienen propiedades interesantes que las hacen útiles para numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, una superficie reflectora con secciones transversales parabólicas concentra luz en un solo punto. Esta propiedad de una parábola se utiliza en la construcción de plantas solares para generación de electricidad, como la de California que se ve en la foto de esta página.

# 11.1 PARÁBOLAS

Definición geométrica de una parábola ▶ Ecuaciones y gráficas de parábolas ▶ Aplicaciones

## ▼ Definición geométrica de una parábola

Vimos en la Sección 3.1 que la gráfica de la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una curva en forma de U llamada *parábola* que abre ya sea hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si el signo de $a$ es positivo o negativo.

En esta sección estudiamos parábolas desde un punto de vista geométrico más que algebraico. Empezamos con la definición geométrica de una parábola y mostramos cómo esto nos lleva a la fórmula algebraica con la que ya estamos familiarizados.

**DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA PARÁBOLA**

Una **parábola** es el conjunto de puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo $F$ (llamado **foco**) y una recta fija $l$ (llamada **directriz**).

Esta definición está ilustrada en la Figura 1. El **vértice** $V$ de la parábola se encuentra a la mitad entre el foco y la directriz, y el **eje de simetría** es la recta que corre por el foco perpendicular a la directriz.

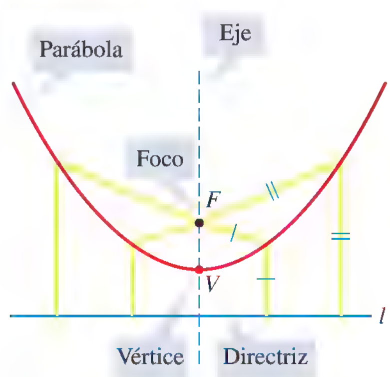



FIGURA 1

En esta sección restringimos nuestra atención a parábolas que están situadas con el vértice en el origen y que tienen un eje de simetría vertical u horizontal. (Parábolas en posiciones más generales se estudian en las Secciones 11.4 y 11.5.) Si el foco de dicha parábola es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical y la directriz tiene la ecuación $y = -p$. La Figura 2 ilustra el caso $p > 0$.

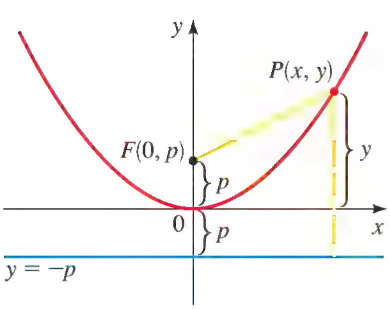



FIGURA 2

Si $P(x, y)$ es cualquier punto en la parábola, entonces la distancia de $P$ al foco $F$(usando la Fórmula de la Distancia) es

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

La distancia de $P$ a la directriz es

$$|y - (-p)| = |y + p|$$

Por la definición de una parábola estas dos distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Expanda}$$

$$x^2 - 2py = 2py \qquad \text{Simplifique}$$

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba; pero si $p < 0$, abre hacia abajo. Cuando $x$ es sustituida por $-x$ la ecuación permanece sin cambio, de modo que la gráfica es simétrica respecto al eje $y$.

## Ecuaciones y gráficas de parábolas

El recuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y características de una parábola con eje vertical.

### PARÁBOLA CON EJE VERTICAL

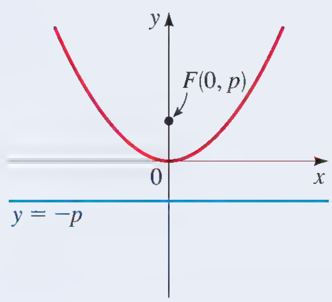
La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

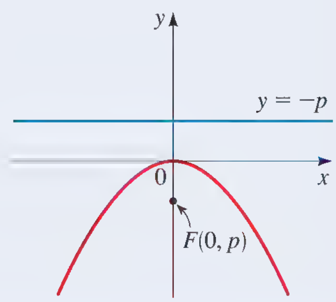
es una parábola con las siguientes propiedades.

| | |
|---|---|
| **VÉRTICE** | $V(0, 0)$ |
| **FOCO** | $F(0, p)$ |
| **DIRECTRIZ** | $y = -p$ |

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.




$x^2 = 4py$ con $p > 0$




$x^2 = 4py$ con $p < 0$

### EJEMPLO 1 | Hallar la ecuación de una parábola

Encuentre una ecuación para la parábola con vértices $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$ y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Como el foco es $F(0, 2)$, concluimos que $p = 2$ (de modo que la directriz es $y = -2$). Entonces la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Como $p = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Vea Figura 3.

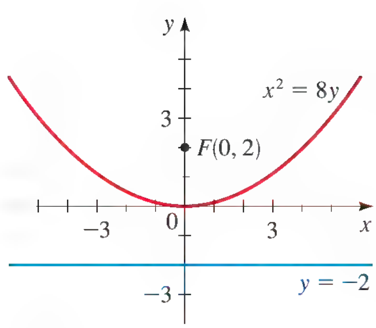



**FIGURA 3**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **41**

## EJEMPLO 2 | Hallar el foco y directriz de una parábola a partir de su ecuación

Encuentre el foco y directriz de la parábola $y = -x^2$ y trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma normal $x^2 = -y$. Comparando esto con la ecuación general $x^2 = 4py$, vemos que $4p = -1$, de modo que $p = -\frac{1}{4}$. Entonces el foco es $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestra en la Figura 4(a). También podemos trazar la gráfica usando una calculadora graficadora como se muestra en la Figura 4(b).

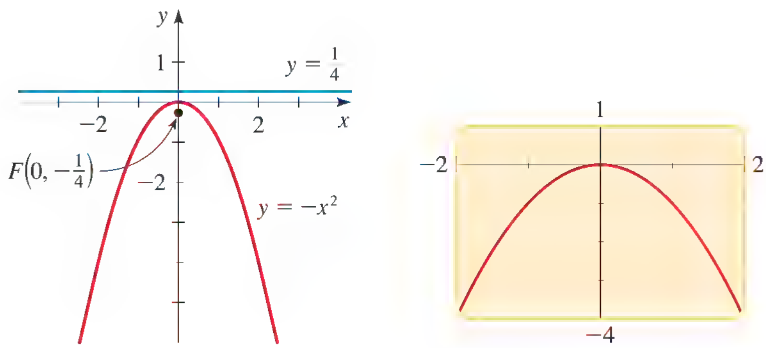



**FIGURA 4** (a) (b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Reflejar la gráfica de la Figura 2 respecto de la recta diagonal $y = x$ tiene el efecto de intercambiar las funciones de $x$ y $y$. Esto resulta en una parábola con eje horizontal. Por el mismo método que antes, podemos demostrar las siguientes propiedades.

### PARÁBOLA CON EJE HORIZONTAL

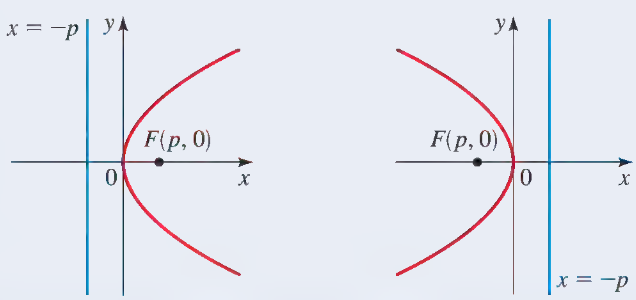
La gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4px$$

es una parábola con las siguientes propiedades.

| | |
|---|---|
| **VÉRTICE** | $V(0, 0)$ |
| **FOCO** | $F(p, 0)$ |
| **DIRECTRIZ** | $x = -p$ |

La parábola abre a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$.




$y^2 = 4px$ con $p > 0$ $y^2 = 4px$ con $p < 0$

## EJEMPLO 3 | Una parábola con eje horizontal

Una parábola tiene la ecuación $6x + y^2 = 0$.

**(a)** Encuentre el foco y directriz de la parábola y trace la gráfica.

**(b)** Use calculadora graficadora para trazar la gráfica.

### SOLUCIÓN

**(a)** Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma normal $y^2 = -6x$. Comparando esto con la ecuación general $y^2 = 4px$, vemos que $4p = -6$, de modo que $p = -\frac{3}{2}$. Entonces el foco $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Como $p < 0$, la parábola abre a la izquierda. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestra en la Figura 5(a) a continuación.

**(b)** Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora, necesitamos despejar $y$

$$6x + y^2 = 0$$

$$y^2 = -6x \qquad \text{Reste } 6x$$

$$y = \pm\sqrt{-6x} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la parábola, graficamos ambas funciones

$$y = \sqrt{-6x} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{-6x}$$

como se ve en la Figura 5(b).

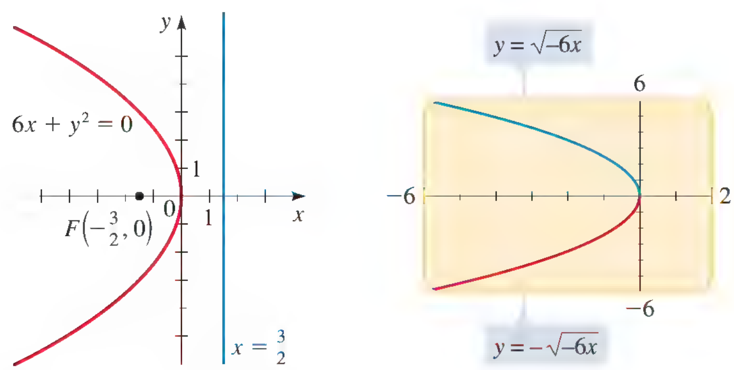



**FIGURA 5** (a) (b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

La ecuación $y^2 = 4px$, no define $y$ como función de $x$ (vea página 158). Por lo tanto, para usar calculadora graficadora para graficar una parábola con eje horizontal, primero debemos despejar $y$. Esto lleva a dos funciones: $y = \sqrt{4px}$ y $y = -\sqrt{4px}$. Necesitamos graficar ambas funciones para obtener la gráfica completa de la parábola. Por ejemplo, en la Figura 5(b) teníamos que graficar $y = \sqrt{-6x}$ y $y = -\sqrt{-6x}$ para graficar la parábola $y^2 = -6x$.

Podemos usar las coordenadas del foco para estimar el "ancho" de una parábola cuando tracemos su gráfica. El segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje, con puntos extremos en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro focal** de la parábola. De la Figura 6 podemos ver que la distancia de un punto extremo $Q$ del lado recto a la directriz también es $|2p|$. En consecuencia, la distancia de $Q$ al foco también debe ser $|2p|$ (por la definición de una parábola), de modo que el diámetro focal es $|4p|$. En el siguiente ejemplo usamos el diámetro focal para determinar el "ancho" de una parábola cuando la grafiquemos.

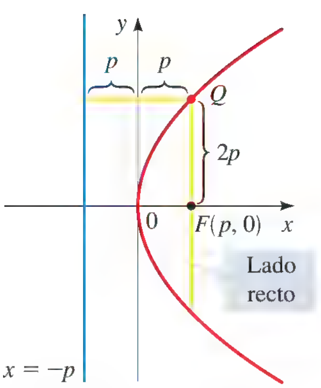



**FIGURA 6**

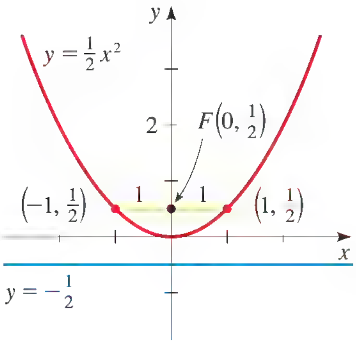



**FIGURA 7**

## EJEMPLO 4 | El diámetro focal de una parábola

Encuentre el foco, directriz y diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Primero ponemos la ecuación en la forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique por 2, cambie lados}$$

De esta ecuación vemos que $4p = 2$, de modo que el diámetro focal es 2. Al despejar $p$ resulta $p = \frac{1}{2}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Como el diámetro focal es 2, el lado recto se prolonga 1 unidad a la izquierda y 1 unidad a la derecha del foco. La gráfica está trazada en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15** ■

En el siguiente ejemplo graficamos una familia de parábolas, para mostrar la forma en que cambiar la distancia entre los focos y el vértice afecta el "ancho" de la parábola.

## EJEMPLO 5 | Una familia de parábolas

**(a)** Encuentre ecuaciones para las parábolas con vértice en el origen y focos $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right), F_2\left(0, \frac{1}{2}\right), F_3(0, 1)$, y $F_4(0, 4)$.

**(b)** Trace las gráficas de las parábolas del inciso (a). ¿Qué concluye usted?

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como los focos están en el eje $y$ positivo, las parábolas abren hacia arriba y tienen ecuaciones de la forma $x^2 = 4py$. Esto lleva a las siguientes ecuaciones

| Foco | $p$ | Ecuación $x^2 = 4py$ | Forma de la ecuación para calculadora graficadora |
|---|---|---|---|
| $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$ | $p = \frac{1}{8}$ | $x^2 = \frac{1}{2}y$ | $y = 2x^2$ |
| $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ | $p = \frac{1}{2}$ | $x^2 = 2y$ | $y = 0.5x^2$ |
| $F_3(0, 1)$ | $p = 1$ | $x^2 = 4y$ | $y = 0.25x^2$ |
| $F_4(0, 4)$ | $p = 4$ | $x^2 = 16y$ | $y = 0.0625x^2$ |

**(b)** Las gráficas están trazadas en la Figura 8. Vemos que cuanto más cercano está el foco del vértice, más angosta es la parábola.

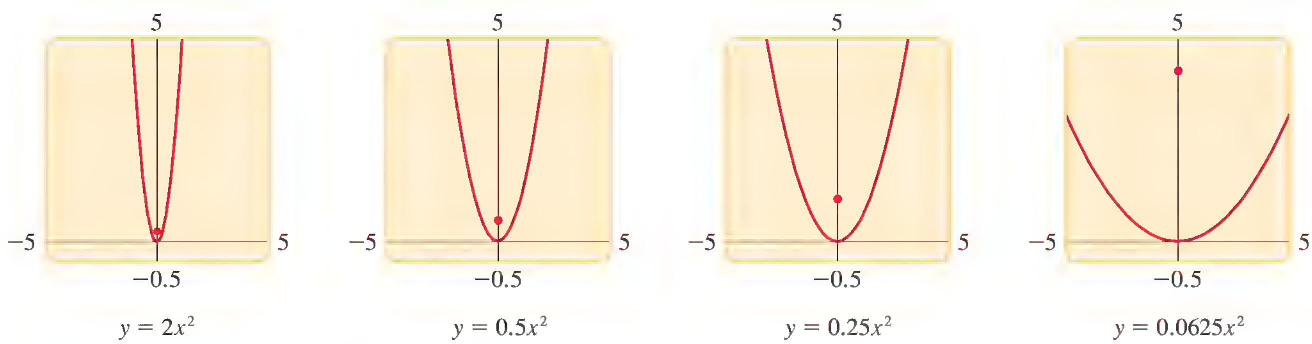



**FIGURA 8** Familia de parábolas

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51** ■

## ▼ Aplicaciones

Las parábolas tienen una importante propiedad que las hace útiles como reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente colocada en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se reflejará de modo tal que viaja paralela al eje de la parábola (vea Figura 9). Entonces, un espejo parabólico refleja la luz en un haz de rayos paralelos. Recíprocamente, la luz que se aproxima al reflector en rayos paralelos a este eje de simetría se concentra en el foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar con uso de cálculo, se utiliza en la construcción de telescopios reflectores.

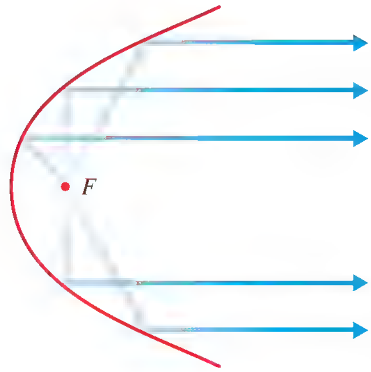



**FIGURA 9** Reflector parabólico

### EJEMPLO 6 | Hallar el punto focal de un reflector buscador

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un "tazón", que mide 12 pulgadas de ancho de borde a borde y 8 pulgadas de profundidad, como se ve en la Figura 10. Si el filamento de la bombilla eléctrica está situado en el foco, ¿a qué distancia está del vértice del reflector?

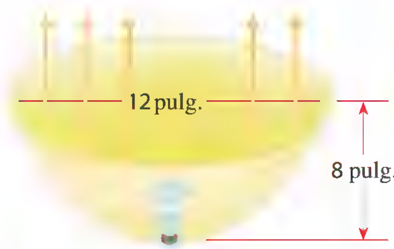



**FIGURA 10** Un reflector parabólico

**ARQUÍMEDES**
(287-212 a.C.) fue el más grande matemático de la Antigüedad. Nació en Siracusa, colonia griega de Sicilia, una generación después de Euclides (vea página 497). Uno de sus muchos descubrimientos es la Ley de la Palanca (vea página 71). Es famoso por haber dicho: "Dadme una palanca y un fulcro y moveré al mundo."

Renombrado como genio mecánico por sus numerosos inventos de ingeniería, diseñó poleas para levantar barcos pesados y el tornillo espiral para transportar agua a niveles más altos. Se dice que usó espejos parabólicos para concentrar rayos del Sol para encender fuego a los barcos romanos que atacaban Siracusa.

El rey Herón II de Siracusa una vez sospechó que un orfebre se guardó parte del oro destinado para la corona del Rey y que lo había sustituido con una cantidad igual de plata. El Rey pidió consejo a Arquímedes. Cuando Arquímedes se encontraba profundamente inmerso en sus pensamientos en un baño público, descubrió la solución al problema del Rey cuando observó que el volumen de su cuerpo era el mismo que el volumen de agua desplazado de la tina de baño. Usando esta idea, pudo medir el volumen de cada corona y así determinar cuál era la corona más densa, toda de oro. La historia nos dice que salió desnudo, corriendo hacia su casa, gritando: "Eureka, Eureka" ("¡Lo he encontrado, lo he encontrado!" Este incidente atestigua el enorme poder de concentración de Arquímedes.

A pesar de su proeza en ingeniería, Arquímedes se enorgullecía de sus descubrimientos matemáticos entre los que se incluyen las fórmulas para el volumen de una esfera $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ y el área superficial de una esfera ($S = 4\pi r^2$) y un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

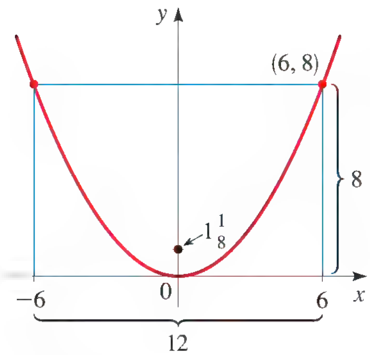



**FIGURA 11**

**SOLUCIÓN** Introducimos un sistema de coordenadas y colocamos una sección transversal parabólica del reflector de modo que su vértice se encuentre en el origen y su eje sea vertical (vea Figura 11). Entonces la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la Figura 11 vemos que el punto (6, 8) está en la parábola. Usamos esto para hallar $p$.

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto (6, 8) satisface la ecuación } x^2 = 4py$$

$$36 = 32p$$

$$p = \tfrac{9}{8}$$

El foco es $F\left(0, \frac{9}{8}\right)$, de modo que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$. Como el filamento está colocado en el foco, está situado a $1\frac{1}{8}$ pulgadas del vértice del reflector.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

## 11.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

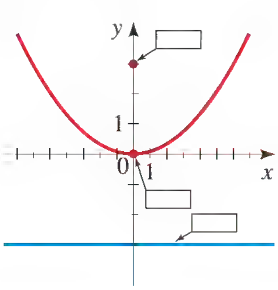
1. Una parábola es el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo llamado ________y de una recta fija llamada _________de la parábola.

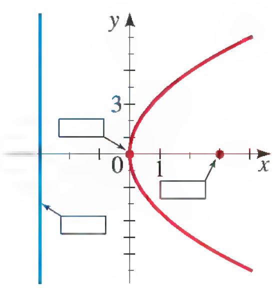
2. La gráfica de la ecuación $x^2 = 4py$ es una parábola con foco $F(_, _)$ y directriz $y = ___$. Por lo tanto, la gráfica de $x^2 = 12y$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y directriz $y = ____$.

3. La gráfica de la ecuación $y^2 = 4px$ es una parábola con foco $F(_, _)$ y directriz $x = ___$. Por lo tanto, la gráfica de $y^2 = 12x$ es una parábola con foco $F(__, __)$ y directriz $x = ____$.

4. Asigne coordenadas al foco, ecuación de la directriz y coordenadas del vértice en las gráficas dadas para las parábolas de los Ejercicios 2 y 3.

**(a)** $x^2 = 12y$ **(b)** $y^2 = 12x$



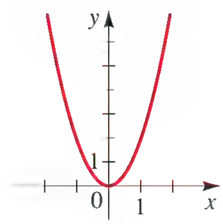




### HABILIDADES

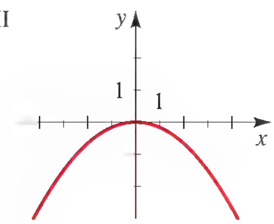
**5-10** ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

5. $y^2 = 2x$
6. $y^2 = -\frac{1}{4}x$
7. $x^2 = -6y$
8. $2x^2 = y$
9. $y^2 - 8x = 0$
10. $12y + x^2 = 0$

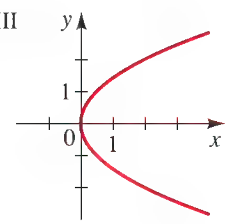
I



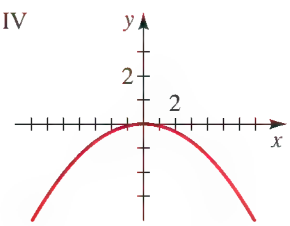

II



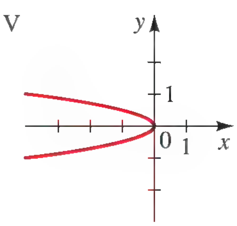

III



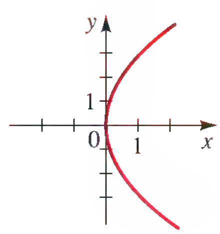

IV




V




VI




**11-22** ■ Encuentre el foco, directriz y diámetro focal de la parábola y trace su gráfica.

11. $x^2 = 9y$
12. $x^2 = y$
13. $y^2 = 4x$
14. $y^2 = 3x$
15. $y = 5x^2$
16. $y = -2x^2$
17. $x = -8y^2$
18. $x = \frac{1}{2}y^2$
19. $x^2 + 6y = 0$
20. $x - 7y^2 = 0$
21. $5x + 3y^2 = 0$
22. $8x^2 + 12y = 0$

**23-28** ■ Use calculadora graficadora para graficar la parábola.

**23.** $x^2 = 16y$ **24.** $x^2 = -8y$

**25.** $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **26.** $8y^2 = x$

**27.** $4x + y^2 = 0$ **28.** $x - 2y^2 = 0$

**29-40** ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la(s) condición(es) dada(s).

**29.** Foco: $F(0, 2)$ **30.** Foco: $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

**31.** Foco: $F(-8, 0)$ **32.** Foco: $F(5, 0)$

**33.** Directriz: $x = 2$ **34.** Directriz: $y = 6$

**35.** Directriz: $y = -10$ **36.** Directriz: $x = -\frac{1}{8}$

**37.** El foco en el eje $x$ positivo, a 2 unidades de distancia de la directriz

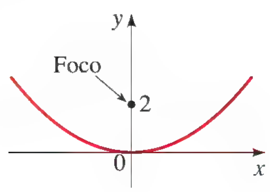
**38.** La directriz tiene punto de intersección 6 en el eje $y$

**39.** Abre hacia arriba con el foco a 5 unidades del vértice

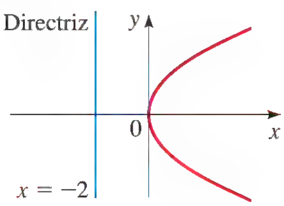
**40.** Diámetro focal 8 y foco en el eje $y$ negativo

**41-50** ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

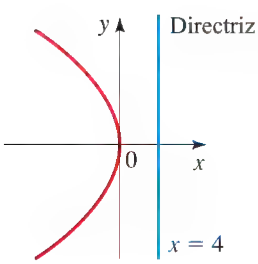
**41.**



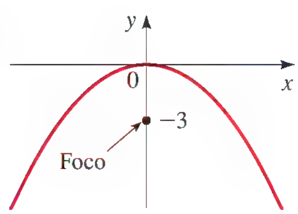

**42.**



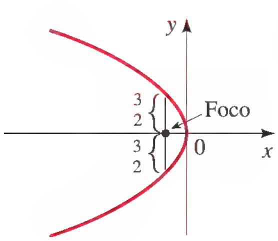

**43.**



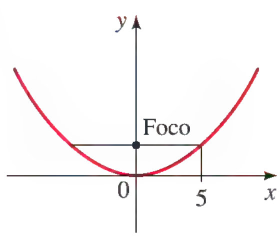

**44.**



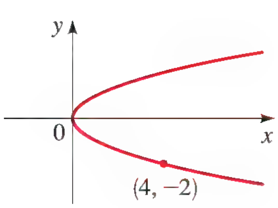

**45.**



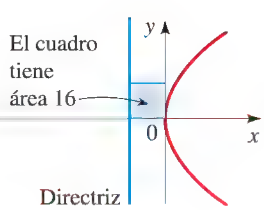

**46.**



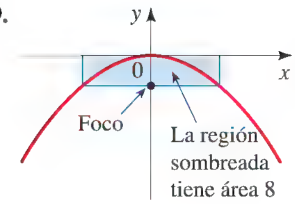

**47.**



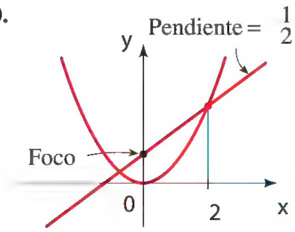

**48.**




**49.**




**50.**

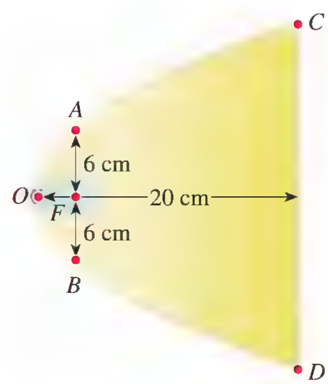



**51.** **(a)** Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$, y $y = 8$.
**(b)** Trace las gráficas. ¿Qué concluye usted?

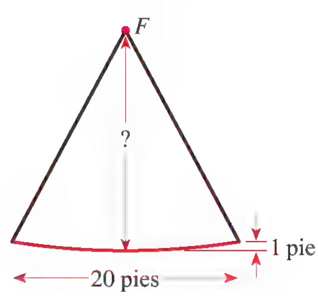
**52.** **(a)** Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen, foco en el eje $y$ positivo, y con diámetros focales 1, 2, 4 y 8.
**(b)** Trace las gráficas. ¿Qué concluye usted?

## APLICACIONES

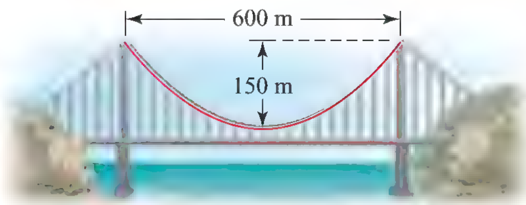
**53. Reflector parabólico** En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla eléctrica está colocada en el foco y el diámetro focal es 12 centímetros.
**(a)** Encuentre una ecuación de la parábola.
**(b)** Encuentre el diámetro $d(C, D)$ de la abertura, 20 cm del vértice.




**54. Disco satelital** Un reflector para disco satelital es parabólico en sección transversal, con receptor en el foco $F$. El reflector mide 1 pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (vea la figura). ¿A qué distancia está el receptor del vértice del reflector parabólico?



**55. Puente colgante** En un puente colgante, la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente que se muestra en la figura tiene torres que están a 600 m una de la otra, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la cúspide de las torres. Encuentre la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice. [*Nota:* Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesario en la construcción del puente.]




**56. Telescopio reflector** El telescopio Hale del Observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se ve en la figura. El espejo está construido en forma parabólica que recolecta luz de las estrellas y la enfoca en el **foco primo**, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulgadas de profundidad en su centro. Encuentre la **longitud focal** de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**57. Parábolas en el mundo real** En el texto se dan varios ejemplos de los usos de parábolas. Encuentre otras situaciones de la vida real en las que se presentan parábolas. Consulte una enciclopedia científica en la sección de bibliografía de su biblioteca, o busque en la Internet.

**58. Cono de luz de una linterna** Una linterna se sostiene para formar una superficie iluminada en el suelo, como se ve en la figura. ¿Es posible poner en ángulo la linterna, de modo tal que el límite de la superficie iluminada sea una parábola? Explique su respuesta.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Rodando hacia debajo de una rampa**

En este proyecto investigamos el proceso de modelar el movimiento de cuerpos en caída, usando para ello un detector de movimiento basado en calculadora. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro:
**www.stewartmath.com**

# 11.2 ELIPSES

Definición geométrica de una elipse ▶ Ecuaciones y gráficas de elipses ▶ Excentricidad de una elipse

## ▼ Definición geométrica de una elipse

Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a una circunferencia alargada. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

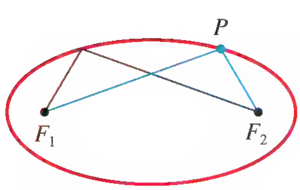



**FIGURA 1**

### DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ELIPSE

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias desde dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es una constante. (Vea Figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

La definición geométrica sugiere un método sencillo para trazar una elipse. Coloque una hoja de papel en un tablero de dibujo e inserte tachuelas en los dos puntos que han de ser los focos de la elipse. Sujete los extremos de una cuerda a las tachuelas, como se muestra en la Figura 2(a). Con la punta de un lápiz, mantenga tensa la cuerda. A continuación mueva el lápiz con todo cuidado alrededor de los focos, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. El lápiz trazará una elipse, porque la suma de las distancias desde la punta del lápiz a los focos siempre será igual a la longitud de la cuerda, que es una constante.

Si la cuerda es sólo ligeramente más larga que la distancia entre los focos, entonces la elipse que sea trazada será de forma alargada, como en la Figura 2(a), pero si los focos están cerca uno del otro con respecto a la longitud de la cuerda, la elipse será casi una circunferencia como se ve en la Figura 2(b).

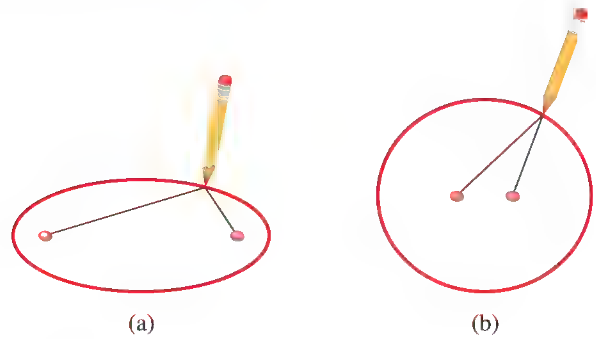


**FIGURA 2**

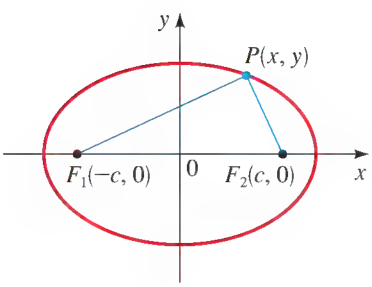



**FIGURA 3**

Para obtener la ecuación más sencilla para una elipse, colocamos los focos sobre el eje $x$ en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ de modo que el origen está a la mitad entre ellos (vea Figura 3).

Para más facilidad hacemos que la suma de las distancias desde un punto en la elipse a los focos sea $2a$. Entonces si $P(x, y)$ es cualquier punto en la elipse, tenemos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Entonces, de la Fórmula de la Distancia, tenemos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado cada lado y expandiendo, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Dividiendo cada lado entre 4 y elevando al cuadrado otra vez, resulta

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como la suma de las distancias de $P$ a los focos debe ser mayor que la distancia entre los focos, tenemos que $2a > 2c$, o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$ y podemos dividir cada lado de la ecuación precedente entre $a^2(a^2 - c^2)$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por facilidad, sea $b^2 = a^2 - c^2$ (con $b > 0$). Como $b^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. La ecuación precedente se convierte entonces en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$

Ésta es la ecuación de la elipse. Para graficarla, necesitamos saber los puntos de intersección en los ejes $x$ y $y$. Haciendo $y = 0$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

de modo que $x^2 = a^2$ o $x = \pm a$. Así, la elipse cruza el eje $z$ en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, como en la Figura 4. Estos puntos se llaman **vértices** de la elipse, y el segmento que los une se denomina **eje mayor**. Su longitud es $2a$.

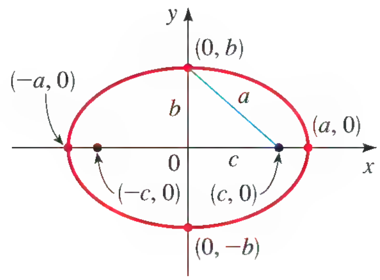



**FIGURA 4**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

Análogamente, si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = \pm b$, de modo que la elipse cruza el eje $y$ en $(0, b)$ y $(0, -b)$. El segmento que une estos puntos recibe el nombre de **eje menor** y tiene longitud $2b$. Observe que $2a > 2b$, por lo cual el eje mayor es más largo que el eje menor. El origen es el **centro** de la elipse.

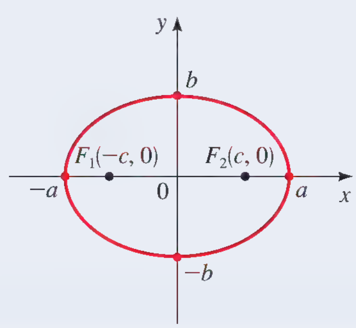
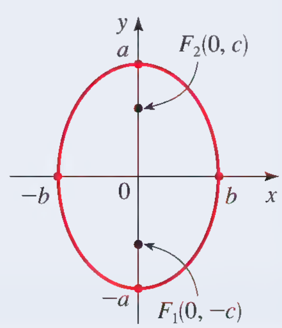
Si los focos de la elipse se colocan sobre el eje $y$ en $(0, \pm c)$ en lugar del eje $x$, entonces las funciones de $x$ y de $y$ se invierten en la discusión precedente y obtenemos una elipse vertical.

## Ecuaciones y gráficas de elipses

El cuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y características de una elipse con centro en el origen.

### ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una elipse con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

| | | |
|---|---|---|
| **ECUACIÓN** | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ |
| | $a > b > 0$ | $a > b > 0$ |
| **VÉRTICES** | $(\pm a, 0)$ | $(0, \pm a)$ |
| **EJE MAYOR** | Horizontal, longitud $2a$ | Vertical, longitud $2a$ |
| **EJE MENOR** | Vertical, longitud $2b$ | Horizontal, longitud $2b$ |
| **FOCOS** | $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$ | $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$ |
| **GRÁFICA** |  |  |





En la ecuación normal de una elipse, $a^2$ es el denominador *mayor* y $b^2$ es el *menor*. Para hallar $c^2$, restamos: denominador mayor menos denominador menor.

## EJEMPLO 1 | Trazado de una elipse

Una elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**(a)** Encuentre los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.

**(b)** Trace la gráfica usando calculadora graficadora.

Las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en un foco.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como el denominador de $x^2$ es mayor, la elipse tiene un eje horizontal mayor. Esto da $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, de modo que $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Entonces $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

| | |
|---|---|
| **FOCOS** | $(\pm\sqrt{5}, 0)$ |
| **VÉRTICES** | $(\pm 3, 0)$ |
| **LONGITUD DE EJE MAYOR** | 6 |
| **LONGITUD DE EJE MENOR** | 4 |

La gráfica se muestra en la Figura 5(a).

**(b)** Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar $y$.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} \qquad \text{Reste } \frac{x^2}{9}$$

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad \text{Multiplique por 4}$$

$$y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la elipse, graficamos ambas funciones:

$$y = 2\sqrt{1 - x^2/9} \qquad \text{y} \qquad y = -2\sqrt{1 - x^2/9}$$

como se muestra en la Figura 5(b).

Observe que la ecuación de una elipse no define $y$ como función de $x$ (vea página 158). Es por esto que necesitamos graficar dos funciones para graficar una elipse.

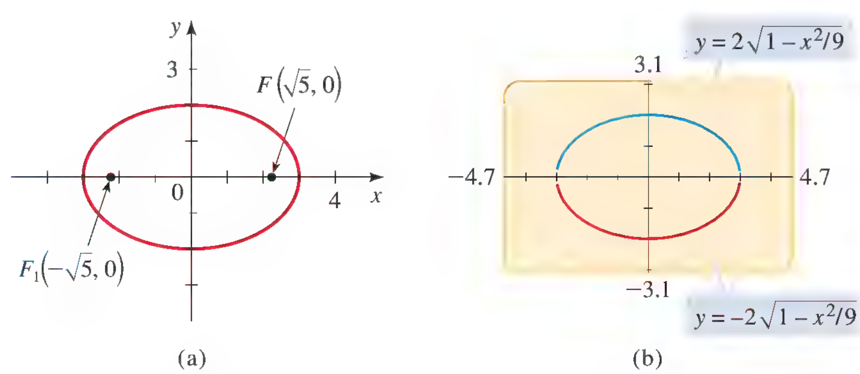



**FIGURA 5**
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

### EJEMPLO 2 | Hallar los focos de una elipse

Encuentre los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Primero ponemos la ecuación en forma normal. Dividiendo entre 144, obtenemos

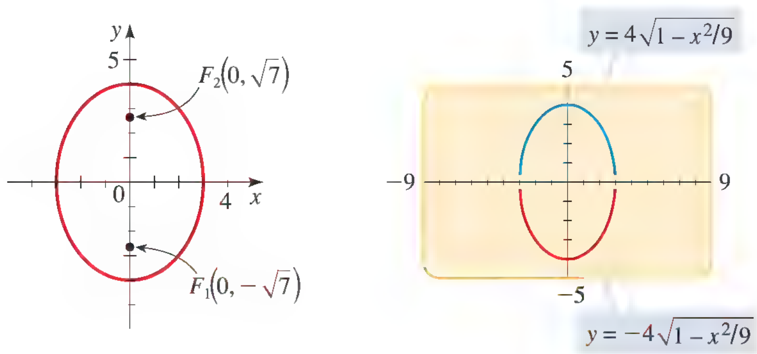
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como $16 > 9$, ésta es una elipse con sus focos en el eje $y$ y con $a = 4$ y $b = 3$. Tenemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$
$$c = \sqrt{7}$$

Entonces, los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. La gráfica se ilustra en la Figura 6(a).

También podemos trazar la gráfica usando calculadora graficadora como se ve en la Figura 6(b).




(a) (b)

**FIGURA 6**
$16x^2 + 9y^2 = 144$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

### EJEMPLO 3 | Encontrar la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, tenemos $a = 4$ y el eje mayor es horizontal. Los focos son $(\pm 2, 0)$, de modo que $c = 2$. Para escribir la ecuación, necesitamos hallar $b$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos

$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica se muestra en la Figura 7.

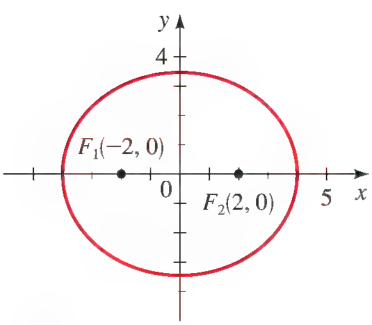



**FIGURA 7**
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **33**

## Excentricidad de una elipse

Vimos ya antes en esta sección (Figura 2) que si $2a$ es sólo ligeramente mayor que $2c$, la elipse es larga y delgada, mientras que si $2a$ es mucho mayor que $2c$, la elipse es casi una circunferencia. Medimos la desviación de una elipse de ser casi una circunferencia por la relación entre $a$ y $c$.

**DEFINICIÓN DE EXCENTRICIDAD**

Para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (con $a > b > 0$), la **excentricidad *e*** es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de toda elipse satisface $0 < e < 1$.

Por lo tanto, si $e$ es cercana a 1, entonces $c$ es casi igual a $a$ y la elipse tiene forma alargada, pero si $e$ es cercana a 0 entonces la elipse tiene forma casi como una circunferencia. La excentricidad es una medida de qué tan "alargada" es la elipse.

En la Figura 8 mostramos varias elipses para demostrar el efecto de variar la excentricidad $e$.

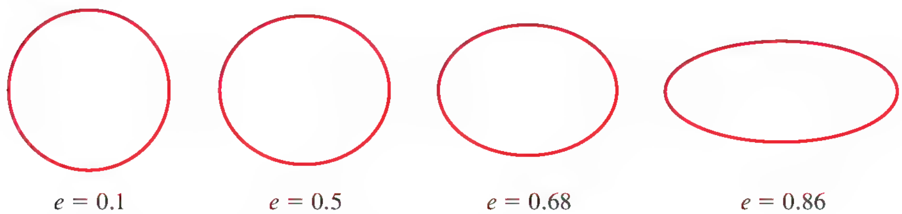



**FIGURA 8** Elipses con varias excentricidades

## EJEMPLO 4 | Hallar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y focos

Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$, y trace su gráfica.

**SOLUCIÓN** Nos dan $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplique en cruz}$$

$$a = 10$$

Para hallar $b$, usamos el hecho de que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Debido a que los focos están sobre el eje $y$, la elipse está orientada verticalmente. Para trazar la elipse, hallamos los puntos de intersección: los puntos de intersección en el eje $x$ son $\pm 6$; en el eje $y$, son $\pm 10$. La gráfica está trazada en la Figura 9.

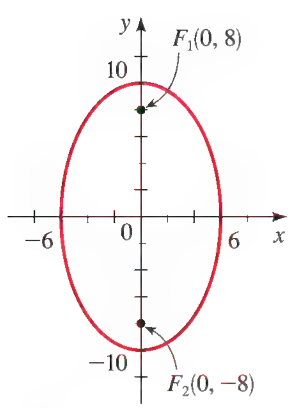



**FIGURA 9**
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

**Excentricidades de las órbitas de los planetas**

Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco. Para casi todos los planetas, estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, de modo que son casi circulares. Mercurio y Plutón, los planetas conocidos más cercano y más alejado del Sol, tienen órbitas visiblemente elípticas.

| Planeta | Excentricidad |
|---|---|
| Mercurio | 0.206 |
| Venus | 0.007 |
| Tierra | 0.017 |
| Marte | 0.093 |
| Júpiter | 0.048 |
| Saturno | 0.056 |
| Urano | 0.046 |
| Neptuno | 0.010 |
| Plutón | 0.248 |

La atracción gravitacional hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del Sol con éste en un foco. Esta sorprendente propiedad fue observada primero por Johannes Kepler, y posteriormente deducida por Isaac Newton a partir de su Ley de Gravitación Universal usando cálculo. Las órbitas de los planetas tienen excentricidades diferentes, pero la mayor parte de ellas son casi circulares (vea al margen).

Las elipses, como las parábolas, tienen una interesante *propiedad de reflexión* que lleva a varias aplicaciones prácticas. Si una fuente de luz se coloca en un foco de una superficie reflectora con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz será reflejada de la superficie al otro foco, como se ve en la Figura 10. Este principio, que funciona para ondas sonoras así como para luz, se usa en *litotricia,* que es un tratamiento para eliminar piedras de los riñones. El paciente es colocado en una tina de agua con secciones transversales elípticas, en forma tal que la piedra del riñón queda localizada de una manera precisa en un foco. Ondas de sonido de alta intensidad generadas en el otro foco son reflejadas a la piedra y ésta queda destruida con daño mínimo al tejido circundante. El paciente se salva del trauma de una cirugía y se recupera en días en lugar de semanas.

La propiedad de reflexión de elipses se usa también en la construcción de *galerías susurrantes.* El sonido proveniente de un foco rebota en las paredes y cielo de una sala elíptica y pasa por el otro foco. En esas salas hasta los susurros más débiles pronunciados en un foco se pueden oír claramente en el otro. Galerías susurrantes famosas incluyen el National Statuary Hall del capitolio de Estados Unidos en Washington, D.C. (vea página 776), y el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City, Utah.

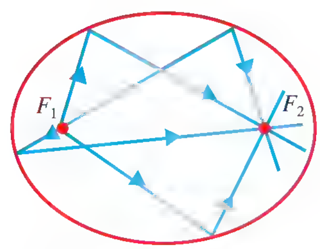



**FIGURA 10**

## 11.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

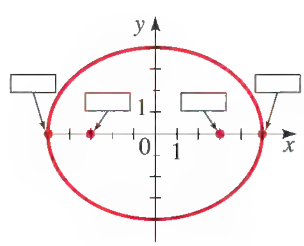
1. Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano para el que las ______de las distancias desde dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es constante. Los puntos $F_1$ y $F_2$ se llaman _______de la elipse.

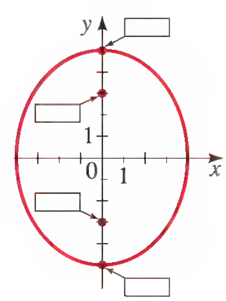
2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ____. Entonces la gráfica de $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ con $a > b > 0$; es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ____. Por lo tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Asigne coordenadas a los vértices y focos en las gráficas dadas para las elipses de los Ejercicios 2 y 3.

**(a)** $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ **(b)** $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$



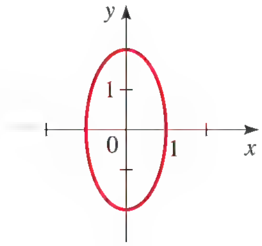
## HABILIDADES

**5-8** ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

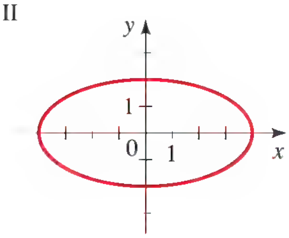
**5.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **6.** $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

**7.** $4x^2 + y^2 = 4$ **8.** $16x^2 + 25y^2 = 400$

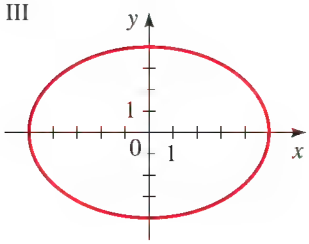
I



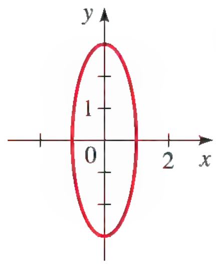
II



III



IV



**9-22** ■ Encuentre los vértices, focos y excentricidad de la elipse. Determine las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.

**9.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **10.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

**11.** $9x^2 + 4y^2 = 36$ **12.** $4x^2 + 25y^2 = 100$

**13.** $x^2 + 4y^2 = 16$ **14.** $4x^2 + y^2 = 16$

**15.** $2x^2 + y^2 = 3$ **16.** $5x^2 + 6y^2 = 30$

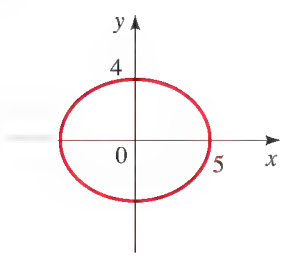
**17.** $x^2 + 4y^2 = 1$ **18.** $9x^2 + 4y^2 = 1$

**19.** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$ **20.** $x^2 = 4 - 2y^2$

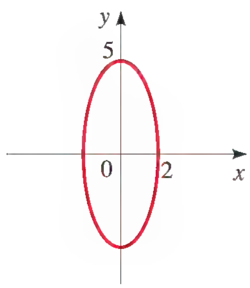
**21.** $y^2 = 1 - 2x^2$ **22.** $20x^2 + 4y^2 = 5$

**21-28** ■ Encuentre una ecuación para la elipse cuya gráfica se muestra.

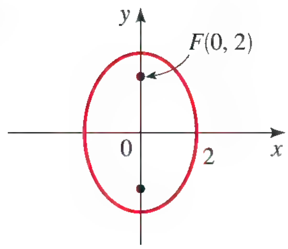
**23.**



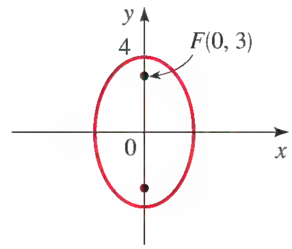
**24.**



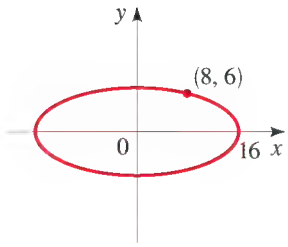
**25.**



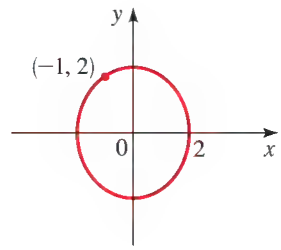
**26.**



**27.**



**28.**



**29-32** ■ Use calculadora graficadora para graficar la elipse.

**29.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ **30.** $x^2 + \dfrac{y^2}{12} = 1$

**31.** $6x^2 + y^2 = 36$ **32.** $x^2 + 2y^2 = 8$

**33-34** ■ Encuentre una ecuación para la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

**33.** Focos: $(\pm 4, 0)$, vértices: $(\pm 5, 0)$

**34.** Focos: $(0, \pm 3)$, vértices: $(0, \pm 5)$

**35.** Longitud de eje mayor: 4, longitud de eje menor: 2, focos en eje $y$

**36.** Longitud de eje mayor: 6, longitud de eje menor: 4, focos en eje $x$

**37.** Focos: $(0, \pm 2)$, longitud de eje menor: 6

**38.** Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje mayor: 12

**39.** Puntos extremos de eje mayor: $(\pm 10, 0)$, distancia entre focos: 6

**40.** Puntos extremos de eje menor: $(0, \pm 3)$, distancia entre focos: 8

**41.** Longitud de eje mayor: 10, focos en eje $x$, elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, 2)$

**42.** Excentricidad: $\frac{1}{9}$, focos: $(0, \pm 2)$

**43.** Excentricidad: 0.8, focos: $(\pm 1.5, 0)$

**44.** Excentricidad: $\sqrt{3}/2$, focos en eje $y$, longitud de eje mayor: 4

**45-47** ■ Encuentre los puntos de intersección del par de elipses. Trace las gráficas de cada par de ecuaciones en los mismos ejes de coordenadas, y marque los puntos de intersección.

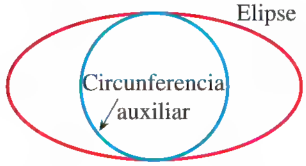
**45.** $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

**47.** $\begin{cases} 100x^2 + 25y^2 = 100 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

**48.** La **circunferencia auxiliar** de una elipse es la circunferencia con radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y centro igual que en la elipse (vea la figura). La circunferencia auxiliar es entonces la circunferencia máxima que puede caber dentro de una elipse.

**(a)** Encuentre una ecuación para la circunferencia auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

**(b)** Para la elipse y la circunferencia auxiliar del inciso (a), demuestre que si $(s, t)$ es un punto en la circunferencia auxiliar, entonces $(2s, t)$ es un punto en la elipse.




**49.** **(a)** Use calculadora graficadora para trazar la mitad superior (la parte en los cuadrantes primero y segundo) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$ para $k = 4, 10, 25$ y $50$.

**(b)** ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de elipses? ¿Cómo difieren?

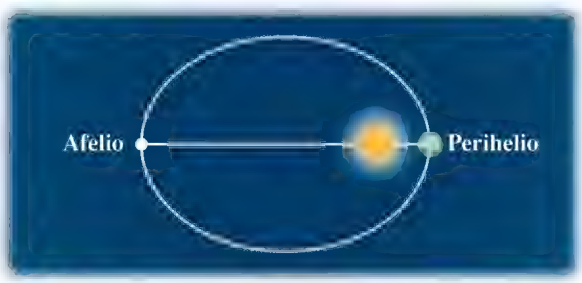
**50.** Si $k > 0$, la ecuación siguiente representa la elipse:

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4 + k} = 1$$

Demuestre que todas las elipses representadas por esta ecuación tienen los mismos focos, no importa cuál sea el valor de $k$.

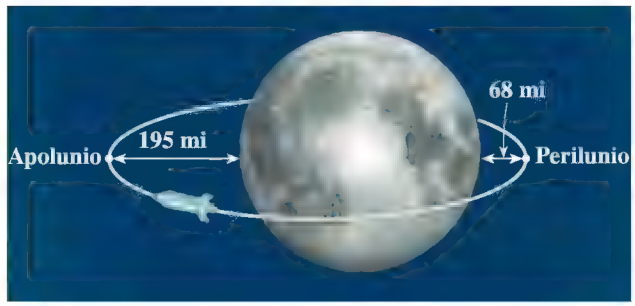
## APLICACIONES

**51. Perihelio y afelio** Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en el que el planeta está más cercano al Sol se denomina **perihelio**, y el punto en el que está más alejado se llama **afelio**. Estos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra al Sol es de 147,000,000 km en el perihelio y 153,000,000 km en el afelio. Encuentre una ecuación para la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje $x$.)



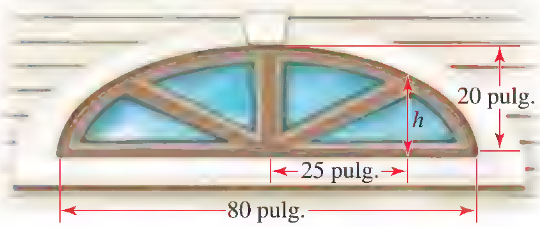

**52. La órbita de Plutón** Con una excentricidad de 0.25, la órbita de Plutón es la más excéntrica del sistema solar. La longitud del eje menor de su órbita es aproximadamente 10,000,000,000 km. Encuentre la distancia entre Plutón y el Sol en el perihelio y en el afelio. (Vea Ejercicio 51.)

**53. Órbita lunar** Para un cuerpo en órbita elíptica alrededor de la Luna, los puntos en la órbita que están más cercanos y más lejanos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Éstos son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en un foco de la órbita. La nave espacial *Apollo 11* fue puesta en órbita lunar con perilunio a 68 millas y apolunio a 195 millas sobre la superficie de la Luna. Suponiendo que la Luna sea una esfera de radio 1075 millas, encuentre una ecuación para la órbita del *Apollo 11*. (Ponga los ejes de coordenadas de modo que el origen se encuentre en el centro de la órbita y los focos estén situados en el eje $x$.)




**54. Elipse de madera contrachapada** Un carpintero desea construir una mesa elíptica de una hoja de madera contrachapada, de 4 pies por 8 pies. Trazará la elipse usando el método de "chincheta e hilo" que se ilustra en las Figuras 2 y 3. ¿Qué longitud del hilo debe usar y a qué distancia debe colocar las chinchetas, si la elipse ha de ser la más grande posible a cortar de la hoja de madera contrachapada?

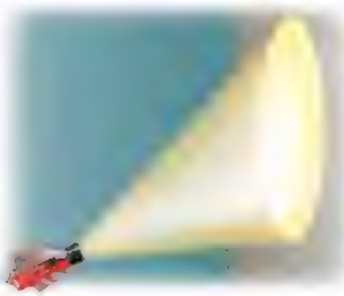
**55. Ventana ojival** Una ventana "ojival" sobre una puerta se construye en la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la figura. La ventana mide 20 pulgadas de alto en su punto más alto y 80 pulgadas en la parte inferior. Encuentre la altura de la ventana a 25 pulgadas del centro de la base.



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

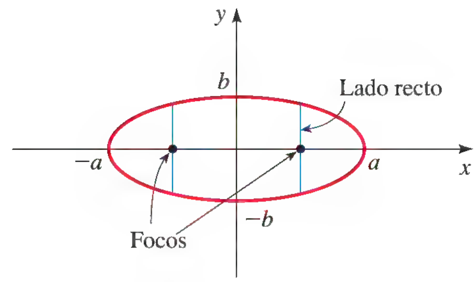
**56. Trazar una elipse en un pizarrón** Trate de dibujar una elipse en un pizarrón en una forma tan precisa como sea posible. ¿En este proceso cómo ayudarían un hilo y dos amigos?

**57. Cono de luz de una linterna** Una linterna ilumina una pared como se ilustra en la figura. ¿Cuál es la forma de los límites del área iluminada? Explique su respuesta.



**58. ¿Qué tan ancha es una elipse en sus focos?** Un *lado recto* para una elipse es un segmento de recta perpendicular al eje mayor en un foco, con puntos extremos en la elipse, como se muestra en la figura en la parte superior de la columna siguiente. Demuestre que la longitud de un lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$ para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$




**59. ¿Es una elipse?** Un papel se envuelve alrededor de una botella cilíndrica, y luego se usa un compás para dibujar una circunferencia en el papel, como se ve en la figura. Cuando el papel se pone plano, ¿la forma trazada en el papel es una elipse? (No es necesario que demuestre su respuesta, pero podría hacer el experimento y ver lo que resulta.)

# 11.3 HIPÉRBOLAS

| Definición geométrica de una hipérbola ▶ Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

## ▼ Definición geométrica de una hipérbola

Aun cuando elipses e hipérbolas tienen formas completamente diferentes, sus definiciones y ecuaciones son similares. En lugar de usar la *suma* de distancias entre dos focos fijos, como en el caso de una elipse, usamos la *diferencia* para definir una hipérbola.

> **DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HIPÉRBOLA**
>
> Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos del plano, cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es una constante. (Vea Figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

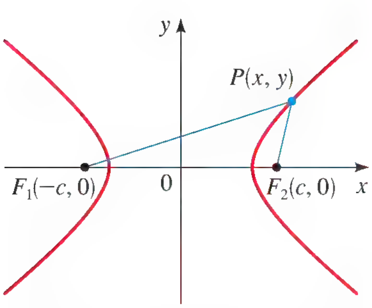



**FIGURA 1** $P$ es una hipérbola si $|d, (P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Al igual que en el caso de la elipse, obtenemos la ecuación más sencilla para la hipérbola al colocar los focos sobre el eje $x$ en $(\pm c, 0)$, como se ve en la Figura 1. Por definición, si $P(x, y)$ está sobre la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a alguna constante positiva, que llamamos $2a$. Por lo tanto, tenemos

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Procediendo como hicimos en el caso de la elipse (Sección 11.2), simplificamos esto a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Del triángulo $PF_1F_2$ de la Figura 1 vemos que $|d, (P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. Se deduce que $2a < 2c$, o $a < c$. Entonces $c^2 - a^2 > 0$ por lo que podemos hacer $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces simplificamos la última ecuación exhibida para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ésta es la *ecuación de la hipérbola*. Si sustituimos $x$ por $-x$ o $y$ por $-y$ en esta ecuación, permanecerá sin cambio, de modo que la hipérbola es simétrica alrededor de los ejes $x$ y $y$ y alrededor del origen. Los puntos de intersección $x$ son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. No hay punto de intersección $y$ porque hacer $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola lleva a $-y^2 = b^2$, que no tiene solución real. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

de modo que $x^2/a^2 \geq 1$; entonces $x^2 \geq a^2$ y por lo tanto $x \geq a$ o $x \leq -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes, llamadas **ramas**. El segmento que une los dos vértices en las ramas separadas es el **eje transverso** de la hipérbola, y el origen recibe el nombre de **centro**.

Si ponemos los focos de la hipérbola en el eje $y$ en lugar del eje $x$, esto tiene el efecto de invertir las funciones de $x$ y de $y$ en la derivación de la ecuación de la hipérbola. Esto conduce a una hipérbola con eje transverso vertical.

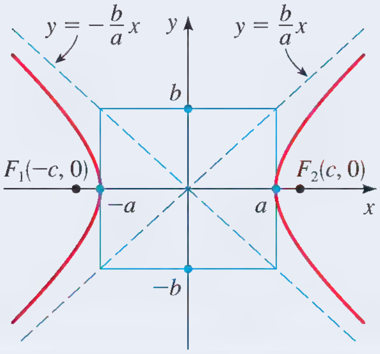
## Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

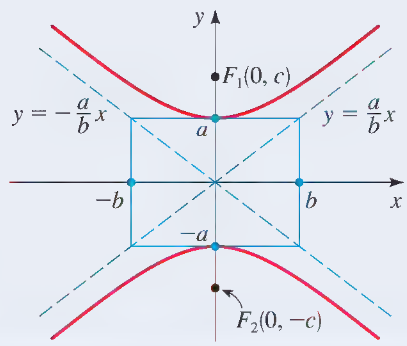
Las propiedades principales de hipérbolas se indican en el recuadro siguiente.

### HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una hipérbola con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

| | | |
|---|---|---|
| **ECUACIÓN** | $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ | $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$ |
| **VÉRTICES** | $(\pm a, 0)$ | $(0, \pm a)$ |
| **EJE TRANSVERSO** | Horizontal, longitud $2a$ | Vertical, longitud $2a$ |
| **ASÍNTOTAS** | $y = \pm \dfrac{b}{a}x$ | $y = \pm \dfrac{a}{b}x$ |
| **FOCOS** | $(\pm c, 0), \quad c^2 = a^2 + b^2$ | $(0, \pm c), \quad c^2 = a^2 + b^2$ |
| **GRÁFICA** | | |



Las asíntotas de funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

Las *asíntotas* mencionadas en este recuadro son rectas a las que la hipérbola se aproxima para valores grandes de $x$ y de $y$. Para hallar las asíntotas en el primer caso del cuadro, de la ecuación despejamos $y$ para obtener

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando $x$ se hace grande, $a^2/x^2$ se acerca a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$, tenemos $a^2/x^2 \to 0$. En consecuencia, para $x$ grande, el valor de $y$ puede aproximarse cuando $y = \pm(b/a)x$. Esto demuestra que estas rectas son asíntotas de la hipérbola.

Las asíntotas son una ayuda esencial para graficar una hipérbola; nos ayudan a determinar su forma. Una manera útil de hallar las asíntotas, para una hipérbola con eje transverso horizontal, es primero localizar los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Entonces trace segmentos horizontales y verticales que pasen por estos puntos para construir un rectángulo, como se ve en la Figura 2(a). A este rectángulo se le da el nombre de **caja central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales de la caja central son $\pm b/a$ de modo que, al prolongarlas, obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, como están trazadas en la Figura 2(b). Finalmente, determinamos los vértices y usamos las asíntotas como guía para trazar la hipérbola que se ilustra en la Figura 2(c). (Un procedimiento similar aplica para graficar una hipérbola que tenga un eje transverso vertical.)

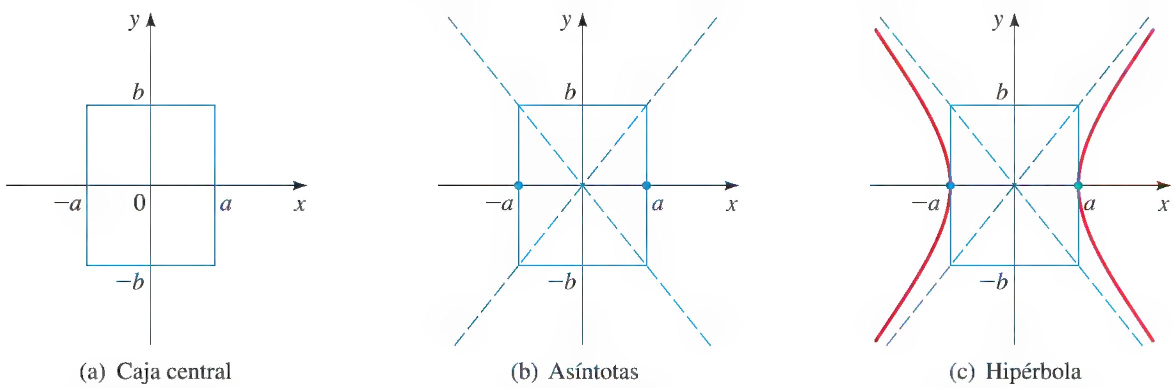



**FIGURA 2** Pasos para graficar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

### CÓMO TRAZAR UNA HIPÉRBOLA

1. **Trazar la caja central.** Éste es el rectángulo con centro en el origen, con lados paralelos a los ejes, que cruza un eje en $\pm a$ y el otro en $\pm b$.
2. **Trazar las asíntotas.** Éstas son las rectas obtenidas al prolongar las diagonales de la caja central.
3. **Determinar los vértices.** Éstos son los dos puntos de intersección en $x$ o los dos puntos de intersección en $y$.
4. **Trazar la hipérbola.** Empiece en un vértice, y trace una rama de la hipérbola, aproximando las asíntotas. Trace la otra rama en la misma forma.

## EJEMPLO 1 | Una hipérbola con eje transverso horizontal

Una hipérbola tiene la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

**(a)** Encuentre los vértices, focos y asíntotas, y trace la gráfica.

**(b)** Trace la gráfica usando calculadora graficadora.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Primero dividimos ambos lados de la ecuación entre 144 para ponerla en forma normal:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Como el término en $x^2$ es positivo, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal; sus vértices y focos están en el eje $x$. Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, obtenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por lo tanto, tenemos

| | |
|---|---|
| **VÉRTICES** | $(\pm 4, 0)$ |
| **FOCOS** | $(\pm 5, 0)$ |
| **ASÍNTOTAS** | $y = \pm\frac{3}{4}x$ |

Después de trazar la caja central y asíntotas, completamos el dibujo de la hipérbola como en la Figura 3(a).

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a $y$ como función de $x$ (vea página 158). Esto es por lo que necesitamos graficar dos funciones para graficar una hipérbola.

**(b)** Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar $y$.

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$-16y^2 = -9x^2 + 144 \qquad \text{Reste } 9x^2$$

$$y^2 = 9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right) \qquad \text{Divida entre } -16 \text{ y factorice } 9$$

$$y = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{16} - 1} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, graficamos las funciones

$$y = 3\sqrt{(x^2/16) - 1} \qquad \text{y} \qquad y = -3\sqrt{(x^2/16) - 1}$$

como se ve en la Figura 3(b).

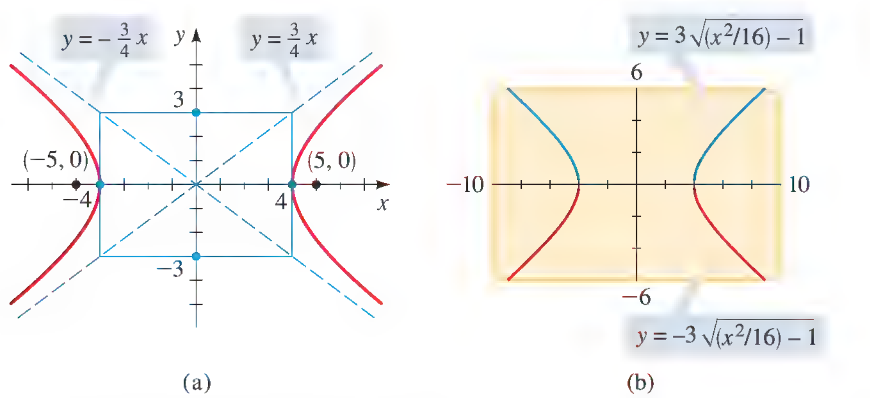



**FIGURA 3**
$9x^2 - 16y^2 = 144$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## EJEMPLO 2 | Una hipérbola con eje transverso vertical

Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

$$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$$

**SOLUCIÓN** Empezamos por escribir la ecuación en la forma estándar para una hipérbola

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

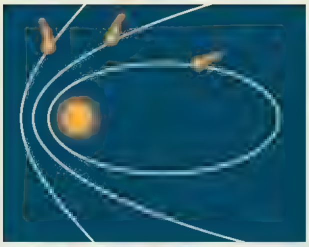
$$y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \text{Divida entre } -9$$

Como el término en $y^2$ es positivo, la hipérbola tiene un eje transverso vertical; sus focos y vértices están en el eje $y$. Como $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$, obtenemos $a = 1$, $b = 3$ y $c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Entonces, tenemos

| | |
|---|---|
| **VÉRTICES** | $(0, \pm 1)$ |
| **FOCOS** | $(0, \pm\sqrt{10})$ |
| **ASÍNTOTAS** | $y = \pm\frac{1}{3}x$ |

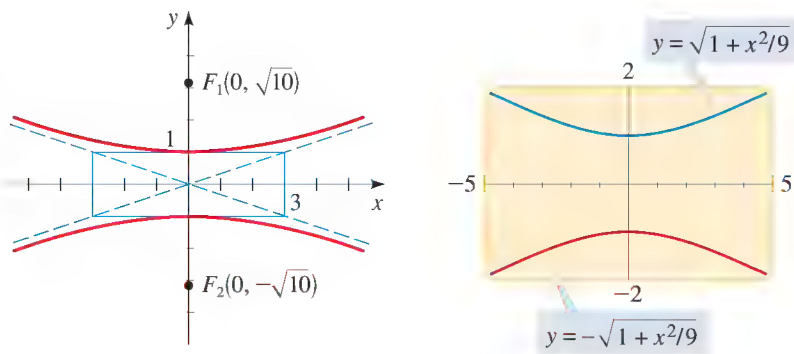
Trazamos la caja central y asíntotas y, a continuación, completamos la gráfica como se muestra en la Figura 4(a).

También podemos trazar la gráfica usando calculadora graficadora, como se ve en la Figura 4(b).



**Trayectorias de cometas**
La trayectoria de un cometa es una elipse, una parábola, o una hipérbola con el Sol en un foco. Este dato se puede comprobar con uso de cálculo y las leyes de Newton del movimiento.* Si la trayectoria es una parábola o una hipérbola, el cometa nunca regresará. Si su trayectoria es una elipse, puede determinarse de manera precisa cuándo y dónde se verá de nuevo el cometa. El cometa Halley tiene una trayectoria elíptica y regresa cada 75 años; la última vez que se avistó fue en 1987. Su órbita es una elipse muy excéntrica; se espera que regrese al sistema solar interior hacia el año 4377.

*James Stewart, *Cálculo*, 7a ed. (Belmont, CA: Brooks/Cole, 2012), pp. 868 y 872.




(a) (b)

**FIGURA 4**
$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y focos

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$. Trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Como los vértices están sobre el eje $x$, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal. Su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tenemos $a = 3$ y $c = 4$. Para hallar $b$, usamos la relación $a^2 + b^2 = c^2$:

$$3^2 + b^2 = 4^2$$
$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$
$$b = \sqrt{7}$$

Entonces la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

La gráfica se ilustra en la Figura 5.

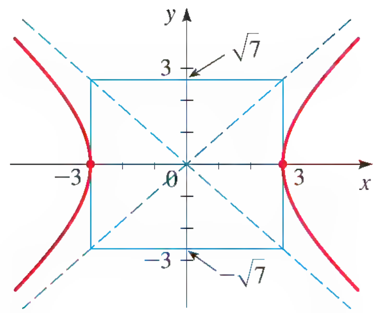



**FIGURA 5**
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **31**

## EJEMPLO 4 | Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Encuentre la ecuación y focos de la hipérbola con vértices $(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm 2x$. Trace la gráfica.

**SOLUCIÓN** Como los vértices están en el eje $y$, la hipérbola tiene un eje transverso vertical con $a = 2$. De la ecuación de la asíntota vemos que $a/b = 2$. Como $a = 2$ obtenemos $2/b = 2$, de modo que $b = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para hallar los focos, calculamos $c^2 = a^2 + b^2 = 22 + 12 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica se ilustra en la Figura 6.

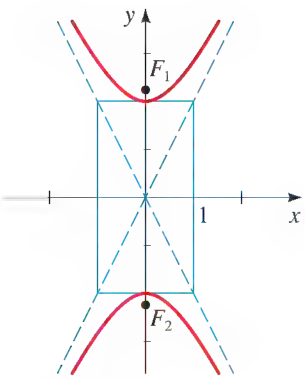



**FIGURA 6**
$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **35**

Al igual que parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una interesante *propiedad reflectora*. Una luz apuntada a un foco de un espejo hiperbólico es reflejada hacia el otro foco, como se ve en la Figura 7. Esta propiedad se emplea en la construcción de telescopios del tipo Cassegrain. Un espejo hiperbólico se coloca en el tubo del telescopio de modo que la luz reflejada del reflector parabólico primario se apunta a un foco del espejo hiperbólico. La luz se vuelve a enfocar entonces a un punto más accesible abajo del reflector primario (Figura 8).

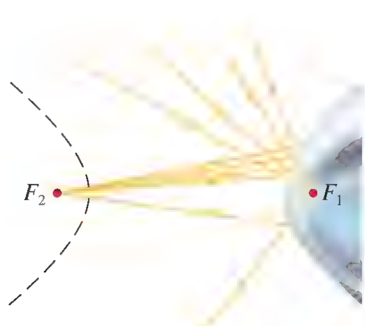



**FIGURA 7** Propiedad reflectora de hipérbolas

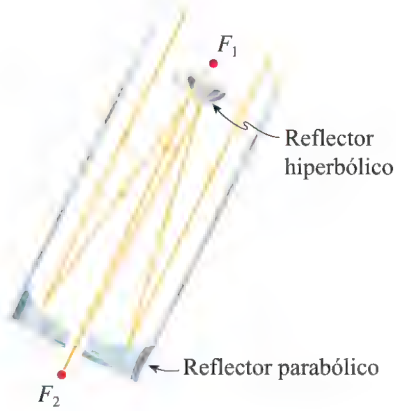



**FIGURA 8** Telescopio tipo Cassegrain

El sistema LORAN (Long RAnge Navigation) se utilizó hasta principios de la década de 1990; ahora ha sido sustituido por el sistema GPS (vea página 700). En el sistema LORAN, se usan hipérbolas a bordo de un barco para determinar su posición. En la Figura 9, estaciones de radio en $A$ y $B$ transmiten señales simultáneamente para su recepción por el barco en $P$. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo en la recepción de estas señales en una diferencia de distancia $d(P, A) - d(P, B)$. Por la definición de hipérbola, esto localiza el barco en una rama de una hipérbola con focos en $A$ y $B$ (trazada en negro en la figura). El mismo procedimiento se realiza con otras dos estaciones de radio en $C$ y $D$, y esto localiza el barco en una segunda hipérbola (mostrada en rojo en la figura). (En la práctica, sólo son necesarias tres estaciones porque una estación se puede usar como foco para ambas hipérbolas.) Las coordenadas del punto de intersección de estas dos hipérbolas, que pueden ser calculadas de manera precisa por la computadora, dan la posición de $P$.

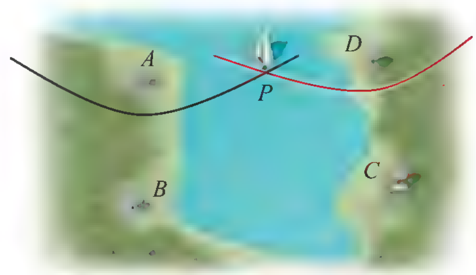



**FIGURA 9** Sistema LORAN para hallar la posición de un barco

## 11.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

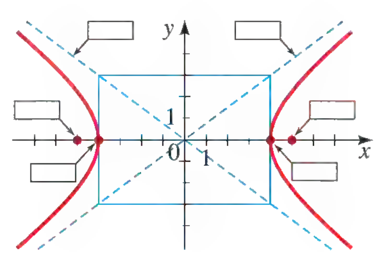
1. Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano para el que la ______de las distancias desde dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ es constante. Los puntos $F_1$ y $F_2$ se llaman _______ de la hipérbola.

2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0, b > 0$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

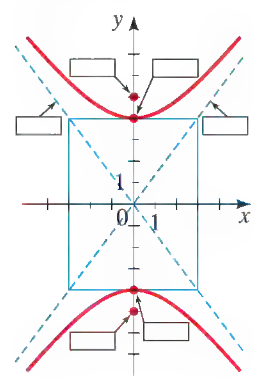
3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ con $a > 0, b > 0$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Asigne coordenada a los vértices, focos y asíntotas en las gráficas dadas por las hipérbolas de los Ejercicios 2 y 3.

**(a)** $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$




**(b)** $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$



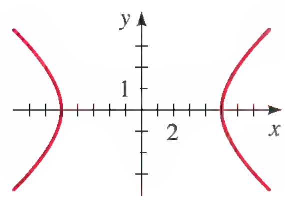
## HABILIDADES

**5-8** ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

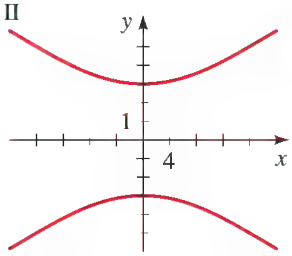
**5.** $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **6.** $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$

**7.** $16y^2 - x^2 = 144$ **8.** $9x^2 - 25y^2 = 225$

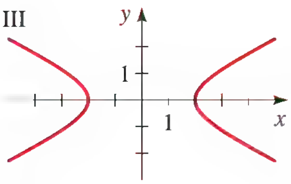
I



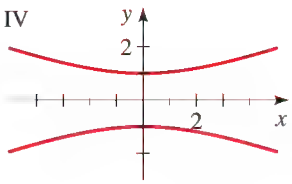

II




III




IV




**9-20** ■ Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola, y trace su gráfica.

**9.** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **10.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

**11.** $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$ **12.** $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

**13.** $x^2 - y^2 = 1$ **14.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

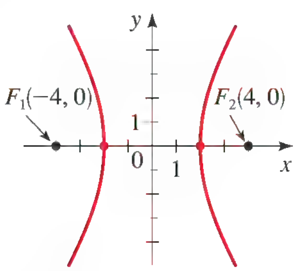
**15.** $25y^2 - 9x^2 = 225$ **16.** $x^2 - y^2 + 4 = 0$

**17.** $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ **18.** $x^2 - 2y^2 = 3$

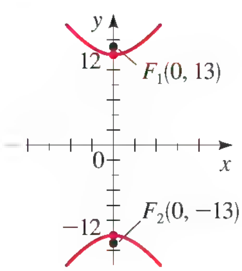
**19.** $4y^2 - x^2 = 1$ **20.** $9x^2 - 16y^2 = 1$

**21-26** ■ Encuentre la ecuación para la hipérbola cuya gráfica se muestra.

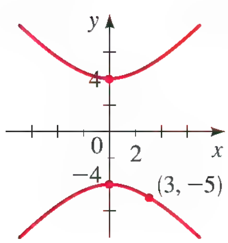
**21.**



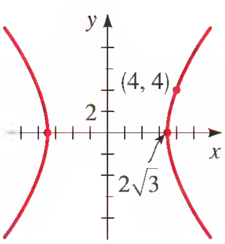

**22.**



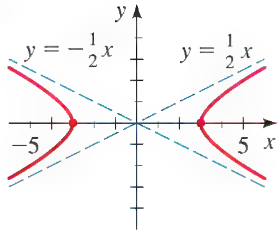

**23.**



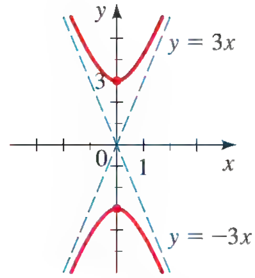

**24.**




**25.**




**26.**




**27-30** ■ Use calculadora graficadora para graficar la hipérbola.

**27.** $x^2 - 2y^2 = 8$ **28.** $3y^2 - 4x^2 = 24$

**29.** $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{6} = 1$ **30.** $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

**31-42** ■ Encuentre una ecuación para la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

**31.** Focos: $(\pm 5, 0)$, vértices: $(\pm 3, 0)$

**32.** Focos: $(\pm 0, 10)$, vértices: $(0, \pm 8)$

**33.** Focos: $(0, \pm 2)$, vértices: $(0, \pm 1)$

**34.** Focos: $(\pm 6, 0)$, vértices: $(\pm 2, 0)$

**35.** Vértices: $(\pm 1, 0)$, asíntotas: $y = \pm 5x$

**36.** Vértices: $(0, \pm 6)$, asíntotas: $y = \pm\frac{1}{3}x$

**37.** Focos: $(0, \pm 8)$, asíntotas: $y = \pm\frac{1}{2}x$

**38.** Vértices: $(0, \pm 6)$, hipérbola pasa por $(-5, 9)$

**39.** Asíntotas: $y = \pm x$, hipérbola pasa por $(5, 3)$

**40.** Focos: $(\pm 3, 0)$, hipérbola pasa por $(4, 1)$

**41.** Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje transverso: 6

**42.** Focos: $(\pm 3, 0)$, longitud de eje transverso: 1

**43.** **(a)** Demuestre que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ son perpendiculares entre sí.

**(b)** Encuentre la ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y con asíntotas perpendiculares entre sí.

**44.** Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se dice que son **conjugadas** entre sí.

**(a)** Demuestre que las hipérbolas

$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \quad \text{y} \quad 4y^2 - x^2 + 16 = 0$$

son conjugadas entre sí y trace sus gráficas en los mismos ejes de coordenadas.

**(b)** ¿Qué tienen en común las hipérbolas del inciso (a)?

**(c)** Demuestre que cualquier par de hipérbolas conjugadas tiene la relación que usted encontró en el inciso (b).

**45.** En la deducción de la ecuación de la hipérbola al principio de esta sección, dijimos que la ecuación

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Indique los pasos necesarios para demostrar esto.

**46.** **(a)** Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

determine los valores de $a$, $b$ y $c$, y encuentre las coordenadas de los focos $F_1$ y $F_2$.

**(b)** Demuestre que el punto $P(5, \frac{16}{3})$ está sobre esta hipérbola.

**(c)** Encuentre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$

**(d)** Verifique que la diferencia entre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ es $2a$.

**47.** Las hipérbolas se llaman **confocales** si tienen los mismos focos.

**(a)** Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16 - k} = 1 \quad \text{con } 0 < k < 16$$

son confocales.

**(b)** Use calculadora graficadora para trazar las ramas superiores de la familia de hipérbolas del inciso (a) para $k = 1, 4, 8$ y 12. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando $k$ aumenta?

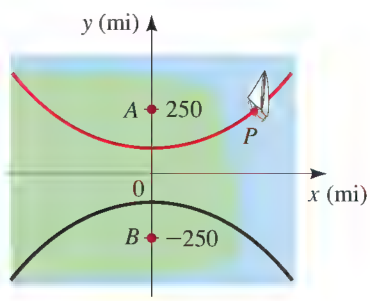
## APLICACIONES

**48. Navegación** En la figura, las estaciones LORAN en $A$ y $B$ están a 500 millas entre sí, y el barco en $P$ recibe la señal de la estación $A$ 2640 microsegundos ($\mu$s) antes de recibir la señal de la estación $B$.

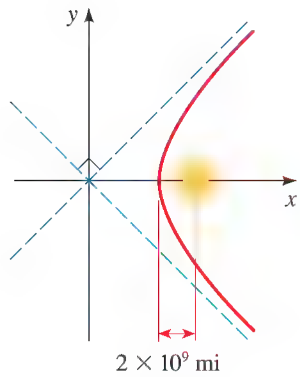
**(a)** Suponiendo que las señales de radio viajan a 940 pies/$\mu$s, encuentre $d(P, A) - d(P, B)$.

**(b)** Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura. (Use millas como la unidad de distancia.)

**(c)** Si $A$ está al norte de $B$ y si $P$ está al este de $A$, ¿a qué distancia está $P$ de $A$?



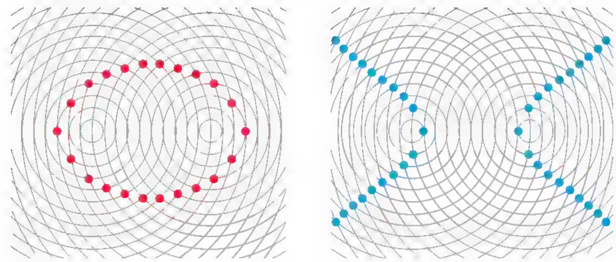

**49. Trayectorias de cometas** Algunos cometas, como el Halley, son una parte permanente del sistema solar, moviéndose en órbitas elípticas alrededor del Sol. Otros cometas pasan por el sistema solar sólo una vez, siguiendo una trayectoria hiperbólica con el Sol en un foco. La figura en la parte superior de la columna siguiente muestra la trayectoria de uno de estos cometas. Encuentre una ecuación para la trayectoria, suponiendo que lo más que se acerca el cometa al Sol es $2 \times 10^9$ millas y que la trayectoria que el cometa estaba tomando, antes de acercarse al sistema solar, está en ángulo recto con respecto a la trayectoria con la que continúa después de salir del sistema solar.




**50. Olas en una piscina** Dos piedras se dejan caer simultáneamente en una piscina con agua en calma. Las crestas de las ondas resultantes forman circunferencias concéntricas igualmente espaciadas, como se ve en las figuras. Las olas interactúan unas con otras para crear ciertos patrones de interferencia.

**(a)** Explique por qué los puntos rojos están sobre una elipse.

**(b)** Explique por qué los puntos azules están sobre una hipérbola.



## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**51. Hipérbolas en el mundo real** En el texto se dan varios ejemplos de usos de hipérbolas. Encuentre otras situaciones en la vida real en las que aparecen hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica en la sección de bibliografía de su biblioteca, o busque en la Internet.

**52. Luces de una lámpara** La luz de una lámpara forma una superficie iluminada en una pared, como se ve en la figura. ¿Por qué es una hipérbola el límite de esta superficie iluminada? ¿Puede una persona sostener una linterna para que su haz forme una hipérbola en el suelo?

# 11.4 CÓNICAS DESPLAZADAS



En las secciones precedentes estudiamos parábolas con vértices en el origen y elipses e hipérbolas con centros en el origen. Nos restringimos a estos casos porque estas ecuaciones tienen la forma más sencilla. En esta sección consideramos cónicas cuyos vértices y centros no están necesariamente en el origen, y determinamos la forma en que esto afecta sus ecuaciones.

## ▼ Desplazamiento de gráficas de ecuaciones

En la Sección 2.5 estudiamos transformaciones de funciones que tienen el efecto de desplazar sus gráficas. En general, para cualquier ecuación en $x$ y $y$, si sustituimos $x$ con $x - h$ o con $x + h$, la gráfica de la nueva ecuación es simplemente la vieja gráfica desplazada horizontalmente; si $y$ se sustituye con $y - k$ o con $y + k$, la gráfica se desplaza verticalmente. El siguiente recuadro da los detalles.

### DESPLAZAMIENTO DE GRÁFICAS DE ECUACIONES

Si $h$ y $k$ son números reales positivos, entonces sustituir $x$ por $x - h$ o por $x + h$ o sustituir $y$ con $y - k$ o con $y + k$ tiene el (los) siguiente(s) efecto(s) en la gráfica de cualquier ecuación en $x$ y $y$.

| | Cambio | Cómo es desplazada la gráfica |
|---|---|---|
| **1.** | $x$ sustituida con $x - h$ | A la derecha $h$ unidades |
| **2.** | $x$ sustituida con $x + h$ | A la izquierda $h$ unidades |
| **3.** | $y$ sustituida con $y - k$ | Hacia arriba $k$ unidades |
| **4.** | $y$ sustituida con $y + k$ | Hacia abajo $k$ unidades |

## ▼ Elipses desplazadas

Apliquemos desplazamiento horizontal y vertical a la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1. Si la desplazamos de modo que su centro se encuentre en el punto $(h, k)$ en lugar de en el origen, entonces su ecuación se convierte en

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

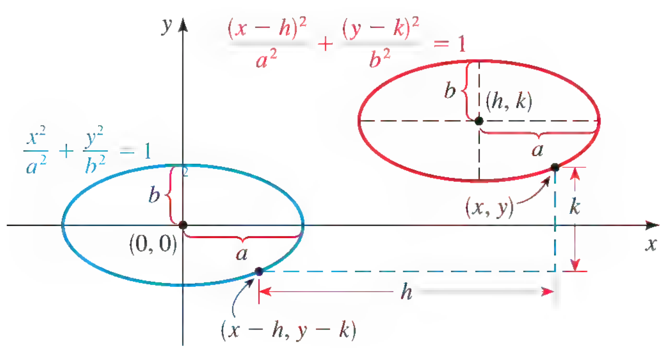



**FIGURA 1** Elipse desplazada

**EJEMPLO 1 | Trazar la gráfica de una elipse desplazada**

Trace una gráfica de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

**SOLUCIÓN** La elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse desplazada}$$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades. Los puntos extremos de los ejes menor y mayor de la elipse con centro en el origen son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$. Aplicamos los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$(2, 0) \rightarrow (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)$$
$$(0, 3) \rightarrow (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)$$
$$(0, -3) \rightarrow (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)$$

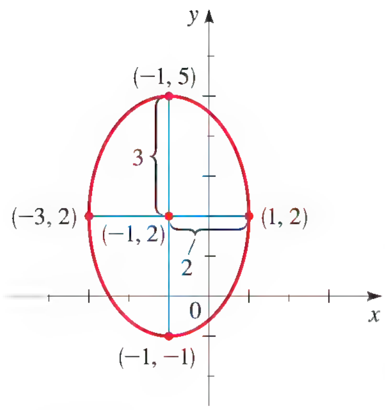



**FIGURA 2** $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Esto nos ayuda a trazar la gráfica de la Figura 2.

Para hallar los focos de la elipse desplazada, primero hallamos los focos de la elipse con centro en el origen. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, tenemos $c^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. Por lo tanto, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. Desplazando a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, obtenemos

$$(0, \sqrt{5}) \rightarrow (0 - 1, \sqrt{5} + 2) = (-1, 2 + \sqrt{5})$$
$$(0, -\sqrt{5}) \rightarrow (0 - 1, -\sqrt{5} + 2) = (-1, 2 - \sqrt{5})$$

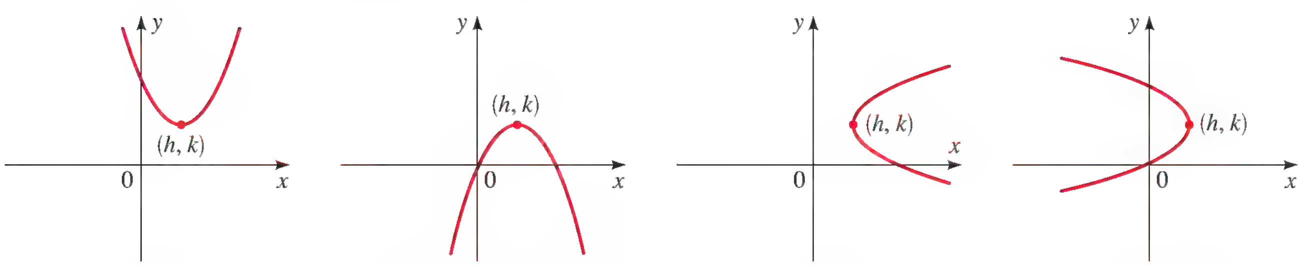
En consecuencia, los focos de la elipse desplazada son

$$(-1, 2 + \sqrt{5}) \quad \text{y} \quad (-1, 2 - \sqrt{5})$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

## Parábolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a parábolas lleva a las ecuaciones y gráficas que se ilustran en la Figura 3.




(a) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p > 0$ (b) $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, $p < 0$ (c) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p > 0$ (d) $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, $p < 0$

**FIGURA 3** Parábolas desplazadas

## EJEMPLO 2 | Graficar una parábola desplazada

Determine el vértice, foco y directriz y trace una gráfica de la parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

**SOLUCIÓN** Completamos el cuadrado en $x$ para poner esta ecuación en una de las formas de la Figura 3.

$$x^2 - 4x + 4 = 8y - 28 + 4 \quad \text{Sume 4 para completar el cuadrado}$$

$$(x-2)^2 = 8y - 24$$

$$(x-2)^2 = 8(y-3) \quad \text{Parábola desplazada}$$

Esta parábola abre hacia arriba con vértice en (2, 3). Se obtiene de la parábola

$$x^2 = 8y \quad \text{Parábola con vértice en el origen}$$

al desplazar a la derecha 2 unidades y hacia arriba 3 unidades. Como $4p = 8$, tenemos $p = 2$ y el foco está 2 unidades arriba del vértice y la directriz está 2 unidades abajo del vértice. Entonces el foco es (2, 5) y la directriz es $y = 1$. La gráfica se muestra en la Figura 4.

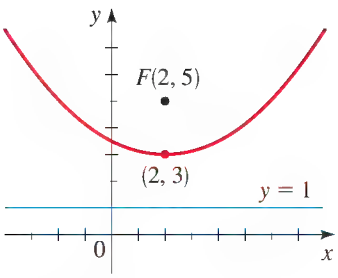



**FIGURA 4**
$x^2 - 4x = 8y - 28$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9** Y **23**

## Hipérbolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a las hipérbolas lleva a las ecuaciones y gráficas que se muestran en la Figura 5.

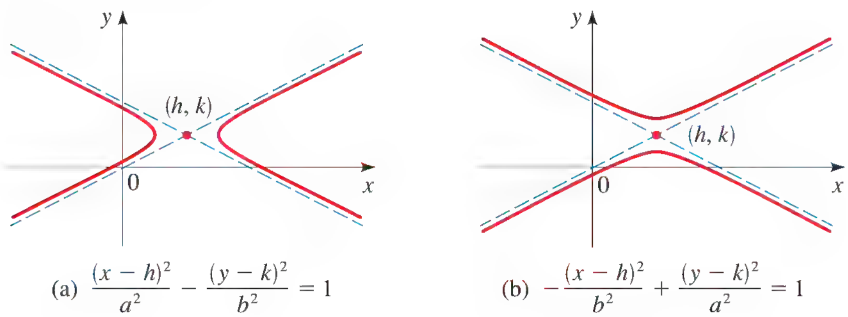



**FIGURA 5** Hipérbolas desplazadas

## EJEMPLO 3 | Graficar una hipérbola desplazada

Una cónica desplazada tiene la ecuación

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

**(a)** Complete el cuadrado en $x$ y $y$ para demostrar que la ecuación representa una hipérbola.

**(b)** Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola, y trace su gráfica.

**(c)** Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Completamos los cuadrados tanto de $x$ como de $y$:

$$9(x^2 - 8x \quad\quad) - 16(y^2 + 2y \quad\quad) = 16 \quad \text{Agrupe términos y factorice}$$

$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \cdot 16 - 16 \cdot 1 \quad \text{Complete los cuadrados}$$

$$9(x-4)^2 - 16(y+1)^2 = 144 \quad \text{Divida esto entre 144}$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \text{Hipérbola desplazada}$$

Comparando esto con la Figura 5(a), vemos que ésta es la ecuación de una hipérbola desplazada.

**(b)** La hipérbola desplazada tiene centro $(4, -1)$ y un eje transverso horizontal.

$$\textbf{CENTRO} \quad (4, -1)$$

Su gráfica tendrá la misma forma que la hipérbola no desplazada

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola con centro en el origen}$$

Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, tenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Entonces los focos se encuentran 5 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y los vértices están 4 unidades a cada lado del centro.

$$\textbf{FOCOS} \qquad (-1, -1) \quad \text{y} \quad (9, -1)$$

$$\textbf{VÉRTICES} \qquad (0, -1) \quad \text{y} \quad (8, -1)$$

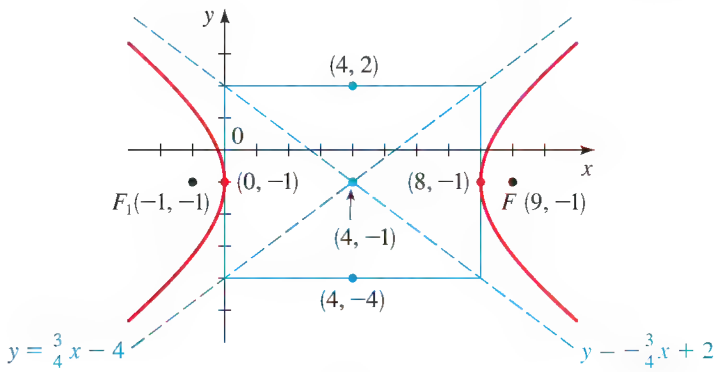
Las asíntotas de la hipérbola no desplazada son $y = \pm\frac{3}{4}x$, de modo que las asíntotas de la hipérbola desplazada se encuentran como sigue.

$$\textbf{ASÍNTOTAS} \qquad y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

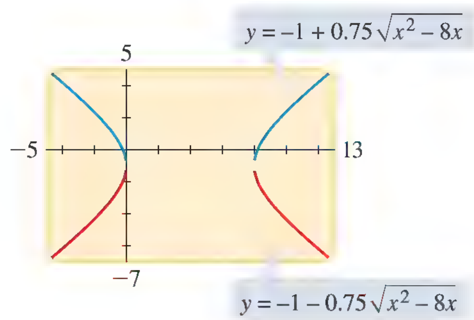
$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}x \mp 3$$

$$y = \tfrac{3}{4}x \quad 4 \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{3}{4}x + 2$$

Para ayudarnos a trazar la hipérbola, trazamos la caja central; se prolonga 4 unidades a la izquierda y derecha del centro, y 3 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro. A continuación trazamos las asíntotas y completamos la gráfica de la hipérbola desplazada, como se muestra en la Figura 6(a).




(a)




(b)

**FIGURA 6** $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

**(c)** Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora, necesitamos despejar $y$. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en $y$, de modo que usamos la Fórmula Cuadrática para despejar $y$. Escribiendo la ecuación en la forma

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 72x + 16 = 0$$

obtenemos

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(16)(-9x^2 + 72x + 16)}}{2(16)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{576x^2 - 4608x}}{32} \qquad \text{Expanda}$$

$$= \frac{-32 \pm 24\sqrt{x^2 - 8x}}{32} \qquad \text{Factorice 576 debajo el radical}$$

$$= -1 \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{Simplifique}$$

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a $y$ como función de $x$ (vea página 158). Es por ello que necesitamos graficar dos funciones para graficar una hipérbola.

Para obtener la gráfica de la hipérbola, graficamos las funciones

$$y = -1 + 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

y

$$y = -1 - 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

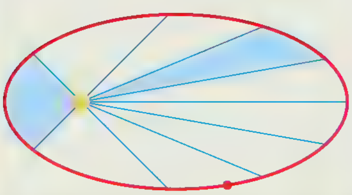
como se ve en la Figura 6(b).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **25**

**JOHANNES KEPLER** (1571-1630) fue el primero en dar una descripción correcta del movimiento de los planetas. La cosmología de su tiempo postulaba complicados sistemas de circunferencias moviéndose en circunferencias para describir estos movimientos. Kepler buscaba una descripción más sencilla y armónica. Como astrónomo oficial de la corte imperial de Praga, estudió las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, cuyos datos eran los más precisos de que se disponía en aquel tiempo. Después de numerosos intentos por hallar una teoría, Kepler hizo el trascendental descubrimiento de que las órbitas de los planetas eran elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco.
2. El segmento de recta que une al Sol y un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (vea la figura).
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Su formulación de estas leyes es quizá la deducción más impresionante hecha a partir de datos empíricos en la historia de la ciencia.



## La ecuación general de una cónica desplazada

Si expandimos y simplificamos las ecuaciones de cualesquiera de las cónicas desplazadas que se ilustran en las Figuras 1, 3 y 5, entonces siempre vamos a obtener una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A$ y $C$ son diferentes de cero ambas. A la inversa, si empezamos con una ecuación de esta forma, entonces completamos el cuadrado en $x$ y $y$ para ver cuál tipo de sección cónica representa. En algunos casos la gráfica de la ecuación resulta ser sólo un par de rectas o un solo punto, o puede no haber gráfica en absoluto. Estos casos reciben el nombre de **cónicas degeneradas**. Si la ecuación no es degenerada, entonces podemos saber si representa una parábola, una elipse o una hipérbola simplemente con examinar los signos de $A$ y $C$, como se describe en el recuadro siguiente.

### ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA DESPLAZADA

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A$ y $C$ son diferentes de cero ambas, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados la gráfica es

1. una parábola si $A$ o $C$ es 0,
2. una elipse si $A$ y $C$ tienen el mismo signo (o una circunferencia si $A = C$).
3. una hipérbola si $A$ y $C$ tienen signos contrarios.

### EJEMPLO 4 | Una ecuación que lleva a una cónica degenerada

Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

**SOLUCIÓN** Como los coeficientes de $x^2$ y $y^2$ son de signo contrario, esta ecuación se ve como si debiera representar una hipérbola (como la ecuación del Ejemplo 3). Para ver si éste es el caso, completamos los cuadrados:

$$9(x^2 + 2x \qquad) - (y^2 - 6y \qquad) = 0 \qquad \text{Agrupe términos y factorice 9}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 0 + 9 \cdot 1 - 9 \qquad \text{Complete los cuadrados}$$

$$9(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{9} = 0 \qquad \text{Divida entre 9}$$

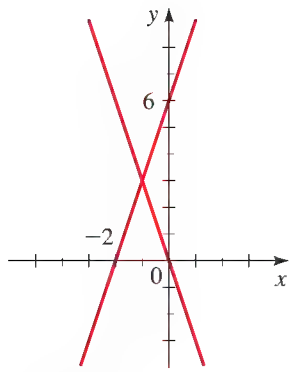



**FIGURA 7**
$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

Para que esto se ajuste a la forma de la ecuación de una hipérbola, necesitaríamos una constante diferente de cero a la derecha del signo igual. En realidad, un ulterior análisis indica que ésta es la ecuación de un par de rectas que se cruzan:

$$(y - 3)^2 = 9(x + 1)^2$$

$$y - 3 = \pm 3(x + 1) \quad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$y = 3(x + 1) + 3 \quad \text{o} \quad y = -3(x + 1) + 3$$

$$y = 3x + 6 \qquad\qquad y = -3x$$

Estas rectas están graficadas en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Debido a que la ecuación del Ejemplo 4 a primera vista se veía como la ecuación de una hipérbola, pero, resultó que representaba simplemente un par de rectas, nos referimos a su gráfica como una **hipérbola degenerada**. Las elipses y parábolas degeneradas también pueden aparecer cuando completamos el (los) cuadrado(s) en una ecuación que parece representar una cónica. Por ejemplo, la ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0$$

se ve como si debiera representar una elipse, porque los coeficientes de $x^2$ y $y^2$ tienen el mismo signo. Pero completar el cuadrado nos lleva a

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

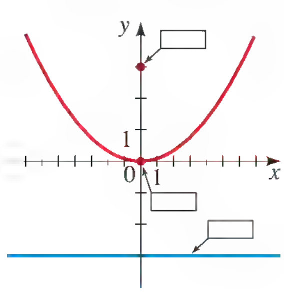
que no tiene solución en absoluto (porque la suma de los dos cuadrados no puede ser negativa). Esta ecuación es, por lo tanto, degenerada.

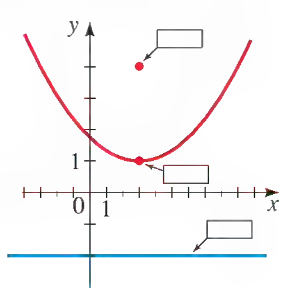
## 11.4 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

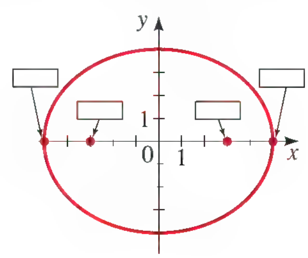
1. Suponga que deseamos graficar una ecuación en $x$ y $y$.
   **(a)** Si sustituimos $x$ con $x - 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la _______3 unidades. Si sustituimos $x$ con $x + 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la ______3 unidades.
   **(b)** Si sustituimos $y$ con $y - 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza _______ 1 unidad. Si sustituimos $y$ con $y + 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza _________ 1 unidad.

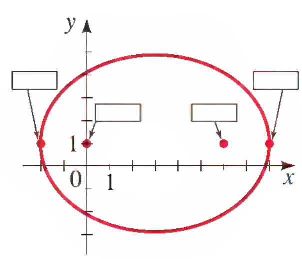
2. Nos dan las gráficas de $x^2 = 12y$ y $(x - 3)^2 = 12(y - 1)$. Asigne coordenadas al foco, directriz y vértice de cada parábola.



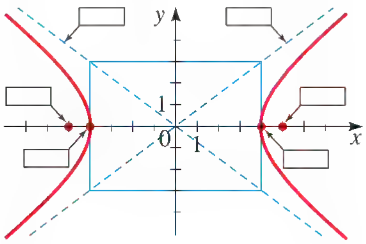



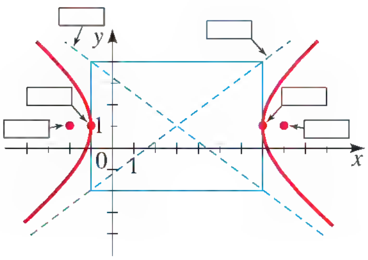

3. Nos dan las gráficas de $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ y $\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 1)^2}{4^2} = 1$.
   Asigne coordenadas a los vértices y focos en cada elipse.



**4.** Nos dan las gráficas de $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ y $\frac{(x-3)^2}{4^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$. Asigne coordenadas a vértices, focos y asíntotas en cada hipérbola.




## HABILIDADES

**5-8** ■ Encuentre el centro, focos y vértices de la elipse, y determine las longitudes de los ejes mayor y menor. A continuación, trace la gráfica.

**5.** $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

**6.** $\frac{(x-3)^2}{16} + (y+3)^2 = 1$

**7.** $\frac{x^2}{9} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

**8.** $\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$

**9-12** ■ Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. A continuación, trace la gráfica.

**9.** $(x-3)^2 = 8(y+1)$

**10.** $(y+5)^2 = -6x + 12$

**11.** $-4(x+\frac{1}{2})^2 = y$

**12.** $y^2 = 16x - 8$

**13-16** ■ Encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas de la hipérbola. A continuación, trace la gráfica.

**13.** $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

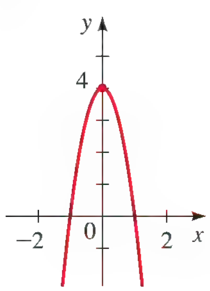
**14.** $(x-8)^2 - (y+6)^2 = 1$

**15.** $y^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$

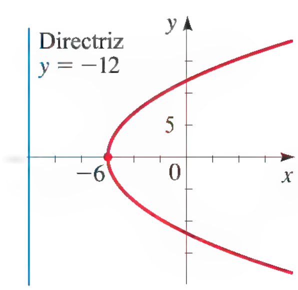
**16.** $\frac{(y-1)^2}{25} - (x+3)^2 = 1$

**17-22** ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

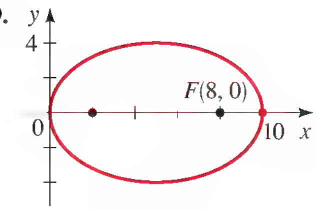
**17.**



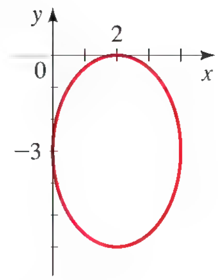

**18.**



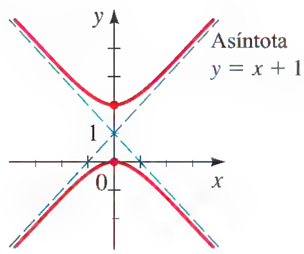

**19.**



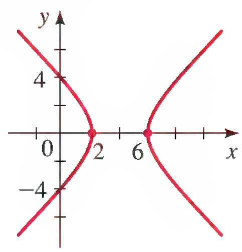

**20.**




**21.**




**22.**




**23-34** ■ Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, encuentre el vértice, foco y directriz. Si es una hipérbola, encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas. A continuación, trace la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica, explique por qué.

**23.** $y^2 = 4(x + 2y)$

**24.** $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

**25.** $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

**26.** $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

**27.** $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

**28.** $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

**29.** $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

**30.** $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

**31.** $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

**32.** $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

**33.** $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

**34.** $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

**35-38** ■ Use calculadora graficadora para graficar la cónica.

**35.** $2x^2 - 4x + y + 5 = 0$

**36.** $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

**37.** $9x^2 + 36 = y^2 + 36x + 6y$

**38.** $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

**39.** Determine cuál debe ser el valor de $F$ si la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

es **(a)** una elipse, **(b)** un solo punto, o **(c)** el conjunto vacío.

**40.** Encuentre una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y tiene su otro foco en el origen.

**41.** Este ejercicio se refiere a **parábolas confocales**, es decir, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

**(a)** Trace gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

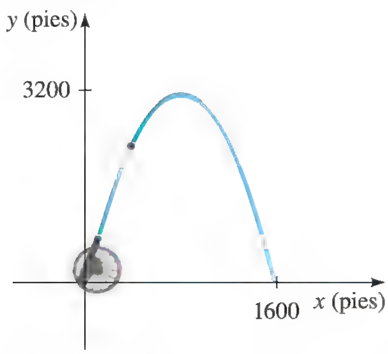
para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2.$

**(b)** Demuestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

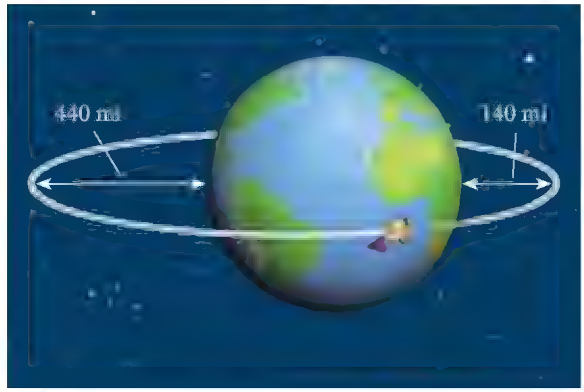
**(c)** Describa el efecto en la gráfica de mover el vértice más cerca del origen.

## APLICACIONES

**42. Trayectoria de una bala de cañón** Un cañón dispara una bala como se ve en la figura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala cae al suelo a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza es 3200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para la trayectoria de la bala. Coloque el origen en el lugar donde está el cañón.




**43. Órbita de un satélite** Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de ésta en un foco, como se muestra en la figura de la parte superior de la columna de la derecha. La altura del satélite arriba de la Tierra varía entre 140 millas y 440 millas. Suponga que la Tierra es una esfera con radio de 3960 mi. Encuentre una ecuación para la trayectoria del satélite con el origen en el centro de la Tierra.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**44. Una familia de cónicas confocales** Las cónicas que comparten un foco se llaman **confocales**. Considere la familia de cónicas que tienen un foco en (0, 1) y un vértice en el origen, como se ve en la figura.

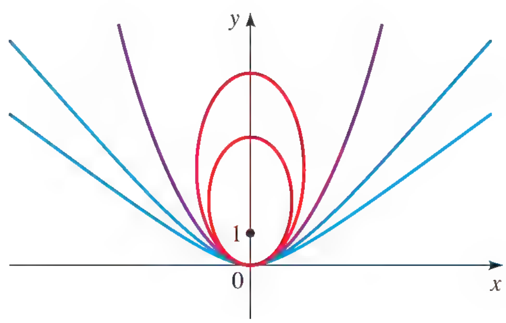
**(a)** Encuentre ecuaciones de dos elipses diferentes que tengan estas propiedades.

**(b)** Encuentre ecuaciones de dos hipérbolas diferentes que tengan estas propiedades.

**(c)** Explique por qué sólo una parábola satisface estas propiedades. Encuentre su ecuación.

**(d)** Trace las cónicas que encontró en los incisos (a), (b) y (c) en los mismos ejes de coordenadas (para las hipérbolas, trace sólo las ramas superiores).

**(e)** ¿Cómo están relacionadas las elipses e hipérbolas con la parábola?




# 11.5 ROTACIÓN DE EJES

Rotación de ejes ▶ Ecuación general de una cónica ▶ El discriminante

En la Sección 11.4 estudiamos cónicas con ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vimos que la gráfica es siempre una elipse, parábola o hipérbola con ejes horizontales o verticales (excepto en los casos degenerados). En esta sección estudiamos la ecuación de segundo grado más general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

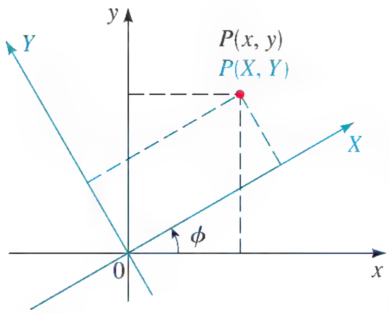



FIGURA 1

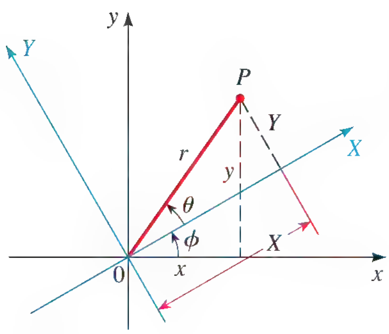



FIGURA 2

Veremos que la gráfica de una ecuación de esta forma también es una cónica. De hecho, al girar los ejes de las coordenadas un ángulo apropiado, podemos eliminar el término $Bxy$ y luego usar nuestro conocimiento de secciones cónicas para analizar la gráfica.

## Rotación de ejes

En la Figura 1, los ejes $x$ y $y$ han sido girados un ángulo agudo $\phi$ alrededor del origen para producir un nuevo par de ejes, que llamamos ejes $X$ y $Y$. Un punto $P$ que tiene coordenadas $(x, y)$ en sistema antiguo tiene coordenadas $(X, Y)$ en el nuevo sistema. Si hacemos que $r$ denote la distancia de $P$ del origen y que $\theta$ sea el ángulo que el segmento $OP$ forma con el nuevo eje $X$, entonces podemos ver de la Figura 2 (al considerar los dos triángulos rectángulos de la figura) que

$$X = r\cos\theta \qquad\qquad Y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$x = r\cos(\theta + \phi) \qquad\qquad y = r\,\text{sen}(\theta + \phi)$$

Usando la Fórmula de la Adición para Coseno, vemos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\phi \\ &= X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \end{aligned}$$

Análogamente, podemos aplicar la Fórmula de la Adición para Seno a la expresión para $y$ para obtener $y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$. Tratando estas ecuaciones para $x$ y $y$ como un sistema de ecuaciones lineales con las variables $X$ y $Y$ (vea Ejercicio 35), obtenemos expresiones para $X$ y $Y$ en términos de $x$ y $y$, como se detalla en el recuadro siguiente.

### FÓRMULAS PARA ROTACIÓN DE EJES

Suponga que los ejes $x$ y $y$ de un plano de coordenadas se giran el ángulo agudo $\phi$ para producir los ejes $X$ y $Y$, como se muestra en la Figura 1. Entonces las coordenadas $(x, y)$ y $(X, Y)$ de un punto en los planos $xy$ y $XY$ están relacionados como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \qquad\qquad X = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi$$

$$y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi \qquad\qquad Y = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$$

### EJEMPLO 1 | Rotación de ejes

Si los ejes de coordenadas se giran 30°, encuentre las coordenadas $XY$ del punto con coordenadas $xy$ $(2, -4)$.

**SOLUCIÓN** Usando las Fórmulas para Rotación de Ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$, obtenemos

$$X = 2\cos 30° + (-4)\,\text{sen}\,30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\,\text{sen}\,30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas $XY$ son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Giro de una hipérbola

Gire los ejes de coordenadas un ángulo de 45° para demostrar que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

**SOLUCIÓN** Usamos las Fórmulas para Rotación de Ejes con $\phi = 45°$ para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\operatorname{sen} 45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original da

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Reconocemos esto como una hipérbola con vértices $(\pm 2, 0)$ en el sistema de coordenadas $XY$. Sus asíntotas son $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes de coordenadas del sistema $xy$ (vea Figura 3).

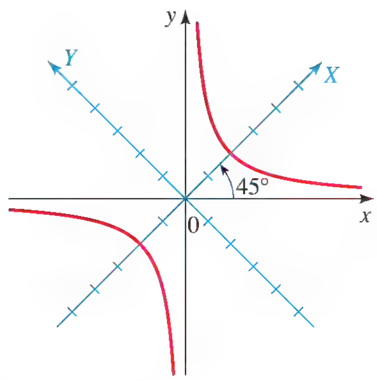
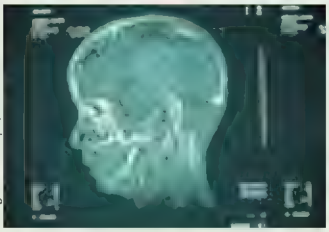



**FIGURA 3**
$xy = 2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

### LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO



© Roger Ressmeyer/CORBIS

**Imágenes del interior de nuestra cabeza**

¿Cómo le gustaría a usted ver el interior de su cabeza? La idea no es particularmente atrayente para la mayoría de nosotros, pero es frecuente que los médicos necesiten precisamente eso. Si pueden ver sin recurrir a cirugía invasiva, es mejor. Una placa de rayos X en realidad no da una imagen del interior, sino simplemente una "gráfica" de la densidad del tejido por el que deben pasar los rayos X. En consecuencia, una placa de rayos X es una vista "aplanada" en una dirección. Suponga que usted obtiene una placa de rayos X de muchas direcciones diferentes. ¿Se pueden usar estas "gráficas" para reconstruir la imagen interior en tres dimensiones? Éste es un problema puramente matemático y fue resuelto por matemáticos hace mucho tiempo. Sin embargo, reconstruir la vista interior requiere miles de tediosos cálculos. Hoy en día, las matemáticas y computadoras de alta velocidad hacen posible "ver dentro" mediante un proceso llamado tomografía asistida por computadora (o escáner CAT). Los matemáticos siguen investigando mejores formas de usar matemáticas para reconstruir imágenes. Una de las técnicas más recientes, llamada imágenes de resonancia magnética (MRI), combina biología molecular y matemáticas para una clara "vista interior".

## Ecuación general de una cónica

El método del Ejemplo 2 se puede usar para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación con $X$ y $Y$ que no contiene un término $XY$ al escoger un ángulo de rotación apropiado. Para hallar el ángulo que funcione, giramos los ejes un ángulo $\phi$ y sustituimos $x$ y $y$ usando las Fórmulas para Rotación de Ejes:

$$A(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)^2 + B(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi)$$
$$+ C(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi)^2 + D(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)$$
$$+ E(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) + F = 0$$

Si expandimos esto y reunimos términos semejantes, obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + B \operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\ B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \\ D' &= D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi \\ E' &= -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi \\ F' &= F \end{aligned}$$

Para eliminar los términos $XY$, nos gustaría escoger $\phi$ de modo que $B' = 0$, es decir,

**Fórmulas de Ángulo Doble**
$\operatorname{sen} 2\phi = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$
$\cos 2\phi = \cos^2\phi \quad \operatorname{sen}^2\phi$

$$2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0$$

$$(C - A)\operatorname{sen} 2\phi + B\cos 2\phi = 0 \qquad \text{Fórmulas de Ángulo Doble para Seno y Coseno}$$

$$B\cos 2\phi = (A - C)\operatorname{sen} 2\phi$$

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} \qquad \text{Divida entre } B \operatorname{sen} 2\phi$$

El cálculo precedente demuestra el teorema siguiente.

**SIMPLIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE CÓNICAS**

Para eliminar el término $xy$ en la ecuación general de cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gire los ejes el ángulo agudo $\phi$ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

## EJEMPLO 3 | Eliminar el término en *xy*

Use una rotación de ejes para eliminar el término $xy$ en la ecuación

$$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$$

Identifique y trace la curva.

**SOLUCIÓN** Para eliminar el término en $xy$, giramos los ejes un ángulo $\phi$ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces $2\phi = 60°$ y por lo tanto $\phi = 30°$. Con este valor de $\phi$ obtenemos

$$x = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - Y\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Fórmula para Rotación de Ejes}$$

$$y = X\left(\frac{1}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}$$

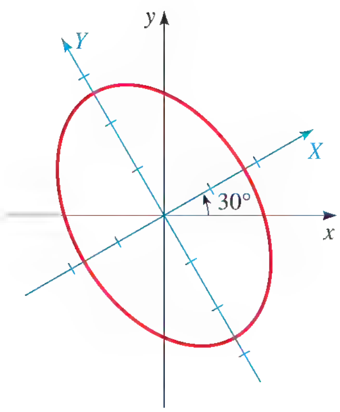



**FIGURA 4**
$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$

Sustituyendo estos valores por $x$ y $y$ en la ecuación dada lleva a

$$6\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 21\sqrt{3}$$

Expandiendo y reuniendo términos semejantes, obtenemos

$$7\sqrt{3}X^2 + 3\sqrt{3}Y^2 = 21\sqrt{3}$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad \text{Divida entre } 21\sqrt{3}$$

Ésta es la ecuación de una elipse en el sistema de coordenadas $XY$. Los focos se encuentran sobre el eje $Y$. Como $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$, la longitud del eje mayor es $2\sqrt{7}$, y la longitud del eje menor es $2\sqrt{3}$. La elipse está trazada en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

En el ejemplo precedente pudimos determinar $\phi$ sin dificultad, porque recordamos que $\cot 60° = \sqrt{3}/3$. En general, hallar $\phi$ no es tan fácil. El siguiente ejemplo ilustra la forma en que las siguientes Fórmulas de Medio Ángulo, que son válidas para $0 < \phi < \pi/2$, son útiles para determinar $\phi$ (vea Sección 7.3).

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} \qquad \operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

## EJEMPLO 4 | Graficar una cónica girada

Una cónica tiene la ecuación

$$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$$

**(a)** Use una rotación de ejes para eliminar el término en $xy$.

**(b)** Identifique y trace la gráfica.

**(c)** Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Para eliminar el término $xy$, giramos los ejes un ángulo $\phi$ que satisfaga la ecuación

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{64 - 36}{96} = \frac{7}{24}$$

En la Figura 5 trazamos un triángulo con $\cot 2\phi = \frac{7}{24}$. Vemos que

$$\cos 2\phi = \tfrac{7}{25}$$

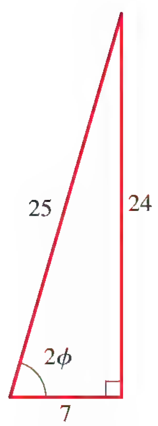



**FIGURA 5**

entonces, usando las Fórmulas de Medio Ángulo, obtenemos

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Las Fórmulas para Rotación de Ejes entonces dan

$$x = \tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tendremos

$$64\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)^2 + 96\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)$$
$$+ 36\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)^2 - 15\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right) + 20\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right) - 25 = 0$$

Expandiendo y reuniendo términos semejantes, obtenemos

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

$$-4X^2 = Y - 1 \qquad \text{Simplifique}$$

$$X^2 = -\tfrac{1}{4}(Y - 1) \qquad \text{Divida entre 4}$$

**(b)** Reconocemos esto como la ecuación de una parábola que abre a lo largo del eje $Y$ negativo y tiene vértice $(0, 1)$ en coordenadas $XY$. Como $4p = -\frac{1}{4}$ tenemos $p = -\frac{1}{16}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{15}{16}\right)$ y la directriz es $Y = \frac{17}{16}$. Usando

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

trazamos la gráfica en la Figura 6(a).

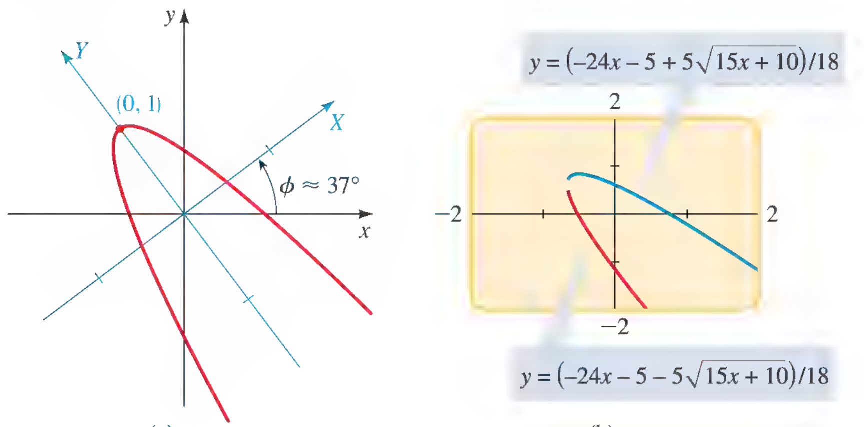



**FIGURA 6**
$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$

(a) (b)

**(c)** Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar $y$. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en $y$, de modo que podemos usar la Fórmula Cuadrática para despejar $y$. Escribiendo la ecuación en la forma

$$36y^2 + (96x + 20)y + (64x^2 - 15x - 25) = 0$$

obtenemos

$$y = \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{(96x + 20)^2 - 4(36)(64x^2 - 15x - 25)}}{2(36)} \qquad \text{Fórmula Cuadrática}$$

$$= \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{6000x + 4000}}{72} \qquad \text{Expanda}$$

$$= \frac{-96x - 20 \pm 20\sqrt{15x + 10}}{72} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-24x - 5 \pm 5\sqrt{15x + 10}}{18} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la parábola, graficamos las funciones

$$y = \left(-24x - 5 + 5\sqrt{15x + 10}\right)/18 \qquad \text{y} \qquad y = \left(-24x - 5 - 5\sqrt{15x + 10}\right)/18$$

como se ve en la Figura 6(b).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

## El discriminante

En los Ejemplos 3 y 4 pudimos identificar el tipo de cónica al girar los ejes. El siguiente teorema da reglas para identificar el tipo de cónica directamente de la ecuación, sin girar ejes.

### IDENTIFICACIÓN DE CÓNICAS POR EL DISCRIMINANTE

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

**1.** una parábola si $B^2 - 4AC = 0$

**2.** una elipse si $B^2 - 4AC < 0$

**3.** una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

**DEMOSTRACIÓN** Si giramos los ejes un ángulo $\phi$, obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde $A'$, $B'$, $C'$, . . . , están dadas por las fórmulas de la página 760. Un cálculo sencillo demuestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Por lo tanto, la expresión $B^2 - 4AC$ sigue sin cambio para cualquier rotación. En particular, si escogemos una rotación que elimina el término en $xy$ ($B' = 0$), obtenemos

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Por lo tanto, $B^2 - 4AC = 0$ si $A'$ o $C'$ son cero cualquiera de las dos; $B^2 - 4AC < 0$ si $A'$ y $C'$ tienen el mismo signo; $B^2 - 4AC > 0$ si $A'$ y $C'$ tienen signos contrarios. De acuerdo con el recuadro de la página 754, estos casos corresponden a la gráfica de la última ecuación mostrada siendo una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. ■

En la demostración indicamos que el discriminante no cambia con ninguna rotación; por esta razón, se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

### EJEMPLO 5 | Identificación de una cónica por el discriminante

Una cónica tiene la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

**(a)** Use el discriminante para identificar la cónica.

**(b)** Confirme su respuesta al inciso (a) graficando la cónica con una calculadora graficadora.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Como $A = 3$, $B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

por lo que la cónica es una hipérbola.

**(b)** Usando la Fórmula Cuadrática, despejamos $y$ para obtener

$$y = \frac{5x - 1 \pm \sqrt{49x^2 - 2x + 33}}{4}$$

Graficamos estas funciones en la Figura 7. La gráfica confirma que ésta es una hipérbola.

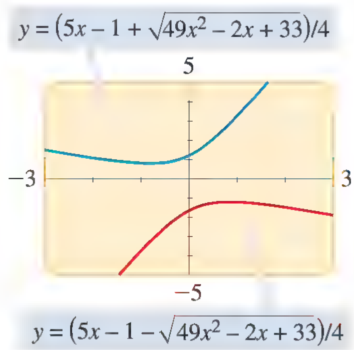



**FIGURA 7**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

## 11.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Suponga que los ejes $x$ y $y$ son girados un ángulo agudo $\phi$ para producir los nuevos ejes $X$ y $Y$. Un punto $P$ en el plano puede ser descrito por sus coordenadas $xy$ $(x, y)$ o sus coordenadas $XY$ $(X, Y)$. Estas coordenadas están relacionadas por las siguientes fórmulas.

$x =$ ________________ $X =$ ________________

$y =$ ________________ $Y =$ ________________

**2.** Considere la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**(a)** En general, la gráfica de esta ecuación es una __________.

**(b)** Para eliminar el término $xy$ de esta ecuación, giramos los ejes un ángulo $\phi$ que satisfaga $\cot 2\phi =$ _________.

**(c)** El discriminante de esta ecuación es ________.

Si el discriminante es 0, la gráfica es una _________;

si es negativo, la gráfica es ________; y

si es positivo, la gráfica es _________.

### HABILIDADES

**3-8** ■ Determine las coordenadas $XY$ del punto dado si los ejes de coordenadas se giran el ángulo indicado.

**3.** $(1, 1)$, $\phi = 45°$
**4.** $(-2, 1)$, $\phi = 30°$
**5.** $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$
**6.** $(2, 0)$, $\phi = 15°$
**7.** $(0, 2)$, $\phi = 55°$
**8.** $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

**9-14** ■ Determine la ecuación de la cónica dada en coordenadas $XY$ cuando los ejes de coordenadas se giran el ángulo indicado.

**9.** $x^2 - 3y^2 = 4$, $\phi = 60°$
**10.** $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$
**11.** $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$
**12.** $x^2 + 2y^2 = 16$, $\phi = \sin^{-1}\frac{3}{5}$
**13.** $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$
**14.** $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

**15-28** ■ **(a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. **(b)** Use una rotación de ejes para eliminar el término $xy$. **(c)** Trace la gráfica.

**15.** $xy = 8$
**16.** $xy + 4 = 0$
**17.** $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$
**18.** $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$
**19.** $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$
**20.** $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$
**21.** $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$
**22.** $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$
**23.** $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$
**24.** $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$
**25.** $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

**26.** $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x \quad y \quad 1)$

**27.** $52x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

**28.** $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

**29-32** ■ **(a)** Use el discriminante para identificar la cónica.
**(b)** Confirme su respuesta al graficar la cónica usando calculadora graficadora.

**29.** $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

**30.** $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

**31.** $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

**32.** $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x \quad 2y = 0$

**33.** **(a)** Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola.

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

**(b)** Encuentre las coordenadas $XY$ y $xy$ del centro, vértices y focos.
**(c)** Encuentre las ecuaciones de las asíntotas en coordenadas $XY$ y $xy$.

**34.** **(a)** Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una parábola.

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

**(b)** Encuentre las coordenadas $XY$ y $xy$ del vértice y foco.
**(c)** Encuentre la ecuación de la directriz en coordenadas $XY$ y $xy$.

**35.** De las ecuaciones

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$$
$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$$

despeje $X$ y $Y$ en términos de $x$ y $y$. [*Sugerencia:* Para empezar, multiplique la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\operatorname{sen}\phi$, y a continuación sume las dos ecuaciones para despejar $X$.]

**36.** Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola al girar los ejes un ángulo de 45°. [*Sugerencia:* Primero convierta la ecuación a una que no contenga radicales.]

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**37. Forma matricial de Fórmulas para Rotación de Ejes**

Sean $Z$, $Z'$ y $R$ las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Demuestre que las Fórmulas para Rotación de Ejes se pueden escribir como

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{\ 1}Z$$

**38. Invariantes algebraicas** Una cantidad es invariante bajo rotación si no cambia cuando los ejes son girados. Se indicó en el texto que, para la ecuación general de una cónica, la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.

**(a)** Use las fórmulas para $A'$, $B'$ y $C'$ de la página 760 para demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación; esto es, demuestre que

$$B^2 \quad 4AC = B'^2 \quad 4A'C'$$

**(b)** Demuestre que $A + C$ es invariante bajo rotación.
**(c)** ¿La cantidad $F$ es invariante bajo rotación?

**39. Invariantes geométricas** ¿Espera usted que la distancia entre dos puntos es invariante bajo rotación? Demuestre su respuesta al comparar la distancia $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$ donde $P'$ y $Q'$ son las imágenes de $P$ y $Q$ bajo una rotación de ejes.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Gráficas por computadora II**

En este proyecto investigamos la forma en que se usan matrices para girar imágenes en una pantalla de computadora. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 11.6 ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Una descripción geométrica unificada de cónicas ▶ Ecuaciones polares de cónicas

## ▼ Una descripción geométrica unificada de cónicas

Ya antes en este capítulo definimos una parábola en términos de un foco y directriz, pero definimos la elipse e hipérbola en términos de dos focos. En esta sección damos un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas en términos de un foco y directriz. Si colocamos el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar sencilla. Además, en forma polar, la rotación de cónicas se convierte en un asunto muy sencillo. Las ecuaciones polares de elipses son cruciales en la deducción de las Leyes de Kepler (vea página 754).

## DESCRIPCIÓN EQUIVALENTE DE CÓNICAS

Sea $F$ un punto fijo (el **foco**), $\ell$ una recta fija (la **directriz**) y sea $e$ un número positivo fijo (la **excentricidad**). El conjunto de todos los puntos $P$ tal que la relación entre la distancia de $P$ a $F$ y la distancia de $P$ a $\ell$ es la constante $e$, es una cónica. Esto es, el conjunto de todos los puntos $P$ tal que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e$$

es una cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $e < 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

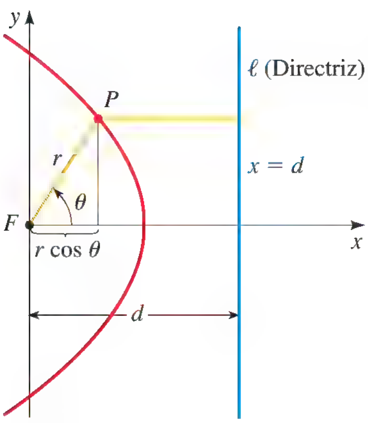



**FIGURA 1**

**DEMOSTRACIÓN** Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, \ell)$, y por tanto la condición dada se convierte en la definición de una parábola como se da en la Sección 11.1.

Ahora, suponga que $e \neq 1$. Coloquemos el foco $F$ en el origen y la directriz paralela al eje $y$ y $d$ unidades a la derecha. En este caso la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto $P$ tiene coordenadas polares $(r, \theta)$, vemos de la Figura 1 que $d(P, F) = r$ y $d(P, \ell) = d - r\cos\theta$. Entonces la condición $d(P, F)/d(P, \ell) = e$, o $d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$, se convierte en

$$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de esta ecuación polar y convertimos a coordenadas rectangulares, obtenemos

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \qquad \text{Expanda y simplifique}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{Divida entre } 1 - e^2 \text{ y complete el cuadrado}$$

Si $e < 1$, entonces dividir ambos lados de esta ecuación entre $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ da una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$h = \frac{-e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Ésta es la ecuación de una elipse con centro $(h, 0)$. En la Sección 11.2 encontramos que los focos de una elipse están a una distancia $c$ del centro, donde $c^2 = a^2 - b^2$. En nuestro caso

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Entonces $c = e^2d/(1 - e^2) = -h$, lo cual confirma que el foco definido en el teorema (es decir el origen) es el mismo que el foco definido en la Sección 11.2. También se deduce que

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, una demostración similar demuestra que la cónica es una hipérbola con $e = c/a$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. ■

## Ecuaciones polares de cónicas

En la demostración vimos que la ecuación polar de la cónica de la Figura 1 es $r = e(d - r\cos\theta)$. Despejando $r$, obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si la directriz se escoge para que se encuentre a la *izquierda* del foco ($x = -d$), entonces obtenemos la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$. Si la directriz es *paralela* al eje polar ($y = d$ o $y = -d$), entonces obtenemos sen $\theta$ en lugar de cos $\theta$ en la ecuación. Estas observaciones se resumen en el recuadro siguiente y en la Figura 2.

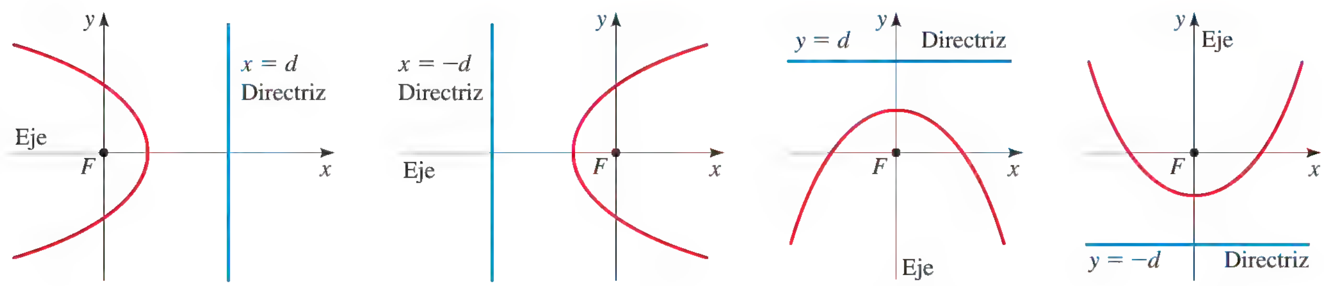
### ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

representa una cónica con un foco en el origen y con excentricidad $e$. La cónica es

1. una parábola si $e = 1$
2. una elipse si $0 < e < 1$
3. una hipérbola si $e > 1$




(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta}$

**FIGURA 2** La forma de la ecuación polar de una cónica indica la posición de la directriz.

Para graficar la ecuación polar de una cónica, primero determinamos la posición de la directriz a partir de la forma de la ecuación. Los cuatro casos que aparecen se muestran en la Figura 2. (La figura muestra sólo las partes de las gráficas que están cerca del foco en el origen. La forma del resto de la gráfica depende de si la ecuación representa una parábola, una elipse o una hipérbola.) El eje de una cónica es perpendicular a la directriz; específicamente tenemos lo siguiente:

1. Para una parábola, el eje de simetría es perpendicular a la directriz.
2. Para una elipse, el eje mayor es perpendicular a la directriz.
3. Para una hipérbola, el eje transverso es perpendicular a la directriz.

### EJEMPLO 1 | Hallar una ecuación polar para una cónica

Encuentre una ecuación polar para la parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

**SOLUCIÓN** Usando $e = 1$ y $d = 6$ y usando el inciso (d) de la Figura 2, vemos que la ecuación polar de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

Para graficar una cónica polar, es útil determinar los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Usando estos puntos y un conocimiento del tipo de cónica (que obtenemos de la excentricidad), podemos fácilmente tener una idea aproximada de la forma y posición de la gráfica.

## EJEMPLO 2 | Identificar y trazar una cónica

Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

**(a)** Demuestre que la cónica es una elipse y trace la gráfica.

**(b)** Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Dividiendo el numerador y denominador entre 3, tenemos

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Como $e = \frac{2}{3} < 1$, la ecuación representa una elipse. Para una gráfica aproximada localizamos los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (vea Figura 3).

| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| 0 | 10 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{10}{3}$ |
| $\pi$ | 2 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{10}{3}$ |

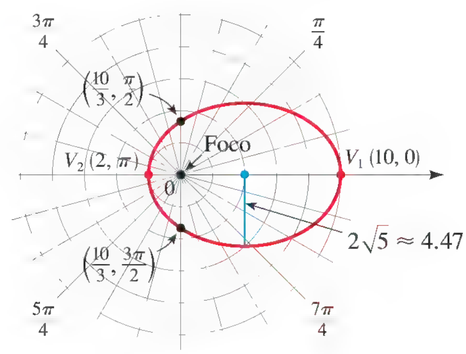



**FIGURA 3** $r = \dfrac{10}{3 - 2\cos\theta}$

**(b)** Comparando la ecuación con la de la Figura 2, vemos que el eje mayor es horizontal. Entonces los puntos extremos del eje mayor son $V_1(10, 0)$ y $V_2(2, \pi)$. Por lo tanto, el centro de la elipse está en $C(4, 0)$, el punto medio de $V_1V_2$.

La distancia entre los vértices $V_1$ y $V_2$ es 12; entonces la longitud del eje mayor es $2a = 12$, de modo que $a = 6$. Para determinar la longitud del eje menor, necesitamos hallar $b$. De la página 766 tenemos $c = ae = 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

En consecuencia, $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$, y la longitud del eje menor es $2b = 4\sqrt{5} \approx 8.94$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **21**

## EJEMPLO 3 | Identificar y trazar una cónica

Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$$

**(a)** Demuestre que la cónica es una hipérbola y trace la gráfica.

**(b)** Encuentre el centro de la hipérbola y trace las asíntotas.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Dividiendo el numerador y denominador entre 2, tenemos

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

Como $e = 2 > 1$, la ecuación representa una hipérbola. Para una gráfica aproximada localizamos los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (vea Figura 4).

**(b)** Comparando la ecuación con la de la Figura 2, vemos que el eje transverso es vertical. Entonces los puntos extremos del eje transverso (los vértices de la hipérbola) son $V_1(2, \pi/2)$ y $V_2(-6, 3\pi/2) = V_2(6, \pi/2)$. Por lo tanto, el centro de la hipérbola es $C(4, \pi/2)$, el punto medio de $V_1V_2$.

Para trazar las asíntotas, necesitamos hallar $a$ y $b$. La distancia entre $V_1$ y $V_2$ es 4; así, la longitud del eje transverso es $2a = 4$ y entonces $a = 2$. Para hallar $b$, primero hallamos $c$. De la página 766 tenemos $c = ae = 2 \cdot 2 = 4$, y

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

En consecuencia, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$. Conocer $a$ y $b$ nos permite trazar la caja central, de la cual obtenemos las asíntotas mostradas en la Figura 4.

| $\theta$ | $r$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 2 |
| $\pi$ | 6 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $-6$ |

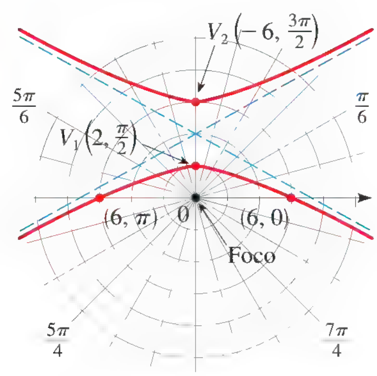



**FIGURA 4** $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Cuando giramos secciones cónicas, es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que ecuaciones cartesianas. Usamos el hecho de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ girada en sentido contrario a las manecillas de un reloj alrededor del origen un ángulo $\alpha$ (vea Ejercicio 61 en la Sección 8.2).

## EJEMPLO 4 | Girar una elipse

Suponga que la elipse del Ejemplo 2 se gira un ángulo $\pi/4$ alrededor del origen. Encuentre una ecuación polar para la elipse resultante y trace su gráfica.

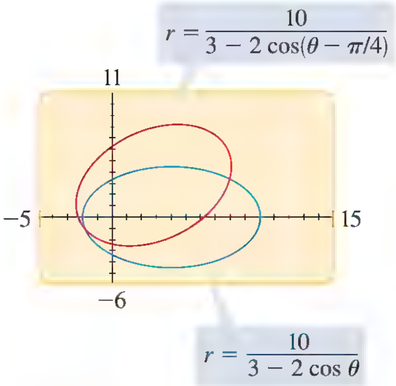



**FIGURA 5**

**SOLUCIÓN** Obtenemos la ecuación de la elipse girada al sustituir $\theta$ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el Ejemplo 2. Por lo tanto, la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Usamos esta ecuación para graficar la elipse girada en la Figura 5. Observe que la elipse ha sido girada alrededor del foco en el origen.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

En la Figura 6 usamos una computadora para trazar varias cónicas para demostrar el efecto de variar la excentricidad $e$. Nótese que cuando $e$ es cercana a 0, la elipse es casi circunferencia y se hace más alargada a medida que $e$ aumenta. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola. Cuando $e$ aumenta a más de 1, la cónica es una hipérbola siempre más pronunciada.

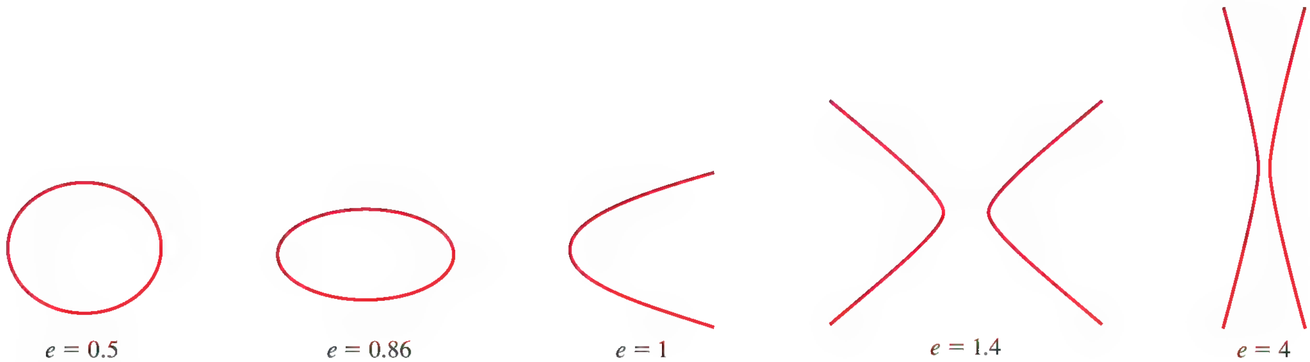



**FIGURA 6**

## 11.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Todas las cónicas se pueden describir geométricamente usando un punto fijo $F$ llamado _______ y una recta fija $\ell$ llamada _______. Para un número positivo fijo $e$ el conjunto de todos los puntos que satisfagan

$$\frac{\phantom{xx}}{\phantom{xx}} = e$$

es una _______. Si $e = 1$, la cónica es una ________; si $e < 1$, la cónica es una ______; si $e > 1$, la cónica es una _______. El número $e$ se denomina __________de la cónica.

2. La ecuación polar de una cónica con excentricidad $e$ tiene una de las siguientes formas:

$$r = \underline{\qquad} \text{ o } r = \underline{\qquad}.$$

### HABILIDADES

**3-10** ■ Escriba una ecuación polar de una cónica que tenga su foco en el origen y satisfaga las condiciones dadas.

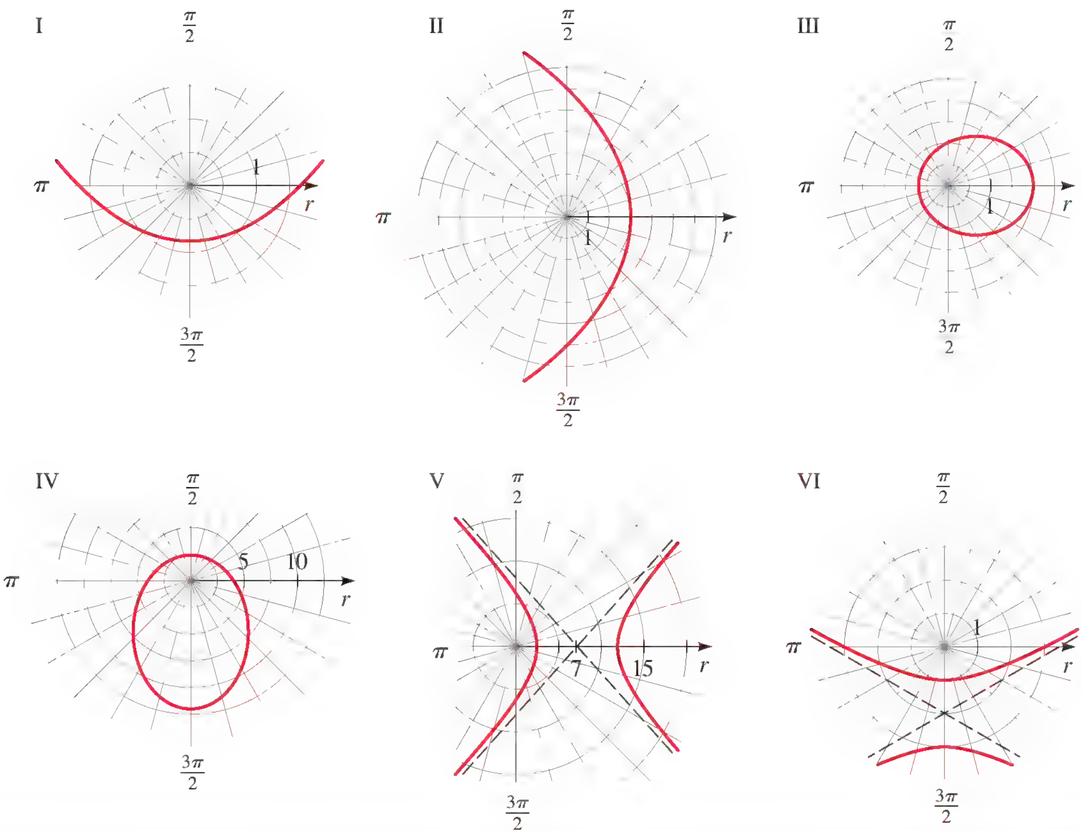
3. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, directriz $x = 3$.
4. Hipérbola, excentricidad $\frac{4}{3}$, directriz $x = -3$.
5. Parábola, directriz $y = 2$
6. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $y = -4$
7. Hipérbola, excentricidad 4, directriz $r = 5\sec\theta$
8. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 2\csc\theta$
9. Parábola, vértice en $(5, \pi/2)$
10. Elipse, excentricidad 0.4, vértice en $(2, 0)$

**11-16** ■ Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para su respuesta.

**11.** $r = \dfrac{6}{1 + \cos\theta}$ **12.** $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

**13.** $r = \dfrac{3}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **14.** $r = \dfrac{5}{3 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

**15.** $r = \dfrac{12}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ **16.** $r = \dfrac{12}{2 + 3\cos\theta}$




**17-20** ■ Nos dan una ecuación polar de una cónica. **(a)** Demuestre que la cónica es una parábola y trace su gráfica. **(b)** Encuentre el vértice y directriz e indíquelos en la gráfica.

**17.** $r = \dfrac{4}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **18.** $r = \dfrac{3}{2 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

**19.** $r = \dfrac{5}{3 + 3\cos\theta}$ **20.** $r = \dfrac{2}{5 - 5\cos\theta}$

**21-24** ■ Nos dan una ecuación polar de una cónica. **(a)** Demuestre que la cónica es una elipse, y trace su gráfica. **(b)** Encuentre los vértices y directriz e indíquelos en la gráfica. **(c)** Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

**21.** $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$ **22.** $r = \dfrac{6}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

**23.** $r = \dfrac{12}{4 + 3\,\text{sen}\,\theta}$ **24.** $r = \dfrac{18}{4 + 3\cos\theta}$

**25-28** ■ Nos dan una ecuación polar de una cónica. **(a)** Demuestre que la cónica es una hipérbola, y trace su gráfica. **(b)** Encuentre los vértices y directriz e indíquelos en la gráfica. **(c)** Encuentre el centro de la hipérbola y trace las asíntotas.

**25.** $r = \dfrac{8}{1 + 2\cos\theta}$ **26.** $r = \dfrac{10}{1 - 4\,\text{sen}\,\theta}$

**27.** $r = \dfrac{20}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$ **28.** $r = \dfrac{6}{2 + 7\cos\theta}$

**29-36** ■ **(a)** Encuentre la excentricidad e identifique la cónica. **(b)** Trace la cónica y asigne coordenadas a los vértices.

**29.** $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$ **30.** $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$

**31.** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **32.** $r = \dfrac{10}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

**33.** $r = \dfrac{6}{2 + \text{sen}\,\theta}$ **34.** $r = \dfrac{5}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

**35.** $r = \dfrac{7}{2 - 5\,\text{sen}\,\theta}$ **36.** $r = \dfrac{8}{3 + \cos\theta}$

**37-40** ■ Nos dan una ecuación polar de una cónica. **(a)** Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica. **(b)** Si esta cónica se gira alrededor del origen el ángulo dado $\theta$, escriba la ecuación resultante. **(c)** Trace gráficas de la cónica original y la cónica girada en la misma pantalla.

**37.** $r = \dfrac{1}{4 - 3\cos\theta}; \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$

**38.** $r = \dfrac{2}{5 - 3\,\text{sen}\,\theta}; \quad \theta = \dfrac{2\pi}{3}$

**39.** $r = \dfrac{2}{1 + \text{sen}\,\theta}; \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}$

**40.** $r = \dfrac{9}{2 + 2\cos\theta}; \quad \theta = -\dfrac{5\pi}{6}$

**41.** Grafique las cónicas $r = e/(1 - e\cos\theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de $e$ a la forma de la curva?

**42.** **(a)** Grafique las cónicas

$$r = \frac{ed}{(1 + e\,\text{sen}\,\theta)}$$

para $e = 1$ y varios valores de $d$. ¿Cómo afecta el valor de $d$ a la forma de la cónica?

**(b)** Grafique estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de $e$. ¿Cómo afecta el valor de $e$ a la forma de la cónica?

## APLICACIONES

**43. Órbita de la Tierra** La ecuación polar de una elipse puede expresarse en términos de su excentricidad $e$ y la longitud $a$ de su eje mayor.

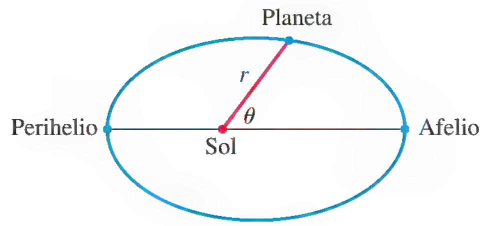
**(a)** Demuestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = -d$ puede escribirse en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

[*Sugerencia:* Use la relación $a^2 = e^2d^2/(1 - e^2)^2$ dada en la demostración de la página 766.]

**(b)** Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco) dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es aproximadamente $2.99 \times 10^8$ km.

**44. Perihelio y afelio** Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Las posiciones de un planeta que son más cercanas al Sol, y más alejadas del Sol, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente.




**(a)** Use el Ejercicio 43(a) para demostrar que la distancia del perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia del afelio es $a(1 + e)$.

**(b)** Use los datos del Ejercicio 43(b) para hallar las distancias de la Tierra al Sol en el perihelio y en el afelio.

**45. Órbita de Plutón** La distancia de Plutón al Sol es $4.43 \times 10^9$ km en el perihelio y $7.37 \times 10^9$ km en el afelio. Use el Ejercicio 44 para hallar la excentricidad de la órbita de Plutón

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**46. Distancia a un foco** Cuando encontramos ecuaciones polares para las cónicas, colocamos un foco en el polo. Es fácil hallar la distancia de ese foco a cualquier punto en la cónica. Explique en qué forma la ecuación polar nos da esa distancia.

**47. Ecuaciones polares de órbitas** Cuando un satélite gira en órbita alrededor de la Tierra, su trayectoria es una elipse con un foco en el centro de la Tierra. ¿Por qué los científicos usan coordenadas polares (en lugar de rectangulares) para rastrear la posición de satélites? [*Sugerencia:* Su respuesta al Ejercicio 46 es importante aquí.]

# CAPÍTULO 11 | REPASO

## ■ VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1.** **(a)** Dé la definición geométrica de una parábola. ¿Cuáles son el foco y directriz de la parábola?

**(b)** Trace la parábola $x^2 = 4py$ para el caso $p > 0$. Identifique en su diagrama el vértice, foco y directriz. ¿Qué ocurre si $p < 0$?

**(c)** Trace la hipérbola $y^2 = 4px$, junto con su vértice, foco y directriz, para el caso $p > 0$. ¿Qué ocurre si $p < 0$?

**2.** **(a)** Dé la definición geométrica de una elipse. ¿Cuáles son los focos de la elipse?

**(b)** Para la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son los ejes mayor y menor? Ilustre con una gráfica.

**(c)** Dé una expresión para la excentricidad de la elipse en el inciso (b).

**(d)** Exprese la ecuación de una elipse con focos sobre el eje $y$.

3. **(a)** Dé la definición geométrica de una hipérbola. ¿Cuáles son los focos de la hipérbola?
   **(b)** Para la hipérbola con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices y focos? ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas? ¿Cuál es el eje transverso? Ilustre con una gráfica.
   **(c)** Exprese la ecuación de una hipérbola con focos sobre el eje $y$.
   **(d)** ¿Cuáles pasos tomaría usted para trazar una hipérbola con una ecuación determinada?

4. Suponga que $h$ y $k$ son números positivos. ¿Cuál es el efecto sobre la gráfica de una ecuación en $x$ y $y$ si
   **(a)** $x$ es sustituida por $x - h$? ¿Por $x + h$?
   **(b)** $y$ es sustituida por $y - k$? ¿Por $y + k$?

5. ¿Cómo se puede saber si la siguiente cónica no degenerada es una parábola, una elipse o una hipérbola?

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

6. Suponga que los ejes $x$ y $y$ son girados un ángulo agudo $\phi$ para producir los ejes $X$ y $Y$. Escriba ecuaciones que relacionen las coordenadas $(x, y)$ y $(X, Y)$ de un punto en el plano $xy$ y plano $XY$, respectivamente.

7. **(a)** ¿Cómo se elimina el término $xy$ de esta ecuación?

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   **(b)** ¿Cuál es el discriminante de la cónica del inciso (a)? ¿Cómo se puede usar el discriminante para determinar si la cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola?

8. **(a)** Escriba ecuaciones polares que representen una cónica con excentricidad $e$.
   **(b)** ¿Para qué valores de $e$ es que la cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?

## ■ EJERCICIOS

**1-8** ■ Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y trace la gráfica.

**1.** $y^2 = 4x$ **2.** $x = \frac{1}{12}y^2$

**3.** $x^2 + 8y = 0$ **4.** $2x - y^2 = 0$

**5.** $x - y^2 + 4y - 2 = 0$ **6.** $2x^2 + 6x + 5y + 10 = 0$

**7.** $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 2y + 4$ **8.** $x^2 = 3(x + y)$

**9-16** ■ Encuentre el centro, vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, y trace la gráfica.

**9.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ **10.** $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

**11.** $x^2 + 4y^2 = 16$ **12.** $9x^2 + 4y^2 = 1$

**13.** $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **14.** $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

**15.** $4x^2 + 9y^2 = 36y$ **16.** $2x^2 + y^2 = 2 + 4(x - y)$

**17-24** ■ Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace la gráfica.

**17.** $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **18.** $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{32} = 1$

**19.** $x^2 - 2y^2 = 16$ **20.** $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

**21.** $\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

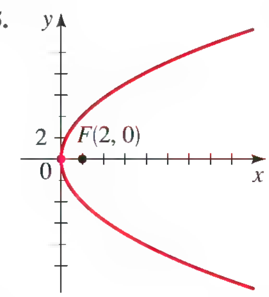
**22.** $\dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(y+2)^2}{8} = 1$

**23.** $9y^2 + 18y = x^2 + 6x + 18$

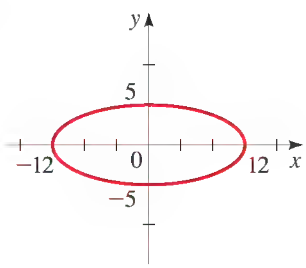
**24.** $y^2 = x^2 + 6y$

**25-30** ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

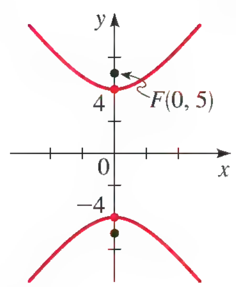
**25.**



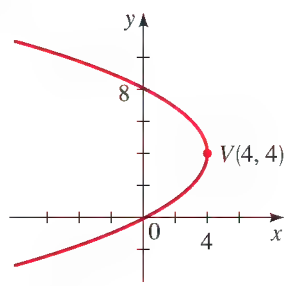

**26.**



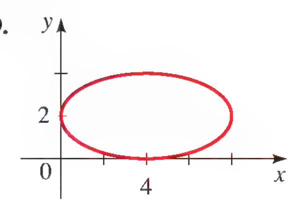

**27.**



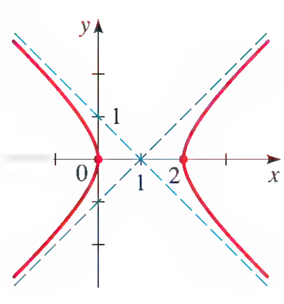

**28.**




**29.**




**30.**



**31-42** ■ Determine el tipo de curva representada por la ecuación. Encuentre los focos y vértices (si los hay) y trace la gráfica.

**31.** $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$

**32.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$

**33.** $x^2 - y^2 + 144 = 0$

**34.** $x^2 + 6x = 9y^2$

**35.** $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

**36.** $3x^2 \quad 6(x + y) = 10$

**37.** $x = y^2 - 16y$

**38.** $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

**39.** $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

**40.** $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

**41.** $9x^2 + 8y^2 - 15x + 8y + 27 = 0$

**42.** $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

**43-50** ■ Encuentre una ecuación para la sección cónica con las propiedades dadas.

**43.** La parábola con foco $F(0, 1)$ y directriz $y = -1$

**44.** La elipse con centro $C(0, 4)$, focos $F_1(0, 0)$ y $F_2(0, 8)$ y eje mayor de longitud 10

**45.** La hipérbola con vértices $V(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$

**46.** La hipérbola con centro $C(2, 4)$, focos $F_1(2, 1)$ y $F_2(2, 7)$, y vértices $V_1(2, 6)$ y $V_2(2, 2)$

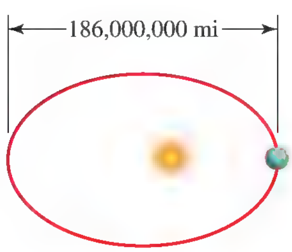
**47.** La elipse con focos $F_1(1, 1)$ y $F_2(1, 3)$ y con un vértice en el eje $x$

**48.** La parábola con vértice $V(5, 5)$ y directriz el eje $y$

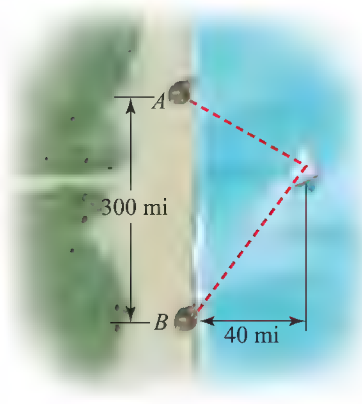
**49.** La elipse con vértices $V_1(7, 12)$ y $V_2(7, -8)$ y que pasa por el punto $P(1, 8)$

**50.** La parábola con vértice $V(-1, 0)$ y eje horizontal de simetría, y que cruza el eje $y$ en $y = 2$

**51.** La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco. La elipse tiene eje mayor de 186,000,000 millas y excentricidad 0.017. Encuentre la distancia entre la Tierra y el Sol cuando la Tierra está **(a)** más cercana al Sol y **(b)** más alejada del Sol.




**52.** Un barco está localizado a 40 millas de una orilla recta. Las estaciones LORAN $A$ y $B$ están localizadas en la orilla, a 300 millas entre sí. De las señales LORAN, el capitán determina que su barco está 80 mi más cerca de $A$ que de $B$. Encuentre la posición del barco. (Coloque $A$ y $B$ en el eje $y$ con el eje $x$ a la mitad entre ellas. Encuentre las coordenadas $x$ y $y$ del barco.)




**53.** **(a)** Trace gráficas de la siguiente familia de elipses para $k = 1, 2, 4$ y $8$

$$\frac{x^2}{16 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

**(b)** Demuestre que todas las elipses del inciso (a) tienen los mismos focos.

**54.** **(a)** Trace gráficas de la siguiente familia de parábolas para $k = \frac{1}{2}, 1, 2$, y $4$.

$$y = kx^2$$

**(b)** Encuentre los focos de las parábolas del inciso (a).

**(c)** ¿En qué forma cambia la posición del foco cuando $k$ aumenta?

**55-58** ■ Nos dan la ecuación de una cónica. **(a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. **(b)** Use una rotación de ejes para eliminar el término en $xy$. **(c)** Trace la gráfica.

**55.** $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

**56.** $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x + 8y \quad 8 = 0$

**57.** $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0$

**58.** $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

**59-62** ■ Use una calculadora graficadora para graficar la cónica. Identifique el tipo de cónica a partir de la gráfica.

**59.** $5x^2 + 3y^2 = 60$

**60.** $9x^2 - 12y^2 + 36 = 0$

**61.** $6x + y^2 - 12y = 30$

**62.** $52x^2 - 72xy + 73y^2 = 100$

**63-66** ■ Nos dan una ecuación polar de una cónica. **(a)** Encuentre la excentricidad e identifique la cónica. **(b)** Trace la cónica y asigne coordenadas a los vértices.

**63.** $r = \dfrac{1}{1 \quad \cos\theta}$

**64.** $r = \dfrac{2}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

**65.** $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

**66.** $r = \dfrac{12}{1 - 4\cos\theta}$

## CAPÍTULO 11 EXAMEN

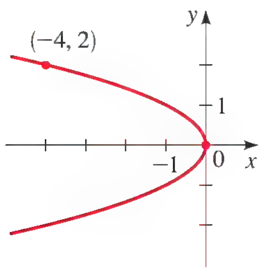
1. Encuentre el foco y directriz de la parábola $x^2 = -12y$, y trace su gráfica.

2. Encuentre los vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor para la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. A continuación, trace su gráfica.

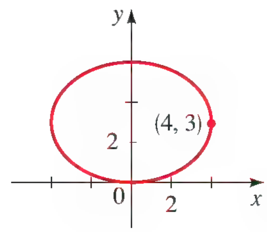
3. Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$. A continuación, trace su gráfica.

**4-6** ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se ilustra.

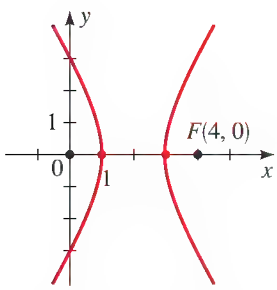
4.




5.




6.

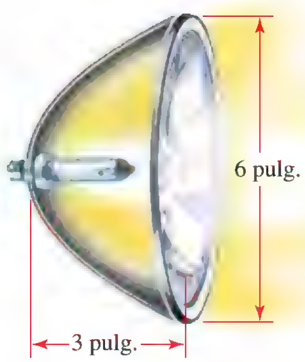



**7-9** ■ Trace la gráfica de la ecuación.

7. $16x^2 + 36y^2 - 96x + 36y + 9 = 0$

8. $9x^2 - 8y^2 + 36x + 64y = 164$

9. $2x + y^2 + 8y + 8 = 0$




10. Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos $(0, \pm 5)$ y con asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.

11. Encuentre una ecuación para la parábola con foco $(2, 4)$ y directriz el eje $x$.

12. Un reflector parabólico para las luces delanteras de un auto forma un tazón que mide 6 pulgadas de ancho en su abertura y 3 pulgadas de profundidad, como se muestra en la figura de la izquierda. ¿A qué distancia del vértice debe estar colocado el filamento de la bombilla eléctrica si ha de estar situado en el foco?

13. **(a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de esta ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

**(b)** Use rotación de ejes para eliminar el término $xy$ de la ecuación.
**(c)** Trace la gráfica de la ecuación.
**(d)** Encuentre las coordenadas de los vértices de esta cónica (en el sistema de coordenadas $xy$).

14. **(a)** Encuentre la ecuación polar de la cónica que tiene un foco en el origen, excentricidad $e = \frac{1}{2}$, y directriz $x = 2$. Trace la gráfica.
**(b)** ¿Qué tipo de cónica está representado por la siguiente ecuación? Trace su gráfica.

$$r = \frac{3}{2 - \operatorname{sen}\theta}$$

# Cónicas en arquitectura

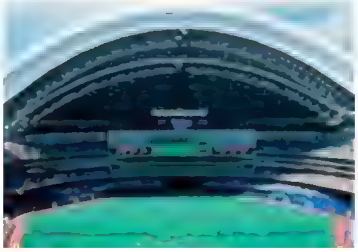
Muchos edificios emplean secciones cónicas en su diseño. Los arquitectos tienen varias razones para usar estas curvas, que van de estabilidad estructural a simple belleza. Pero, ¿cómo puede construirse con toda precisión una enorme parábola, elipse o hipérbola en concreto o en acero? En este *Enfoque sobre modelado*, veremos cómo se pueden usar las propiedades geométricas para construir estas formas.

## ▼ Cónicas en construcciones

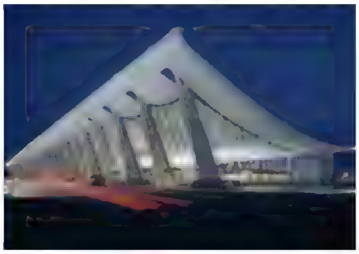
En tiempos antiguos la arquitectura era parte de las matemáticas, por lo que los arquitectos tenían que ser matemáticos. Muchas de las estructuras que construyeron (pirámides, templos, anfiteatros y proyectos de irrigación), todavía están en servicio. En los tiempos modernos, los arquitectos emplean principios matemáticos incluso más refinados. Las fotografías siguientes muestran algunas estructuras que emplean secciones cónicas en su diseño.

Anfiteatro romano en Alejandría, Egipto (círculo)
© Nick Wheeler/CORBIS

Cielo raso de la Sala de Estatuas en el Capitolio de Estados Unidos (elipse)
Architect of the Capitol



Techo del Skydome en Toronto, Canadá (parábola)
Walter Schmid/© Stone/Getty Images



Techo del Aeropuerto Dulles de Washington (hipérbola y parábola)
© Richard T. Nowitz/CORBIS

Planetario McDonnell de St. Louis, Missouri (hipérbola)
VisionsofAmerica/Joe Sohm

Desván en La Pedrera, Barcelona, España (parábola)
© O. Alamany & E. Vincens/CORBIS

Los arquitectos tienen diferentes razones para usar cónicas en sus diseños. Por ejemplo, el arquitecto español Antoni Gaudí utilizó parábolas en el desván de La Pedrera (vea foto arriba). Él razonó que como una cuerda suspendida entre dos puntos con carga igualmente distribuida (como en un puente colgante) tiene la forma de una parábola, una parábola invertida daría el mejor apoyo para un techo plano.

## ▼ Construcción de cónicas

Las ecuaciones de las cónicas son útiles en la manufactura de objetos pequeños, porque una herramienta de corte controlada por computadora puede trazar con precisión una curva dada por una ecuación. Pero en el proyecto de un edificio, ¿cómo podemos construir una parte de una parábola, elipse o hipérbola que abarque el cielo raso o paredes de un edificio? Las propiedades geométricas de las cónicas proporcionan formas prácticas de construirlas. Por ejemplo, si fuéramos a construir una torre circular, escogeríamos un punto de centro, ase-

gurándonos que las paredes de la torre estuvieran a una distancia fija de ese punto. Pueden construirse muros elípticos usando una cuerda anclada a dos puntos, como se muestra en la Figura 1.

Para construir una parábola, podemos usar el aparato que se ilustra en la Figura 2. Una cuerda de longitud $a$ se ancla en $F$ y $A$. La escuadra en T, también de longitud $a$, se desliza a lo largo de una barra recta $L$. Un lápiz en $P$ sostiene tirante la cuerda contra la escuadra en T. A medida que la escuadra en T se desliza a la derecha, el lápiz traza una curva.

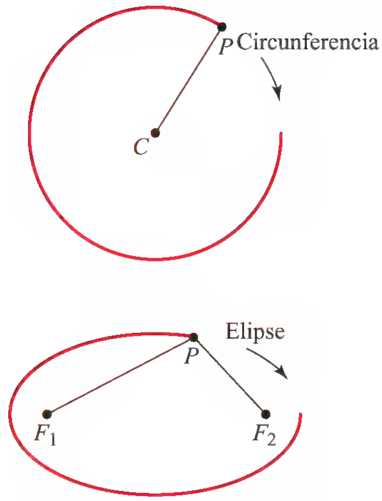



**FIGURA 1** Construcción de una circunferencia y una elipse

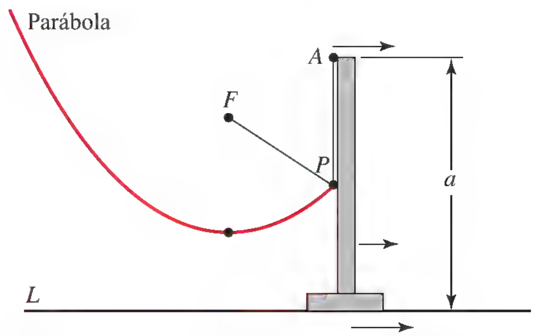



**FIGURA 2** Construcción de una parábola

De la figura vemos que

$$d(F, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La cuerda es de longitud } a$$

$$d(L, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La escuadra en T es de longitud } a$$

Se deduce que $d(F, P) + d(P, A) = d(L, P) + d(P, A)$. Restando $d(P, A)$ de cada lado, obtenemos

$$d(F, P) = d(L, P)$$

La última ecuación dice que la distancia de $F$ a $P$ es igual a la distancia de $P$ a la recta $L$. En esta forma, la curva es una parábola con foco $F$ y directriz $L$.

En proyectos de construcción es más fácil construir una recta que una curva. Por lo tanto, en algunos edificios, como en la Torre Kobe (vea Problema 4), una superficie curva se produce al usar numerosas rectas. También podemos producir una curva usando rectas, como la parábola que se ve en la Figura 3.

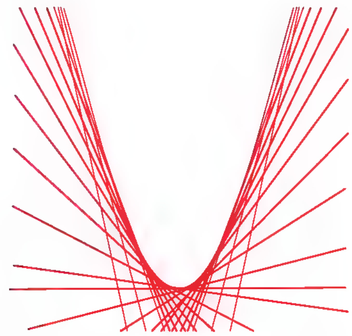


**FIGURA 3** Rectas tangentes a una parábola

Cada recta es **tangente** a la parábola; esto es, la recta toca la parábola exactamente en un punto y no cruza la parábola. La recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(a, a^2)$ es

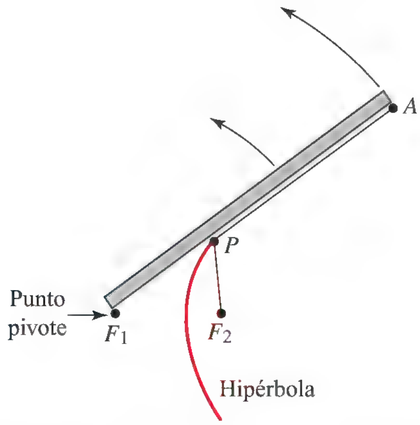
$$y = 2ax - a^2$$

Pedimos al estudiante demuestre esto en el Problema 6. La parábola recibe el nombre de **envolvente** de esas rectas.

## PROBLEMAS

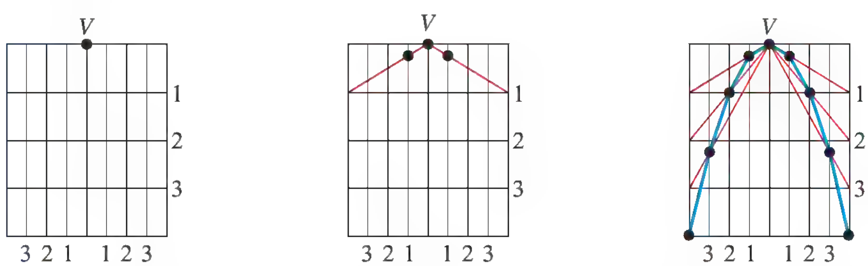
1. **Cónicas en arquitectura** Las fotografías de la página 776 muestran seis ejemplos de construcciones que contienen secciones cónicas. Investigue en la Internet para hallar otros ejemplos de estructuras que emplean parábolas, elipses o hipérbolas en sus diseños. Encuentre al menos un ejemplo de cada tipo de cónica.

2. **Construcción de una hipérbola** En este problema construimos una hipérbola. La barra de madera de la figura puede hacer pivote en $F_1$. Una cuerda que es más corta que la barra está anclada en $F_2$ y en $A$, el otro extremo de la barra. Un lápiz en $P$ mantiene tirante la cuerda contra la barra cuando se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj alrededor de $F_1$.
   **(a)** Demuestre que la curva trazada por el lápiz es una rama de una hipérbola con focos en $F_1$ y $F_2$.
   **(b)** ¿Cómo debe reconfigurarse el aparato para trazar la otra rama de la hipérbola?



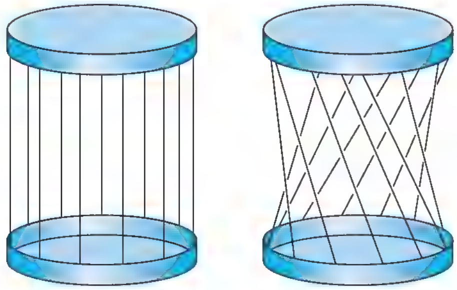

3. **Una parábola en un rectángulo** El método siguiente se puede usar para construir una parábola que ajuste en un rectángulo determinado. La parábola será aproximada por muchos segmentos de recta cortos.

   Primero, trazamos un rectángulo. Divida el rectángulo a la mitad por medio de un segmento de recta vertical y aplique leyenda al punto extremo $V$ superior. A continuación, divida la longitud y ancho de cada rectángulo medio en un número igual de partes para formar rectas en cuadrícula, como se ve en la figura siguiente. Trace rectas de $V$ a los puntos extremos de la recta horizontal 1 de la cuadrícula, y marque los puntos donde estas rectas cruzan las rectas verticales de cuadrícula marcadas 1. A continuación, trace rectas de $V$ a los puntos extremos de la recta 2 horizontal de la cuadrícula. Continúe en esa forma hasta que haya empleado todas las rectas horizontales de la cuadrícula. Ahora use segmentos de recta para enlazar los puntos que ha marcado para obtener una aproximación a la parábola deseada. Aplique este procedimiento para trazar una parábola que ajuste en un rectángulo de 6 pies por 10 pies en un prado de césped.

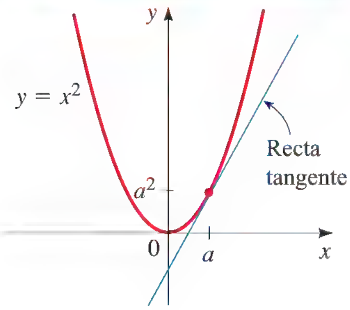



4. **Hipérbolas a partir de líneas rectas** En este problema construimos formas hiperbólicas usando líneas rectas. Perfore agujeros igualmente espaciados en los bordes de dos tapas de plástico grandes. Con cuerdas de igual longitud enlace los agujeros correspondientes, como se muestra en la figura de la página siguiente. Sosteniendo tirantes las cuerdas, tuerza una tapa contra la otra. Una superficie imaginaria que pasa por las cuerdas tiene secciones transversales hiperbólicas. (Un ejemplo arquitectónico de esto es la Torre de Kobe que

se ve en la fotografía.) ¿Qué ocurre a los vértices de las secciones transversales hiperbólicas cuando las tapas se tuercen más?



**5. Rectas tangentes a una parábola** En este problema mostramos que la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(a, a^2)$ tiene la ecuación $y = 2ax - a^2$.




**(a)** Sea $m$ la pendiente de la recta tangente en $(a, a^2)$. Demuestre que la ecuación de la recta tangente es $y - a^2 = m(x - a)$.

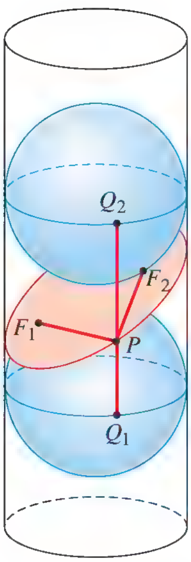
**(b)** Use el dato de que la recta tangente cruza la parábola sólo en un punto para demostrar que $(a, a^2)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} y - a^2 = m(x - a) \\ y = x^2 \end{cases}$$

**(c)** Elimine $y$ del sistema del inciso (b) para obtener una ecuación cuadrática en $x$. Demuestre que el discriminante de esta cuadrática es $(m - 2a)^2$. Como el sistema del inciso (b) tiene exactamente una solución, el discriminante debe ser igual a 0. Encuentre $m$.

**(d)** Sustituya en la ecuación del inciso (a) el valor con la $m$ que encontró en el inciso (c), y simplifique para obtener la ecuación de la recta tangente.

**6. Un cilindro cortado** En este problema demostramos que cuando un cilindro es cortado por un plano, se forma una elipse. Un ejemplo arquitectónico de esto es el Planetario Tycho Brahe de Copenhague (vea fotografía). En la figura, un cilindro es cortado por un plano, resultando en la curva roja. Dos esferas con el mismo radio que el cilindro se deslizan dentro del cilindro, de modo que apenas tocan el plano en $F_1$ y $F_2$. Escoja un punto arbitrario $P$ de la curva, y sean $Q_1$ y $Q_2$ los dos puntos sobre el cilindro donde una recta vertical que pasa por $P$ toca el "ecuador" de cada esfera.




**(a)** Demuestre que $PF_1 = PQ_1$ y $PF_2 = PQ_2$. [*Sugerencia:* Use el hecho de que todas las tangentes a una esfera desde un punto determinado fuera de la esfera son de la misma longitud.]

**(b)** Explique por qué $PQ_1 + PQ_2$ es igual para todos los puntos $P$ en la curva.

**(c)** Demuestre que $PF_1 + PF_2$ es igual para todos los puntos $P$ en la curva.

**(d)** Concluya que la curva es una elipse con focos $F_1$ y $F_2$.

# EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO CAPÍTULOS 10 Y 11

**1.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y \\ x^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

**(a)** ¿El sistema es lineal o no lineal? Explique.
**(b)** Encuentre todas las soluciones del sistema.
**(c)** La gráfica de cada ecuación es una sección cónica. Mencione el tipo de sección cónica en cada caso.
**(d)** Grafique ambas ecuaciones en el mismo conjunto de ejes.
**(e)** En su gráfica, haga sombreado de la región que corresponda a la solución del sistema de desigualdades.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4y \\ x^2 - 2y \le 0 \end{cases}$$

**2.** Encuentre la solución completa de cada sistema lineal, o demuestre que no existe solución.

**(a)** $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 11 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 5y - 8z = 7 \end{cases}$

**3.** Javier, Yolanda y Zacarías se van de pesca. Yolanda captura tantos peces como Javier y Zacarías juntos. Zacarías captura 2 peces más que Javier. El total de captura para las tres personas es de 20 peces. ¿Cuántos peces capturó cada uno?

**4.** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**(a)** Calcule cada uno de los siguientes, o explique por qué el cálculo no se puede hacer.

$$A + B, \quad C - D, \quad AB, \quad CB, \quad BD, \quad \det(B), \quad \det(C), \quad \det(D)$$

**(b)** Con base en los valores que haya calculado para $\det(C)$ y $\det(D)$, ¿cuál matriz, $C$ o $D$, tiene una inversa? Encuentre la inversa de la que es invertible.

**5.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$$

**(a)** Escriba una ecuación matricial de la forma $AX = B$ que sea equivalente a este sistema.
**(b)** Encuentre $A^{-1}$, la inversa de la matriz coeficiente.
**(c)** Resuelva la ecuación matricial al multiplicar cada lado por $A^{-1}$.
**(d)** Ahora resuelva el sistema usando la Regla de Cramer. ¿Obtuvo la misma solución que en el inciso (b)?

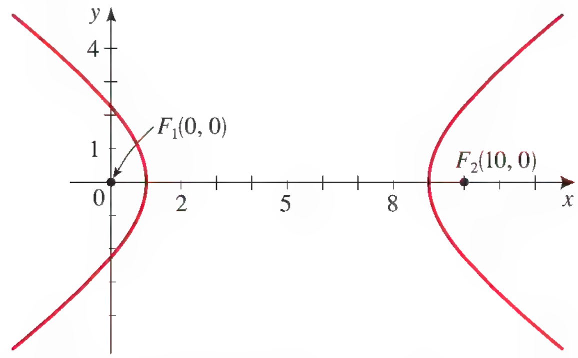
**6.** Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función racional $r(x) = \dfrac{4x + 8}{x^4 + 4x^2}$.

**7.** Encuentre una ecuación para la parábola con vértice en el origen y foco $F(0, 3)$.

**8.** Trace la gráfica de cada sección cónica, y encuentre las coordenadas de estos focos. ¿Qué tipo de sección cónica representa cada ecuación?

**(a)** $9x^2 + 4y^2 = 24y$ **(b)** $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

**9.** Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.




**10.** Use rotación de ejes para graficar la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

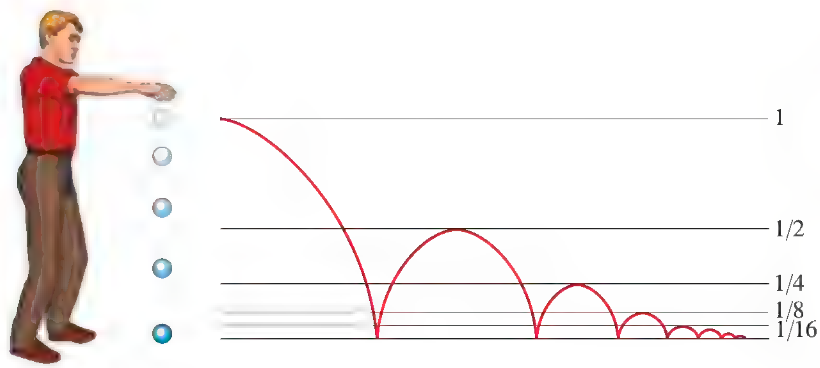
Zia Soleil/Iconica/The Getty Images

CAPÍTULO 12

# SUCESIONES Y SERIES



Una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Por ejemplo, la altura que alcanza una pelota después de cada rebote es una sucesión. Esta sucesión tiene un patrón definido; describir el patrón nos permite predecir la altura que la pelota alcanza después de cualquier número de rebotes.




La cantidad en una cuenta bancaria al final de cada mes, pagos de hipoteca y la cantidad de anualidad también son sucesiones. Las fórmulas que generan estas sucesiones mueven nuestra economía; nos permiten solicitar préstamos para comprar la casa de nuestros sueños, más cuando nos graduamos que cuando nos pensionamos. En este capítulo estudiamos éstas y otras aplicaciones de las sucesiones.

# 12.1 SUCESIONES Y NOTACIÓN DE SUMA

Sucesiones ▶ Sucesiones definidas en forma recursiva ▶ Sumas parciales de una sucesión ▶ Notación sigma

En términos generales, una sucesión es una lista infinita de números. Es frecuente que los números de una sucesión se escriban $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Los puntos quieren decir que la lista continúa hasta el infinito. Un ejemplo sencillo es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Podemos describir el patrón de la sucesión mostrada líneas antes con la siguiente *fórmula:*

$$a_n = 5n$$

El lector puede ya haber pensado en una forma diferente de describir el modelo, es decir, "pasa de un número al siguiente sumando 5". Esta forma natural de describir la sucesión está expresada por la *fórmula recursiva:*

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Intente sustituyendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para ver cómo producen los números de la sucesión. En esta sección vemos la forma en que se usan estas diferentes formas para describir sucesiones específicas.

## ▼ Sucesiones

Cualquier lista ordenada de números puede verse como una función cuyos valores de entrada son $1, 2, 3, \ldots$ y cuyos valores de salida son números de la lista. Así, definimos una sucesión como sigue:

### DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN

Una **sucesión** es una función $f$ cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los **términos de la sucesión** son los valores de la función

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

Por lo general escribimos $a_n$ en lugar de la notación de función $f(n)$. En consecuencia, los términos de la sucesión se escriben como

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

El número $a_1$ se denomina **primer término**, $a_2$ se llama **segundo término** y, en general, $a_n$ recibe el nombre de ***n*-ésimo término**.

A continuación veamos un ejemplo sencillo de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Podemos escribir una sucesión en esta forma cuando es evidente cuáles son los términos subsiguientes de la sucesión. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más precisos, no obstante, necesitamos especificar un procedimiento para hallar *todos* los términos de la sucesión. Esto puede hacerse al dar una fórmula para el $n$-ésimo término $a_n$ de la sucesión. En este caso,

$$a_n = 2n$$

Otra forma de escribir esta sucesión es usar notación de función:

$$a(n) = 2n$$

entonces $a(1) = 2$, $a(2) = 4$, $a(3) = 6, \ldots$

y la sucesión se puede escribir como

| 2, | 4, | 6, | 8, | . . . , | $2n$, | . . . |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1er término | 2º término | 3er término | 4º término | | 5º término | |

Nótese cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, sustituyendo 1, 2, 3 y 4 para $n$ da los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para hallar el 103avo término de esta sucesión, usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

## EJEMPLO 1 | Hallar los términos de una sucesión

Encuentre los primeros cinco términos del 100-ésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

**(a)** $a_n = 2n - 1$ **(b)** $c_n = n^2 - 1$

**(c)** $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ **(d)** $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

**SOLUCIÓN** Para hallar los primeros cinco términos, sustituimos $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula del $n$-ésimo término. Para hallar el 100-ésimo término, sustituimos $n = 100$. Esto da lo siguiente.

| $n$-ésimo término | Primeros cinco términos | 100-ésimo término |
|---|---|---|
| (a) $2n - 1$ | 1, 3, 5, 7, 9 | 199 |
| (b) $n^2 - 1$ | 0, 3, 8, 15, 24 | 999 |
| (c) $\dfrac{n}{n+1}$ | $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ | $\frac{100}{101}$ |
| (d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ | $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{2^{100}}$ |

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3, 5, 7** Y **9**

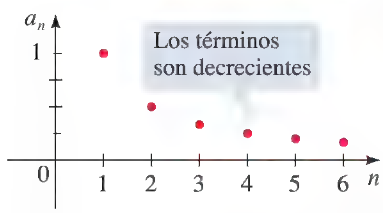



**FIGURA 1**

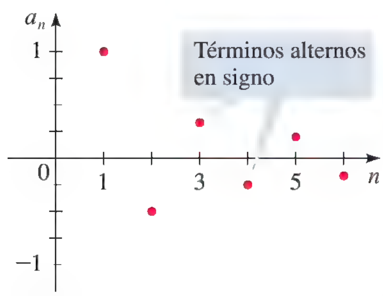



**FIGURA 2**

En el Ejemplo 1(d) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer términos sucesivos alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil representar una sucesión con una gráfica. Como una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, podemos trazar su gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

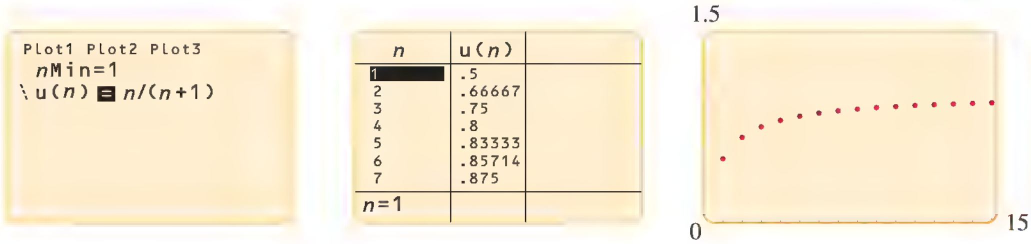
se muestra en la Figura 1.

Compare la gráfica de la sucesión mostrada en la Figura 1 con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

que se muestra en la Figura 2. La gráfica de toda sucesión está formada por puntos aislados que *no están* conectados.

Las calculadoras graficadoras son útiles para analizar sucesiones. Para trabajar con sucesiones en una TI-83, ponemos la calculadora en el modo de **Seq** (modo de "sucesión") como en la Figura 3(a). Si ingresamos la sucesión $u(n) = n/(n + 1)$ del Ejemplo 1(c), podemos exhibir en pantalla los términos usando el comando TABLE como se muestra en la Figura 3(b). También podemos graficar la sucesión como se ve en la Figura 3(c).




(a) (b) (c)

**FIGURA 3**
$u(n) = n/(n + 1)$

Hallar patrones en sucesiones es una parte importante de las matemáticas. Considere la sucesión que se inicia con

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

¿Puede usted detectar un patrón en estos números? En otras palabras, ¿puede definir una sucesión cuyos primeros cuatro términos son estos números? La respuesta a esta pregunta parece fácil; estos números son los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4. Entonces, la sucesión que buscamos está definida por $a_n = n^2$. Sin embargo, ésta no es la *única* sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a nuestro problema no es única (vea Ejercicio 80). En el siguiente ejemplo nos interesa hallar una sucesión *obvia* cuyos primeros términos concuerden con los dados.

No todas las sucesiones pueden estar definidas por una fórmula. Por ejemplo, no hay fórmula conocida para la sucesión de números primos:*

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

**Números primos grandes**
La búsqueda de números primos grandes fascina a numerosas personas. Al momento de escribir esto, el número primo conocido más grande es

$$2^{43,112,609} - 1$$

Fue descubierto por Edson Smith del Departamento de Matemáticas de la UCLA. En notación decimal este número contiene 12,978,178 dígitos. Si se escribiera completo, ocuparía más de tres veces todas las páginas que contiene este libro. Smith estuvo trabajando con un grupo grande de Internet conocido como GIMPS (el Great Internet Mersenne Prime Search). Números de la forma $2^p - 1$, donde $p$ es primo, se denominan números Mersenne y se verifican más fácilmente en cuanto a su calidad de primos que otros. Esto es por lo cual los primos conocidos más grandes son de esta forma.

### EJEMPLO 2 | Hallar el *n*-ésimo término de una sucesión

Encuentre el $n$-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se dan.

**(a)** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ **(b)** $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Observamos que los numeradores de estas fracciones son números impares y los denominadores son números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere del número par en 1). Por lo tanto, una sucesión que tiene estos números para sus primeros cuatro términos está dada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

**(b)** Estos números son potencias de 2, y se alternan en signo, de modo que una sucesión que concuerde con estos términos está dada por

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

El lector debe verificar que estas fórmulas generan en realidad los términos dados.

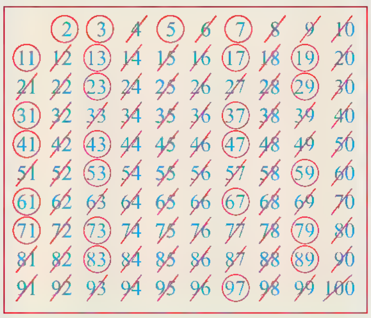
AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25, 27** Y **29**

## Sucesiones definidas en forma recursiva

Algunas sucesiones no tienen fórmulas definitorias sencillas como las del ejemplo precedente. El $n$-ésimo término de una sucesión puede depender de alguno o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida en esta forma se denomina **recursiva**. A continuación veamos dos ejemplos.

* Un *número primo* es un número entero $p$ cuyos únicos divisores son $p$ y 1. (Por convención, el número 1 no se considera como primo.)

**ERATÓSTENES** (hacia 276-195 a.C.) fue un afamado geógrafo, matemático y astrónomo griego. Con toda precisión calculó la circunferencia de la Tierra mediante un ingenioso método, pero es más famoso por su método para hallar números primos, ahora llamado *criba de Eratóstenes*. El método consiste en una lista de enteros, empezando con el 2 (el primer primo) y luego en cruzar todos los múltiplos de 2, que no son primos. El siguiente número restante en la lista es el 3 (segundo número primo) y otra vez cruzamos todos los múltiplos de éste. El siguiente número restante es el 5 (tercer número primo) y cruzamos todos los múltiplos del mismo, y así sucesivamente. En esta forma, todos los números que no son primos quedan cruzados y los números restantes son los primos.



## EJEMPLO 3 | Hallar los términos de una sucesión definida en forma recursiva

Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión definida en forma recursiva por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

**SOLUCIÓN** La fórmula que define esta sucesión es recursiva. Nos permite hallar el $n$-ésimo término $a_n$ si conocemos el término precedente $a_{n-1}$. Entonces, podemos hallar el segundo término a partir del primer término, el tercer término a partir del segundo término, el cuarto término a partir del tercer término, y así sucesivamente. Como nos dan el primer término $a_1 = 1$, podemos continuar como sigue:

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$

$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$

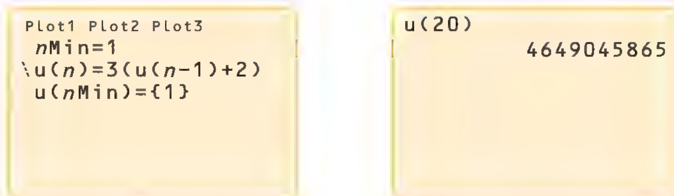
$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

En consecuencia, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Observe que para hallar el 20avo término de la sucesión del Ejemplo 3, primero debemos hallar los 19 términos precedentes. Esto se hace con más facilidad usando una calculadora graficadora. La Figura 4(a) muestra cómo ingresar esta sucesión en la calculadora TI-83. De la Figura 48(b) vemos que el 20avo término de la sucesión es $a_{20} = 4,649,045,865$.




(a) (b)

**FIGURA 4** $u(n) = 3(u(n - 1) + 2), u(1) = 1$

## EJEMPLO 4 | La sucesión de Fibonacci

Encuentre los primeros 11 términos de la sucesión definida en forma recursiva por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n\;2}$$

**FIBONACCI** (1175-1250) nació en Pisa, Italia, y fue educado en el norte de África. Viajó extensamente por el Mediterráneo y aprendió varios métodos entonces en uso para escribir números. A su regreso a Pisa en 1202, Fibonacci apoyó el uso del sistema decimal hindú-árabe, que es el que usamos hoy en día, más que el sistema numérico romano que se usaba en Europa en aquel tiempo. Su libro más famoso, *Liber Abaci*, expone las ventajas del sistema hindú-árabe. En realidad, la multiplicación y división eran tan complicadas usando números romanos que era necesario un título universitario para dominar estos conocimientos. Curiosamente, en 1299 la ciudad de Florencia proscribió el uso del sistema decimal a comerciantes y financieros, exigiendo números escritos en romanos o en palabras. Nosotros sólo podemos especular acerca de las razones de esta ley.

**SOLUCIÓN** Para hallar $F_n$, necesitamos hallar los dos términos precedentes, $F_{n-1}$ y $F_{n-2}$. Como nos dan $F_1$ y $F_2$, procedemos como sigue:

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Es claro lo que está ocurriendo aquí. Cada término es simplemente la suma de los dos términos que lo preceden, de modo que con toda facilidad podemos escribir tantos términos que queramos. A continuación están los primeros 11 términos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

---

La sucesión del Ejemplo 4 se denomina **sucesión de Fibonacci**, en honor del matemático italiano del siglo XIII que la usó para resolver un problema acerca de la cría de conejos (vea Ejercicio 79). La sucesión también se presenta en numerosas otras aplicaciones en la naturaleza. (Vea Figuras 5 y 6.) De hecho, tantos fenómenos se comportan como la sucesión de Fibonacci que una publicación matemática trimestral, el *Fibonacci Quarterly*, está dedicada por entero a sus propiedades.

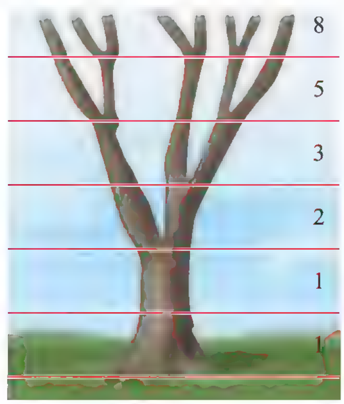



**FIGURA 5** Sucesión de Fibonacci en las ramas de un árbol

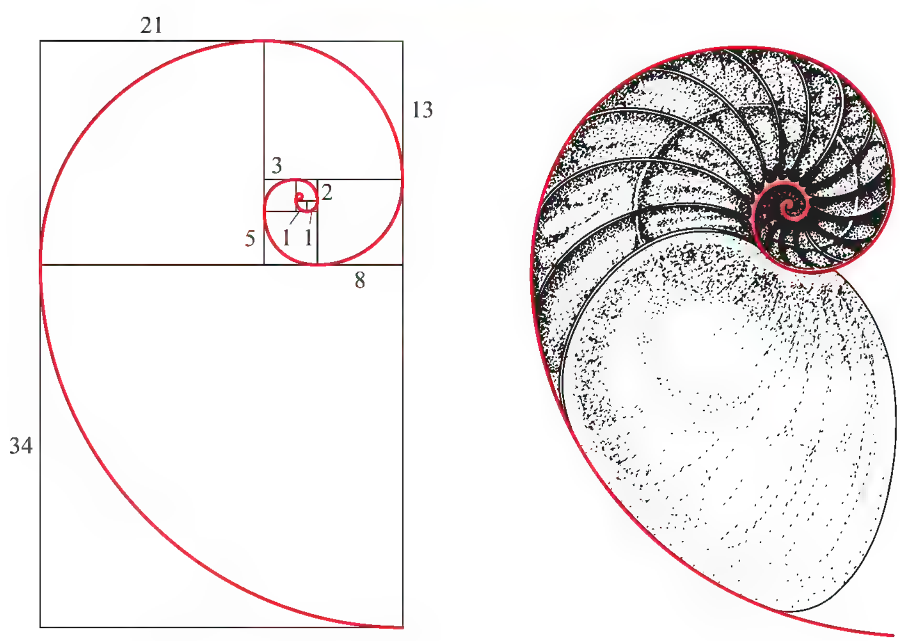



**FIGURA 6** Espiral de Fibonacci — Concha de nautilo

## Sumas parciales de una sucesión

En cálculo, con frecuencia estamos interesados en sumar los términos de una sucesión. Esto lleva a la siguiente definición.

> **SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN**
>
> Para la sucesión
>
> $$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$
>
> las **sumas parciales son**
>
> $$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$
>
> $S_1$ se llama la **primera suma parcial**, $S_2$ es la **segunda suma parcial**, y así sucesivamente. $S_n$ recibe el nombre de ***n*-ésima suma parcial**. La sucesión $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ se denomina **sucesión de sumas parciales**.

### EJEMPLO 5 | Hallar las sumas parciales de una sucesión

Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la $n$-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = 1/2^n$.

**SOLUCIÓN** Los términos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

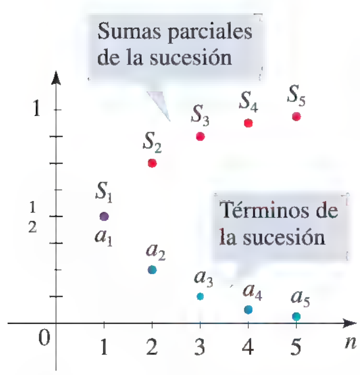



**FIGURA 7** Gráfica de la sucesión $a_n$ y la sucesión de sumas parciales $S_n$

Nótese que en el valor de cada suma parcial, el denominador es una potencia de 2 y el numerador es uno menos que el denominador. En general, la $n$-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Los primeros cinco términos de $a_n$ y $S_n$ están graficados en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37** ■

### EJEMPLO 6 | Hallar las sumas parciales de una sucesión

Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la $n$-ésima suma de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

**SOLUCIÓN** Las primeras cuatro sumas parciales son

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

¿Detecta usted el patrón aquí? Desde luego. La $n$-ésima suma parcial es

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

## Notación sigma

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

podemos escribir la suma de los primeros $n$ términos usando **notación de suma**, o **notación sigma**. Esta notación deriva su nombre de la letra griega $\Sigma$ (sigma mayúscula, correspondiente a nuestra $S$ por "suma"). La notación sigma se usa como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Esto nos dice que terminemos con $k = n$

Esto nos dice que hay que sumar $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Esto nos dice que hay que empezar con $k = 1$

El lado izquierdo de esta expresión se lee: "La suma de $a_k$ de $k = 1$ a $k = n$." La letra $k$ se llama **índice de suma**, o la **variable de suma**, y la idea es sustituir $k$ en la expresión después de la sigma por los enteros 1, 2, 3, …, $n$, y sumar las expresiones resultantes, llegando al lado derecho de la ecuación.

### EJEMPLO 7 | Notación sigma

Encuentre la suma

**(a)** $\sum_{k=1}^{5} k^2$ **(b)** $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$ **(c)** $\sum_{i=5}^{10} i$ **(d)** $\sum_{i=1}^{6} 2$

**SOLUCIÓN**

**(a)** $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

**(b)** $\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

```
sum(seq(K²,K,1,5,1))
                  55
sum(seq(1/J,J,3,5,
1))▸Frac
               47/60
```

**FIGURA 8**

**(c)** $\displaystyle\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$

**(d)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$

Podemos usar una calculadora graficadora para evaluar sumas. Por ejemplo, la Figura 8 muestra cómo se usa la TI-83 para evaluar las sumas de los incisos (a) y (b) del Ejemplo 7.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **43**

## EJEMPLO 8 | Escribir sumas en notación sigma

Escriba cada suma usando notación sigma.

**(a)** $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$

**(b)** $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77}$

### SOLUCIÓN

**(a)** Podemos escribir

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = \sum_{k=1}^{7} k^3$$

**(b)** Una forma natural de escribir esta suma es

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=3}^{77} \sqrt{k}$$

No obstante, no hay una forma única de escribir una suma en notación sigma. También podríamos escribir esta suma como

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=0}^{74} \sqrt{k+3}$$

o

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=1}^{75} \sqrt{k+2}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61** Y **63**

**La razón de oro**

Los antiguos griegos consideraban que un segmento de recta se ha de dividir en la **razón de oro** si la razón entre la parte más corta y la parte más larga es igual que la razón entre la parte más larga y todo el segmento.

Entonces el segmento mostrado está dividido en la razón de oro si

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 + x}$$

Esto lleva a una ecuación cuadrática cuya solución positiva es

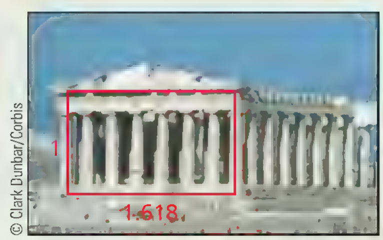
$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Esta razón se presenta naturalmente en muchos lugares. Por ejemplo, experimentos psicológicos muestran que la forma más agradable de rectángulo es aquella cuyos lados están en una razón de oro. Los antiguos griegos estuvieron de acuerdo con esto y construyeron sus templos en esta razón.

La razón de oro está relacionada con la sucesión de Fibonacci. De hecho, se puede demostrar usando cálculo* que la razón entre dos números de Fibonacci sucesivos

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

se acerca más a la razón de oro cuanto más grande sea el valor de $n$. Trate de hallar esta razón para $n = 10$.




* Vea *Principios para resolución de problemas* 13 en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

Las siguientes propiedades de sumas son consecuencias naturales de propiedades de los números reales.

**PROPIEDADES DE SUMAS**

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$, y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sucesiones. Entonces, para todo entero positivo $n$ y cualquier número real $c$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

**DEMOSTRACIÓN** Para demostrar la Propiedad 1, escribimos el lado izquierdo de la ecuación para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Debido a que la adición es conmutativa y asociativa, podemos reacomodar los términos del lado derecho para obtener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Reescribiendo el lado derecho usando notación sigma da la Propiedad 1. La Propiedad 2 se demuestra en una forma similar. Para demostrar la Propiedad 3, usamos la Propiedad Distributiva:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ca_k &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\end{aligned}$$

## 12.1 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Una sucesión es una función cuyo dominio es _____.

2. La $n$-ésima suma parcial de una sucesión es la suma de los primeros _____ términos de la sucesión. Entonces, para la sucesión $a_n = n^2$ la cuarta suma parcial es $S_4$ = __+__+__+__ =___.

### HABILIDADES

**3-12** ■ Encuentre los primeros cuatro términos y el 100-ésimo término de la sucesión.

3. $a_n = n + 1$
4. $a_n = 2n + 3$
5. $a_n = \dfrac{1}{n + 1}$
6. $a_n = n^2 + 1$
7. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
8. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$
9. $a_n = 1 + (-1)^n$
10. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n + 1}$
11. $a_n = n^n$
12. $a_n = 3$

**13-18** ■ Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión dada en forma recursiva.

13. $a_n = 2(a_{n-1} - 2)$ y $a_1 = 3$
14. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$ y $a_1 = -8$
15. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ y $a_1 = 1$
16. $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ y $a_1 = 1$
17. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 2$
18. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ y $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

**19-24** ■ Use calculadora graficadora para hacer lo siguiente. **(a)** Hallar los primeros 10 términos de la sucesión. **(b)** Graficar los primeros 10 términos de la sucesión.

**19.** $a_n = 4n + 3$

**20.** $a_n = n^2 + n$

**21.** $a_n = \dfrac{12}{n}$

**22.** $a_n = 4 - 2(-1)^n$

**23.** $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 2$

**24.** $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 3$

**25-32** ■ Encuentre el $n$-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se dan.

**25.** $2, 4, 8, 16, \ldots$

**26.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

**27.** $1, 4, 7, 10, \ldots$

**28.** $5, \quad 25, 125, \quad 625, \ldots$

**29.** $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$

**30.** $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

**31.** $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

**32.** $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$

**33-36** ■ Encuentre las primeras seis sumas parciales $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ de la sucesión.

**33.** $1, 3, 5, 7, \ldots$

**34.** $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

**35.** $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, \dfrac{1}{3^4}, \ldots$

**36.** $-1, 1, -1, 1, \ldots$

**37-40** ■ Encuentre las primeras cuatro sumas parciales y la $n$-ésima suma parcial de la sucesión $a_n$.

**37.** $a_n = \dfrac{2}{3^n}$

**38.** $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

**39.** $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

**40.** $a_n = \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ [*Sugerencia:* Use una propiedad de logaritmos para escribir el $n$-ésimo término como una diferencia.]

**41-48** ■ Encuentre la suma.

**41.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k$

**42.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^2$

**43.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$

**44.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} (-1)^j$

**45.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} [1 + (-1)^i]$

**46.** $\displaystyle\sum_{i=4}^{12} 10$

**47.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$

**48.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} i2^i$

**49-54** ■ Use calculadora graficadora para evaluar la suma.

**49.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

**50.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

**51.** $\displaystyle\sum_{j=7}^{20} j^2(1 + j)$

**52.** $\displaystyle\sum_{j=5}^{15} \frac{1}{j^2 + 1}$

**53.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{22} (-1)^n 2n$

**54.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n}{n}$

**55-60** ■ Escriba la suma sin usar notación sigma.

**55.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$

**56.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} \frac{2i - 1}{2i + 1}$

**57.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \sqrt{k + 4}$

**58.** $\displaystyle\sum_{k=6}^{9} k(k + 3)$

**59.** $\displaystyle\sum_{k=3}^{100} x^k$

**60.** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j$

**61-68** ■ Escriba la suma usando notación sigma.

**61.** $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

**62.** $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$

**63.** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

**64.** $\dfrac{1}{2 \ln 2} - \dfrac{1}{3 \ln 3} + \dfrac{1}{4 \ln 4} - \dfrac{1}{5 \ln 5} + \cdots + \dfrac{1}{100 \ln 100}$

**65.** $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

**66.** $\dfrac{\sqrt{1}}{1^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

**67.** $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$

**68.** $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots - 100x^{99}$

**69.** Encuentre una fórmula para el $n$-ésimo término de la sucesión

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$$

[*Sugerencia:* Escriba cada término como una potencia de 2.]

**70.** Defina la sucesión

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

Use el comando TABLE en una calculadora graficadora para hallar los primeros 10 términos de esta sucesión. Compare con la sucesión de Fibonacci $F_n$.

## APLICACIONES

**71. Interés compuesto** Julio deposita \$2000 en una cuenta de ahorros que paga 2.4% de interés al año capitalizado mensualmente. La cantidad en la cuenta después de $n$ meses está dada por la sucesión

$$A_n = 2000\left(1 + \frac{0.024}{12}\right)^n$$

**(a)** Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
**(b)** Encuentre la cantidad en la cuenta después de 3 años.

**72. Interés compuesto** Al finalizar cada mes, Elena deposita \$100 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado mensualmente. La cantidad de interés que ella ha acumulado después de $n$ meses está dada por la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.005^n - 1}{0.005} - n\right)$$

**(a)** Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.
**(b)** Encuentre el interés que ella ha acumulado después de 5 años.

**73. Población de una ciudad** En el año 2004, una ciudad ha incorporado una población de 35,000. Se espera que la población aumente a razón de 2% al año. La población $n$ años después de 2004 está dada por la sucesión

$$P_n = 35{,}000(1.02)^n$$

**(a)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.
**(b)** Encuentre la población en 2014.

**74. Pagar una deuda** Margarita solicita en préstamo \$10,000 a su tío y conviene en pagarlo en pagos mensuales de \$200. Su tío le cobra 0.5% de interés al mes sobre el saldo.
**(a)** Demuestre que su saldo $A_n$ en el $n$-ésimo mes está dado en forma recursiva por $A_n = 10{,}000$ y

$$A_n = 1.005A_{n-1} - 200$$

**(b)** Encuentre su saldo después de seis meses.

**75. Cultivo de peces** Un criador de pescado tiene 5000 bagres en su estanque. El número de bagres aumenta en 8% al mes, y el criador cosecha 300 bagres al mes.
**(a)** Demuestre que la población de bagres $P_n$ después de $n$ meses está dada recursivamente por $P_n = 5000$ y

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300$$

**(b)** ¿Cuántos peces hay en el estanque después de 12 meses?

**76. Precio de una casa** El precio medio de una casa en Orange County aumenta en alrededor de 6% al año. En 2002 el precio medio era de \$240,000. Sea $P_n$ el precio medio $n$ años después de 2002.
**(a)** Encuentre una fórmula para la sucesión $P_n$.
**(b)** Encuentre el precio medio esperado en 2010.

**77. Aumentos de salario** A un vendedor recientemente contratado se le promete un salario inicial de \$30,000 al año con un aumento de \$2000 cada año. Sea $S_n$ su salario en su $n$-ésimo año de empleo.
**(a)** Encuentre una definición recursiva de $S_n$.
**(b)** Encuentre su salario en su quinto año de empleo.

**78. Concentración de una solución** Una bióloga está tratando de hallar la concentración óptima de sal para el crecimiento de cierta especie de molusco. Ella empieza con una solución de salmuera que tiene 4 g/L de sal y aumenta la concentración en 10% al día. Denote con $C_0$ la concentración inicial y $C_n$ la concentración después de $n$ días.
**(a)** Encuentre una definición recursiva de $C_n$.
**(b)** Encuentre la concentración de sal después de 8 días.

**79. Conejos de Fibonacci** Fibonacci planteó el siguiente problema: Supongamos que los conejos viven por siempre y que cada mes cada par produce un nuevo par que se hace productivo a la edad de 2 meses. Si empezamos con un par recién nacido, ¿cuántos pares de conejos tendremos en el $n$-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es $F_n$, donde $F_n$ es el $n$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**80. Diferentes sucesiones que empiezan iguales**
**(a)** Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2$ son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

**(b)** Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ también son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

**(c)** Encuentre una sucesión cuyos primeros seis términos son los mismos que los de $a_n = n^2$ pero cuyos términos sucesivos difieren de esta sucesión.
**(d)** Encuentre dos sucesiones diferentes que empiezan con

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

**81. Una sucesión definida en forma repetitiva** Encuentre los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo si $a_1 = 25$. Haga una conjetura acerca de este tipo de sucesión. Intente otros varios valores para $a_1$ para probar su conjetura.

**82. Un tipo diferente de recursividad** Encuentre los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}}$$

con

$$a_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad a_2 = 1$$

¿En qué difiere esta sucesión recursiva con respecto a las otras de esta sección?

# 12.2 SUCESIONES ARITMÉTICAS

Sucesiones aritméticas ▶ Sumas parciales de sucesiones aritméticas

En esta sección estudiamos un tipo especial de sucesión, llamado sucesión aritmética.

## ▼ Sucesiones aritméticas

Quizá la forma más sencilla de generar una sucesión es empezar con un número $a$ y sumarle una cantidad constante fija $d$, una y otra vez.

### DEFINICIÓN DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

Una **sucesión aritmética** es una sucesión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número $a$ es el **primer término**, y $d$ es la **diferencia común** de la sucesión. El **$n$-ésimo** término de una sucesión aritmética está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

El número $d$ se llama diferencia común porque cualesquier dos términos consecutivos de una sucesión aritmética difieren en $d$.

## EJEMPLO 1 | Sucesiones aritméticas

**(a)** Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces tenemos la sucesión aritmética

$$2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \ldots$$

o

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

Cualesquier dos términos consecutivos de esta sucesión difieren en $d = 3$. El $n$-ésimo término es $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

**(b)** Considere la sucesión aritmética

$$9, 4, -1, -6, -11, \ldots$$

Aquí la diferencia común es $d = -5$. Los términos de una sucesión aritmética decrecen si la diferencia común es negativa. El $n$-ésimo término es $a_n = 9 - 5(n - 1)$.

**(c)** La gráfica de la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2(n - 1)$ se muestra en la Figura 1. Observe que los puntos de la gráfica se encuentran sobre la recta $y = 2x - 1$, que tiene pendiente $d = 2$.

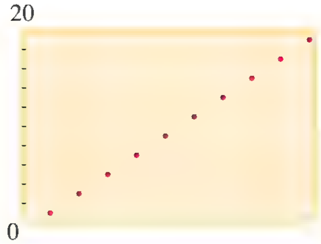


**FIGURA 1**

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5, 9 Y 13**

Una sucesión aritmética está determinada completamente por el primer término $a$ y la diferencia común $d$. Así, si conocemos los primeros dos términos de una sucesión aritmética, entonces podemos hallar una fórmula para el $n$-ésimo término, como muestra el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 2 | Hallar términos de una sucesión aritmética

Encuentre los primeros seis términos y el 300avo término de la sucesión aritmética

$$13, 7, \ldots$$

**SOLUCIÓN** Como el primer término es 13, tenemos $a = 13$. La diferencia común es $d = 7 - 13 = -6$. Por lo tanto el $n$-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 13 - 6(n - 1)$$

De esto hallamos los primeros seis términos:

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \ldots$$

El 300avo término es $a_{300} = 13 - 6(299) = -1781$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

El siguiente ejemplo muestra que una sucesión aritmética está determinada completamente por *cualesquier* dos de sus términos.

**LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO**

**División equitativa de activos**

Dividir equitativamente una propiedad entre varias personas es del mayor interés para matemáticos. Problemas de esta naturaleza incluyen dividir el presupuesto nacional, tierras en conflicto o propiedades en casos de divorcios. En 1994, Brams y Taylor encontraron una vía matemática de dividir cosas en forma equitativa. La solución que dieron ha sido aplicada a problemas de división en ciencias políticas, procedimientos legales y otros campos de actividad. Para entender el problema, considere el siguiente ejemplo. Suponga que las personas *A* y *B* desean dividir una propiedad exactamente entre ellos. Dividirla *exactamente* significa que *A* y *B* deben quedar satisfechos con el resultado de la división. Solución: *A* divide la propiedad en dos partes, luego *B* escoge la parte que guste. Como *A* y *B* tenían una parte en el proceso de división, cada uno debe quedar satisfecho. La situación se hace mucho más complicada si tres o más personas intervienen (y aquí es donde entran las matemáticas). Dividir cosas con justicia y razón exige mucho más que simplemente cortarlas a la mitad; debe tomarse en cuenta el *valor relativo* que cada persona asigne a lo que se divida. Un caso de la Biblia ilustra con claridad lo anterior. Dos mujeres aparecen frente al rey Salomón, cada una de ellas diciendo ser la madre del mismo bebé recién nacido. La solución del rey Salomón era cortar el niño en dos. La madre real, que le da mucho más valor al bebé que cualquiera otra persona, de inmediato abandona su reclamación para salvar la vida del bebé.

Recientemente se han aplicado soluciones matemáticas a problemas de división exacta en un tratado internacional, la Convención sobre Leyes del Mar. Si un país desea construir sobre una parte del lecho marino, se requiere que divida la porción en dos partes, una para el uso del país y otra para uso de un consorcio que lo preservará para uso posterior por un país menos desarrollado. El consorcio es el primero en escoger.

**EJEMPLO 3 | Hallar términos de una sucesión aritmética**

El 11avo término de una sucesión aritmética es 52, y el 19avo término es 92. Encuentre el 100-ésimo término.

**SOLUCIÓN** Para hallar el $n$-ésimo término de esta sucesión, necesitamos hallar $a$ y $d$ en la fórmula

$$a_n = a + (n - 1)d$$

De esta fórmula obtenemos

$$a_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$

$$a_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$$

Como $a_{11} = 52$ y $a_{19} = 92$, obtenemos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases}$$

Despejando $a$ y $d$ de este sistema, obtenemos $a = 2$ y $d = 5$. (Verifique esto.) Entonces el $n$-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 2 + 5(n - 1)$$

El 1000-ésimo término es $a_{1000} = 2 + 5(1000 - 1) = 4997$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

## Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Suponga que deseamos hallar la suma de los números 1, 2, 3, 4, …, 100, es decir,

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Cuando el famoso matemático C. F. Gauss era un niño de escuela, su profesor le planteó este problema a todo el grupo y esperaba que mantendría a los estudiantes ocupados durante largo tiempo. Para su sorpresa, Gauss contestó la pregunta casi de inmediato. Su idea era ésta: Como estamos sumando números producidos de acuerdo a un patrón fijo, debe haber un patrón (o fórmula) para hallar la suma. Empezó por escribir los números del 1 al 100 y luego debajo de ellos escribió los mismos números en orden inverso. Escribiendo $S$ por la suma y sumando términos correspondientes da

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ S &= 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S &= 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 \end{aligned}$$

Se deduce que $2S = 100(101) = 10{,}100$ y por tanto $S = 5050$.

Por supuesto, la sucesión de números naturales 1, 2, 3, … es una sucesión aritmética (con $a = 1$ y $d = 1$), y el método para sumar los primeros 100 términos de esta sucesión se puede usar para hallar una fórmula para la $n$-ésima suma parcial de cualquier sucesión aritmética. Deseamos hallar la suma de los primeros $n$ términos de la sucesión aritmética cuyos términos son $a_k = a + (k - 1)d$; esto es, deseamos hallar

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (k - 1)d] \\ &= a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Usando el método de Gauss, escribimos

$$\begin{aligned} S_n &= a + (a + d) + \cdots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \\ S_n &= [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \cdots + (a + d) + a \\ \hline 2S_n &= [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \cdots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Hay $n$ términos idénticos en el lado derecho de esta ecuación, y

$$2S_n = n[2a + (n - 1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

Observe que $a_n = a + (n - 1)d$ es el $n$-ésimo término de esta sucesión. Por lo tanto, podemos escribir

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$$

Esta última fórmula dice que la suma de los primeros $n$ términos de una sucesión aritmética es el promedio de los términos primero y $n$-ésimo multiplicados por $n$, el número de términos de la suma. A continuación resumimos este resultado.

### SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

Para la sucesión aritmética $a_n = a + (n - 1)d$ la ***n*-ésima suma parcial**

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d]$$

está dada por cualquiera de las dos fórmulas siguientes.

**1.** $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$ **2.** $S_n = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$

## EJEMPLO 4 | Hallar una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

**SOLUCIÓN** Para esta sucesión aritmética, $a = 3$ y $d = 4$. Usando la Fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{40} = \tfrac{40}{2}[2(3) + (40 - 1)4] = 20(6 + 156) = 3240$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

## EJEMPLO 5 | Hallar una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 50 números impares.

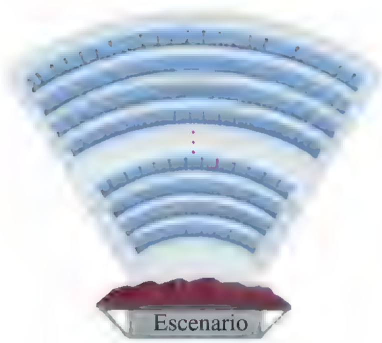
**SOLUCIÓN** Los números impares forman una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$. El $n$-ésimo término es $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, de modo que el 50avo número impar es $a_{50} = 2(50) - 1 = 99$. Sustituyendo en la Fórmula 2 para la suma parcial de una sucesión aritmética, tenemos

$$S_{50} = 50\left(\frac{a + a_{50}}{2}\right) = 50\left(\frac{1 + 99}{2}\right) = 50 \cdot 50 = 2500$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

## EJEMPLO 6 | Hallar la capacidad de asientos de un anfiteatro

Un anfiteatro tiene 50 filas de asientos con 30 asientos en la primera fila, 32 en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente. Encuentre el número total de asientos.




**SOLUCIÓN** Los números de asientos de las filas forman una sucesión aritmética con $a = 30$ y $d = 2$. Como hay 50 filas, el número total de asientos es la suma

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(30) + 49(2)] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$
$$= 3950$$

Por lo tanto, el anfiteatro tiene 3950 asientos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

## EJEMPLO 7 | Hallar el número de términos de una suma parcial

¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 5, 7, 9, ...deben sumarse para obtener 572?

**SOLUCIÓN** Nos piden hallar $n$ cuando $S_n = 572$. Sustituyendo $a = 5$, $d = 2$ y $S_n = 572$ en la Fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$572 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n - 1)2] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$
$$572 = 5n + n(n - 1) \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$
$$0 = n^2 + 4n - 572 \qquad \text{Expanda}$$
$$0 = (n - 22)(n + 26) \qquad \text{Factorice}$$

Esto da $n = 22$ o $n = -26$. Pero como $n$ es el *número* de términos de esta suma parcial, debemos tener $n = 22$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

## 12.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Una sucesión aritmética es una sucesión en la que la ________ entre términos sucesivos es constante.
2. La sucesión $a_n = a + (n - 1)d$ es una sucesión aritmética en la que $a$ es el primer término y $d$ es el ______ _______. Entonces, para la sucesión aritmética $a_n = 2 + 5(n - 1)$ el primer término es _____, y la diferencia común es ______.
3. *¿Verdadero o falso?* La $n$-ésima suma parcial de una sucesión aritmética es el promedio de los términos primero y último por $n$.
4. *¿Verdadero o falso?* Si conocemos los términos primero y segundo de una sucesión aritmética, entonces podemos hallar cualquier otro término.

### HABILIDADES

**5-8** ■ Nos dan una sucesión. **(a)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión. **(b)** ¿Cuál es la diferencia común $d$? **(c)** Grafique los términos que encontró en (a).

**5.** $a_n = 5 + 2(n - 1)$ **6.** $a_n = 3 - 4(n - 1)$

**7.** $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$ **8.** $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

**9-12** ■ Encuentre el $n$-ésimo término de la sucesión aritmética con primer término dado $a$ y diferencia común $d$. ¿Cuál es el décimo término?

**9.** $a = 3, d = 5$ **10.** $a = -6, d = 3$

**11.** $a = \frac{5}{2}, d = -\frac{1}{2}$ **12.** $a = \sqrt{3}, d = \sqrt{3}$

**13-20** ■ Determine si la sucesión es aritmética. Si es aritmética, encuentre la diferencia común.

**13.** 5, 8, 11, 14, . . . **14.** 3, 6, 9, 13, . . .

**15.** 2, 4, 8, 16, . . . **16.** 2, 4, 6, 8, . . .

**17.** $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, \ldots$ **18.** ln 2, ln 4, ln 8, ln 16, . . .

**19.** 2.6, 4.3, 6.0, 7.7, . . . **20.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

**21-26** ■ Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión y determine si es aritmética. Si es aritmética, encuentre la diferencia común y exprese el $n$-ésimo término de la sucesión en la forma normal $a_n = a + (n - 1)d$.

**21.** $a_n = 4 + 7n$ **22.** $a_n = 4 + 2^n$

**23.** $a_n = \dfrac{1}{1 + 2n}$ **24.** $a_n = 1 + \dfrac{n}{2}$

**25.** $a_n = 6n - 10$ **26.** $a_n = 3 + (-1)^n n$

**27-36** ■ Determine la diferencia común, el quinto término, el $n$-ésimo término y el 100-ésimo término de la sucesión aritmética.

**27.** 2, 5, 8, 11, . . .
**28.** 1, 5, 9, 13, . . .

**29.** 4, 9, 14, 19, . . .
**30.** 11, 8, 5, 2, . . .

**31.** $-12, -8, -4, 0, \ldots$
**32.** $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \ldots$

**33.** 25, 26.5, 28, 29.5, . . .
**34.** 15, 12.3, 9.6, 6.9, . . .

**35.** $2, 2 + s, 2 + 2s, 2 + 3s, \ldots$

**36.** $-t, -t + 3, -t + 6, -t + 9, \ldots$

**37.** El décimo término de una sucesión aritmética es $\frac{55}{2}$, y el segundo término es $\frac{7}{2}$. Encuentre el primer término.

**38.** El 12avo término de una sucesión aritmética es 32, y el quinto término es 18. Encuentre el 20avo término.

**39.** El 100avo término de una sucesión aritmética es 98, y la diferencia común es 2. Encuentre los primeros tres términos.

**40.** El 20avo término de una sucesión aritmética es 101, y la diferencia común es 3. Encuentre una fórmula para el $n$-ésimo término.

**41.** ¿Cuál término de la sucesión aritmética 1, 4, 7, … es 88?

**42.** El primer término de una sucesión aritmética es 1, y la diferencia común es 4. ¿11,937 es un término de esta sucesión? Si es así, ¿cuál término es?

**43-48** ■ Encuentre la suma parcial $S_n$ de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones dadas.

**43.** $a = 1, d = 2, n = 10$
**44.** $a = 3, d = 2, n = 12$

**45.** $a = 4, d = 2, n = 20$
**46.** $a = 100, d = -5, n = 8$

**47.** $a_1 = 55, d = 12, n = 10$
**48.** $a_2 = 8, a_5 = 9.5, n = 15$

**49-54** ■ Nos dan una suma parcial de una sucesión aritmética. Encuentre la suma.

**49.** $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

**50.** $-3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + \frac{3}{2} + 3 + \cdots + 30$

**51.** $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

**52.** $-10 - 9.9 - 9.8 - \cdots - 0.1$

**53.** $\sum_{k=0}^{10} (3 + 0.25k)$
**54.** $\sum_{n=0}^{20} (1 - 2n)$

**55.** Demuestre que un triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión aritmética es semejante a un triángulo de 3-4-5.

**56.** Encuentre el producto de los números

$$10^{1/10}, 10^{2/10}, 10^{3/10}, 10^{4/10}, \ldots, 10^{19/10}$$

**57.** Una sucesión es **armónica** si los recíprocos de los términos de la sucesión forman una sucesión aritmética. Determine si la siguiente sucesión es armónica:

$$1, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{1}{3}, \ldots$$

**58.** La **media armónica** de dos números es el recíproco del promedio de los recíprocos de los dos números. Encuentre la media armónica de 3 y 5.

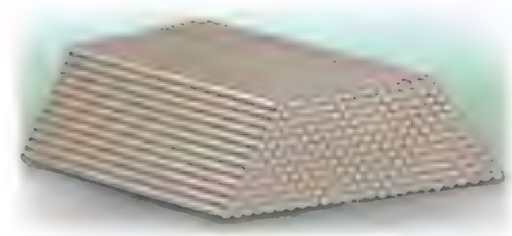
**59.** Una sucesión aritmética tiene primer término $a = 5$ y diferencia común $d = 2$. ¿Cuántos términos de esta sucesión deben sumarse para obtener 2700?

**60.** Una sucesión aritmética tiene primer término $a_1 = 1$ y el cuarto término es $a_4 = 16$. ¿Cuántos términos de esta sucesión deben sumarse para obtener 2356?

## APLICACIONES

**61. Depreciación** El valor de compra de una computadora de oficina es $12,500. Su depreciación anual es $1875. Encuentre el valor de la computadora después de 6 años.

**62. Postes en una pila** Se están almacenando postes telefónicos en una pila con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda, y así sucesivamente. Si hay 12 capas, ¿cuántos postes telefónicos contiene la pila?



**63. Aumentos de salario** Un hombre tiene un trabajo con salario de $30,000 al año. Le prometen un aumento de $2300 cada año subsiguiente. Encuentre su ganancia total para el décimo período.

**64. Cine en auto** Un cine donde se ven películas desde el auto tiene espacios para 20 autos en la primera fila de estacionamiento, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente. Si hay 21 filas en el cine, encuentre el número de autos que se pueden estacionar.

**65. Asientos en un teatro** Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera, y así sucesivamente. Si el teatro ha de tener 870 asientos de capacidad, ¿cuántas filas debe usar el arquitecto en su diseño?

**66. Pelota en caída** Cuando se deja caer un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de la Tierra, la atracción gravitacional es tal que el cuerpo cae 16 pies en el primer segundo, 48 en el siguiente segundo, 80 en el siguiente segundo, y así sucesivamente.

**(a)** Encuentre la distancia total que cae una pelota en 6 s.

**(b)** Encuentre una fórmula para la distancia total que cae una pelota en $n$ segundos.

**67. Los doce días de navidad** En la bien conocida canción "Los Doce Días de Navidad", una persona da a su novia $k$ regalos en el $k$-ésimo día por cada uno de los 12 días de navidad. La persona también repite cada regalo de manera idéntica en cada día subsiguiente. Entonces, en el 12avo día la novia recibe un regalo por el primer día, 2 regalos el segundo, 3 regalos el tercero, y así sucesivamente. Demuestre que el número de regalos recibidos en el 12avo día es una suma parcial de una sucesión aritmética. Encuentre esta suma.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**68. Medias aritméticas** La **media aritmética** (o promedio) de dos números $a$ y $b$ es

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Observe que $m$ es la misma distancia de $a$ que de $b$, de modo que $a$, $m$, $b$ es una sucesión aritmética. En general, si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ están igualmente espaciadas entre $a$ y $b$ de modo que

$$a, m_1, m_2, \ldots, m_k, b$$

es una sucesión aritmética, entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman $k$ medias aritméticas entre $a$ y $b$.

**(a)** Inserte dos medias aritméticas entre 10 y 18.
**(b)** Inserte tres medias aritméticas entre 10 y 18.
**(c)** Suponga que un médico necesita aumentar a un paciente la dosis de cierta medicina de 100 mg a 300 mg por día en cinco pasos iguales. ¿Cuántas medias aritméticas debe insertar entre 100 y 300 para dar la progresión de dosis diarias, y cuáles son estas medias?

# 12.3 SUCESIONES GEOMÉTRICAS

Sucesiones geométricas ▶ Sumas parciales de sucesiones geométricas ▶ ¿Qué es una serie infinita? ▶ Serie geométrica infinita

En esta sección estudiamos sucesiones geométricas. Este tipo de sucesiones se presenta con frecuencia en aplicaciones de finanzas, crecimiento poblacional y otros campos de actividad.

## ▼ Sucesiones geométricas

Recuerde que una sucesión aritmética se genera cuando repetidamente sumamos un número $d$ a un término inicial $a$. Una sucesión *geométrica* se genera cuando empezamos con un número $a$ y repetidamente *multiplicamos* por una constante $r$ fija diferente de cero.

### DEFINICIÓN DE SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número $a$ es el **primer término**, y $r$ es la **razón común** de la sucesión. El **$n$-ésimo** término de una sucesión geométrica está dado por

$$a_n = ar^{n-1}$$

El número $r$ recibe el nombre de razón común porque la razón de cualesquier dos términos consecutivos es $r$.

### EJEMPLO 1 | Sucesiones geométricas

**(a)** Si $a = 3$ y $r = 2$, entonces tenemos la sucesión geométrica

$$3, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 2^2, \quad 3 \cdot 2^3, \quad 3 \cdot 2^4, \quad \ldots$$

o

$$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Observe que la razón de cualesquier dos términos consecutivos es $r = 2$. El $n$-ésimo término es $a_n = 3(2)^{n-1}$.

**(b)** La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1250, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 2$ y $r = -5$. Cuando $r$ es negativa, los términos de la sucesión se alternan en signo. El $n$-ésimo término es $a_n = 2(-5)^{n-1}$.

**(c)** La sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$. El $n$-ésimo término es $a_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

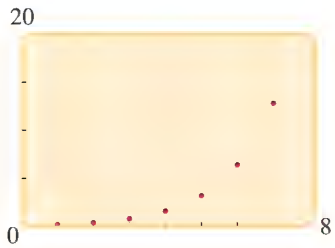



**FIGURA 1**

(d) La gráfica de la sucesión geométrica $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$ se muestra en la Figura 1. Observe que los puntos en la gráfica se encuentran sobre la gráfica de la función exponencial $y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-1}$.

Si $0 < r < 1$, entonces los términos de la sucesión geométrica $ar^{n-1}$ decrecen, pero si $r > 1$, entonces los términos aumentan. (¿Qué pasa si $r = 1$?)

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5, 9** Y **13**

Las sucesiones geométricas se presentan de manera natural; a continuación veamos un ejemplo sencillo. Suponga que una pelota tiene una elasticidad tal que, cuando se deja caer, rebota un tercio de la distancia que ha caído. Si esta pelota se deja caer de una altura de 2 m, entonces rebota a una altura de $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ m. En su segundo rebote, regresa a una altura de $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ m y así sucesivamente (vea Figura 2). Entonces, la altura $h_n$ que la pelota alcanza en su $n$-ésimo rebote está dada por la sucesión geométrica

$$h_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

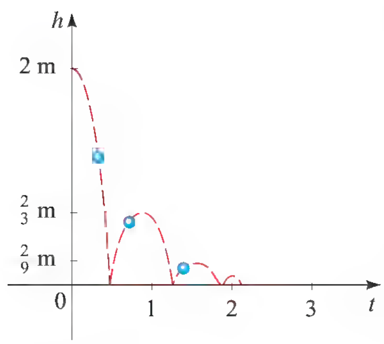



**FIGURA 2**

Podemos hallar el $n$-ésimo término de una sucesión geométrica si conocemos cualesquier dos términos, como se ve en los siguientes ejemplos.

## EJEMPLO 2 | Hallar términos de una sucesión geométrica

Encuentre el octavo término de la sucesión geométrica 5, 15, 45, ...

**SOLUCIÓN** Para hallar una fórmula para el $n$-ésimo término de esta sucesión, necesitamos hallar $a$ y $r$. Claramente, $a = 5$. Para hallar $r$, encontramos la razón de cualesquier dos términos consecutivos. Por ejemplo, $r = \frac{45}{15} = 3$. Así

$$a_n = 5(3)^{n-1}$$

El octavo término es $a_8 = 5(3)^{8\ \ 1} = 5(3)^7 = 10{,}935$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 3 | Hallar términos de una sucesión geométrica

El tercer término de una sucesión geométrica es $\frac{63}{4}$ y el sexto término es $\frac{1701}{32}$. Encuentre el quinto término.

**SOLUCIÓN** Como esta sucesión es geométrica, su $n$-ésimo término está dado por la fórmula $a_n = ar^{n-1}$. Entonces

$$a_3 = ar^{3\ \cdot 1} = ar^2$$

$$a_6 = ar^{6\ \ 1} = ar^5$$

De los valores que nos dan para estos dos términos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{63}{4} = ar^2 \\ \frac{1701}{32} = ar^5 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema dividiendo.

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{\frac{1701}{32}}{\frac{63}{4}}$$

$$r^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{Simplifique}$$

$$r = \frac{3}{2} \qquad \text{Tome la raíz cúbica de cada lado}$$

Sustituyendo por $r$ en la primera ecuación $\frac{63}{4} = ar^2$, resulta

$$\frac{63}{4} = a\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$a = 7 \qquad \text{Despeje } a$$

Se deduce que el $n$-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 7\left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Entonces, el quinto término es

$$a_5 = 7\left(\tfrac{3}{2}\right)^{5-1} = 7\left(\tfrac{3}{2}\right)^4 = \tfrac{567}{16}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

## Sumas parciales de sucesiones geométricas

Para las sucesiones geométricas $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{n-1}, \ldots,$ la $n$-ésima suma parcial es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

Para hallar una fórmula para $S_n$, multiplicamos $S_n$ por $r$ y restamos de $S_n$.

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Resumimos este resultado.

> **SUMAS PARCIALES DE UNA SUCESIÓN GEOMÉTRICA**
>
> Para la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$, la **$n$-ésima suma parcial**
>
> $$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$
>
> está dada por
>
> $$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### EJEMPLO 4 | Hallar una suma parcial de una sucesión geométrica

Encuentre la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica

$$1, 0.7, 0.49, 0.343, \ldots$$

**SOLUCIÓN** La suma requerida es la suma de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = 0.7$. Usando la fórmula para $S_n$ con $n = 5$, obtenemos

$$S_5 = 1 \cdot \frac{1 - (0.7)^5}{1 - 0.7} = 2.7731$$

Entonces la suma de los primeros cinco términos de esta sucesión es 2.7731.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **43** Y **47**

### EJEMPLO 5 | Hallar una suma parcial de una sucesión geométrica

Encuentre la suma $\sum_{k=1}^{5} 7\left(-\tfrac{2}{3}\right)^k$.

**SRINIVASA RAMANUJAN** (1887-1920) nació en el seno de una familia pobre en la pequeña población de Kumbakonam, India. Autodidacta en matemáticas, trabajó en aislamiento virtual de otros matemáticos. A la edad de 25 años escribió una carta a G. H. Hardy, principal matemático inglés de su tiempo, donde le citaba algunos descubrimientos que había hecho. Hardy de inmediato reconoció el genio de Ramanujan y, en los siguientes seis años, los dos trabajaron juntos en Londres hasta que Ramanujan cayó enfermo y regresó a su tierra natal en India, donde murió un año después. Ramanujan fue un genio con una capacidad fenomenal para ver patrones ocultos en las propiedades de los números. La mayor parte de sus descubrimientos fueron escritos como complicadas series infinitas, cuya importancia fue reconocida hasta muchos años después de su muerte. En el último año de su vida escribió 130 páginas de misteriosas fórmulas, muchas de las cuales todavía desafían ser probadas. Hardy relata el caso de que cuando él visitó a Ramanujan en un hospital y llegó en un taxi, le dijo a Ramanujan que el número de placas del taxi, 1729, no era interesante. Ramanujan respondió: "Sí, es un número muy interesante; es el más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos en dos formas diferentes."

**SOLUCIÓN** La suma dada es la quinta suma parcial de una sucesión geométrica con primer término $a = 7\left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{14}{3}$ y razón común $r = -\frac{2}{3}$. En consecuencia, por la fórmula para $S_n$ tenemos

$$S_5 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 + \frac{32}{243}}{\frac{5}{3}} = -\frac{770}{243}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

## ¿Qué es una serie infinita?

Una expresión de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

recibe el nombre de **serie infinita**. Los puntos quieren decir que debemos continuar la suma indefinidamente. ¿Qué significado podemos dar a la suma de una cantidad infinita de números? Al principio parecería que no es posible sumar infinitamente muchos números y llegar a un número finito, pero considere el siguiente problema. Usted tiene un pastel y desea comerlo cortando primero la mitad del pastel, luego comer la mitad de lo que queda, luego otra vez comer la mitad de lo que queda, y así sucesivamente. Este proceso puede continuar indefinidamente porque en cada etapa quedará algo del pastel. (Vea Figura 3.)

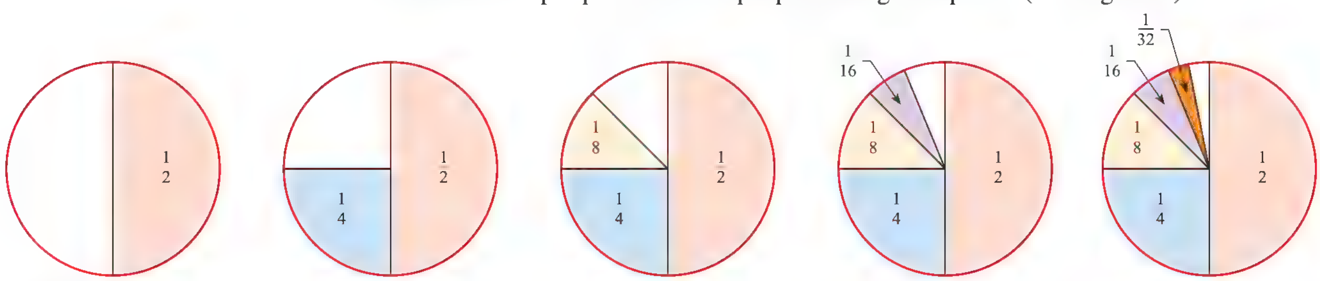



**FIGURA 3**

¿Significa esto que es imposible comer todo el pastel? Por supuesto que no. Escribamos lo que ha comido de este pastel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Ésta es una serie infinita donde observamos dos cosas: primero, de la Figura 3 es evidente que sin importar cuántos términos de esta serie sumemos, el total nunca excederá de 1. En segundo término, cuantos más términos de esta serie sumemos, la suma se acerca más a 1 (vea Figura 3). Esto sugiere que el número 1 se puede escribir como la suma de una cantidad infinita de números más pequeños:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Para ser más precisos, veamos las sumas parciales de esta serie:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} && = \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} && = \frac{3}{4} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} && = \frac{7}{8} \\
S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} && = \frac{15}{16}
\end{aligned}$$

y, en general (vea Ejemplo 5 de la Sección 12.1).

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

A medida que $n$ es cada vez más grande, estamos sumando más y más de los términos de esta serie. De manera intuitiva, cuando $n$ se hace más grande, $S_n$ se acerca más a la suma de la serie. Ahora observe que a medida que $n$ aumenta de valor, $1/2^n$ se acerca cada vez más a 0. Entonces $S_n$ se acerca a $1 - 0 = 1$. Usando esta notación de la Sección 3.7, podemos escribir

$$S_n \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty$$

En general, si $S_n$ se acerca a un número finito $S$ cuando $n$ crece, decimos que la serie infinita **converge** (o es **convergente**). El número $S$ se denomina **suma de la serie infinita**. Si una serie infinita no converge, decimos que la serie **diverge** (o es **divergente**).

## Serie geométrica infinita

Una **serie geométrica infinita** es una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

A continuación veamos otra forma de llegar a la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ &= a + r(a + ar + ar^2 + \cdots) \\ &= a + rS \end{aligned}$$

De la ecuación $S = a + rS$ despejamos $S$ para obtener

$$\begin{aligned} S - rS &= a \\ (1 - r)S &= a \\ S &= \frac{a}{1 - r} \end{aligned}$$

Podemos aplicar el razonamiento usado antes para hallar la suma de una serie geométrica infinita. La $n$-ésima suma parcial de tal serie está dada por la fórmula

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Se puede demostrar que si $|r| < 1$, entonces $r^n$ se acerca a 0 cuando $n$ se hace grande (podemos fácilmente convencernos de esto con ayuda de una calculadora). Se deduce que $S_n$ se acerca a $a/(1 - r)$ cuando $n$ se hace grande, o bien

$$S_n \to \frac{a}{1 - r} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Entonces la suma de esta serie geométrica infinita es $a/(1 - r)$.

### SUMA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA INFINITA

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

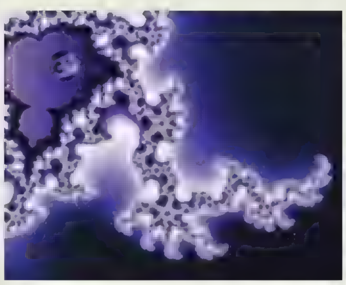
converge y tiene la suma

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Si $|r| \geq 1$, la serie diverge.

### LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

**Figuras geométricas generadas por subdivisiones sucesivas**



© Bill Ross/CORBIS

Muchas de las cosas que modelamos en este libro tienen formas regulares que se pueden predecir, pero avances recientes en matemáticas han hecho posible modelar cosas tan aparentemente raras o hasta caóticas como una nube, una flama vacilante, una montaña o una costa escarpada. Las herramientas básicas en este tipo de modelado son las figuras geométricas generadas por divisiones sucesivas inventadas por el matemático Benoit Mandelbrot. Una *figura geométrica generada por divisiones sucesivas* es aquella figura construida a partir de una forma básica sencilla, reduciendo a escala y repitiendo la forma indefinidamente de acuerdo a una regla dada. Estas figuras geométricas tienen un número infinito de detalles, lo cual significa que cuanto más de cerca las veamos, más vemos de ellas. También son *semejantes a sí mismas*, es decir, al hacer acercamiento en una parte de la figura geométrica veremos el mismo detalle que la forma original. Debido a la belleza de sus formas, estas figuras son utilizadas en cine para crear paisajes de ficción o fondos exóticos.

Aun cuando estas figuras son complejas, se producen de acuerdo a reglas muy sencillas. Esta propiedad es explotada en un proceso de almacenar imágenes en una computadora que se denomina *compresión fraccionaria de imagen*. En este proceso, una imagen es almacenada como una forma básica sencilla; repitiendo la forma de acuerdo con la regla se produce la figura original. Éste es un método extraordinariamente eficiente de almacenar imágenes, y es así como miles de imágenes en color se pueden poner en un solo disco compacto.

## EJEMPLO 6 | Series infinitas

Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

**(a)** $2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \cdots$ **(b)** $1 + \frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^3 + \cdots$

**SOLUCIÓN**

**(a)** Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 2$ y $r = \frac{1}{5}$. Como $|r| = \left|\frac{1}{5}\right| < 1$, la serie converge. Por la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita tenemos

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

**(b)** Ésta es una serie geométrica infinita con $a = 1$ y $r = \frac{7}{5}$. Como $|r| = \left|\frac{7}{5}\right| > 1$, la serie diverge.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **51** Y **55**

## EJEMPLO 7 | Escribir un decimal repetido como fracción

Encuentre la fracción que represente el número racional $2.3\overline{51}$.

**SOLUCIÓN** Este decimal repetido se puede escribir como una serie:

$$\frac{23}{10} + \frac{51}{1000} + \frac{51}{100{,}000} + \frac{51}{10{,}000{,}000} + \frac{51}{1{,}000{,}000{,}000} + \cdots$$

Después del primer término, los términos de esta serie forman una serie geométrica infinita con

$$a = \frac{51}{1000} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{100}$$

Entonces la suma de esta parte de la serie es

$$S = \frac{\frac{51}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{51}{990}$$

Por lo tanto, $$2.3\overline{51} = \frac{23}{10} + \frac{51}{990} = \frac{2328}{990} = \frac{388}{165}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

## 12.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** Una sucesión geométrica es una sucesión en la que la _______ de términos sucesivos es constante.

**2.** La sucesión $a_n = ar^{n-1}$ es una sucesión geométrica en la que $a$ es el primer término y $r$ es la_______ ________. Entonces para la sucesión geométrica $a_n = 2(5)^{n-1}$ el primer término es ________, y la razón común es ________.

**3.** *¿Verdadero o falso?* Si conocemos los términos primero y segundo de una sucesión geométrica, entonces podemos hallar cualquier otro término.

**4. (a)** La $n$-ésima suma parcial de una sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$ está dada por $S_n =$ ________.

**(b)** La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

es una serie infinita_______. Si $|r| < 1$, entonces esta serie _______, y su suma es $S =$ ________.
Si $|r| \geq 1$, la serie __________.

## HABILIDADES

**5-8** ■ Nos dan el $n$-ésimo término de una sucesión. **(a)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión. **(b)** ¿Cuál es la razón común $r$? **(c)** Grafique los términos que encontró en (a).

**5.** $a_n = 5(2)^{n-1}$ **6.** $a_n = 3(-4)^{n-1}$

**7.** $a_n = \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^{n\ \ 1}$ **8.** $a_n = 3^{n\ \ 1}$

**9-12** ■ Encuentre el $n$-ésimo término de la sucesión geométrica con primer término dado $a$ y razón común $r$. ¿Cuál es el cuarto término?

**9.** $a = 3, \quad r = 5$ **10.** $a = -6, \quad r = 3$

**11.** $a = \frac{5}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}$ **12.** $a = \sqrt{3}, \quad r = \sqrt{3}$

**13-20** ■ Determine si la sucesión es geométrica. Si es geométrica, encuentre la razón común.

**13.** $2, 4, 8, 16, \ldots$ **14.** $2, 6, 18, 36, \ldots$

**15.** $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ **16.** $27, -9, 3, -1, \ldots$

**17.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **18.** $e^2, e^4, e^6, e^8, \ldots$

**19.** $1.0, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$ **20.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

**21-26** ■ Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión y determine si es geométrica. Si es geométrica, encuentre la razón común, y exprese el $n$-ésimo término de la sucesión en la forma normal $a_n = ar^{n\ \ 1}$..

**21.** $a_n = 2(3)^n$ **22.** $a_n = 4 + 3^n$

**23.** $a_n = \dfrac{1}{4^n}$ **24.** $a_n = (-1)^n 2^n$

**25.** $a_n = \ln(5^{n\ \ 1})$ **26.** $a_n = n^n$

**27-36** ■ Determine la razón común, el quinto término y el $n$-ésimo término de la sucesión geométrica.

**27.** $2, 6, 18, 54, \ldots$ **28.** $7, \frac{14}{3}, \frac{28}{9}, \frac{56}{27}, \ldots$

**29.** $0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, \ldots$

**30.** $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

**31.** $144, -12, 1, -\frac{1}{12}, \ldots$ **32.** $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

**33.** $3, 3^{5/3}, 3^{7/3}, 27, \ldots$ **34.** $t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{4}, \dfrac{t^4}{8}, \ldots$

**35.** $1, s^{2/7}, s^{4/7}, s^{6/7}, \ldots$ **36.** $5, 5^{c+1}, 5^{2c+1}, 5^{3c+1}, \ldots$

**37.** El primer término de una sucesión geométrica es 8 y el tercer término es 4. Encuentre el quinto término.

**38.** El primer término de una sucesión geométrica es 3, y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Encuentre el quinto término.

**39.** La razón común en una sucesión geométrica es $\frac{2}{5}$ y el cuarto término es $\frac{5}{2}$. Encuentre el tercer término.

**40.** La razón común en una sucesión geométrica es $\frac{3}{2}$, y el quinto término es 1. Encuentre los primeros tres términos.

**41.** ¿Cuál término de la sucesión geométrica 2, 6, 8, … es 118,098?

**42.** Los términos segundo y quinto de una sucesión geométrica son 10 y 1250, respectivamente. ¿31,250 es un término de esta sucesión? Si es así, ¿cuál término es?

**43-46** ■ Encuentre la suma parcial $S_n$ de la sucesión geométrica que satisfaga las condiciones dadas.

**43.** $a = 5, \quad r = 2, \quad n = 6$ **44.** $a = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}, \quad n = 4$

**45.** $a_3 = 28, \quad a_6 = 224, \quad n = 6$

**46.** $a_2 = 0.12, \quad a_5 = 0.00096, \quad n = 4$

**47–50** ■ Encuentre la suma.

**47.** $1 + 3 + 9 + \cdots + 2187$

**48.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512}$

**49.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 3(\tfrac{1}{2})^k$ **50.** $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 7(\tfrac{3}{2})^j$

**51-62** ■ Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente, encuentres su suma.

**51.** $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots$ **52.** $1 \quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

**53.** $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots$ **54.** $\dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25} + \dfrac{8}{125} + \cdots$

**55.** $1 + \dfrac{3}{2} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 + \cdots$

**56.** $\dfrac{1}{3^6} + \dfrac{1}{3^8} + \dfrac{1}{3^{10}} + \dfrac{1}{3^{12}} + \cdots$

**57.** $3 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{3}{8} + \cdots$

**58.** $1 \quad 1 + 1 \quad 1 + \cdots$

**59.** $3 - 3(1.1) + 3(1.1)^2 - 3(1.1)^3 + \cdots$

**60.** $-\dfrac{100}{9} + \dfrac{10}{3} - 1 + \dfrac{3}{10} - \cdots$

**61.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} + \cdots$

**62.** $1 - \sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 4 - \cdots$

**63-68** ■ Exprese el decimal periódico como una fracción.

**63.** $0.777\ldots$ **64.** $0.253$ **65.** $0.030303\ldots$

**66.** $2.1125$ **67.** $0.112$ **68.** $0.123123123\ldots$

**69.** Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una sucesión geométrica, entonces $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ son **medias geométricas** entre $a_1$ y $a_n$. Inserte tres medias geométricas entre 5 y 80.

**70.** Encuentre la suma de los primeros diez términos de la sucesión

$$a + b, a^2 + 2ab, a^2 + 3b, a^4 + 4b, \ldots$$

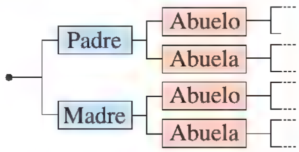
## APLICACIONES

**71. Depreciación** Una compañía constructora compra un bulldozer (máquina niveladora) en \$160,000. Cada año, el valor de esta máquina se deprecia en 20% del valor que tenía en el año precedente. Sea $V_n$ el valor de la máquina en el $n$-ésimo año. (Sea $n = 1$ el año de compra del bulldozer.)

**(a)** Encuentre una fórmula para $V_n$.

**(b)** ¿En qué año será menor a \$100,000 el valor del bulldozer?

**72. Árbol familiar** Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, y así sucesivamente. ¿Cuántos antepasados tiene una persona 15 generaciones atrás?

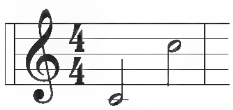



**73. Pelota que rebota** Una pelota se deja caer desde una altura de 80 pies. La elasticidad de esta pelota es tal que la hace rebotar tres cuartos de la distancia que ha caído. ¿A qué altura rebota la pelota en el quinto rebote? Encuentre una fórmula para hallar la altura a la que rebota la pelota en el $n$-ésimo rebote.

**74. Cultivo de bacterias** Un cultivo tiene inicialmente 5000 bacterias, y su tamaño aumenta en 8% cada hora. ¿Cuántas bacterias están presentes al término de 5 horas? Encuentre una fórmula para el número de bacterias presentes después de $n$ horas.

**75. Mezcla de refrigerante** El radiador de un camión contiene 5 galones y se llena con agua. Un galón de agua se saca del radiador y se sustituye con un galón de anticongelante; entonces un galón de la mezcla se retira del radiador y otra vez se sustituye con un galón de anticongelante. Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta agua quedará en el tanque después que este proceso se repite 3 veces? ¿Cinco veces? ¿$n$ veces?

**76. Frecuencias musicales** Las frecuencias de notas musicales (medidas en ciclos por segundo) forman una sucesión geométrica. La nota Do mayor tiene una frecuencia de 256, y la Do que es una octava más alta tiene una frecuencia de 512. Encuentre la frecuencia de la Do dos octavas debajo de la Do mayor.



**77. Pelota que rebota** Una pelota se deja caer desde una altura de 9 pies. La elasticidad de la pelota es tal que siempre rebota un tercio de la distancia que ha caído.

**(a)** Encuentre la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que hace contacto con el suelo la quinta vez.

**(b)** Encuentre una fórmula para la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que hace contacto con el suelo la $n$-ésima vez.

**78. Plan geométrico de ahorros** Una mujer muy paciente desea convertirse en dueña de miles de millones de dólares. Decide seguir un esquema sencillo: ahorra 1 centavo el primer día, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, y así sucesivamente, doblando el número de centavos cada día. ¿Cuánto dinero tendrá al término de 30 días? ¿Cuántos días le tomará a esta mujer realizar su deseo?

**79. San Ives** El siguiente es una bien conocida rima para niños:

Cuando iba a San Ives,
Conocí a un hombre con siete esposas;
Cada esposa tenía siete sacos;
Cada saco tenía siete gatos;
Cada gato tenía siete gatitos;
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban a San Ives?

Suponiendo que todo el grupo va realmente a San Ives, demuestre que la respuesta a la pregunta de la rima es una suma parcial de una sucesión geométrica, y encuentre la suma.

**80. Concentración de medicamento** Cierto medicamento se administra una vez al día. La concentración del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente aumenta rápidamente al principio, pero cada dosis sucesiva tiene menos efecto que la precedente. La cantidad total del medicamento (en mg) en el torrente sanguíneo después de la $n$-ésima dosis está dada por

$$\sum_{k=1}^{n} 50\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

**(a)** Encuentre la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo después de $n = 10$ días.

**(b)** Si el medicamento se toma a largo plazo, la cantidad en el torrente sanguíneo se aproxima con la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 50\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Encuentre la suma de esta serie.

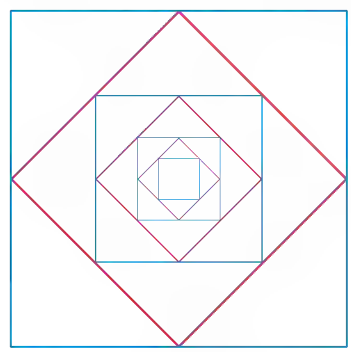
**81. Pelota que rebota** Cierta pelota rebota a la mitad de la altura desde la que se deja caer. Use una serie geométrica infinita para aproximar la distancia total que la pelota recorre después de que se deja caer desde 1 m arriba del suelo hasta que alcance el reposo.

**82. Pelota que rebota** Si la pelota del Ejercicio 81 se deja caer desde una altura de 8 pies, entonces 1 s se requiere para su primer rebote completo, desde el instante en que primero toca el suelo hasta que toca el suelo otra vez. Cada rebote subsiguiente completo requiere $1/\sqrt{2}$ del tiempo que el rebote precedente completo. Use una serie geométrica infinita para estimar el intervalo desde el instante en que la pelota toca el suelo por primera vez hasta que deja de rebotar.

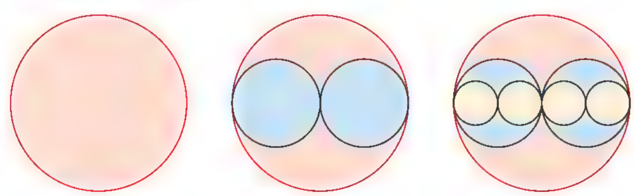
**83. Geometría** Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. (Vea la figura.)

**(a)** Encuentre la suma de las áreas de todos los cuadrados.

**(b)** Encuentre la suma de los perímetros de todos los cuadrados.

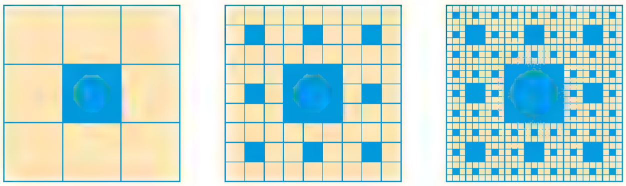


**84. Geometría** Un disco circular de radio $R$ se corta de un papel como se ve en la figura (a). Dos discos de radio $\frac{1}{2}R$ se cortan de papel y se colocan sobre el primer disco, como en la figura (b), y a continuación cuatro discos de radio $\frac{1}{4}R$ se colocan sobre estos dos discos, como se ve en la figura (c). Suponiendo que este proceso se pueda repetir indefinidamente, encuentre el área total de todos los discos.



(a) (b) (c)

**85. Geometría** Un cuadrado amarillo de lado 1 se divide en nueve cuadrados más pequeños, y el cuadrado de en medio se pinta de azul como se ve en la figura. Cada uno de los cuadrados amarillos más pequeños se divide a su vez en nueve cuadrados, y cada uno de los cuadrados de en medio se pinta de azul. Si este proceso se continúa indefinidamente, ¿cuál es el área total que se pinta de azul?



## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**86. ¿Aritmética o geométrica?** Nos dan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si estos términos pueden ser términos de una sucesión aritmética, una sucesión geométrica o ninguna de estas dos clases. Encuentre el siguiente término si la sucesión es aritmética o geométrica.

**(a)** $5, -3, 5, -3, \ldots$
**(b)** $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$
**(c)** $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$
**(d)** $1, -1, 1, -1, \ldots$
**(e)** $2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$
**(f)** $x - 1, x, x + 1, x + 2, \ldots$
**(g)** $-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \ldots$
**(h)** $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, 1, \ldots$

**87. Recíprocos de una sucesión geométrica** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r$, demuestre que la sucesión

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$$

es también una sucesión geométrica, y encuentre la razón común.

**88. Logaritmos de una sucesión geométrica** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r > 0$ y $a_1 > 0$, demuestre que la sucesión

$$\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$$

es una sucesión aritmética, y encuentre la diferencia común.

**89. Exponenciales de una sucesión aritmética** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia común $d$, demuestre que la sucesión

$$10^{a_1}, 10^{a_2}, 10^{a_3}, \ldots$$

es una sucesión geométrica, y encuentre la razón común.

**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Encontrando patrones**

En este proyecto investigamos el proceso de hallar patrones en sucesiones mediante el uso de “sucesiones de diferencia”. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 12.4 MATEMÁTICAS DE FINANZAS

La cantidad de una anualidad ▶ El valor presente de una anualidad ▶ Compras a plazos

Muchas transacciones financieras se relacionan con pagos que se hacen a intervalos regulares. Por ejemplo, si una persona deposita \$100 cada mes en una cuenta que paga intereses, ¿cuál será el valor de su cuenta al término de 5 años? Si una persona solicita un préstamo de \$100,000 para comprar una casa, ¿de cuánto deben ser los pagos mensuales para pagar el préstamo en 30 años? Cada una de estas preguntas involucra la suma de una sucesión de números; usamos los resultados de la sección precedente para contestarlas aquí.

## ▼ La cantidad de una anualidad

Una **anualidad** es una suma de dinero que se paga en pagos regulares e iguales. Aun cuando la palabra *anualidad* sugiere pagos anuales (o al año), se pueden hacer semestral, trimestral o mensualmente, o a algún otro intervalo regular. Los pagos por lo general se hacen al término de un intervalo de pago. La **cantidad de una anualidad** es la suma de todos los pagos individuales desde el tiempo del pago hasta que se haga el último pago, junto con todos los intereses. Denotamos esta suma por $A_f$ (el subíndice $f$ aquí se utiliza para denotar cantidad *final*).

### EJEMPLO 1 | Cálculo de la cantidad de una anualidad

Un inversionista deposita \$400 cada día 15 de diciembre y 15 de junio durante 10 años en una cuenta que gana intereses a razón de 8% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto estará en la cuenta inmediatamente después del último pago?

Cuando use tasas de interés en calculadoras, recuerde convertir porcentajes en decimales. Por ejemplo, 8% es 0.08.

**SOLUCIÓN** Necesitamos hallar la cantidad de una anualidad que consta de 20 pagos semestrales de \$400 cada uno. Como la tasa de interés es 8% al año, capitalizada semestralmente, la tasa de interés por período es $i = 0.08/2 = 0.04$. El primer pago está en la cuenta durante 19 períodos, el segundo durante 18 períodos, y así sucesivamente.

El último pago no recibe intereses. La situación se puede ilustrar por medio de la línea de tiempo de la Figura 1.

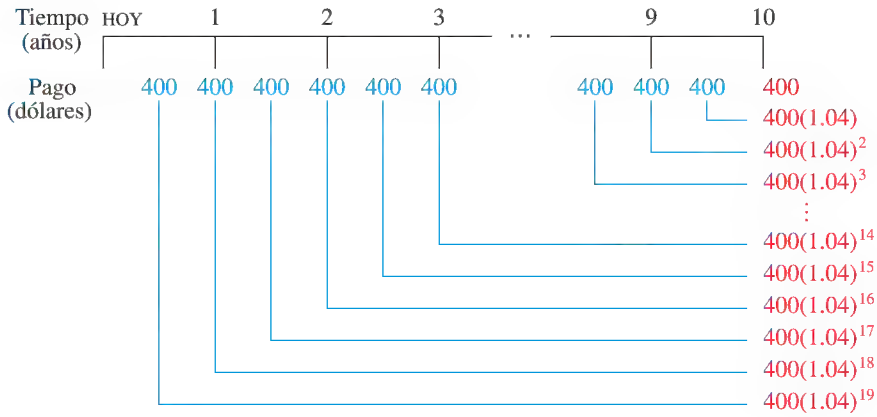



**FIGURA 1**

La cantidad $A_f$ de la anualidad es la suma de estas 20 cantidades. Así,

$$A_f = 400 + 400(1.04) + 400(1.04)^2 + \cdots + 400(1.04)^{19}$$

Pero ésta es una serie geométrica con $a = 400$, $r = 1.04$ y $n = 20$, y

$$A_f = 400\frac{1 - (1.04)^{20}}{1 - 1.04} \approx 11{,}911.23$$

En consecuencia, la cantidad en la cuenta después del último pago es \$11,911.23.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

En general, el pago regular de anualidad se llama **renta periódica** y se denota con $R$. También denotamos con $i$ la tasa de interés por período y con $n$ el número de pagos. *Siempre suponemos que el período en el que el interés se capitaliza es igual al tiempo entre pagos.* Por el mismo razonamiento que en el Ejemplo 1, vemos que la cantidad $A_f$ de una anualidad es

$$A_f = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n\ 1}$$

Como ésta es la $n$-ésima suma parcial de una sucesión geométrica con $a = R$ y $r = 1 + i$, la fórmula para la suma parcial da

$$A_f = R\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = R\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

## CANTIDAD DE UNA ANUALIDAD

La cantidad $A_f$ de una anualidad formada de $n$ pagos regulares e iguales de tamaño $R$ con tasa de interés $i$ por período está dada por

$$A_f = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

## LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

**Economía y matemáticas**

La salud de la economía mundial está determinada por factores interrelacionados como son oferta, demanda, producción, consumo, precios, distribución y miles de otros factores. Estos factores están a su vez determinados por decisiones de economía (por ejemplo, si uno compra o no compra cierta marca de pasta dentífrica) tomadas diariamente por miles de millones de personas diferentes. ¿En qué forma la creación y distribución de bienes de consumo de hoy afectará la economía de mañana? Estas preguntas son abordadas por matemáticos que trabajan en modelos matemáticos de la economía. En la década de 1940, Wassily Leontief, pionero en este campo de actividad, creó un modelo formado por miles de ecuaciones que describen la forma en que sectores diferentes de la economía, por ejemplo la industria del petróleo, transporte y comunicaciones, interactúan entre sí. Un método diferente de plantear modelos económicos, que se refiere a individuos en la economía y en contraposición a sectores grandes, fue iniciado por John Hash en la década de 1950. En este modelo, que utiliza *teoría del juego*, la economía es un juego donde jugadores personales toman decisiones que con frecuencia llevan a ganancias mutuas. Leontief y Nash recibieron el Premio Nobel en Economía en 1973 y en 1994, respectivamente. La Teoría de Economía continúa siendo una parte importante de la investigación matemática.

### EJEMPLO 2 | Cálculo de la cantidad de una anualidad

¿Cuánto dinero debe invertirse cada mes al 12% al año, capitalizado mensualmente, para tener $4000 en 18 meses?

**SOLUCIÓN** En este problema $i = 0.12/12 = 0.01$, $A_f = 4000$ y $n = 18$. Necesitamos hallar la cantidad $R$ de cada pago. Por la fórmula para la cantidad de una anualidad,

$$4000 = R\frac{(1 + 0.01)^{18} - 1}{0.01}$$

Despejando $R$, obtenemos

$$R = \frac{4000(0.01)}{(1 + 0.01)^{18} - 1} \approx 203.928$$

Entonces la inversión mensual debe ser $203.93.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

## El valor presente de una anualidad

Si fuéramos a recibir $10,000 dentro de cinco años, valdrían mucho menos que si tuviéramos $10,000 ahora. Esto es por el interés que podríamos acumular durante los siguientes cinco años si invirtiéramos el dinero ahora. ¿Cuál cantidad más pequeña estaría una persona dispuesta a aceptar *ahora* en lugar de recibir $10,000 dentro de cinco años? Ésta es la cantidad de dinero que, junto con el interés, valdría $10,000 dentro de cinco años. La cantidad que estamos buscando aquí recibe el nombre de *valor descontado* o *valor presente*. Si la tasa de interés es 8% al año, capitalizado trimestralmente, entonces el interés por período es $i = 0.08/4 = 0.02$ y hay $4 \times 5 = 20$ períodos. Si con $PV$ denotamos el valor presente, entonces por la fórmula para interés compuesto (Sección 4.1), tenemos

$$10{,}000 = PV(1 + i)^n = PV(1 + 0.02)^{20}$$

entonces

$$PV = 10{,}000(1 + 0.02)^{-20} \approx 6729.713$$

Por lo tanto, en esta situación el valor presente de $10,000 es $6729.71. Este razonamiento lleva a una fórmula general para valor presente. Si una cantidad $A_f$ se ha de pagar en una suma total $n$ períodos a partir de ahora y la tasa de interés por período es $i$, entonces su **valor presente** $A_p$ está dado por

$$A_p = A_f(1 + i)^{-n}$$

Análogamente, el **valor presente de una anualidad** es la cantidad $A_p$ que debe invertirse ahora a la tasa de interés $i$ por período para dar $n$ pagos, cada uno de una cantidad $R$. Claramente, $A_p$ es la suma de los valores presentes de cada pago individual (vea Ejercicio 29). Otra forma de hallar $A_p$ es observar que $A_p$ es el valor presente de $A_f$:

$$A_p = A_f(1 + i)^{-n} = R\frac{(1 + i)^n - 1}{i}(1 + i)^{-n} = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

**EL VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD**

El **valor presente** $A_p$ de una anualidad formada por $n$ pagos regulares e iguales de tamaño $R$, y tasa de interés $i$ por período, está dado por

$$A_p = R\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

### EJEMPLO 3 | Cálculo del valor presente de una anualidad

Una persona gana \$10,000,000 en la lotería de California, y la cantidad se paga en pagos anuales de medio millón de dólares cada uno durante 20 años. ¿Cuál es el valor presente de este premio? Suponga que la persona puede ganar 10% de interés, capitalizado anualmente.

**SOLUCIÓN** Como la cantidad ganada es pagada como una anualidad, necesitamos hallar su valor presente. Aquí, $i = 0.1$, $R = \$500{,}000$ y $n = 20$. Por lo tanto

$$A_p = 500{,}000\,\frac{1 - (1 + 0.1)^{-20}}{0.1} \approx 4{,}256{,}781.859$$

Esto significa que el ganador ganó sólo \$4,256,781.86 si se le pagaran de inmediato.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

## Compras a plazos

Cuando una persona compra a plazos una casa o un auto, los pagos que debe hacer son una anualidad cuyo valor presente es la cantidad del préstamo.

### EJEMPLO 4 | La cantidad de un préstamo

Una estudiante desea comprar un auto. Ella puede pagar \$200 por mes pero no tiene dinero para el enganche o pago inicial. Si ella puede hacer estos pagos durante cuatro años y la tasa de interés es 12%, ¿qué precio de compra puede pagar?

**SOLUCIÓN** Los pagos que la estudiante hacer constituyen una anualidad cuyo valor presente es el precio del auto (que también es la cantidad del préstamo, en este caso). Aquí, tenemos $i = 0.12/12 = 0.01$, $R = 200$ y $n = 12 \times 4 = 48$, y

$$A_p = R\,\frac{1 - (1 + i)^{\;n}}{i} = 200\,\frac{1 - (1 + 0.01)^{\;48}}{0.01} \approx 7594.792$$

En consecuencia, la estudiante puede comprar un auto que tiene un precio de \$7594.79.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

Cuando un banco hace un préstamo que ha de ser pagado con pagos iguales y regulares $R$, entonces los pagos forman una anualidad cuyo valor presente $A_p$ es la cantidad del préstamo. Entonces, para hallar el tamaño de los pagos, despejamos $R$ de la fórmula para la cantidad de una anualidad. Esto da la siguiente fórmula para $R$.

> **COMPRAS A PLAZOS**
>
> Si un préstamo $A_p$ ha de pagarse en $n$ pagos iguales y regulares con tasa de interés $i$ por período, entonces el tamaño $R$ de cada pago está dado por
>
> $$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

### EJEMPLO 5 | Cálculo de pagos mensuales de hipoteca

Un matrimonio solicita en préstamo \$100,000 al 9% de interés como préstamo hipotecario sobre una casa. Pueden esperar hacer pagos mensuales durante 30 años para pagar el préstamo. ¿Cuál es el tamaño de cada pago?

**SOLUCIÓN** Los pagos de hipoteca forman una anualidad cuyo valor presente es $A_p = \$100{,}000$. También $i = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 12 \times 30 = 360$. Estamos buscando la cantidad $R$ de cada pago.

De la fórmula para compras a plazos, tenemos

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}} = \frac{(0.0075)(100{,}000)}{1 - (1 + 0.0075)^{-360}} \approx 804.623$$

Entonces los pagos mensuales son \$804.62.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

A continuación ilustramos el uso de calculadoras graficadoras para resolver problemas relacionados con compras a plazos.

## EJEMPLO 6 | Cálculo de la tasa de interés a partir del tamaño de pagos mensuales

Un distribuidor de autos vende un auto nuevo en \$18,000. Ofrece al comprador que haga pagos de \$405 por mes durante 5 años. ¿Qué tasa de interés está cobrando este distribuidor de autos?

**SOLUCIÓN** Los pagos forman una anualidad con valor presente de $A_p = 18{,}000$, $R = 405$, y $n = 12 \times 5 = 60$. Para hallar la tasa de interés debemos despejar $i$ de la ecuación

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Un poco de experimentación nos convence de que no es posible despejar algebraicamente $i$ de esta ecuación. Para hallar $i$, entonces, usamos una calculadora graficadora para graficar $R$ como función de la tasa de interés $x$, y así usamos la gráfica para hallar la tasa de interés correspondiente al valor de $R$ que buscamos (\$405 en este caso). Como $i = x/2$, graficamos la función

$$R(x) = \frac{\frac{x}{12}(18{,}000)}{1 - \left(1 + \frac{x}{12}\right)^{-60}}$$

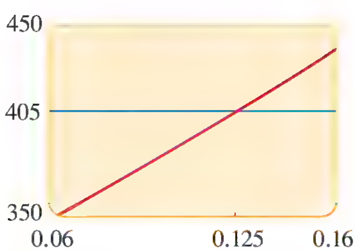


**FIGURA 2**

en el rectángulo de vista $[0.06, 0.16] \times [350, 450]$, como se ve en la Figura 2. También graficamos la recta $R(x) = 405$ en el mismo rectángulo de vista. A continuación, al mover el cursor al punto de intersección de las dos gráficas, encontramos que el valor $x$ correspondiente es aproximadamente 0.125. Entonces la tasa de interés es alrededor de $12\frac{1}{2}\%$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

# 12.4 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Una anualidad es una suma de dinero que se paga en pagos regulares e iguales. El ________de una anualidad es la suma de todos los pagos individuales junto con todo el interés.

**2.** La ______ ______de una anualidad es la cantidad que debe ser invertida ahora a una tasa de interés $i$ por período para dar $n$ pagos, cada uno de una cantidad $R$.

## APLICACIONES

**3. Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad que está formada por 10 pagos anuales de \$1000 cada uno en una cuenta que paga 6% de interés por año.

**4. Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad que está formada por 24 pagos anuales de \$500 cada uno en una cuenta que paga 8% de interés por año, capitalizado mensualmente.

5. **Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 20 pagos anuales de \$5000 cada uno, en una cuenta que paga interés de 12% al año.

6. **Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 20 pagos semestrales de \$500 cada uno, en una cuenta que paga interés de 12% al año.

7. **Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 16 pagos trimestrales de \$300 cada uno, en una cuenta que paga interés de 8% al año capitalizado trimestralmente

8. **Anualidad** Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 40 pagos anuales de \$2000 cada uno, en una cuenta que paga interés de 5% al año.

9. **Ahorros** ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 10% al año, capitalizado trimestralmente, para tener \$5000 en dos años?

10. **Ahorros** ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 6% al año, capitalizado mensualmente, para tener \$2000 en ocho meses?

11. **Anualidad** ¿Cuál es el valor presente de una anualidad formada por 20 pagos semestrales de \$1000 a una tasa de interés de 9% al año, capitalizado semestralmente?

12. **Anualidad** ¿Cuál es el valor presente de una anualidad formada por 30 pagos mensuales de \$300 a una tasa de interés de 8% al año, capitalizado mensualmente?

13. **Financiamiento de una anualidad** ¿Cuánto dinero debe ser invertido ahora al 9% al año, capitalizado semestralmente, para financiar una anualidad de 20 pagos de \$200 cada uno, pagados cada 6 meses, el primer pago siendo dentro de 6 meses.

14. **Financiamiento de una anualidad** Un hombre de 55 años deposita \$50,000 para financiar una anualidad con una compañía de seguros. El dinero será invertido al 8% al año, capitalizado semestralmente. Él ha de retirar pagos semestrales hasta que llegue a los 65 años de edad. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

15. **Financiamiento de un auto** Una mujer desea solicitar \$12,000 en préstamo para comprar un auto. Ella desea pagar el préstamo con pagos mensuales durante 4 años. Si la tasa de interés en este préstamo es $10\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es la cantidad de cada pago?

16. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de \$80,000 a 30 años al 9% de interés? ¿Cuál es el pago mensual sobre esta misma hipoteca si ha de pagarse en un período de 15 años?

17. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de \$100,000 a 30 años al 8% de interés al año, capitalizado mensualmente? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en el período de 30 años?

18. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de \$200,000 a 15 años al 6% de interés? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en el período de 15 años?

19. **Hipoteca** La Dra. Gupta está considerando una hipoteca de 30 años al 6% de interés. Ella puede hacer pagos de \$3500 al mes. ¿De qué tamaño es el préstamo que ella puede solicitar?

20. **Hipoteca** Un matrimonio puede hacer pagos mensuales de \$650. Si la tasa de la hipoteca es 9% y el matrimonio desea asegurar una hipoteca de 30 años, ¿cuánto pueden solicitar en préstamo?

21. **Financiamiento de un auto** Jane conviene en comprar un auto con un enganche de \$2000 y pagos de \$220 al mes durante 3 años. Si la tasa de interés es 8% por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es el precio real de compra de su auto?

22. **Financiamiento de un anillo** Mike compra un anillo para su novia pagando \$30 al mes durante un año. Si la tasa de interés es 10% por año, capitalizado mensualmente, ¿cuál es el precio del anillo?

23. **Hipoteca** Una pareja asegura un préstamo de \$100,000 a 30 años al $9\frac{3}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente, para comprar una casa.
   (a) ¿Cuál es la cantidad de su pago mensual?
   (b) ¿Qué cantidad total pagarán en el período de 30 años?
   (c) Si, en lugar de tomar el préstamo, la pareja deposita los pagos mensuales en una cuenta que paga $9\frac{3}{4}\%$ de interés por año, capitalizado mensualmente, ¿cuánto habrá en su cuenta al final del período de 30 años?

24. **Hipoteca** Una pareja necesita una hipoteca de \$300,000. Su corredor de hipotecas les presenta dos opciones: una hipoteca de 30 años al $6\frac{1}{2}\%$ de interés o una hipoteca de 15 años al $5\frac{3}{4}\%$ de interés.
   (a) Encuentre el pago mensual sobre la hipoteca de 30 años y sobre la hipoteca de 15 años. ¿Cuál hipoteca tiene el pago mensual más alto?
   (b) Encuentre la cantidad total a pagar durante la vida del préstamo. ¿Cuál hipoteca tiene el pago total más bajo durante su vida?

25. **Tasa de interés** Juan compra un sistema de estéreo en \$640. Él conviene en pagar \$32 al mes durante 2 años. Suponiendo que el interés se capitalice mensualmente, ¿cuál tasa de interés está pagando?

26. **Tasa de interés** Los pagos de Janet sobre su auto de \$12,500 son de \$420 al mes durante 3 años. Suponiendo que el interés se capitalice mensualmente, ¿cuál tasa de interés está ella pagando sobre el préstamo de su auto?

27. **Tasa de interés** Un artículo en una tienda departamental tiene un precio de \$189.99 y puede adquirirse con 20 pagos de \$10.50. Encuentre la tasa de interés, suponiendo que el interés se capitaliza mensualmente.

28. **Tasa de interés** Un hombre compra un anillo de diamantes en \$2000 por un enganche de \$200 y pagos mensuales de \$88 durante 2 años. Suponiendo que el interés se capitaliza mensualmente, ¿cuál tasa de interés está pagando?

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

29. **Valor presente de una anualidad**
   (a) Trace una recta como en el Ejemplo 1 para demostrar que el valor presente de una anualidad es la suma de los valores presentes de cada pago, es decir,

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

   (b) Use el inciso (a) para deducir la fórmula para $A_p$ dada en el texto.

30. **Una anualidad que dura para siempre** Una **anualidad a perpetuidad** es aquella que continúa para siempre. Tales anualidades son útiles para establecer fondos de becas y asegurar que continúe la asignación de dinero.

**(a)** Trace una recta (como en el Ejemplo 1) para demostrar que para establecer una anualidad a perpetuidad de una cantidad $R$ por período, la cantidad que debe ser invertida ahora es

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} + \cdots$$

donde $i$ es la tasa de interés por período.

**(b)** Encuentre la suma de la serie infinita del inciso (a) para demostrar que

$$A_p = \frac{R}{i}$$

**(c)** ¿Cuánto dinero debe invertirse ahora al 10% al año, capitalizado anualmente, para dar una anualidad de \$5000 al año a perpetuidad? El primer pago vence dentro de un año.

**(d)** ¿Cuánto dinero debe invertirse ahora al 8% por año, capitalizado trimestralmente, para dar una anualidad de \$3000 por año a perpetuidad? El primer pago vence dentro de un año.

**31. Amortización de una hipoteca** Cuando compraron su casa, Juan y María obtuvieron una hipoteca de \$90,000 al 9% de interés, pagable mensualmente en 30 años. Su pago es \$724.17 por mes (compruebe esto, usando la fórmula del texto). El banco les dio un **plan de amortización** que es una tabla que muestra cuánto del pago es interés, cuánto va hacia el principal y el resto del principal después de cada pago. La tabla siguiente muestra los primeros asientos del plan de amortización.

| Número de pago | Pago total | Pago de interés | Pago de principal | Principal restante |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 724.17 | 675.00 | 49.17 | 89,950.83 |
| 2 | 724.17 | 674.63 | 49.54 | 89,901.29 |
| 3 | 724.17 | 674.26 | 49.91 | 89,851.38 |
| 4 | 724.17 | 673.89 | 50.28 | 89,801.10 |

Después de 10 años ellos han hecho 120 pagos y se preguntan cuánto deben todavía, pero han perdido el plan de amortización.

**(a)** ¿Cuánto deben todavía Juan y María sobre su hipoteca? [*Sugerencia*: El saldo restante es el valor presente de los 240 pagos restantes.]

**(b)** ¿Cuánto de su siguiente pago es interés, y cuánto va al capital? [*Sugerencia:* Como 9% ÷ 12 = 0.75%, deben pagar 0.75% del capital restante en intereses cada mes.]

# 12.5 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

| Conjetura y demostración ▶ Inducción matemática

Hay dos aspectos en matemáticas, descubrimiento y demostración, y son de igual importancia. Debemos descubrir algo antes de intentar probarlo, y no podemos estar seguros de su verdad sino hasta que lo hayamos demostrado. En esta sección examinamos más de cerca la relación entre estos dos componentes clave en matemáticas.

## ▼ Conjetura y demostración

Intentemos hacer un sencillo experimento. Sumemos más y más números impares como sigue:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

¿Qué observa el lector acerca de los números del lado derecho de estas ecuaciones? Son, en efecto, cuadrados perfectos todos ellos. Estas ecuaciones dicen lo siguiente:

La suma del primer número impar es $1^2$.

La suma de los primeros 2 números impares es $2^2$.

La suma de los primeros 3 números impares es $3^2$.

La suma de los primeros 4 números impares es $4^2$.

La suma de los primeros 5 números impares es $5^2$.

Considere la polinomial

$$p(n) = n^2 \quad n + 41$$

Veamos ahora algunos valores de $p(n)$:

$$p(1) = 41 \quad p(2) = 43$$
$$p(3) = 47 \quad p(4) = 53$$
$$p(5) = 61 \quad p(6) = 71$$
$$p(7) = 83 \quad p(8) = 97$$

Todos los valores hasta aquí son números primos. De hecho, si continuamos, encontraremos que $p(n)$ es primo para todos los números naturales hasta $n = 40$. Podría parecer razonable en este punto conjeturar que $p(n)$ es primo para *todo* número natural $n$. Pero esa conjetura sería demasiado apresurada porque se ve fácilmente que $p(41)$ *no es* primo. Esto ilustra que no podemos estar seguros de la verdad de un enunciado, sin importar cuántos casos especiales verifiquemos. Necesitamos un argumento convincente, es decir una *demostración*, para determinar la verdad de un enunciado.

Esto lleva de manera natural a la siguiente pregunta: ¿es cierto que para todo número natural $n$, la suma de los primeros $n$ números impares es $n^2$? ¿Podría ser verdadera esta sorprendente propiedad? Podríamos intentar algunos números más y hallar que el patrón persiste para los primeros 6, 7, 8, 9 y 10 números impares. En este punto nos sentimos seguros que esto siempre es verdadero, de manera que hacemos una *conjetura:*

La suma de los primeros $n$ números impares es $n^2$

En vista de que sabemos que el $n$-ésimo número impar es $2n - 1$, podemos escribir este enunciado más precisamente como

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Es importante ver que ésta es todavía una conjetura. No podemos concluir, al verificar un número finito de casos, que una propiedad es verdadera para todos los números (hay una cantidad infinita de éstos). Para ver esto con más claridad, suponga que alguien nos dice que ha sumado el primer trillón de números impares y ha encontrado que *no* elevan al trillón al cuadrado. ¿Qué le diríamos a esta persona? Sería poco inteligente decir que estamos seguros que es verdad porque ya hemos verificado los primeros cinco casos. No obstante, podríamos tomar papel y lápiz y empezar a verificarlo, tarea que es probable nos lleve el resto de nuestra vida. La tragedia sería que, después de completar esta tarea, todavía no estaríamos seguros de la verdad de la conjetura. ¿Se ve por qué es esto?

A continuación veamos el poder de una demostración matemática. Una **demostración** es un argumento claro que demuestra la verdad de un enunciado fuera de toda duda.

## ▼ Inducción matemática

Consideremos una clase especial de demostración llamada **inducción matemática**. A continuación veamos cómo funciona: suponga que tenemos un enunciado que dice algo acerca de todos los números naturales $n$. Por ejemplo, para cualquier número natural $n$, sea $P(n)$ el siguiente enunciado:

$P(n)$: La suma de los primeros $n$ números impares es $n^2$

Como este enunciado es acerca de todos los números naturales, contiene un número infinito de enunciados; los llamaremos $P(1)$, $P(2)$, …

$P(1)$: La suma del primer número impar 1 es $1^2$.

$P(2)$: La suma de los primeros 2 números impares es $2^2$.

$P(3)$: La suma de los primeros 3 números impares es $3^2$.

⋮ ⋮

¿Cómo podemos demostrar todos estos enunciados en seguida? La inducción matemática es una forma inteligente de hacer exactamente esto.

Lo esencial de la idea es esto: suponga que podemos demostrar que siempre que uno de estos enunciados sea verdadero, entonces el siguiente de la lista también es verdadero. En otras palabras,

Para toda $k$, si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k + 1)$ es verdadero.

Esto se denomina **paso de inducción** porque nos lleva de la verdad de un enunciado a la verdad del siguiente. Ahora suponga que también podemos demostrar que

$P(1)$ es verdadero.

El paso de inducción ahora nos lleva por la siguiente cadena de enunciados:

$P(1)$ es verdadero, de modo que $P(2)$ es verdadero.

$P(2)$ es verdadero, de modo que $P(3)$ es verdadero.

$P(3)$ es verdadero, de modo que $P(4)$ es verdadero.

⋮ ⋮

Así, vemos que si se demuestran el paso de inducción y $P(1)$, entonces el enunciado $P(n)$ está demostrado para toda $n$. A continuación veamos un resumen de este importante método de demostración.

### PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Para todo número natural $n$, sea $P(n)$ un enunciado que depende de $n$. Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes.

1. $P(1)$ es verdadera.
2. Para todo número natural $k$, si $P(k)$ es verdadero entonces $P(k + 1)$ es verdadero.

Entonces $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n$.

Para aplicar este principio, hay dos pasos:

**Paso 1** Probar que $P(1)$ es verdadero.

**Paso 2** Suponer que $P(k)$ es verdadero, y usar esta suposición para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera.

Observe que en el Paso 2 no demostramos que $P(k)$ es verdadera. Sólo demostramos que si $P(k)$ es verdadera, *entonces* $P(k + 1)$ también es verdadera. La suposición de que $P(k)$ es verdadera se llama **hipótesis de inducción**.

A continuación usamos inducción matemática para demostrar que la conjetura que hicimos al principio de esta sección es verdadera.

## EJEMPLO 1 | Una demostración por inducción matemática

Demuestre que, para todos los números naturales $n$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

**SOLUCIÓN** Denotemos con $P(n)$ el enunciado $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

**Paso 1** Necesitamos demostrar que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ es simplemente el enunciado de que $1 = 1^2$, que por supuesto es verdadero.

**Paso 2** Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

[Observe que obtenemos $P(k + 1)$ al sustituir $k + 1$ por cada $n$ en el enunciado $P(n)$.] Empezamos con el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho de la ecuación:

Esto es igual a $k^2$ por la hipótesis de inducción

$$
\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\
&= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1] && \text{Agrupe los primeros } k \text{ términos} \\
&= k^2 + [2(k + 1) - 1] && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= k^2 + [2k + 2 - 1] && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= k^2 + 2k + 1 && \text{Simplifique} \\
&= (k + 1)^2 && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Entonces $P(k + 1)$ se deduce de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los Pasos 1 y 2, concluimos por el Principio de Inducción Matemática que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales $n$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

## EJEMPLO 2 | Una demostración por inducción matemática

Demuestre que para todo número natural $n$,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

**SOLUCIÓN** Sea $P(n)$ el enunciado $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. Buscamos demostrar que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n$.

**Paso 1** Necesitamos demostrar que $P(1)$ es verdadero, Pero $P(1)$ dice que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

y este enunciado es claramente verdadero.

**Paso 2** Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

Deseamos usar esto para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadero, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2}$$

Por lo tanto, empezamos con el lado izquierdo y usamos la hipótesis de inducción para obtener el lado derecho:

Esto es igual a $\dfrac{k(k + 1)}{2}$ por la hipótesis de inducción

$$
\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) \\
&= [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k + 1) && \text{Agrupe los primeros } k \text{ términos} \\
&= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && \text{Factorice } k + 1 \\
&= (k + 1)\left(\frac{k + 2}{2}\right) && \text{Común denominador} \\
&= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} && \text{Escriba } k + 2 \text{ como } k + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Entonces $P(k + 1)$ se deduce de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo probado los Pasos 1 y 2, concluimos por el Principio de Inducción Matemática que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

El recuadro siguiente da fórmulas para las sumas de potencias de los primeros $n$ números naturales. Estas fórmulas son importantes en cálculo. La Fórmula 1 está probada en el Ejemplo 2. Las otras fórmulas también se demuestran usando inducción matemática (vea Ejercicios 6 y 9).

### SUMAS DE POTENCIAS

**0.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

**1.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

**2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**3.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Puede ocurrir que un enunciado $P(n)$ sea falso para los primeros números naturales pero verdadero a partir de algún número en adelante. Por ejemplo, podríamos desear demostrar que $P(n)$ es verdadero para $n \geq 5$. Observe que si demostramos que $P(5)$ es verdadero, entonces este hecho, junto con el paso de inducción, implicaría la verdad de $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, … El siguiente ejemplo ilustra este punto.

## EJEMPLO 3 | Demostrar una desigualdad por inducción matemática

Demuestre que $4n < 2^n$ para toda $n \geq 5$.

**SOLUCIÓN** Denotemos con $P(n)$ el enunciado $4n < 2^n$.

**Paso 1** $P(5)$ es el enunciado de que $4 \cdot 5 < 2^5$, o sea $20 < 32$, que es verdadero.

**Paso 2** Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$4k < 2^k$$

Obtenemos $P(k+1)$ si sustituimos $n$ por $k+1$ en el enunciado $P(n)$.

Deseamos usar esto para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero, es decir,

$$4(k+1) < 2^{k+1}$$

**BLAISE PASCAL** (1623-1662) es considerado una de las mentes más versátiles de la historia moderna. Fue escritor y filósofo, así como un talentoso matemático y físico. Entre sus aportaciones que aparecen en este libro están el Triángulo de Pascal y el Principio de Inducción Matemática.

El padre de Pascal, también matemático, pensaba que su hijo no debería estudiar matemáticas sino hasta que cumpliera 15 o 16 años. Pero, a los 12, Blaise insistió en aprender geometría y demostró casi todos los teoremas por sí solo. A los 19 inventó la primera sumadora mecánica. En 1647, después de escribir un importante tratado sobre secciones cónicas, abruptamente abandonó las matemáticas porque sintió que sus intensos estudios contribuían a su mala salud. Se dedicó entonces a recreaciones frívolas como es el juego, pero esto sólo sirvió para despertar su interés en probabilidad. En 1654 milagrosamente sobrevivió a un accidente en un carruaje en el que sus caballos cayeron por un puente. Tomando esto como signo de Dios, Pascal entró a un monasterio, donde estudió teología y filosofía, escribiendo su famoso libro *Pensées*. También continuó su investigación matemática. Valoraba la fe y la intuición más que la razón como fuente de la verdad, declarando que "el corazón tiene sus propias razones, que la razón no puede conocer".

Entonces empezamos con el lado izquierdo de la desigualdad y usamos la hipótesis de inducción para demostrar que es menor que el lado derecho. Para $k \geq 5$ tenemos

$$\begin{aligned} 4(k+1) &= 4k + 4 && \text{Propiedad Distributiva} \\ &< 2^k + 4 && \text{Hipótesis de Inducción} \\ &< 2^k + 4k && \text{Porque } 4 < 4k \\ &< 2^k + 2^k && \text{Hipótesis de Inducción} \\ &= 2 \cdot 2^k && \\ &= 2^{k+1} && \text{Propiedad de exponentes} \end{aligned}$$

Entonces $P(k+1)$ se deduce de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo probado los Pasos 1 y 2, concluimos por el Principio de Inducción Matemática que $P(n)$ es verdadero para todos los números naturales $n \geq 5$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## 12.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. La inducción matemática es un método para demostrar que un enunciado $P(n)$ es verdadero para todos los números_______ $n$. En el Paso 1 demostramos que _______es verdadero.

2. ¿Cuál de lo siguiente es verdadero acerca del Paso 2 en una demostración por inducción matemática?
   (i) Demostramos: "$P(k+1)$ es verdadero."
   (ii) Demostramos: "Si $P(k)$ es verdadero, entonces $P(k+1)$ es verdadero."

### HABILIDADES

**3-14** ■ Use inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales $n$.

3. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

4. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n \quad 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

5. $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n + 2) = \dfrac{n(3n+7)}{2}$

6. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

8. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

10. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n \quad 1)^3 = n^2(2n^2 \quad 1)$

11. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

12. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$

13. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = 2[1 + (n-1)2^n]$

14. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n \quad 1} = 2^n \quad 1$

15. Demuestre que $n^2 + n$ es divisible entre 2 para todos los números naturales $n$.

16. Demuestre que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para todos los números naturales $n$.

17. Demuestre que $n^2 - n + 41$ es impar para todos los números naturales $n$.

18. Demuestre que $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3 para todos los números naturales $n$.

19. Demuestre que $8^n - 3^n$ es divisible entre 5 para todos los números naturales $n$.

20. Demuestre que $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para todos los números naturales $n$.

21. Demuestre que $n < 2^n$ para todos los números naturales $n$.

22. Demuestre que $(n+1)^2 < 2n^2$ para todos los números naturales $n$.

23. Demuestre que si $x > -1$, entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todos los números naturales $n$.

24. Demuestre que $100n \leq n^2$ para toda $n \geq 100$.

25. Sea $a_{n+1} = 3a_n$ y $a_1 = 5$. Demuestre que $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ para todos los números naturales $n$.

**26.** Una sucesión está definida en forma recursiva por $a_{n+1} = 3a_n - 8$ y $a_1 = 4$. Encuentre una fórmula explícita para $a_n$, y a continuación use inducción matemática para demostrar que la fórmula que encontró es verdadera.

**27.** Demuestre que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los números naturales $n$. [*Sugerencia:* $x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + (x^k - y^k)y$.]

**28.** Demuestre que $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ para todos los números naturales $n$.

**29-33** ■ $F_n$ denota el $n$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci que se estudia en la Sección 12.1. Use inducción matemática para demostrar el enunciado.

**29.** $F_{3n}$ es par para todos los números naturales $n$.

**30.** $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

**31.** $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

**32.** $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

**33.** Para toda $n \geq 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

**34.** Sea $a_n$ el $n$-ésimo término de la sucesión definida en forma recursiva por

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

y sea $a_1 = 1$. Encuentre una fórmula para $a_n$ en términos de los números de Fibonacci $F_n$. Demuestre que la fórmula que encontró es válida para todos los números naturales $n$.

**35.** Sea $F_n$ el $n$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Encuentre y demuestre una desigualdad que relacione $n$ y $F_n$ para números naturales $n$.

**36.** Encuentre y demuestre una desigualdad que relacione $100n$ y $n^3$.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**37. ¿Verdadero o falso?** Determine si cada enunciado es verdadero o falso. Si considera que el enunciado es verdadero, demuéstrelo; si considera que es falso, dé un ejemplo en el que falle.

**(a)** $p(n) = n^2 - n + 11$ es primo para toda $n$

**(b)** $n^2 > n$ para toda $n \geq 2$.

**(c)** $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3 para toda $n \geq 1$.

**(d)** $n^3 \geq (n + 1)^2$ para toda $n \geq 2$.

**(e)** $n^3 - n$ es divisible entre 3 para toda $n \geq 2$.

**(f)** $n^3 - 6n^2 + 11n$ es divisible entre 6 para toda $n \geq 1$.

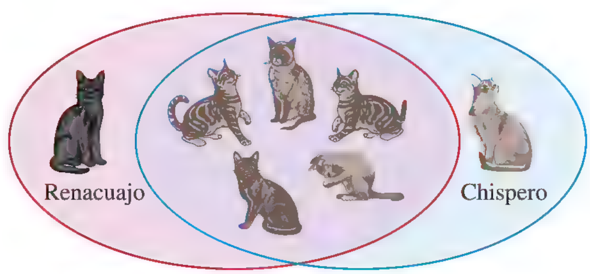
**38. ¿Todos los gatos son negros?** ¿Qué está mal con la siguiente "demostración" por inducción matemática de que todos los gatos son negros? Denote con $P(n)$ el enunciado: "En cualquier grupo de $n$ gatos, si un gato es negro, entonces todos son negros."

**Paso 1** El enunciado es claramente verdadero para $n = 1$.

**Paso 2** Suponga que $P(k)$ es verdadero. Demostramos que $P(k + 1)$ es verdadero.

Suponga que tenemos un grupo de $k + 1$ gatos, uno de los cuales es negro; llame a este gato "Renacuajo". Elimine algún otro gato (llámelo "Chispero") del grupo. Nos quedan $k$ gatos, uno de los cuales (Renacuajo) es negro, de modo que por hipótesis de inducción, todos estos $k$ gatos son negros. Ahora regrese a Chispero al grupo y saque a Renacuajo. De nuevo tenemos un grupo de $k$ gatos, todos los cuales, excepto quizá Chispero, son negros. Entonces por hipótesis de inducción, Chispero también debe ser negro. Por tanto, todos los $k + 1$ gatos del grupo original son negros.

En consecuencia, por inducción, $P(n)$ es verdadero para toda $n$. Como todos hemos visto al menos un gato negro, se deduce que todos los gatos son negros.




# 12.6 El Teorema del Binomio

Expansión de $(a + b)^n$ ▶ Los coeficientes de un binomio ▶ El Teorema del Binomio ▶ Demostración del Teorema del Binomio

Una expresión de la forma $a + b$ se denomina **binomio**. Aun cuando en principio es fácil elevar $a + b$ a cualquier potencia, elevarlo a una potencia muy alta sería tedioso. En esta sección encontramos una fórmula que da la expansión de $(a + b)^n$ para cualquier número natural $n$ y luego la demostramos usando inducción matemática.

## Expansión de $(a + b)^n$

Para hallar un patrón en la expansión de $(a + b)^n$, primero buscamos algunos casos especiales.

$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$\vdots$$

Los siguientes patrones sencillos emergen para la expansión de $(a + b)^n$.

1. Hay $n + 1$ términos, siendo el primero $a^n$ y el último es $b^n$.
2. Los exponentes de $a$ disminuyen en 1 de término en término, en tanto que los exponentes de $b$ aumentan en 1.
3. La suma de los exponentes de $a$ y $b$ de cada término es $n$.

Por ejemplo, observe cómo los exponentes de $a$ y $b$ se comportan en la expansión de $(a + b)^5$.

**Los exponentes de *a* disminuyen:**

$$(a + b)^5 = a^{5} + 5a^{4}b^1 + 10a^{3}b^2 + 10a^{2}b^3 + 5a^{1}b^4 + b^5$$

**Los exponentes de *b* aumentan:**

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^{1} + 10a^3b^{2} + 10a^2b^{3} + 5a^1b^{4} + b^{5}$$

Con estas observaciones podemos escribir la forma de la expansión de $(a + b)^n$ para cualquier número natural $n$. Por ejemplo, escribiendo un signo de interrogación para los coeficientes faltantes, tenemos

$$(a + b)^8 = a^8 + ?a^7b + ?a^6b^2 + ?a^5b^3 + ?a^4b^4 + ?a^3b^5 + ?a^2b^6 + ?ab^7 + b^8$$

Para completar la expansión, necesitamos determinar estos coeficientes. Para hallar un patrón, escribamos los coeficientes de la expansión de $(a + b)^n$ para los primeros pocos valores de $n$ en un arreglo triangular de números como se muestra a continuación, que se llama **triángulo de Pascal**.

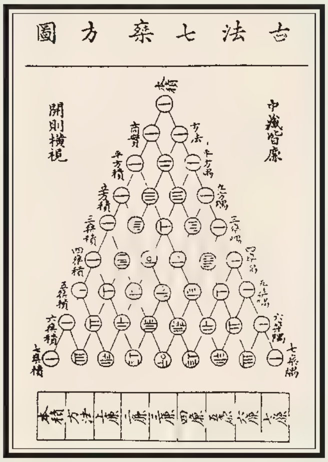
$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

El conjunto de números correspondiente a $(a + b)^0$ se denomina renglón cero y se incluye para demostrar la simetría del conjunto de números. La observación clave acerca del triángulo de Pascal es la siguiente propiedad.

**PROPIEDAD CLAVE DEL TRIÁNGULO DE PASCAL**

Todo elemento (que no sea un 1) es la suma de los dos elementos que están diagonalmente sobre él.

Lo que llamamos **triángulo de Pascal** aparece en este documento chino de Chu Shikie, datado en 1303. El título dice: "Tabla del Método Antiguo de los siete cuadros de multiplicación." El triángulo fue redescubierto por Pascal (vea página 818).




De esta propiedad es fácil hallar cualquier renglón del triángulo de Pascal a partir del renglón de arriba de él. Por ejemplo, encontramos los renglones sexto y séptimo empezando con el quinto renglón:

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
(a+b)^5 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
(a+b)^6 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
(a+b)^7 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Para ver por qué se cumple esta situación, consideremos las siguientes expansiones:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \boxed{10a^2b^3} + \boxed{5ab^4} + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + \boxed{15a^2b^4} + 6ab^5 + b^6$$

Llegamos a la expansión de $(a+b)^6$ si multiplicamos $(a+b)^5$ por $(a+b)$. Observe, por ejemplo, que el término circulado de la expansión de $(a+b)^6$ se obtiene por la multiplicación de los dos términos circulados que están encima de él. Obtenemos este término cuando los dos términos sobre él se multiplican por $b$ y $a$, respectivamente. Entonces, su coeficiente es la suma de los coeficientes de estos dos términos. Usaremos esta observación al final de esta sección cuando demostremos el Teorema del Binomio.

Habiendo encontrado estos patrones, fácilmente podemos ahora obtener la expansión de cualquier binomio, al menos a potencias relativamente pequeñas.

## EJEMPLO 1 | Expansión de un binomio usando el triángulo de Pascal

Encuentre la expansión $(a+b)^7$ usando el triángulo de Pascal.

**SOLUCIÓN** El primer término de la expansión es $a^7$ y el último término es $b^7$. Usando el hecho de que el exponente de $a$ disminuye en 1 de un término a otro y que $b$ aumenta en 1 de un término a otro, tenemos

$$(a+b)^7 = a^7 + \boxed{?}a^6b + \boxed{?}a^5b^2 + \boxed{?}a^4b^3 + \boxed{?}a^3b^4 + \boxed{?}a^2b^5 + \boxed{?}ab^6 + b^7$$

Los coeficientes apropiados aparecen en el séptimo renglón del triángulo de Pascal. Así,

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

## EJEMPLO 2 | Expansión de un binomio usando el triángulo de Pascal

Use el triángulo de Pascal para expandir $(2-3x)^5$.

**SOLUCIÓN** Encontramos la expansión de $(a+b)^5$ y luego sustituimos 2 por $a$ y $-3x$ por $b$. Usando el triángulo de Pascal para los coeficientes, obtenemos

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Sustituyendo $a = 2$ y $b = -3x$ resulta

$$
\begin{aligned}
(2-3x)^5 &= (2)^5 + 5(2)^4(-3x) + 10(2)^3(-3x)^2 + 10(2)^2(-3x)^3 + 5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5 \\
&= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

## Los coeficientes de un binomio

Aun cuando el triángulo de Pascal es útil para hallar la expansión de binomios para valores razonablemente pequeños de $n$, no es práctico para hallar $(a+b)^n$ para grandes valores de $n$. La razón es que el método que usamos para hallar los renglones sucesivos del triángulo de Pascal es recursivo. Entonces, para hallar el 100-ésimo renglón de este triángulo, primero debemos hallar los 99 renglones precedentes.

Necesitamos examinar el patrón de los coeficientes con más cuidado para desarrollar una fórmula que nos permita calcular directamente cualquier coeficiente de la expansión de un binomio. Esa fórmula existe y el resto de esta sección está dedicado a hallarla y probarla, pero para expresar esta fórmula necesitamos alguna notación.

El producto de los primeros $n$ números naturales está denotado por $\boldsymbol{n!}$ y se denomina $\boldsymbol{n}$ **factorial**.

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3{,}628{,}800$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

También definimos 0! como sigue

$$0! = 1$$

Esta definición de 0! hace que muchas fórmulas donde intervienen factoriales sean más cortas y más fáciles de escribir.

### EL COEFICIENTE DEL BINOMIO

Sean $n$ y $r$ enteros no negativos con $r \leq n$. El **coeficiente del binomio** se denota con $\binom{n}{r}$ y está definido por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## EJEMPLO 3 | Cálculo de coeficientes de binomios

**(a)** $$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}}$$

$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

**(b)** $$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97} \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 2 \cdot 3)\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97)}}$$

$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161{,}700$$

**(c)** $$\binom{100}{97} = \frac{100!}{97!(100-97)!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97} \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{\cancel{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97)}(1 \cdot 2 \cdot 3)}$$

$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161{,}700$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **17** Y **19**

---

Aun cuando el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$ se define en términos de una fracción, todos los resultados del Ejemplo 3 son números naturales. En realidad, $\binom{n}{r}$ es siempre un número natural (vea Ejercicio 54). Observe que los coeficiente del binomio en los incisos (b) y (c) del Ejemplo 3 son iguales. Éste es un caso especial de la siguiente razón, que pedimos al lector demostrar en el Ejercicio 52.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Para ver la conexión entre los coeficientes del binomio y la expansión del binomio $(a + b)^n$, calculemos los siguientes coeficientes del binomio.

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Éstos son precisamente los elementos del quinto renglón del triángulo de Pascal. De hecho, podemos escribir el triángulo de Pascal como sigue.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Para demostrar que este patrón se cumple, es necesario demostrar que cualquier elemento de esta versión del triángulo de Pascal sea la suma de los dos elementos que están diagonalmente arriba de él. En otras palabras, debemos demostrar que cada uno de los elementos satisface la propiedad clave del triángulo de Pascal. A continuación expresamos esta propiedad en términos de los coeficientes del binomio.

**PROPIEDAD CLAVE DE LOS COEFICIENTES DEL BINOMIO**

Para cualesquier enteros no negativos $r$ y $k$ con $r \leq k$,

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Nótese que los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación son elementos adyacentes en el $k$-ésimo renglón del triángulo de Pascal, y el término del lado derecho es el elemento que está diagonalmente debajo de ellos, en el $(k + 1)$-ésimo renglón. Entonces esta ecuación es otra forma de expresar la propiedad clave del triángulo de Pascal en términos de los coeficientes del binomio. Una demostración de esta fórmula está en el Ejercicio 53.

## El Teorema del Binomio

Ahora estamos listos para expresar el Teorema del Binomio.

**EL TEOREMA DEL BINOMIO**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Demostramos este teorema al final de esta sección. Primero, veamos algunas de sus aplicaciones.

### EJEMPLO 4 | Expansión de un binomio usando el Teorema del Binomio

Use el Teorema del Binomio para expandir $(x + y)^4$.

**SOLUCIÓN** Por el Teorema del Binomio,

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Verifique que

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Se deduce que

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

### EJEMPLO 5 | Expansión de un binomio usando el Teorema del Binomio

Use el Teorema del Binomio para expandir $\left(\sqrt{x} - 1\right)^8$.

**SOLUCIÓN** Primero hallamos la expansión de $(a + b)^8$ y luego sustituimos $\sqrt{x}$ por $a$ y $-1$ por $b$. Usando el Teorema del Binomio, tenemos

$$(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$$

Verifique que

$$\binom{8}{0} = 1 \qquad \binom{8}{1} = 8 \qquad \binom{8}{2} = 28 \qquad \binom{8}{3} = 56 \qquad \binom{8}{4} = 70$$

$$\binom{8}{5} = 56 \qquad \binom{8}{6} = 28 \qquad \binom{8}{7} = 8 \qquad \binom{8}{8} = 1$$

Por lo tanto

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Ejecutando las sustituciones $a = x^{1/2}$ y $b = -1$ resulta

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^8 = (x^{1/2})^8 + 8(x^{1/2})^7(-1) + 28(x^{1/2})^6(-1)^2 + 56(x^{1/2})^5(-1)^3 + 70(x^{1/2})^4(-1)^4 + 56(x^{1/2})^3(-1)^5 + 28(x^{1/2})^2(-1)^6 + 8(x^{1/2})(-1)^7 + (-1)^8$$

Esto se simplifica a

$$\left(\sqrt{x} - 1\right)^8 = x^4 - 8x^{7/2} + 28x^3 - 56x^{5/2} + 70x^2 - 56x^{3/2} + 28x - 8x^{1/2} + 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

El Teorema del Binomio se puede usar para hallar un término particular de una expansión del binomio sin tener que hallar toda la expansión.

**TÉRMINO GENERAL DE LA EXPANSIÓN DEL BINOMIO**

El término que contiene $a^r$ en la expansión de $(a + b)^n$ es

$$\binom{n}{n-r}a^r b^{n-r}$$

### EJEMPLO 6 | Hallar un término particular en una expansión del binomio

Encuentre el término que contenga $x^5$ en la expansión de $(2x + y)^{20}$.

**SOLUCIÓN** El término que contiene $x^5$ está dado por la fórmula para el término general con $a = 2x$, $b = y$, $n = 20$ y $r = 5$. Entonces este término es

$$\binom{20}{15}a^5 b^{15} = \frac{20!}{15!(20-15)!}(2x)^5 y^{15} = \frac{20!}{15!\,5!}32x^5 y^{15} = 496{,}128x^5 y^{15}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

### EJEMPLO 7 | Hallar un término particular en una expansión del binomio

Encuentre el coeficiente de $x^8$ en la expansión de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

**SOLUCIÓN** Tanto $x^2$ como $1/x$ son potencias de $x$, de modo que la potencia de $x$ en cada término de la expansión está determinada por ambos términos del binomio. Para hallar el coeficiente requerido, primero encontramos el término general de la expansión. Por la fórmula tenemos $a = x^2$, $b = 1/x$ y $n = 10$, de modo que el término general es

$$\binom{10}{10-r}(x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{2r}(x^{-1})^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{3r-10}$$

Entonces el término que contiene $x^8$ es el término en el que

$$3r - 10 = 8$$

$$r = 6$$

Por lo tanto, el coeficiente requerido es

$$\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = 210$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

## Demostración del Teorema del Binomio

A continuación damos una demostración del Teorema del Binomio usando inducción matemática.

**DEMOSTRACIÓN** Denotemos con $P(n)$ el enunciado

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

**Paso 1** Demostramos que $P(1)$ es verdadero. Pero $P(1)$ es precisamente el enunciado

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = 1a + 1b = a + b$$

que es ciertamente verdadero.

**Paso 2** Suponemos que $P(k)$ es verdadero. Entonces nuestra hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

Usamos esto para demostrar que $P(k+1)$ es verdadero.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)[(a+b)^k]$$

$$= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \quad \text{Hipótesis de inducción}$$

$$= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right]$$

$$+ b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \quad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+ \binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \quad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2$$

$$+ \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \quad \text{Agrupe términos semejantes}$$

Usando la propiedad clave de los coeficientes del binomio, podemos escribir cada una de las expresiones en corchetes como un solo coeficiente del binomio. También, escribiendo los coeficientes primero y último como $\binom{k+1}{0}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ (éstos son iguales a 1 por el Ejercicio 50) resulta

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Pero esta última ecuación es precisamente $P(k+1)$, y esto completa el paso de inducción.

Habiendo demostrado los Pasos 1 y 2, concluimos por el Principio de Inducción Matemática que el teorema es verdadero para todos los números naturales $n$. ■

## 12.6 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Una expresión algebraica de la forma $a + b$, que está formada por una suma de dos términos, se denomina ________.

2. Podemos hallar los coeficientes de la expansión $(a+b)^n$ desde el $n$-ésimo renglón del triángulo de______. Entonces

$$(a+b)^4 = \blacksquare a^4 + \blacksquare a^3b + \blacksquare a^2b^2 + \blacksquare ab^3 + \blacksquare b^4$$

3. Los coeficientes del binomio se pueden calcular directamente usando la fórmula $\binom{n}{k}$ = ______. Entonces, $\binom{4}{3}$ = ______.

4. Para expandir $(a+b)^n$, podemos usar el Teorema del ________. Usando este teorema, encontramos $(a+b)^4$ =

$$\binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^4 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^3b + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}a^2b^2 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}ab^3 + \binom{\blacksquare}{\blacksquare}b^4$$

## HABILIDADES

**5-16** ■ Use el Triángulo de Pascal para expandir la expresión.

**5.** $(x + y)^6$ **6.** $(2x + 1)^4$ **7.** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$

**8.** $(x - y)^5$ **9.** $(x - 1)^5$ **10.** $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$

**11.** $(x^2y - 1)^5$ **12.** $(1 + \sqrt{2})^6$ **13.** $(2x - 3y)^3$

**14.** $(1 + x^3)^3$ **15.** $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^5$ **16.** $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^5$

**17-24** ■ Evalúe la expresión.

**17.** $\binom{6}{4}$ **18.** $\binom{8}{3}$ **19.** $\binom{100}{98}$

**20.** $\binom{10}{5}$ **21.** $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$ **22.** $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$

**23.** $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

**24.** $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$

**25-28** ■ Use el Teorema del Binomio para expandir la expresión.

**25.** $(x + 2y)^4$ **26.** $(1 - x)^5$

**27.** $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$ **28.** $(2A + B^2)^4$

**29.** Encuentre los primeros tres términos de la expresión de $(x + 2y)^{20}$.

**30.** Encuentre los primeros cuatro términos de la expresión de $(x^{1/2} + 1)^{30}$.

**31.** Encuentre los últimos dos términos de la expresión de $(a^{2/3} + a^{1/3})^{25}$.

**32.** Encuentre los primeros tres términos de la expresión de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$$

**33.** Encuentre el término de en medio de la expansión de $(x^2 + 1)^{18}$.

**34.** Encuentre el quinto término de la expansión de $(ab - 1)^{20}$.

**35.** Encuentre el 24avo término de la expansión de $(a + b)^{25}$.

**36.** Encuentre el 28avo término de la expansión de $(A - B)^{30}$.

**37.** Encuentre el 100-ésimo término de la expansión de $(1 + y)^{100}$.

**38.** Encuentre el segundo término de la expansión de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{25}$$

**39.** Encuentre el término que contenga a $x^4$ en la expansión de $(x + 2y)^{10}$.

**40.** Encuentre el término que contenga a $y^3$ en la expansión de $(\sqrt{2} + y)^{12}$.

**41.** Encuentre el término que contenga a $b^8$ en la expansión de $(a + b^2)^{12}$.

**42.** Encuentre el término que no contiene a $x$ en la expansión de

$$\left(8x + \frac{1}{2x}\right)^8$$

**43-46** ■ Factorice usando el Teorema del Binomio.

**43.** $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

**44.** $(x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$

**45.** $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

**46.** $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

**47-52** ■ Simplifique usando el Teorema del Binomio.

**47.** $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ **48.** $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

**49.** Demuestre que $(1.01)^{100} > 2$. [*Sugerencia:* Observe que $(1.01)^{100} = (1 + 0.01)^{100}$, y use el Teorema del Binomio para demostrar que la suma de los primeros dos términos de la expansión es mayor que 2.]

**50.** Demuestre que $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$.

**51.** Demuestre que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

**52.** Demuestre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para $0 \le r \le n$.

**53.** En este ejercicio demostramos la identidad

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

**(a)** Escriba el lado izquierdo de esta ecuación como la suma de dos fracciones.

**(b)** Demuestre que un común denominador de la expresión que encontró en el inciso (a) es $r!(n - r + 1)!$.

**(c)** Sume las dos fracciones usando el común denominador del inciso (b), simplifique el numerador y observe que la expresión resultante es igual al lado derecho de la ecuación.

**54.** Demuestre que $\binom{n}{r}$ es un entero para toda $n$ y para $0 \le r \le n$. [*Sugerencia:* Use inducción para demostrar que el enunciado es verdadero para toda $n$ y use el Ejercicio 53 para el paso de inducción.]

## APLICACIONES

**55. Diferencia en volúmenes de cubos** El volumen de un cubo de lado $x$ pulgadas está dado por $V(x) = x^3$, de modo que el volumen de un cubo de lado $x + 2$ pulgadas está dado por $V(x + 2) = (x + 2)^3$. Use el Teorema del Binomio para demostrar que la diferencia en volumen entre los cubos mayor y menor es $6x^2 + 12x + 8$ pulgadas cúbicas.

**56. Probabilidad de acertar en un blanco** La probabilidad de que un arquero acierte en el blanco es $p = 0.9$, de modo que la probabilidad de que falle a dar en el blanco es $q = 0.1$. Se sabe que en esta situación la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente $r$ veces en $n$ intentos está dada por el término que contiene $p^r$ en la expansión del binomio de $(p + q)^n$. Encuentre la probabilidad de que el arquero acierte en el blanco exactamente tres veces en cinco intentos.

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**57. Potencias de factoriales** ¿Cuál es mayor, $(100!)^{101}$ o $(101!)^{100}$? [*Sugerencia:* Intente factorizando las expresiones. ¿Tienen factores en común?]

**58. Sumas de coeficientes del binomio** Sume cada uno de los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal, como se indica. ¿Se ve un patrón?

$$1 + 1 = ?$$
$$1 + 2 + 1 = ?$$
$$1 + 3 + 3 + 1 = ?$$
$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = ?$$
$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = ?$$

Con base en el patrón que haya encontrado, encuentre la suma del $n$-ésimo renglón:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Demuestre su resultado al expandir $(1 + 1)^n$ usando el Teorema del Binomio.

**59. Sumas alternantes de coeficientes del binomio** Encuentre la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

encontrando un patrón como en el Ejercicio 58. Pruebe su resultado al expandir $(1 - 1)^n$ usando el Teorema del Binomio.

# CAPÍTULO 12 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

**1. (a)** ¿Qué es una sucesión?
**(b)** ¿Qué es una sucesión aritmética? Escriba una expresión para el $n$-ésimo término de una sucesión aritmética.
**(c)** ¿Qué es una sucesión geométrica? Escriba una expresión para el $n$-ésimo término de una sucesión geométrica.

**2. (a)** ¿Qué es una sucesión definida de manera recursiva?
**(b)** ¿Qué es la sucesión de Fibonacci?

**3. (a)** ¿Qué significan las sumas parciales de una sucesión?
**(b)** Si una sucesión aritmética tiene primer término $a$ y diferencia común $d$, escriba una expresión para la suma de sus primeros $n$ términos.
**(c)** Si una sucesión geométrica tiene primer término $a$ y razón común $r$, escriba una expresión para la suma de sus primeros $n$ términos.
**(d)** Escriba una expresión para la suma de una serie geométrica infinita con primer término $a$ y relación común $r$. ¿Para qué valores de $r$ es válida su fórmula?

**4. (a)** Escriba la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sin usar notación sigma.
**(b)** Escriba $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ usando notación sigma.

**5.** Escriba una expresión para la cantidad $A_f$ de una anualidad formada por $n$ pagos regulares e iguales de tamaño $R$, con tasa de interés $i$ por período.

**6.** Exprese el Principio de Inducción Matemática.

**7.** Escriba los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal. ¿Cómo están relacionados entre sí los elementos?

**8. (a)** ¿Qué significa el símbolo $n!$?
**(b)** Escriba una expresión para el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$.
**(c)** Exprese el Teorema del Binomio.
**(d)** Escriba el término que contiene $a^r$ en la expansión de $(a + b)^n$.

## EJERCICIOS

**1-6** ■ Encuentre los primeros cuatro términos así como el décimo término de la sucesión con el $n$-ésimo término dado.

**1.** $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$  **2.** $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n}$

**3.** $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^3}$  **4.** $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

**5.** $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$  **6.** $a_n = \dbinom{n+1}{2}$

**7-10** ■ Una sucesión está definida en forma recursiva. Encuentre los primeros siete términos de la sucesión.

**7.** $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \quad a_1 = 1$

**8.** $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \quad a_1 = 1$

**9.** $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 3$

**10.** $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{3}$

**11-14** ■ Nos dan el $n$-ésimo de una sucesión.
**(a)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.
**(b)** Grafique los términos que encontró en el inciso (a).
**(c)** Encuentre la quinta suma parcial de la sucesión.
**(d)** Determine si la serie es aritmética o geométrica. Encuentre la diferencia común o la razón común.

**11.** $a_n = 2n + 5$ **12.** $a_n = \dfrac{5}{2^n}$

**13.** $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ **14.** $a_n = 4 - \dfrac{n}{2}$

**15-22** ■ Nos dan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si pueden ser los términos de una sucesión aritmética, una sucesión geométrica, o ninguna de éstas. Si la sucesión es aritmética o geométrica, encuentre el quinto término.

**15.** 5, 5.5, 6, 6.5, . . . **16.** $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

**17.** $t - 3, t - 2, t - 1, t, \ldots$ **18.** $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

**19.** $t^3, t^2, t, 1, \ldots$ **20.** $1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, \ldots$

**21.** $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ **22.** $a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots$

**23.** Demuestre que $3, 6i, -12, -24i, \ldots$ es una sucesión geométrica y encuentre la razón común. (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

**24.** Encuentre el $n$-ésimo término de la sucesión aritmética $2, 2 + 2i, 4i, -4 + 4i, -8, \ldots$ (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

**25.** El sexto término de una sucesión aritmética es 17 y el cuarto término es 11. Encuentre el segundo término.

**26.** El 20avo término de una sucesión aritmética es 96 y la diferencia común es 5. Encuentre el $n$-ésimo término.

**27.** El tercer término de una sucesión aritmética es 9 y la razón común es $\frac{3}{2}$. Encuentre el quinto término.

**28.** El segundo término de una sucesión geométrica es 10 y el quinto término es $\frac{1250}{27}$. Encuentre el $n$-ésimo término.

**29.** Un maestro de escuela gana \$32,000 en su primer año en la escuela de Lakeside y obtiene un aumento del 5% al año.
**(a)** Encuentre una fórmula para su salario $A_n$ en su $n$-ésimo año en esta escuela.
**(b)** Haga una lista de sus salarios para sus primeros 8 años en esta escuela.

**30.** Una colega del maestro del Ejercicio 29, contratada al mismo tiempo, gana \$35,000 en su primer año y obtiene un aumento de \$1200 cada año.
**(a)** ¿Cuál es el salario $A_n$ de ella en su $n$-ésimo año en esta escuela?
**(b)** Encuentre el salario de ella en su octavo año en esta escuela, y compárelo con el salario del profesor del Ejercicio 29 en su octavo año.

**31.** Cierto tipo de bacteria se divide cada 5 segundos. Si tres de estas bacterias se ponen en una caja de petri, ¿cuántas bacterias hay en la caja al término de 1 minuto?

**32.** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones aritméticas, demuestre que $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ es también una sucesión aritmética.

**33.** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones geométricas, demuestre que $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ es también una sucesión geométrica.

**34. (a)** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética, ¿la sucesión $a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \ldots$ es aritmética?
**(b)** Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica, ¿la sucesión $5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots$ es aritmética?

**35.** Encuentre los valores de $x$ para los cuales la sucesión 6, $x$, 12, ... es
**(a)** aritmética **(b)** geométrica

**36.** Encuentre los valores de $x$ y $y$ para los cuales la sucesión 2, $x$, $y$, 17, ... es
**(b)** aritmética **(b)** geométrica

**37-40** ■ Encuentre la suma.

**37.** $\sum_{k=3}^{6} (k + 1)^2$ **38.** $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{2i}{2i - 1}$

**39.** $\sum_{k=1}^{6} (k + 1)2^{k-1}$ **40.** $\sum_{m=1}^{5} 3^{m-2}$

**41-44** ■ Escriba la suma sin usar notación sigma. No evalúe.

**41.** $\sum_{k=1}^{10} (k - 1)^2$ **42.** $\sum_{j=2}^{100} \dfrac{1}{j - 1}$

**43.** $\sum_{k=1}^{50} \dfrac{3^k}{2^{k+1}}$ **44.** $\sum_{n=1}^{10} n^2 2^n$

**45-48** ■ Escriba la suma usando notación sigma. No evalúe.

**45.** $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 99$

**46.** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$

**47.** $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^6 + \cdots + 100 \cdot 2^{102}$

**48.** $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

**49-54** ■ Determine si la expresión es una suma parcial de una sucesión aritmética o geométrica. A continuación, encuentre la suma.

**49.** $1 + 0.9 + (0.9)^2 + \cdots + (0.9)^5$

**50.** $3 + 3.7 + 4.4 + \cdots + 10$

**51.** $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \cdots + 100\sqrt{5}$

**52.** $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 33$

**53.** $\sum_{n=0}^{6} 3(-4)^n$ **54.** $\sum_{k=0}^{8} 7(5)^{k/2}$

**55-60** ■ Determine si la serie geométrica infinita es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

**55.** $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$

**56.** $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$

**57.** $5 - 5(1.01) + 5(1.01)^2 - 5(1.01)^3 + \cdots$

**58.** $1 + \dfrac{1}{3^{1/2}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^{3/2}} + \cdots$

**59.** $-1 + \dfrac{9}{8} - \left(\dfrac{9}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{8}\right)^3 - \cdots$

**60.** $a + ab^2 + ab^4 + ab^6 + \cdots, \quad |b| < 1$

**61.** El primer término de una sucesión aritmética es $a = 7$ y la diferencia común es $d = 3$. ¿Cuántos términos de esta sucesión deben sumarse para obtener 325?

**62.** La suma de los primeros tres términos de una serie geométrica es 52, y la razón común es $r = 3$. Encuentre el primer término.

**63.** Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, y así sucesivamente. ¿Cuál es el número total de ancestros de la persona en 15 generaciones?

**64.** Encuentre la cantidad de una anualidad formada por 16 pagos anuales de \$1000 cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, capitalizado anualmente.

**65.** ¿Cuánto dinero debe ser invertido cada trimestre al 12% por año, capitalizado trimestralmente, para tener \$10,000 en un año?

**66.** ¿Cuáles son los pagos mensuales sobre una hipoteca de \$60,000 al 9% de interés si el préstamo ha de pagarse en

**(a)** 30 años? **(b)** 15 años?

**67-69** ■ Use inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales $n$.

**67.** $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

**68.** $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

**69.** $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

**70.** Demuestre que $7^n - 1$ es divisible entre 6 para todos los números naturales $n$.

**71.** Sean $a_{n+1} = 3a_n + 4$ y $a_1 = 4$. Demuestre que $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$ para todos los números naturales $n$.

**72.** Demuestre que el número de Fibonacci $F_{4n}$ es divisible entre 3 para todos los números naturales $n$.

**73-76** ■ Evalúe la expresión.

**73.** $\dbinom{5}{2}\dbinom{5}{3}$

**74.** $\dbinom{10}{2} + \dbinom{10}{6}$

**75.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$

**76.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}\binom{8}{8 - k}$

**77-80** ■ Expanda la expresión.

**77.** $(A - B)^3$

**78.** $(x + 2)^5$

**79.** $(1 - x^2)^6$

**80.** $(2x + y)^4$

**81.** Encuentre el 20avo término de la expansión de $(a + b)^{22}$.

**82.** Encuentre los primeros tres términos de la expansión de $(b^{-2/3} + b^{1/3})^{20}$.

**83.** Encuentre el término que contenga $A^6$ en la expansión de $(A + 3B)^{10}$.

# CAPÍTULO 12 EXAMEN

1. Encuentre los primeros seis términos y la sexta suma parcial de la sucesión cuyo $n$-ésimo término es $a_n = 2n^2 - n$.

2. Una sucesión está definida de manera recursiva por $a_{n+1} = 3a_n - n$, $a_1 = 2$. Encuentre los primeros seis términos de la sucesión.

3. Una sucesión aritmética empieza 2, 5, 8, 11, 14, …

   **(a)** Encuentre la diferencia común $d$ para esta sucesión.

   **(b)** Encuentre una fórmula para el $n$-ésimo término $a_n$ de la sucesión.

   **(c)** Encuentre el 35avo término de la sucesión.

4. Una sucesión geométrica empieza 12, 3, 3/4, 3/16, 3/64, …

   **(a)** Encuentre la razón común $r$ para esta sucesión.

   **(b)** Encuentre una fórmula para el $n$-ésimo término $a_n$ de la sucesión.

   **(c)** Encuentre el décimo término de la sucesión.

5. El primer término de una sucesión geométrica es 25, y el cuarto término es $\frac{1}{5}$.

   **(a)** Encuentre la razón común $r$ y el quinto término.

   **(b)** Encuentre la suma parcial de los primeros ocho términos.

6. El primer término de una sucesión aritmética es 10, y el décimo término es 2.

   **(a)** Encuentre la diferencia común y el 100-ésimo término de la sucesión.

   **(b)** Encuentre la suma parcial de los primeros diez términos.

7. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión geométrica con término inicial $a$ y razón común $r$. Demuestre que $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ es también una sucesión geométrica al hallar su razón común.

8. Escriba la expresión sin usar notación sigma y, a continuación, encuentre la suma.

   **(a)** $\sum_{n=1}^{5} (1 - n^2)$ **(b)** $\sum_{n=3}^{6} (-1)^n 2^{n-2}$

9. Encuentre la suma.

   **(a)** $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \cdots + \frac{2^9}{3^{10}}$

   **(b)** $1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{3/2}} + \cdots$

10. Use inducción matemática para demostrar que para todos los números naturales $n$,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11. Expanda $(2x + y^2)^5$.

12. Encuentre el término que contenga $x^3$ en la expansión del binomio $(3x - 2)^{10}$

13. Un perrito pesa 0.85 lb al nacer y cada semana aumenta 24% en peso. Sea $a_n$ su peso en libras al término de su $n$-ésima semana de vida.

   **(a)** Encuentre una fórmula para $a_n$.

   **(b)** ¿Cuánto pesa el perrito a las seis semanas de edad?

   **(c)** ¿La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es aritmética, geométrica o ninguna de éstas?

# Modelado con sucesiones recursivas

Numerosos procesos reales se presentan en etapas. El crecimiento poblacional puede verse en etapas, donde cada nueva generación representa una nueva etapa en crecimiento poblacional. El interés compuesto se paga en etapas, donde cada pago de intereses crea un nuevo saldo en la cuenta. Muchas cosas que cambian continuamente se miden con más facilidad en etapas discretas. Por ejemplo, podemos medir la temperatura de un cuerpo continuamente en enfriamiento en intervalos de una hora. En este *Enfoque* aprendemos la forma en que se usan sucesiones recursivas para modelar estas situaciones. En algunos casos podemos obtener una fórmula explícita para una sucesión, a partir de la relación recursiva que la define, al hallar un patrón en los términos de la sucesión.

## ▼ Sucesiones recursivas como modelos

Suponga que usted deposita algún dinero en una cuenta que paga 6% de interés capitalizado mensualmente. El banco tiene una regla definida para pagar intereses: al final de cada mes el banco suma a la cuenta de usted ½% (o 0.005) de la cantidad que haya en su cuenta en ese momento. Expresemos esta regla como sigue:

$$\boxed{\text{cantidad al término de este mes}} = \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}} + 0.005 \times \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}}$$

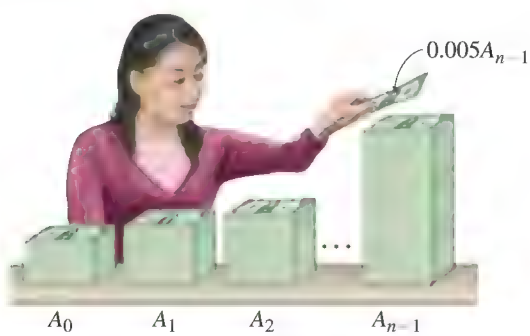
Usando la Propiedad Distributiva, podemos escribir esto como

$$\boxed{\text{cantidad al término de este mes}} = 1.005 \times \boxed{\text{cantidad al término del mes pasado}}$$

Para modelar este enunciado usando álgebra, sea $A_0$ la cantidad del depósito original, sea $A_1$ la cantidad al término del primer mes, sea $A_2$ la cantidad al término del segundo mes, y así sucesivamente. Entonces, $A_n$ es la cantidad al término del $n$-ésimo mes. Por lo tanto,

$$A_n = 1.005A_{n-1}$$

Reconocemos esto como una sucesión definida de manera recursiva, que nos da la cantidad en cada etapa en términos de la cantidad en la etapa precedente.




Para hallar una fórmula para $A_n$, encontremos los primeros pocos términos de la sucesión y busquemos un patrón.

$$A_1 = 1.005A_0$$
$$A_2 = 1.005A_1 = (1.005)^2A_0$$
$$A_3 = 1.005A_2 = (1.005)^3A_0$$
$$A_4 = 1.005A_3 = (1.005)^4A_0$$

Vemos que en general, $A_n = (1.005)^nA_0$.

## EJEMPLO 1 | Crecimiento poblacional

Cierta población de animales crece al 2% al año. La población inicial es 5000.

**(a)** Encuentre una sucesión recursiva que modele la población $P_n$ al final del $n$-ésimo año.

**(b)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión $P_n$.

**(c)** Encuentre una fórmula para $P_n$.

### SOLUCIÓN

**(a)** Podemos modelar la población usando la regla siguiente:

población al final del primer año $= 1.02 \times$ población al final del último año

Algebraicamente, podemos escribir esto como la relación recursiva

$$P_n = 1.02P_{n-1}$$

**(b)** Como la población inicial es 5000, tenemos

$$\begin{aligned}
P_0 &= 5000 \\
P_1 &= 1.02P_0 = (1.02)5000 \\
P_2 &= 1.02P_1 = (1.02)^2 5000 \\
P_3 &= 1.02P_2 = (1.02)^3 5000 \\
P_4 &= 1.02P_3 = (1.02)^4 5000
\end{aligned}$$

**(c)** Vemos del patrón exhibido en el inciso (b) que $P_n = (1.02)^n 5000$. (Observe que $P_n$ es una sucesión geométrica, con razón común $r = 1.02$.) ■

## EJEMPLO 2 | Dosis diaria de medicamento

Un paciente ha de tomar una píldora de 50 mg de cierta medicina todas las mañanas. Se sabe que el cuerpo elimina 40% de la medicina cada 24 horas.

**(a)** Encuentre una sucesión recursiva que modele la cantidad $A_n$ de la medicina en el cuerpo del paciente después de tomar cada pastilla.

**(b)** Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión $A_n$.

**(c)** Encuentre una fórmula para $A_n$.

**(d)** ¿Cuánto de la droga permanece en el cuerpo del paciente después de 5 días? ¿Cuánto acumulará en su sistema después de uso prolongado?

### SOLUCIÓN

**(a)** Cada mañana, 60% de la droga permanece en el sistema del paciente, además que toma 50 mg adicionales (su dosis diaria).

cantidad de medicina esta mañana $= 0.6 \times$ cantidad de medicina la mañana de ayer $+ 50$ mg

Podemos expresar esto como una relación recursiva

$$A_n = 0.6A_{n-1} + 50$$

**(b)** Como la dosis inicial es 50 mg, tenemos

$$\begin{aligned} A_0 &= 50 \\ A_1 &= 0.6A_0 + 50 = 0.6(50) + 50 \\ A_2 &= 0.6A_1 + 50 = 0.6[0.6(50) + 50] + 50 \\ &= 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\ &= 50(0.6^2 + 0.6 + 1) \\ A_3 &= 0.6A_2 + 50 = 0.6[0.6^2(50) + 0.6(50) + 50] + 50 \\ &= 0.6^3(50) + 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\ &= 50(0.6^3 + 0.6^2 + 0.6 + 1) \end{aligned}$$

**(c)** Del patrón del inciso (b) vemos que

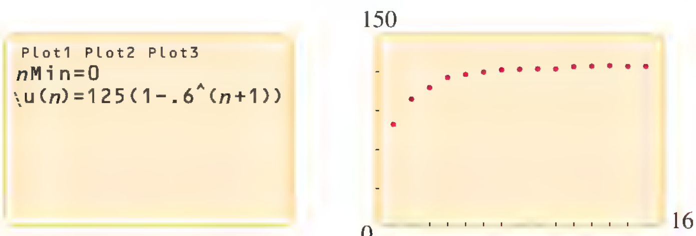
$$\begin{aligned} A_n &= 50(1 + 0.6 + 0.6^2 + \cdots + 0.6^n) \\ &= 50\left(\frac{1 - 0.6^{n+1}}{1 - 0.6}\right) && \text{Suma parcial de una sucesión geométrica (página 802)} \\ &= 125(1 - 0.6^{n+1}) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

**(d)** Para hallar la cantidad restante después de 5 días, sustituimos $n = 5$ y obtenemos $A_5 = 125(1 - 0.6^{5+1}) \approx 119$ mg.

Para hallar la cantidad restante después de uso prolongado, hacemos que $n$ sea grande. Cuando $n$ es grande, $0.6^n$ se aproxima a 0. Esto es, $0.6^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (vea Sección 4.1). Por lo tanto, cuando $n \to \infty$,

$$A_n = 125(1 - 0.6^{n+1}) \to 125(1 - 0) = 125$$

En consecuencia, después de uso prolongado la cantidad de medicamento en el sistema del paciente se aproxima a 125 mg (vea Figura 1, donde hemos usado calculadora graficadora para graficar la sucesión).




Tecleé la sucesión

Grafique la sucesión

**FIGURA 1**

---

## PROBLEMAS

**1. Cuentas de retiro** Innumerables maestros de universidad mantienen ahorros de retiro con la TIAA, que es el programa de anualidades más grande del mundo. El interés en estas cuentas se capitaliza y acredita *a diario*. El profesor Brown tiene \$275,000 en depósito con la TIAA al iniciar 2011 y recibe 3.65% por año en su cuenta.

**(a)** Encuentre una sucesión recursiva que modele la cantidad $A_n$ en su cuenta al final del $n$-ésimo día de 2011.

**(b)** Encuentre los primeros ocho términos de la sucesión $A_n$, redondeados al centavo más cercano.

**(c)** Encuentre una fórmula para $A_n$.

**2. Programa de entrenamiento** Sheila decide embarcarse en un programa de natación como la mejor forma de mantener su salud cardiovascular. Ella empieza por nadar 5 minutos el primer día, luego suma 1½ minutos cada día después de eso.

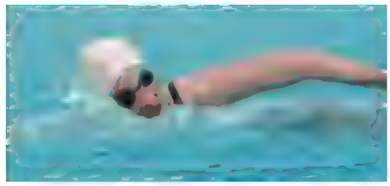
**(a)** Encuentre una fórmula recursiva para el número de minutos $T_n$ que ella nada el $n$-ésimo día de su programa.

**(b)** Encuentre los primeros 6 términos de la sucesión $T_n$.

**(c)** Encuentre una fórmula para $T_n$. ¿Qué clase de sucesión es ésta?

**(d)** ¿En qué día alcanza Sheila su objetivo de nadar al menos 65 minutos al día?

**(e)** ¿Cuál es el tiempo total que ella habrá nadado después de 30 días?



**3. Programa de ahorros mensuales** Alicia abre una cuenta de ahorros que paga 3% de interés por año, capitalizado mensualmente. Ella empieza por depositar $100 al inicio del primer mes y suma $100 al final de cada mes, cuando el interés se acredita.

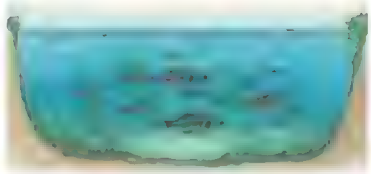
**(a)** Encuentre una fórmula recursiva para la cantidad $A_n$ en su cuenta al término del $n$-ésimo mes. (Incluya el interés acreditado para ese mes y su depósito mensual.)

**(b)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión $A_n$.

**(c)** Use el patrón que observó en (b) para hallar una fórmula para $A_n$. [*Sugerencia:* Para hallar el patrón con más facilidad, es mejor *no* simplificar los términos *demasiado*.]

**(d)** ¿Cuánto ha ahorrado ella después de 5 años?

**4. Poblar un estanque de peces** Un estanque es poblado con 4000 truchas y, por reproducción, la población aumenta 20% por año. Encuentre una sucesión recursiva que modele la población de truchas $P_n$ al final del $n$-ésimo año bajo cada una de las circunstancias siguientes. Encuentre la población de truchas al final del quinto año en cada caso.



**(a)** La población de truchas cambia sólo por la reproducción.

**(b)** Cada año se cosechan 600 truchas.

**(c)** Cada año se introducen 250 truchas adicionales en el estanque.

**(d)** Cada año se cosecha el 10% de las truchas, y 300 truchas adicionales se introducen en el estanque.

**5. Contaminación** Una planta de productos químicos descarga 2400 toneladas de contaminantes por año en un lago adyacente. Por escurrimiento natural, 70% de los contaminantes contenidos en el lago al principio del año son expulsados al término del año.

**(a)** Explique por qué la siguiente sucesión modela la cantidad $A_n$ del contaminante en el lago al término del $n$-ésimo año que la planta está operando.

$$A_n = 0.30A_{n-1} + 2400$$

**(b)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión $A_n$.

**(c)** Encuentre una fórmula para $A_n$.

**(d)** ¿Cuánto del contaminante permanece en el lago después de 6 años? ¿Cuánto quedará después que la planta haya estado operando un largo tiempo?

**(e)** Verifique su respuesta al inciso (d) al graficar $A_n$ con calculadora graficadora para $n = 1$ a $n = 20$.

**6. Programa anual de ahorros** Úrsula abre un certificado de depósito (CD) que da 5% de interés por año; empieza con un depósito de \$5000. Al final de cada año cuando vende el certificado, ella reinvierte a la misma tasa del 5%, sumando también 10% al valor del certificado de depósito de sus otros ahorros. (Entonces, por ejemplo, después del primer año su CD ha ganado 5% de \$5000 en interés, para un valor de \$5250 al vencimiento. Ella entonces agrega 10%, o sea \$525, haciendo un valor total de su renovado CD a \$5775.)

**(a)** Encuentre la fórmula recursiva para la cantidad $U_n$ en el CD de Úrsula cuando ella reinvierte al final del $n$-ésimo años.

**(b)** Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión $U_n$. ¿Esto parece ser una sucesión geométrica?

**(c)** Use el patrón que observó en (b) para hallar una fórmula para $U_n$.

**(d)** ¿Cuánto ha ahorrado ella después de 10 años?

**7. Programa anual de ahorros** Victoria abre un certificado de depósito (CD) de un año con 5% de su rendimiento de interés anual al mismo tiempo que su amiga Úrsula del Problema 6. Ella también empieza con un depósito inicial de \$5000, pero Victoria decide agregar \$500 a su CD cuando reinvierte al final del primer año, \$1000 al final del segundo año, \$1500 al final del tercer año, y así sucesivamente.

**(a)** Explique por qué la fórmula recursiva mostrada a continuación da la cantidad $V_n$ del CD de Victoria cuando ella reinvierte al final del $n$-ésimo año.

$$V_n = 1.05V_{n-1} + 500n$$

**(b)** Usando el modo TABLE ("sucesión") de su calculadora graficadora, ingrese las sucesiones $U_n$ y $V_n$ como se ve en la figura. A continuación, use el comando TABLE para comparar las dos sucesiones. Para los primeros pocos años, Victoria parece estar acumulando más ahorros que Úrsula. Arrastre hacia abajo en la tabla para verificar que Úrsula finalmente se adelante a Victoria en la carrera por ahorrar. ¿En qué año ocurre esto?

```
Plot1 Plot2 Plot3
\u(n) = 1.05 u(n - 1)
 +0 .1 u(n - 1)
 u(nMin) = {5000}
\v(n) = 1.05 v(n - 1)
 +500 n
 v(nMin) = {5000}
```

Tecleé las secuencias

| n | u(n) | v(n) |
|---|---|---|
| 0 | 5000 | 5000 |
| 1 | 5750 | 5750 |
| 2 | 6612.5 | 7037.5 |
| 3 | 7604.4 | 8889.4 |
| 4 | 8745 | 11334 |
| 5 | 10057 | 14401 |
| 6 | 11565 | 18121 |
| n=0 | | |

Tabla de valores de las secuencias

**8. Ley de Newton de Enfriamiento** Una salsera de sopa a una temperatura de 170° se coloca sobre la mesa de un comedor en el que el termostato está fijado en 70°F. La sopa se enfría de acuerdo a la siguiente regla, un caso especial de la Ley de Newton de Enfriamiento: cada minuto, la temperatura de la sopa baja 3% de la diferencia entre la temperatura de la sopa y la temperatura del comedor.

**(a)** Encuentre una sucesión recursiva que modele la temperatura $T_n$ de la sopa en el $n$-ésimo minuto.

**(b)** Ingrese la sucesión $T_n$ en su calculadora graficadora, y use el comando TABLE para hallar la temperatura en incrementos de 10 minutos de $n = 0$ a $n = 60$. (Vea Problema 7(b).)

**(c)** Grafique la sucesión $T_n$. ¿Cuál será la temperatura de la sopa después de un largo tiempo?

**9. Crecimiento poblacional logístico** Los modelos exponenciales sencillos para crecimiento poblacional no toman en cuenta el hecho de que, cuando aumenta la población, sobrevivir se hace más difícil para cada individuo debido a la mayor competencia por alimentos y otros recursos. Podemos obtener un modelo más preciso si suponemos que la tasa de natalidad es proporcional al tamaño de la población, pero la tasa de mortalidad es proporcional al

cuadrado de la población. Usando esta idea, los investigadores encuentran que el número de mapaches $R$ en cierta isla está modelado por la siguiente sucesión recursiva:

Población a fin de año — Número de nacimientos

$$R_n = R_{n-1} + 0.08R_{n-1} - 0.0004(R_{n-1})^2, \qquad R_0 = 100$$

Población a principios de año — Número de muertes

Aquí, $n$ representa el número de años desde que empezaron las observaciones, $R_0$ es la población inicial, 0.08 es el porcentaje anual de nacimientos y 0.0004 es una constante relacionada con la tasa de mortalidad.

**(a)** Use el comando TABLE de una calculadora graficadora para hallar la población de mapaches para cada año de $n = 1$ a $n = 7$.

**(b)** Grafique la sucesión $R_n$. ¿Qué ocurre a la población de mapaches cuando $n$ se hace grande?

KARL RONSTROM/Reuters/Landov

CAPÍTULO 13

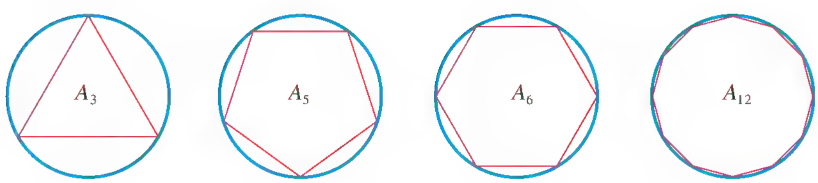
# LÍMITES: UNA MIRADA PREVIA AL CÁLCULO



En este capítulo estudiamos la idea central que subyace en el cálculo: el concepto de *límite*. El cálculo se usa para modelar numerosos fenómenos reales, en particular situaciones que comprenden cambio o movimiento. Se usan límites para hallar la rapidez instantánea de cambio de una función, así como el área de una región con fronteras curvadas. El lector aprenderá en cálculo que estos problemas en apariencia diferentes están estrechamente relacionados; aquí vemos la forma en que los límites nos permiten resolver ambos problemas.

En el Capítulo 2 aprendimos a hallar la rapidez de cambio promedio de una función. Por ejemplo, para hallar la rapidez promedio, dividimos la distancia total recorrida entre el tiempo total. Pero, ¿cómo podemos hallar la rapidez *instantánea*, es decir, la rapidez en un instante determinado? No podemos dividir la distancia total entre el tiempo total porque en un instante la distancia total es cero y el tiempo total de viaje es cero, pero sí podemos hallar la rapidez de cambio promedio en intervalos cada vez menores, haciendo acercamiento en el instante que deseemos. En otras palabras, la rapidez instantánea es un *límite* de la rapidez promedio.

Para hallar el área de la región con lados curvados, aproximamos el área inscribiendo polígonos dentro de la región. La figura ilustra cómo se hace esto para un círculo. Si hacemos que $A_n$ sea el área del polígono inscrito con $n$ lados, entonces vemos que, a medida que $n$ aumenta, $A_n$ se acerca cada vez más al área $A$ del círculo. En otras palabras, el área $A$ es el *límite* de las áreas $A_n$.



# 13.1 HALLAR LÍMITES NUMÉRICA Y GRÁFICAMENTE

Definición de límite ▶ Estimación numérica y gráfica de límites ▶ Límites que no existen ▶ Límites unilaterales

En esta sección usamos tablas de valores y gráficas de funciones para contestar la pregunta: ¿qué ocurre a los valores $f(x)$ de una función $f$ cuando la variable $x$ se aproxima al número $a$?

## ▼ Definición de límite

Empezamos por investigar el comportamiento de la función $f$ definida por

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de $x$ cercanos a 2. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ para valores de $x$ cercanos a 2 pero no iguales a 2.

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.0 | 2.000000 |
| 1.5 | 2.750000 |
| 1.8 | 3.440000 |
| 1.9 | 3.710000 |
| 1.95 | 3.852500 |
| 1.99 | 3.970100 |
| 1.995 | 3.985025 |
| 1.999 | 3.997001 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 3.0 | 8.000000 |
| 2.5 | 5.750000 |
| 2.2 | 4.640000 |
| 2.1 | 4.310000 |
| 2.05 | 4.152500 |
| 2.01 | 4.030100 |
| 2.005 | 4.015025 |
| 2.001 | 4.003001 |

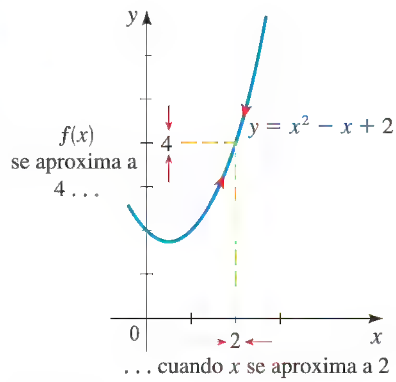



**FIGURA 1**

De la tabla y gráfica de $f$ (una parábola) mostrados en la Figura 1 vemos que cuando $x$ es cercana a 2 (a ambos lados de 2), $f(x)$ es cercana a 4. En realidad, parece que podemos hacer los valores de $f(x)$ tan cercanos a 4 como queramos si tomamos $x$ suficientemente cercana a 2. Expresamos esto diciendo "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando $x$ se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, usamos la siguiente notación.

> **DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN**
>
> Escribimos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> y decimos
>
> "el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima a $a$, es igual a $L$"
>
> si podemos hacer los valores de $f(x)$, arbitrariamente cercanos a $L$ (tan cerca de $L$ como queramos) tomando $x$ suficientemente cercana a $a$, pero no igual a $a$.

En términos generales, esto nos dice que los valores de $f(x)$ se acercan más y más al número $L$ cuando $x$ se acerca cada vez más al número $a$ (de cualquier lado de $a$) pero $x \neq a$.

Una notación alternativa para $\lim_{x\to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

que comúnmente se lee "$f(x)$ se aproxima a $L$ cuando $x$ se aproxima a $a$". Ésta es la notación que usamos en la Sección 3.7 cuando estudiamos asíntotas de funciones racionales.

Observe la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que para hallar el límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$, nunca consideramos $x = a$. De hecho, $f(x)$ no necesita ser definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida $f$ *cerca de a*.

La Figura 2 muestra las gráficas de tres funciones. Nótese que, en el inciso (c), $f(a)$ no está definida y, en el inciso (b), $f(a) \neq L$. En cada uno de estos casos, cualquiera que sea lo que ocurra en $a$, $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

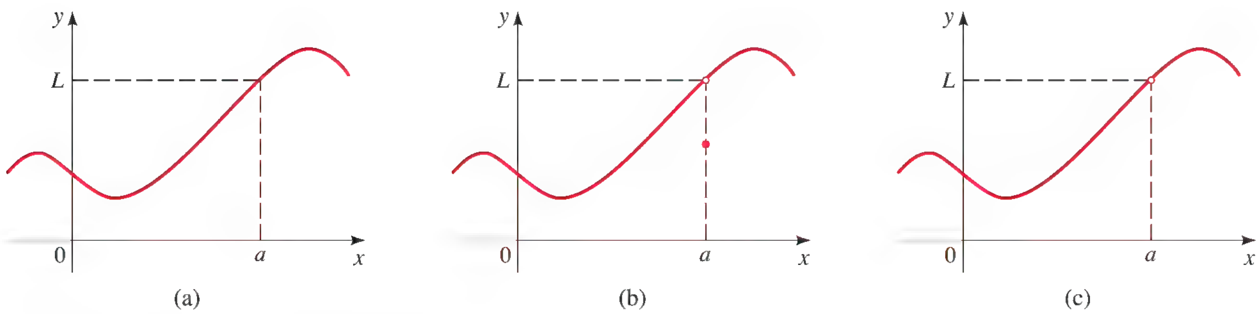



**FIGURA 2** $\lim_{x\to a} f(x) = L$ en los tres casos

## Estimación numérica y gráfica de límites

En la Sección 13.2 desarrollaremos técnicas para hallar valores exactos de límites. Por ahora, usamos tablas y gráficas para estimar límites de funciones.

### EJEMPLO 1 | Estimar numérica y gráficamente un límite

Estime el valor del siguiente límite haciendo una tabla de valores. Verifique su trabajo con una gráfica.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

**SOLUCIÓN** Nótese que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no tiene importancia porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que consideramos valores de $x$ que son cercanos a $a$ pero no iguales a $a$. Las tablas siguientes dan valores de $f(x)$ (redondeados a seis lugares decimales) para valores de $x$ que se aproximan a 1 (pero no son iguales a 1).

| $x < 1$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.666667 |
| 0.9 | 0.526316 |
| 0.99 | 0.502513 |
| 0.999 | 0.500250 |
| 0.9999 | 0.500025 |

| $x < 1$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1.5 | 0.400000 |
| 1.1 | 0.476190 |
| 1.01 | 0.497512 |
| 1.001 | 0.499750 |
| 1.0001 | 0.499975 |

Con base en los valores de las dos tablas, hacemos la conjetura de que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$

Como verificación gráfica usamos una calculadora para producir la Figura 3. Vemos que cuando $x$ es cercana a 1, $y$ es cercana a 0.5. Si usamos las funciones ZOOM y TRACE para obtener una vista más cercana, como en la Figura 4, observamos que cuando $x$ se acerca más y más a 1, $y$ se acerca más y más a 0.5. Esto refuerza nuestra conclusión.

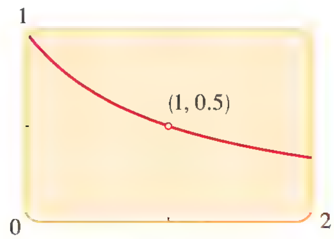



**FIGURA 3**

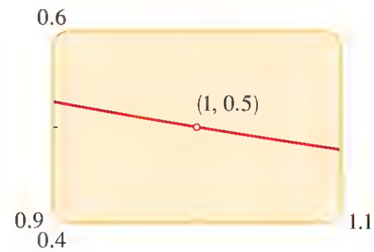



**FIGURA 4**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

## EJEMPLO 2 | Hallar un límite a partir de una tabla

Encuentre $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

| $t$ | $\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ |
|---|---|
| $\pm 1.0$ | 0.16228 |
| $\pm 0.5$ | 0.16553 |
| $\pm 0.1$ | 0.16662 |
| $\pm 0.05$ | 0.16666 |
| $\pm 0.01$ | 0.16667 |

**SOLUCIÓN** La tabla del margen es una lista de valores de la función para varios valores de $t$ cerca de 0. Cuando $t$ se aproxima a 0, los valores de la función parecen aproximarse a 0.1666666…, de modo que calculamos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$

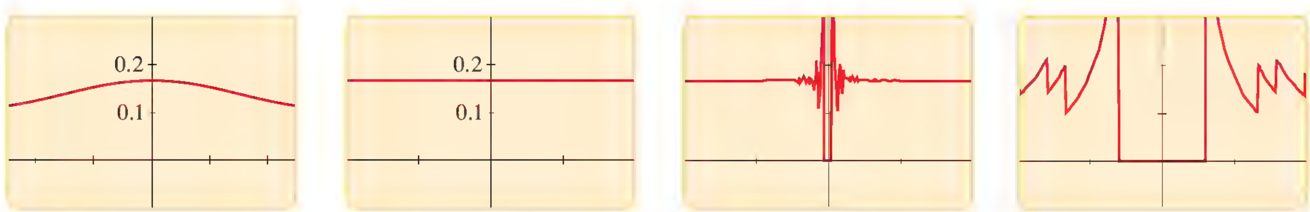
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

| $t$ | $\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ |
|---|---|
| $\pm 0.0005$ | 0.16800 |
| $\pm 0.0001$ | 0.20000 |
| $\pm 0.00005$ | 0.00000 |
| $\pm 0.00001$ | 0.00000 |

¿Qué hubiera ocurrido en el Ejemplo 2 si hubiéramos tomado valores incluso más pequeños de $t$? La tabla del margen muestra los resultados de una calculadora; se puede ver que parece que está pasando algo extraño.

Si el lector intenta estos cálculos en su propia calculadora, puede que obtenga diferentes valores, pero finalmente obtendrá el valor 0 si hace que $t$ sea pequeña lo suficiente. ¿Esto significa que la respuesta es realmente 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como demostraremos en la sección siguiente. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ es muy cercano a 3 cuando $t$ es pequeña. (En realidad, cuando $t$ es suficientemente pequeña, el valor de una calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ es 3.000 . . . hasta tantos dígitos como la calculadora sea capaz de llevar.)

Algo similar ocurre cuando tratamos de graficar la función del Ejemplo 2 en una calculadora. Los incisos (a) y (b) de la Figura 5 muestran gráficas bastante precisas de esta función, y cuando usamos la función TRACE podemos fácilmente calcular que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero, si hacemos un acercamiento demasiado grande, como en los incisos (c) y (d), entonces obtenemos gráficas imprecisas, de nuevo por problemas con sustracción.




(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

**FIGURA 5**

## Límites que no existen

No necesariamente las funciones se aproximan a un valor finito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. Los siguientes tres ejemplos ilustran formas en las que esto puede ocurrir.

### EJEMPLO 3 | Un límite que no existe (una función con un salto)

La función Heaviside $H$ está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

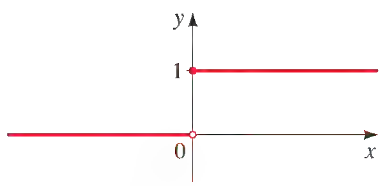



FIGURA 6

[Esta función, llamada así en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925), puede usarse para describir una corriente eléctrica que se conecta en un tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la Figura 6. Nótese el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando $t$ se aproxima a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando $t$ se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ se aproxima a 1. No hay número al que $H(t)$ se aproxime cuando $t$ se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

### EJEMPLO 4 | Un límite que no existe (una función que oscila)

Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$.

**SOLUCIÓN** La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Evaluando la función para algunos pequeños valores de $x$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= \operatorname{sen}\pi = 0 & f(\tfrac{1}{2}) &= \operatorname{sen}2\pi = 0 \\ f(\tfrac{1}{3}) &= \operatorname{sen}3\pi = 0 & f(\tfrac{1}{4}) &= \operatorname{sen}4\pi = 0 \\ f(0.1) &= \operatorname{sen}10\pi = 0 & f(0.01) &= \operatorname{sen}100\pi = 0 \end{aligned}$$

Análogamente, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información podríamos estar tentados a calcular que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \overset{?}{=} 0$$

pero esta vez nuestro cálculo es erróneo. Nótese que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$ para cualquier entero $n$, también es cierto que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de $x$ que se aproximan a 0. (Vea la gráfica de la Figura 7.)

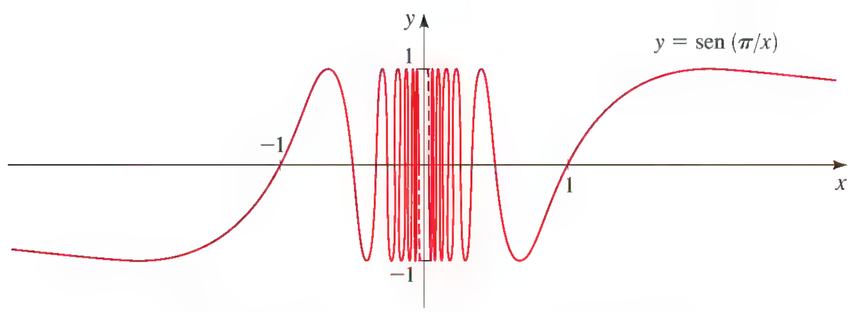



FIGURA 7

Las líneas interrumpidas indican que los valores de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscilan entre 1 y $-1$ con frecuencia infinita cuando $x$ se aproxima a 0. Como los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando $x$ se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

El Ejemplo 4 ilustra algunos de los problemas del cálculo del valor de un límite. Es fácil calcular el valor erróneo si usamos valores inapropiados de $x$, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y como lo demuestra el estudio después del Ejemplo 2, a veces calculadoras y computadoras dan valores incorrectos. En las siguientes dos secciones, sin embargo, desarrollaremos métodos a prueba de errores para calcular límites.

### EJEMPLO 5 | Un límite que no existe (una función con asíntota vertical)

Encuentre $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

| $x$ | $\frac{1}{x^2}$ |
|---|---|
| ±1 | 1 |
| ±0.5 | 4 |
| ±0.2 | 25 |
| ±0.1 | 100 |
| ±0.05 | 400 |
| ±0.01 | 10,000 |
| ±0.001 | 1,000,000 |

**SOLUCIÓN** Cuando $x$ se acerca a 0, $x^2$ también se acerca a 0, y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla al margen.) En realidad, parece en la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ de la Figura 8 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar $x$ cerca lo suficiente de 0. Entonces los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe.

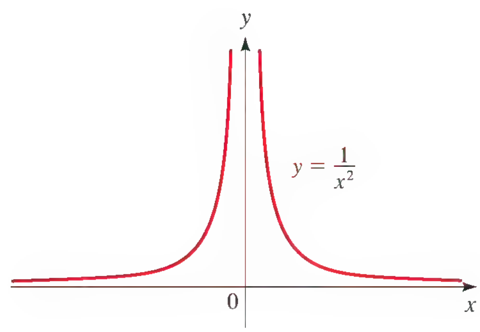



**FIGURA 8**

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Para indicar la clase de comportamiento exhibido en el Ejemplo 5, usamos la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no significa que estamos considerando que $\infty$ es un número, ni que el límite existe. Simplemente expresa la particular forma en la que el límite no existe: $1/x^2$ se puede hacer tan grande como queramos al tomar $x$ cerca lo suficiente de 0. Observe que la recta $x = 0$ (el eje $y$) es una asíntota vertical en el sentido que describimos en la Sección 3.6.

## Límites unilaterales

Observamos en el Ejemplo 3 que $H(t)$ se aproxima a 0 cuando $t$ se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ se aproxima a 1 cuando $t$ se aproxima a 0 por la derecha. Indicamos esta situación simbólicamente al escribir

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

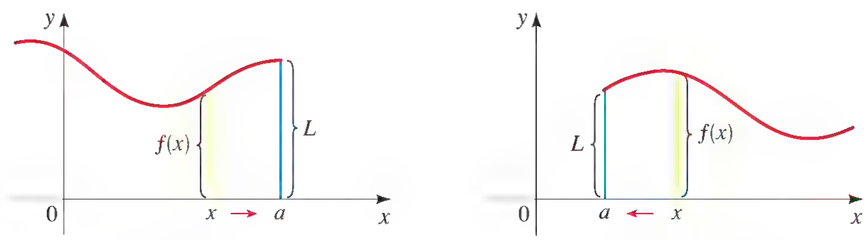
El símbolo "$t \to 0^-$" indica que consideramos sólo valores de $t$ que son menores a 0. Del mismo modo, "$t \to 0^+$" indica que consideramos sólo valores de $t$ que son mayores a 0.

> **DEFINICIÓN DE LÍMITE UNILATERAL**
>
> Escribimos
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> y decimos que el "límite por la izquierda de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$" [o el "límite de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$ por la izquierda"] es igual a $L$ si podemos hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a $L$ al tomar $x$ cerca lo suficiente de $a$ y $x$ menor que $a$.

Observe que esta definición difiere de la definición de un límite bilateral sólo en que requerimos que $x$ sea menor que $a$. Análogamente, si requerimos que $x$ sea mayor que $a$, obtenemos "el **límite derecho de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$** es igual a $L$", y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces el símbolo "$x \to a$" significa que consideramos sólo $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la Figura 9.




(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

**FIGURA 9**

Al comparar las definiciones de límites bilaterales y unilaterales, vemos que lo siguiente es verdadero.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

*Entonces si los límites izquierdo y derecho son diferentes, el límite (bilateral) no existe.* Usamos este dato en los siguientes dos ejemplos.

## EJEMPLO 6 | Límites a partir de una gráfica

La gráfica de una función $g$ se muestra en la Figura 10. Úsela para expresar los valores (si existen) de lo siguiente:

**(a)** $\lim_{x \to 2} g(x)$, $\lim_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$

**(b)** $\lim_{x \to 5} g(x)$, $\lim_{x \to 5^+} g(x)$, $\lim_{x \to 5} g(x)$

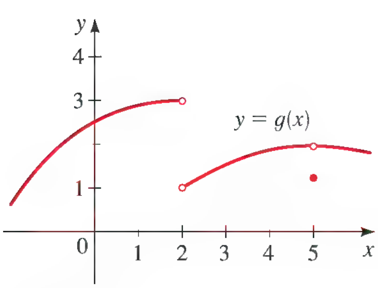



**FIGURA 10**

### SOLUCIÓN

**(a)** De la gráfica vemos que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando $x$ se aproxima a 3 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

Como los límites izquierdo y derecho son diferentes, concluimos que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

**(b)** La gráfica también muestra que

$$\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$$

Esta vez los límites izquierdo y derecho son iguales, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## EJEMPLO 7 | Una función definida por tramos

Sea $f$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Grafique $f$, y use la gráfica para hallar lo siguiente:

**(a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

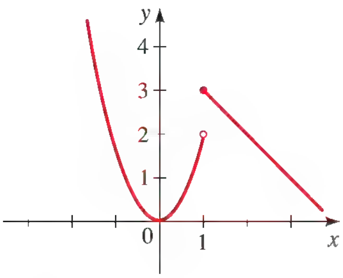


FIGURA 11

**SOLUCIÓN** La gráfica de $f$ se ilustra en la Figura 11. De la gráfica vemos que los valores de $f(x)$ se aproximan a 2 cuando $x$ se aproxima a 1 por la izquierda, pero se aproximan a 3 cuando $x$ se aproxima a 1 por la derecha. Entonces, los límites izquierdo y derecho no son iguales. En consecuencia, tenemos

**(a)** $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$ **(b)** $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

# 13.1 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Cuando escribimos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces, en términos generales, los valores de $f(x)$ se acercan más y más al número _______cuando los valores de $x$ se acercan más y más a _____. Para determinar $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x-5}$, intentamos valores para $x$ más y más cercanos a ____ y encontramos que el límite es _______.

**2.** Escribimos $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y decimos que el ______de $f(x)$ cuando $x$ se aproxima a $a$ por la _____(izquierda/derecha) es igual a _____. Para hallar el límite izquierdo, intentamos valores para $x$ que son ____(menores/mayores) que $a$. Un límite existe si y sólo si existen los límites ______ y _____ y son _______.

## HABILIDADES

**3-4** ■ Estime el valor del límite haciendo una tabla de valores. Compruebe su trabajo con una gráfica.

**3.** $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$ **4.** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

**5-10** ■ Complete la tabla de valores (a cinco lugares decimales), y use la tabla para estimar el valor del límite.

**5.** $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

| $x$ | 3.9 | 3.99 | 3.999 | 4.001 | 4.01 | 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**6.** $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2+x-6}$

| $x$ | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**7.** $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1}$

| $x$ | 0.9 | 0.99 | 0.999 | 1.001 | 1.01 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**8.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

| $x$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | $0.001$ | $0.01$ | $0.1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | |

**9.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

| $x$ | $\pm 1$ | $\pm 0.5$ | $\pm 0.1$ | $\pm 0.05$ | $\pm 0.01$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**10.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$

| $x$ | $0.1$ | $0.01$ | $0.001$ | $0.0001$ | $0.00001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |

**11-16** ■ Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. A continuación, use calculadora graficadora para confirmar gráficamente sus resultados.

**11.** $\lim\limits_{x\to\ 4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 7x + 12}$

**12.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

**13.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$

**14.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$

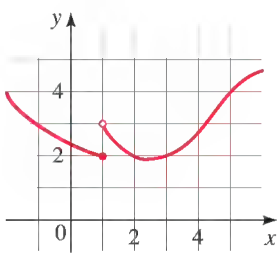
**15.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

**16.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$

**17.** Para la función $f$ cuya gráfica nos dan, exprese el valor de la cantidad dada si existe; si no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

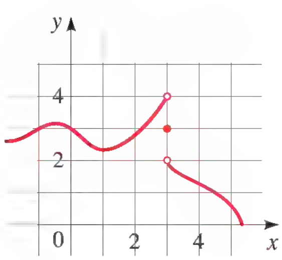
**(d)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **(e)** $f(5)$




**18.** Para la función $f$ cuya gráfica nos dan, exprese el valor de la cantidad dada si existe; si no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

**(d)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **(e)** $f(3)$

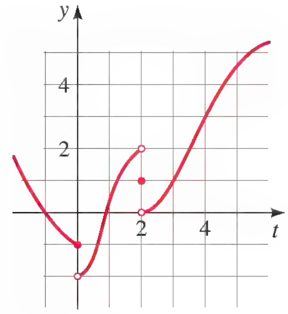



**19.** Para la función $f$ cuya gráfica nos dan, exprese el valor de la cantidad dada si existe; si no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ **(b)** $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)$ **(c)** $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$

**(d)** $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$ **(e)** $\lim\limits_{t\to 2^+} g(t)$ **(f)** $\lim\limits_{t\to 2} g(t)$

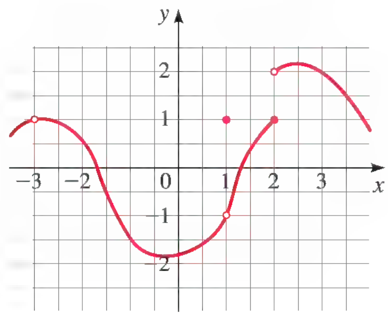
**(g)** $g(2)$ **(h)** $\lim\limits_{t\to 4} g(t)$




**20.** Exprese el valor del límite si existe, a partir de la gráfica dada de $f$; si no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\ 3} f(x)$

**(d)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$




**21-28** ■ Use calculadora graficadora para determinar si existe el límite; si existe, estime su valor a dos lugares decimales.

**21.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$

**22.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos 5x - \cos 4x}$

**23.** $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

**24.** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

**25.** $\lim\limits_{x\to 0} \cos \dfrac{1}{x}$

**26.** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{2}{x}$

**27.** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x - 3|}{x - 3}$

**28.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

**29-32** ■ Grafique la función definida por tramos y use su calculadora graficadora para hallar los valores de los límites, si existen.

**29.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**(a)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

**30.** $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

**(a)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

**31.** $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

**(a)** $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

**32.** $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \leq -2 \\ -x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

**(a)** $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ **(c)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**33. Una función con límites especificados** Trace la gráfica de un ejemplo de una función $f$ que satisfaga todas las condiciones siguientes.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \qquad f(0) = 2 \qquad f(2) = 3$$

¿Cuántas hay de tales funciones?

**34. Trampas de la calculadora graficadora**

**(a)** Evalúe

$$h(x) = \frac{\tan x - x}{x^3}$$

para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y $0.005$.

**(b)** Calcule el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

**(c)** Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de $x$ hasta que por último llegue a valores de 0 para $h(x)$. ¿Todavía tiene confianza en que su cálculo del inciso (b) es correcto? Explique por qué finalmente obtuvo valores de 0.

**(d)** Grafique la función $h$ en el rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación, haga acercamiento en el punto donde la gráfica cruza el eje $y$ para estimar el límite de $h(x)$ cuando $x$ se aproxima a 0. Continúe con el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de $h$. Compare con sus resultados obtenidos en el inciso (c).

# 13.2 HALLAR LÍMITES ALGEBRAICAMENTE

Leyes de límites ▶ Aplicación de leyes de límites ▶ Hallar límites usando álgebra y las Leyes de Límites ▶ Uso de límites izquierdo y derecho

En la Sección 13.1 usamos calculadoras y gráficas para calcular los valores de límites, pero vimos que tales métodos no siempre llevan a la respuesta correcta. En esta sección usamos métodos algebraicos para hallar límites exactamente.

## ▼ Leyes de límites

Usamos las siguientes propiedades de límites, llamadas *Leyes de Límites*, para calcular límites.

### LEYES DE LÍMITES

Suponga que $c$ es una constante y que existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces

**1.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$ — Límite de una suma

**2.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$ — Límite de una diferencia

**3.** $\lim\limits_{x \to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$ — Límite de un múltiplo constante

**4.** $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$ — Límite de un producto

**5.** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ — Límite de un cociente

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

1. El límite de la suma de límites es la suma de los límites. — *Límite de una suma*
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites. — *Límite de una diferencia*
3. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función. — *Límite de un múltiplo constante*
4. El límite de un producto es el producto de los límites. — *Límite de un producto*
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0). — *Límite de un cociente*

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a $L$ y $g(x)$ es cercana a $M$, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto nos da una base intuitiva para pensar que la Ley 1 es verdadera.

Si usamos la Ley 4 (Límite de un Producto) repetidamente con $g(x) = f(x)$, obtenemos la siguiente Ley 6 para el límite de una potencia. Una ley similar se cumple para raíces.

**LEYES DE LÍMITES**

**6.** $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ donde $n$ es un entero positivo — *Límite de una potencia*

**7.** $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ donde $n$ es un entero positivo — *Límite de una raíz*

[Si $n$ es par, suponemos que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$.]

En palabras, estas leyes dicen lo siguiente:

**6.** El límite de una potencia es la potencia del límite. — *Límite de una potencia*

**7.** El límite de una raíz es la raíz del límite. — *Límite de una raíz*

## EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de límites

Use las leyes de límites y las gráficas de $f$ y $g$ en la Figura 1 para evaluar los siguientes límites si existen.

**(a)** $\lim\limits_{x\to -2} [f(x) + 5g(x)]$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)g(x)]$

**(c)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 1} [f(x)]^3$

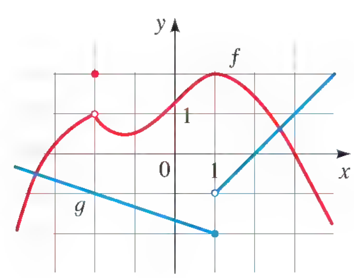



**FIGURA 1**

### SOLUCIÓN

**(a)** De las gráficas de $f$ y $g$ vemos que

$$\lim_{x\to\ 2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\ 2} g(x) = -1$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{Límite de una suma} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{Límite de un múltiplo constante} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

**(b)** Vemos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites izquierdo y derecho son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

Entonces no podemos usar la Ley 4 (Límite de un Producto). El límite dado no existe, porque el límite izquierdo no es igual a límite derecho.

**(c)** Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Como el límite de un denominador es 0, no podemos usar la Ley 5 (Límite de un Cociente). El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 mientras que el numerador se aproxima a un número diferente de cero.

**(d)** Como $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, usamos la Ley 6 para obtener

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} [f(x)]^3 &= [\lim_{x \to 1} f(x)]^3 && \text{Límite de una potencia} \\ &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

## Aplicación de leyes de límites

Al aplicar las Leyes de Límites, necesitamos usar cuatro límites especiales.

**ALGUNOS LÍMITES ESPECIALES**

1. $\lim_{x \to a} c = c$
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde $n$ es un entero positivo
4. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde $n$ es un entero positivo $a > 0$

Los Límites Especiales 1 y 2 son intuitivamente obvios; viendo las gráficas de $y = c$ y $y = x$ nos convencerá de su validez. Los Límites 3 y 4 son casos especiales de las Leyes de Límites 6 y 7 (Límites de una Potencia y una Raíz).

### EJEMPLO 2 | Uso de las Leyes de Límites

Evalúe los límites siguientes, y justifique cada paso.

**(a)** $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$

**(b)** $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

**SOLUCIÓN**

**(a)**
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5} 4 && \text{Límites de una diferencia y suma}\\ &= 2\lim_{x\to 5} x^2 - 3\lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 4 && \text{Límite de un Múltiplo Constante}\\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{Límites especiales 3, 2 y 1}\\ &= 39\end{aligned}$$

**(b)** Empezamos por usar la Ley 5, pero su uso está totalmente justificado sólo en la etapa final cuando vemos que existen los límites del numerador y denominador y el límite del denominador no es 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x\to -2}(5 - 3x)} && \text{Límite de un Cociente}\\ &= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2\lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3\lim_{x\to -2} x} && \text{Límites de Sumas, Diferencias y Múltiplos Constantes}\\ &= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{Límites Especiales 3, 2 y 1}\\ &= -\frac{1}{11}\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **7**

Si hacemos $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En el Ejemplo 2(a) encontramos que $\lim_{x\to 5} f(x) = 39$. En otras palabras, habríamos obtenido la respuesta correcta al sustituir 5 por $x$. Análogamente, una sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del Ejemplo 2 son polinomiales y una función racional, respectivamente, y un uso similar de las Leyes de Límites demuestra que la sustitución directa siempre funciona para tales funciones. Expresamos este dato como sigue.

**LÍMITES POR SUSTITUCIÓN DIRECTA**

Si $f$ es polinomial o una función racional y $a$ está en el dominio de $f$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con propiedad de sustitución directa se denominan **continuas en** $a$. Aprenderemos más acerca de funciones continuas cuando estudiemos cálculo.

## EJEMPLO 3 | Hallar límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites.

**(a)** $\lim_{x\to 3}(2x^3 - 10x - 8)$ **(b)** $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$

**SOLUCIÓN**

**(a)** La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 8$ es polinomial, por lo que podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x\to 3}(2x^3 - 10x - 8) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

**(b)** La función $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^4 + 2}$ es una función racional y $x = -1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Entonces, podemos hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x}{x^4 + 2} = \frac{(-1)^2 + 5(-1)}{(-1)^4 + 2} = -\frac{4}{3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

## Hallar límites usando álgebra y las Leyes de Límites

Como vimos en el Ejemplo 3, la evaluación de límites por sustitución directa es fácil pero no todos los límites pueden evaluarse de este modo. En realidad, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles exigen que trabajemos más para evaluar el límite. Los tres ejemplos siguientes ilustran cómo podemos usar álgebra para hallar límites.

### EJEMPLO 4 | Hallar un límite por cancelación de un factor común

Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

**SOLUCIÓN** Sea $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$. No podemos hallar el límite si sustituimos $x = 1$ porque $f(1)$ no está definida. Ni podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) porque el límite del denominador es 0. En cambio, necesitamos hacer un poco de álgebra preliminar. Factorizamos el denominador como una diferencia de cuadrados:

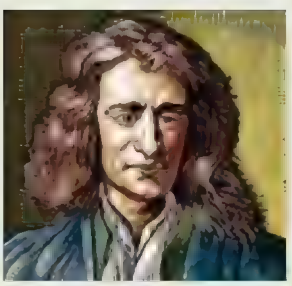
$$\frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)}$$

El numerador y denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando tomamos el límite cuando $x$ se aproxima a 1, tenemos $x \neq 1$ y entonces $x - 1 \neq 0$. Por lo tanto, podemos cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} && \text{Factorice} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x + 1} && \text{Cancele} \\
&= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x \to 1
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma algebraicamente la respuesta que obtuvimos numérica y gráficamente en el Ejemplo 1 de la Sección 13.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**



B. Sanerson/Photo Researchers

**SIR ISAAC NEWTON** (1642-1727) es universalmente considerado como uno de los gigantes de la física y matemáticas. Es bien conocido por descubrir las leyes del movimiento y gravedad, y por investigar el cálculo, pero también demostró el Teorema del Binomio y las leyes de óptica; también inventó métodos para resolver ecuaciones con polinomios con cualquier grado de precisión deseado. Nació un día de navidad, pocos meses después de la muerte de su padre. Después de una niñez desgraciada, entró a la Universidad de Cambridge donde aprendió matemáticas estudiando las obras de Euclides y Descartes.

Durante los años de la peste negra de 1665 y 1666, cuando la universidad fue cerrada, Newton pensó y escribió sus ideas que, una vez publicadas, revolucionaron instantáneamente las ciencias. Inducido por un enfermizo temor a ser criticado, publicó estos escritos sólo después de muchos años de ser estimulado por Edmund Halley (que descubrió el ahora famoso cometa) y otros colegas.

Las obras de Newton le dieron una fama y prestigio enormes. Hasta los poetas se vieron incitados a elogiarlo; el papa Alejandro escribió:

La naturaleza y sus leyes<br>
Estuvieron ocultas por la noche<br>
Dios dijo, "Hágase Newton"<br>
Y la luz se hizo.

Newton era mucho más modesto acerca de sus logros. Decía: "Parece que sólo soy un niño que juega a orillas del mar… mientras que el gran océano de la verdad está ante mí esperando ser descubierto." Newton fue hecho Caballero del Imperio Británico por la reina Ana en 1705 y cuando murió fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster.

**EJEMPLO 5 | Hallar un límite por simplificación**

Evalúe $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

**SOLUCIÓN** No podemos usar sustitución directa para evaluar este límite, porque el límite del denominador es 0. Entonces, primero simplificamos algebraicamente el límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} && \text{Expanda} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h \to 0} (6 + h) && \text{Cancele } h \\
&= 6 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

**EJEMPLO 6 | Hallar un límite por racionalización**

Encuentre $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

**SOLUCIÓN** No podemos aplicar la Ley 5 (Límite de un Cociente) de inmediato, porque el límite del denominador es 0. Aquí, el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} && \text{Racionalice el numerador} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0}(t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma el que hicimos en el Ejemplo 2 de la Sección 13.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## Uso de límites izquierdo y derecho

Algunos límites se calculan mejor si primero hallamos los límites izquierdo y derecho. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que descubrimos en la Sección 13.1. Dice que *existe un límite bilateral si y sólo si existen ambos límites unilaterales y son iguales.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Cuando calculamos límites unilaterales, usamos el dato de que las Leyes de Límites también se cumplen para límites unilaterales.

**EJEMPLO 7 | Comparación de límites derecho e izquierdo**

Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

**SOLUCIÓN** Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, tenemos $|x| = -x$, de modo que

$$\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

El resultado del Ejemplo 7 se ve admisible de la Figura 2

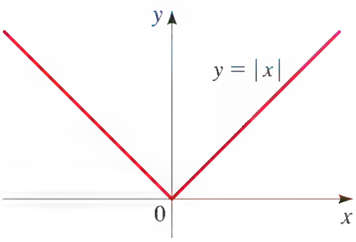



**FIGURA 2**

## EJEMPLO 8 | Comparación de límites derecho e izquierdo

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

**SOLUCIÓN** Como $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = x$ para $x < 0$, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} (-1) = -1$$

Como los límites derecho e izquierdo existen y son diferentes, se deduce que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la Figura 3 y apoya los límites que encontramos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

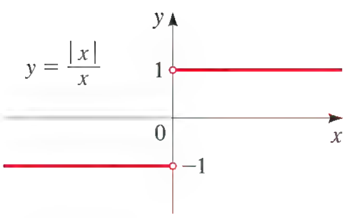



**FIGURA 3**

## EJEMPLO 9 | Límite de una función definida por tramos

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Determine si existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

**SOLUCIÓN** Como $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

Como $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tenemos

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2\cdot 4 = 0$$

Los límites derecho e izquierdo son iguales. Por lo tanto, el límite existe y

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de $f$ se ilustra en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

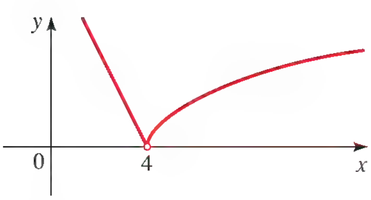



**FIGURA 4**

## 13.2 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

1. Suponga que existen los límites siguientes:

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ y } \lim_{x\to a} g(x)$$

Entonces $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] =$ ________ + ________, y $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] =$ ________ · ________.
Estas fórmulas se pueden expresar verbalmente como sigue: El límite de una suma es la ________ de los límites, y el límite de un producto es el ________de los límites.

2. Si $f$ es polinomial o una función racional y $a$ está en el dominio de $f$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) =$ ________..

### HABILIDADES

3. Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

Encuentre el valor del límite dado. Si el límite no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim_{x\to a}[f(x) + h(x)]$ **(b)** $\lim_{x\to a}[f(x)]^2$

**(c)** $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{h(x)}$ **(d)** $\lim_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}$

**(e)** $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{h(x)}$ **(f)** $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

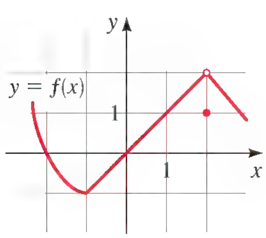
**(g)** $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **(h)** $\lim_{x\to a}\dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

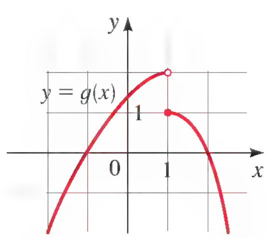
4. Nos dan las gráficas de $f$ y $g$. Úselas para evaluar cada límite si existe. Si el límite no existe, explique por qué.

**(a)** $\lim_{x\to 2}[f(x) + g(x)]$ **(b)** $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$

**(c)** $\lim_{x\to 0}[f(x)g(x)]$ **(d)** $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

**(e)** $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to 1}\sqrt{3 + f(x)}$




**5-10** ■ Evalúe el límite y justifique cada paso al indicar la(s) Ley(es) de Límites apropiada(s).

5. $\lim_{x\to 4}(5x^2 - 2x + 3)$

6. $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

7. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

8. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

9. $\lim_{t\to -2}(t + 1)^9(t^2 - 1)$

10. $\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4 + 3u + 6}$

**11-22** ■ Evalúe el límite si existe.

11. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x + 6}{x + 2}$

14. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

15. $\lim_{t\to -3}\dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

17. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

18. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

19. $\lim_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

20. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

21. $\lim_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

22. $\lim_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

**23-26** ■ Encuentre el límite y use calculadora graficadora para confirmar gráficamente el resultado que haya obtenido.

23. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

24. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(4 + x)^3 - 64}{x}$

25. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - x}$

26. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^8 - 1}{x^5 - x}$

27. **(a)** Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

al graficar la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

**(b)** Haga una tabla de valores de $f(x)$ para $x$ cercana a 0, y calcule el valor del límite.

**(c)** Use las Leyes de Límites para demostrar que su cálculo es correcto.

28. **(a)** Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ a dos lugares decimales.

**(b)** Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite a cuatro lugares decimales.

**(c)** Use las Leyes de Límites para hallar el valor exacto del límite.

**29-34**■ Encuentre el límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.

29. $\lim_{x\to -4}|x + 4|$

30. $\lim_{x\to -4^-}\dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

31. $\lim_{x\to 2}\dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

32. $\lim_{x\to 1.5}\dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

33. $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

34. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

**35.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

**(a)** Encuentre $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.
**(b)** ¿Existe el $\lim_{x\to 2} f(x)$?
**(c)** Trace la gráfica de $f$.

**36.** Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**(a)** Evalúe cada límite si existe.

(i) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (iv) $\lim_{x\to 2} h(x)$
(ii) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} h(x)$
(iii) $\lim_{x\to 1} h(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} h(x)$

**(b)** Trace la gráfica de $h$.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**37. Cancelación y límites**

**(a)** ¿Qué hay de mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

**(b)** En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

es correcta.

**38. La contracción de Lorentz** En la teoría de relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud $L$ de un cuerpo como función de su velocidad $v$ con respecto a un observador, donde $L_0$ es la longitud del cuerpo en reposo y $c$ es la velocidad de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

**39. Límites de sumas y productos**

**(a)** Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aun cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ exista.
**(b)** Demuestre, por medio de un ejemplo, que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aun cuando $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$ exista.

# 13.3 RECTAS TANGENTES Y DERIVADAS

El problema de una tangente ▶ Derivadas ▶ Rapidez de cambio instantánea

En esta ocasión vemos cómo surgen límites cuando tratamos de hallar la recta tangente a una curva o la rapidez de cambio instantánea de una función.

## ▼ El problema de una tangente

Una *recta tangente* es una recta que *apenas* toca una curva. Por ejemplo, la Figura 1 muestra la parábola $y = x^2$ y la recta tangente $t$ que toca la parábola en el punto $P(1, 1)$. Estaremos en aptitud de hallar una ecuación de la recta tangente $t$ tan pronto como conozcamos su pendiente $m$. La dificultad es que conocemos sólo un punto $P$, en $t$, mientras que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente. Pero, observe que podemos calcular una aproximación a $m$ si escogemos un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la Figura 2) y calculamos la pendiente $m_{PQ}$ de la recta secante $PQ$.

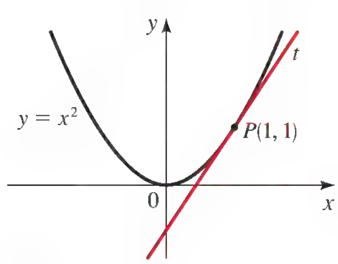



**FIGURA 1**

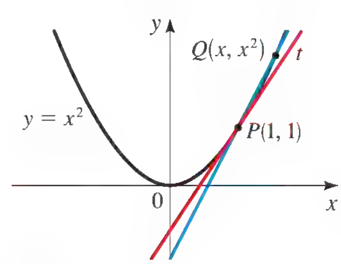



**FIGURA 2**

Escogemos $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ahora hagamos que $x$ se aproxime a 1, de modo que $Q$ se aproxima a $P$ a lo largo de la parábola. La Figura 3 muestra la forma en que las rectas secantes correspondientes giran alrededor de $P$ y se aproximan a la recta tangente $t$.

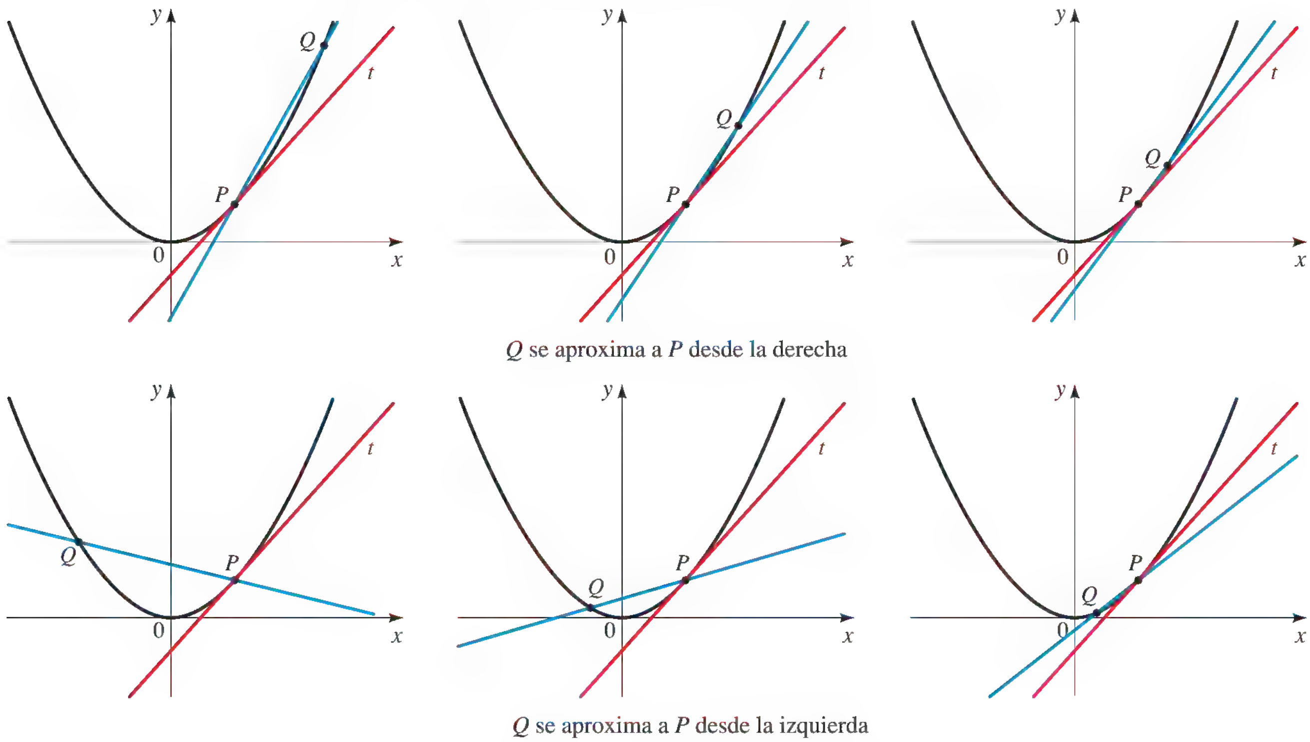



**FIGURA 3**

La pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Entonces, usando el método de la Sección 13.2, tenemos

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma de punto pendiente para la ecuación de una recta que pasa por el punto $(x_1, y_1)$ con pendiente $m$ es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Vea Sección 1.10.)

Ahora que sabemos que la pendiente de la recta tangente es $m = 2$, podemos usar la forma de punto pendiente de la ecuación de una recta para hallar su ecuación.

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

A veces nos referimos a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si hacemos suficiente acercamiento hacia el punto, la curva se ve casi como una recta. La Figura 4 ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$. Cuanto más acercamiento hagamos, la parábola se ve más como una recta. En otras palabras, la curva se hace casi imposible de distinguir de su recta tangente.

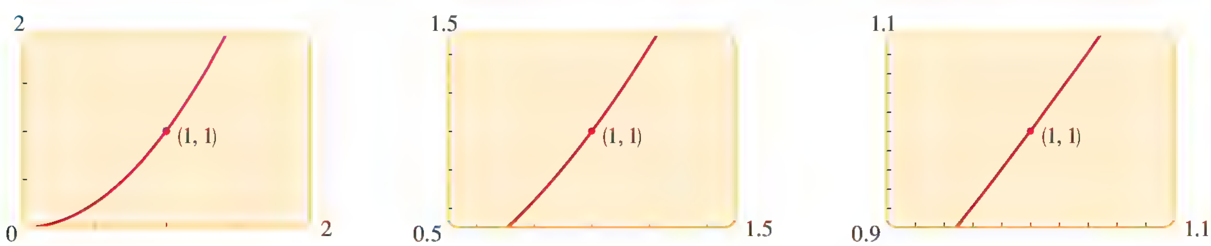



**FIGURA 4** Acercamiento hacia el punto (1, 1) en la parábola $y = x^2$

Si tenemos una curva general $C$ con ecuación $y = f(x)$ y deseamos hallar la recta tangente a $C$ en el punto $P(a, f(a))$, entonces consideramos un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calculamos la pendiente de la recta secante $PQ$.

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A continuación hacemos que $Q$ se aproxime a $P$ a lo largo de la curva $C$ haciendo que $x$ se aproxime a $a$. Si $m_{PQ}$ se aproxima a un número $m$, entonces definimos la *tangente t* como la recta que pasa por $P$ con pendiente $m$. (Esto quiere decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante $PQ$ cuando $Q$ se aproxima a $P$. Vea Figura 5.)

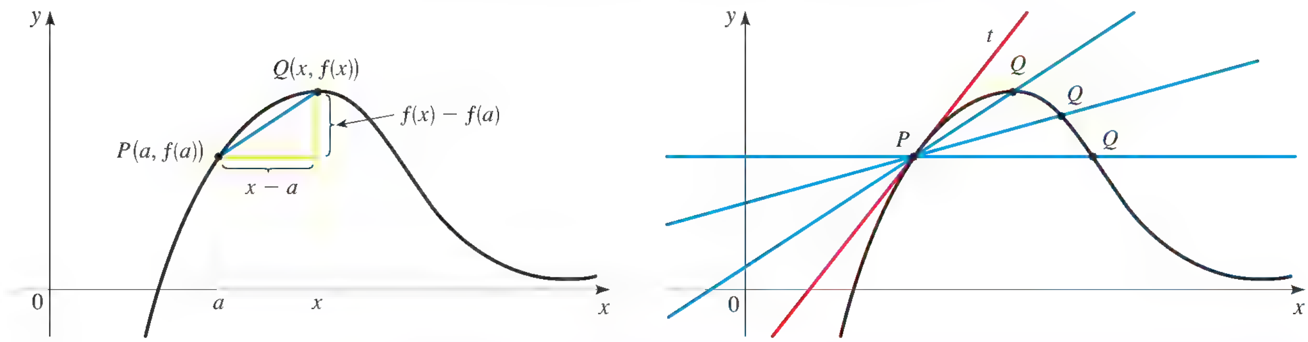



**FIGURA 5**

### DEFINICIÓN DE UNA RECTA TANGENTE

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por $P$ con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

## EJEMPLO 1 | Hallar una recta tangente a una hipérbola

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto (3, 1).

**SOLUCIÓN** Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la recta tangente en (3, 1) es

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{3}{x} - 1}{x - 3} && f(x) = \frac{3}{x} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} && \text{Multiplique numerador y denominador por } x \\
&= \lim_{x \to 3} \left(-\frac{1}{x}\right) && \text{Cancele } x - 3 \\
&= -\frac{1}{3} && \text{Sea } x \to 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

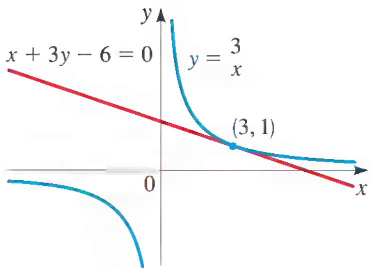



**FIGURA 6**

que se simplifica a

$$x - 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y su tangente se muestran en la Figura 6.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que a veces es más fácil de usar. Sea $h = x - a$. Entonces $x = a + h$, de modo que la pendiente de la recta secante $PQ$ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vea la Figura 7, en la que el caso $h > 0$ está ilustrado y $Q$ es la recta de $P$, pero si ocurre que $h < 0$ entonces $Q$ estaría a la izquierda de $P$.

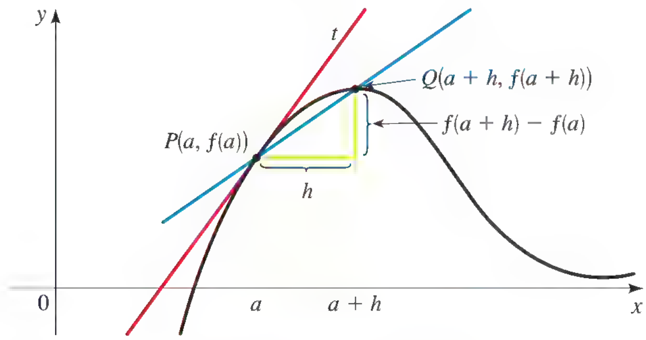



**FIGURA 7**

Observe que cuando $x$ se aproxima a $a$, $h$ se aproxima a 0 (porque $h = x - a$), de modo que la expresión para la pendiente de la recta tangentes se convierte en

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Newton y límites**
En 1687 Newton (vea página 852) publicó su obra maestra *Principia Mathematica*. En este trabajo, el más grande tratado científico jamás escrito, Newton enunció su versión de cálculo y la usó para investigar la mecánica, dinámica de fluidos y movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios de cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes que hicieron sabios griegos como Eudoxio y Arquímedes. Aun cuando aspectos de la idea de un límite están implícitos en el "método de agotamiento", Eudoxio y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de un límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, inmediatos precursores de Newton en el desarrollo del cálculo, nunca usaron realmente límites. Fue Isaac Newton el primero que explícitamente habló de límites, explicó que la idea principal que hay detrás de límites es que las cantidades "se aproximan más por cualquier diferencia determinada". Newton dijo que el límite era el concepto básico en cálculo, pero dejó a matemáticos posteriores como Cauchy y Weierstrass que aclararan estas ideas.

## EJEMPLO 2 | Hallar una recta tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x + 3$ en el punto $(1, 2)$.

**SOLUCIÓN** Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, entonces la pendiente de la recta tangente donde $a = 1$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h) + 3] - [1^3 - 2(1) + 3]}{h} && f(x) = x^3 - 2x + 3 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 3 - 2}{h} && \text{Expanda numerador} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^2 + h^3}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h \to 0} (1 + 3h + h^2) && \text{Cancele } h \\
&= 1 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}
$$

Entonces la ecuación de la recta tangente en $(1, 2)$ es

$$y - 2 = 1(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = x + 1$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## ▼ Derivadas

Hemos visto que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se puede escribir como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Resulta que esta expresión también aparece en muchos otros contextos, por ejemplo hallar velocidades y otras magnitudes de rapidez de cambio. Debido a que este tipo de límite se presenta en forma tan general, se le ha dado un nombre y notación especiales.

> **DEFINICIÓN DE UNA DERIVADA**
>
> La **derivada de una función $f$ en un número $a$**, denotada por $f'(a)$, es
>
> $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
>
> si este límite existe.

### EJEMPLO 3 | Hallar una derivada en un punto

Encuentre la derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ en el número 2.

**SOLUCIÓN** De acuerdo a la definición de una derivada, con $a = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} && \text{Definición de } f'(2) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[5(2 + h)^2 + 3(2 + h) - 1] - [5(2)^2 + 3(2) - 1]}{h} && f(x) = 5x^2 + 3x \quad 1 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 20h + 5h^2 + 6 + 3h - 1 - 25}{h} && \text{Expanda} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{23h + 5h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h \to 0} (23 + 5h) && \text{Cancele } h \\
&= 23 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15 ■

Vemos de la definición de una derivada que el número $f'(a)$ es el mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Entonces el resultado del Ejemplo 3 muestra que la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 5x^2 + 3x - 1$ en el punto $(2, 25)$ es $f'(2) = 23$.

### EJEMPLO 4 | Hallar una derivada

Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

**(a)** Encuentre $f'(a)$.

**(b)** Encuentre $f'(1)$, $f'(4)$ y $f'(9)$.

**SOLUCIÓN**

**(a)** Usamos la definición de la derivada en $a$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} && \text{Definición de derivada}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} && f(x)=\sqrt{x}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} && \text{Racionalice numerador}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} && \text{Diferencia de cuadrados}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} && \text{Simplifique numerador}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} && \text{Cancele } h\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}} && \text{Sea } h\to 0 \end{aligned}$$

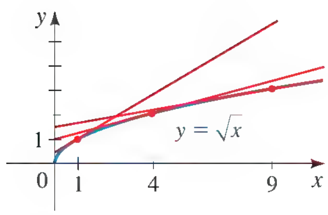



**FIGURA 8**

**(b)** Sustituyendo $a = 1$, $a = 4$ y $a = 9$ en el resultado del inciso (a), obtenemos

$$f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}\qquad f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}\qquad f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$$

Estos valores de la derivada son las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en la Figura 8.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

## Rapidez de cambio instantánea

En la Sección 2.3 definimos la rapidez promedio de cambio de una función $f$ entre los números $a$ y $x$ como

$$\text{rapidez de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Suponga que consideramos la rapidez promedio de cambio en intervalos cada vez más pequeños al hacer que $x$ se aproxime a $a$. El límite de estas magnitudes de rapidez de cambio se denomina rapidez de cambio instantánea.

### RAPIDEZ DE CAMBIO INSTANTÁNEA

Si $y = f(x)$, la **rapidez de cambio instantánea de $y$ con respecto a $x$** en $x = a$ es el límite del promedio de magnitudes de rapidez de cambio cuando $x$ se aproxima a $a$:

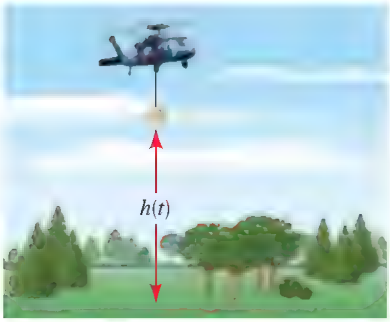
$$\text{rapidez de cambio instantánea} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

Nótese que ahora tenemos dos formas de interpretar la derivada:

- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$
- $f'(a)$ es la rapidez de cambio instantánea de $y$ con respecto a $x$ en $x = a$

En el caso especial en que $x = t$ = tiempo y $s = f(t)$ = desplazamiento (distancia dirigida) en el tiempo $t$ de un cuerpo que viaja en línea recta, la rapidez de cambio instantánea recibe el nombre de **velocidad instantánea**.

## EJEMPLO 5 | Velocidad instantánea de un cuerpo en caída




Si un cuerpo se deja caer desde una altura de 3000 pies, su distancia sobre el suelo (en pies) después de $t$ segundos está dada por $h(t) = 3000 - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea después de 4 segundos.

**SOLUCIÓN** Después que hayan transcurrido 4 segundos, la altura es $h(4) = 2744$ pies. La velocidad instantánea es

$$\begin{aligned} h'(4) &= \lim_{t\to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} && \text{Definición de } h'(4) \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{3000 - 16t^2 - 2744}{t - 4} && h(t) = 3000 - 16t^2 \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{256 - 16t^2}{t - 4} && \text{Simplifique} \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{16(4 - t)(4 + t)}{t - 4} && \text{Factorice numerador} \\ &= \lim_{t\to 4} -16(4 + t) && \text{Cancele } t - 4 \\ &= -16(4 + 4) = -128 \text{ ft/s} && \text{Sea } t \to 4 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la altura es *decreciente* a una rapidez de 128 pies/s.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

## EJEMPLO 6 | Estimar una rapidez de cambio instantánea

| $t$ | $P(t)$ |
|---|---|
| 1996 | 269,667,000 |
| 1998 | 276,115,000 |
| 2000 | 282,192,000 |
| 2002 | 287,941,000 |
| 2004 | 293,655,000 |

| $t$ | $\dfrac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$ |
|---|---|
| 1996 | 3,131,250 |
| 1998 | 3,038,500 |
| 2002 | 2,874,500 |
| 2004 | 2,865,750 |

Sea $P(t)$ la población de Estados Unidos en el tiempo $t$. La tabla del margen da valores aproximados de esta función, al dar estimaciones de población a mitad de año de 1996 a 2004. Interprete y estime el valor de $P'(2000)$.

**SOLUCIÓN** La derivada $P'(2000)$ quiere decir la rapidez de cambio de $P$ con respecto a $t$ cuando $t = 2000$, es decir, la rapidez de aumento de la población en 2000.

De acuerdo con la definición de una derivada, tenemos

$$P'(2000) = \lim_{t\to 2000} \frac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$$

Entonces calculamos y tabulamos valores del cociente de diferencia (el promedio de rapidez de cambio) como se muestra en la tabla del margen. Vemos que $P'(2000)$ se encuentra entre 3,038,500 y 2,874,500. (Aquí estamos haciendo una suposición razonable de que la población no fluctuó violentamente entre 1996 y 2004.) Estimamos que la rapidez de aumento de la población de Estados Unidos en 2000 fue el promedio de estos dos números, es decir,

$$P'(2000) \approx 2.96 \text{ millones de personas/año}$$

Aquí, hemos estimado la derivada al promediar las pendientes de dos rectas secantes. Otro método es determinar la función de población y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 2000$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

## 13.3 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1.** La derivada de una función $f$ en un número $a$ es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{____ - ____}{____}$$

si el límite existe. La derivada $f'(a)$ es la ______de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto ( ___ , ___ ).

**2.** Si $y = f(x)$, la rapidez de cambio promedio de $f$ entre los números $x$ y $a$ es $\frac{___ - ___}{___ - ___}$. El límite de la rapidez de cambio promedio cuando $x$ se aproxima a $a$ es el _____de rapidez de cambio de $y$ con respecto a $x$ en $x = a$; ésta es también la derivada $f'($ ___ $)$.

### HABILIDADES

**3-8** ■ Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto dado.

**3.** $f(x) = 3x + 4$ en $(1, 7)$

**4.** $f(x) = 5 - 2x$ en $(-3, 11)$

**5.** $f(x) = 4x^2 - 3x$ en $(-1, 7)$

**6.** $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ en $(1, 0)$

**7.** $f(x) = 2x^3$ en $(2, 16)$

**8.** $f(x) = \dfrac{6}{x + 1}$ en $(2, 2)$

**9-14** ■ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la recta tangente.

**9.** $y = x + x^2$ en $(-1, 0)$

**10.** $y = 2x - x^3$ en $(1, 1)$

**11.** $y = \dfrac{x}{x - 1}$ en $(2, 2)$

**12.** $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $(-1, 1)$

**13.** $y = \sqrt{x + 3}$ en $(1, 2)$

**14.** $y = \sqrt{1 + 2x}$ en $(4, 3)$

**15-20** ■ Encuentre la derivada de la función en el número dado.

**15.** $f(x) = 1 - 3x^2$ en 2

**16.** $f(x) = 2 - 3x + x^2$ en $-1$

**17.** $g(x) = x^4$ en 1

**18.** $g(x) = 2x^2 + x^3$ en 1

**19.** $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 4

**20.** $G(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ en 4

**21-24** ■ Encuentre $f'(a)$, donde $a$ está en el dominio de $f$.

**21.** $f(x) = x^2 + 2x$

**22.** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

**23.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

**24.** $f(x) = \sqrt{x - 2}$

**25.** **(a)** Si $f(x) = x^3 - 2x + 4$, encuentre $f'(a)$.
**(b)** Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $f$ en los puntos cuyas coordenadas $x$ son 0, 1 y 2.
**(c)** Grafique $f$ y las tres rectas tangentes.

**26.** **(a)** Si $g(x) = 1/(2x - 1)$, encuentre $g'(a)$.
**(b)** Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $g$ en los puntos cuyas coordenadas $x$ son $-1$, 0 y 1.
**(c)** Grafique $g$ y las tres rectas tangentes.

### APLICACIONES

**27. Velocidad de una pelota** Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de $t$ segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

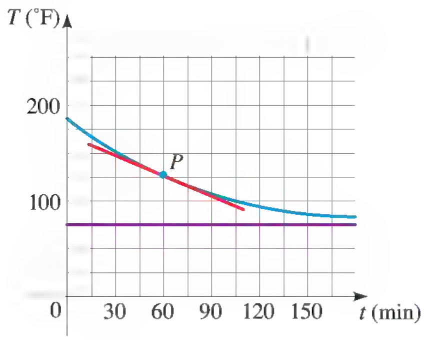
**28. Velocidad en la Luna** Si una flecha es disparada hacia arriba en la Luna con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de $t$ segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.
**(a)** Encuentre la velocidad instantánea de la flecha después de un segundo.
**(b)** Encuentre la velocidad instantánea de la flecha cuando $t = a$.
**(c)** ¿En qué tiempo $t$ regresará la flecha a la Luna?
**(d)** ¿Con qué velocidad llegará la flecha a la Luna?

**29. Velocidad de una partícula** El desplazamiento $s$ (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, donde $t$ se mide en segundos. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula $s$ en los tiempos $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

**30. Inflar un globo** Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la rapidez de cambio del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio $r$ cuando $r = 2$ pies.

**31. Cambio de temperatura** Un pavo rostizado es sacado de un horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F, y es colocado en una mesa en un cuarto donde la temperatura es de 75°F. La gráfica muestra la forma en que la temperatura del pavo dis-

minuye y finalmente se aproxima a la temperatura del cuarto. Midiendo la pendiente de la tangente, estime la rapidez de cambio de la temperatura después de una hora.




**32. Frecuencia cardíaca** Un monitor se utiliza para medir la frecuencia cardíaca de un paciente después de una cirugía. Compila el número de pulsaciones después de $t$ minutos. Cuando los datos de la tabla son graficados, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardíaca en pulsaciones por minuto.

| $t$ (min) | Pulsaciones |
|---|---|
| 36 | 2530 |
| 38 | 2661 |
| 40 | 2806 |
| 42 | 2948 |
| 44 | 3080 |

**(a)** Encuentre el promedio de frecuencias cardíacas (pendientes de las rectas secantes) en los intervalos $[40, 32]$ y $[42, 44]$.

**(b)** Estime la frecuencia cardíaca del paciente después de 42 minutos promediando las pendientes de estas dos rectas secantes.

**33. Flujo de agua** Un tanque contiene 1000 galones de agua, que se drena por el fondo del tanque en media hora. Los valores de la tabla siguiente muestran el volumen $V$ de agua que queda en el tanque (en galones) después de $t$ minutos.

| $t$ (min) | $V$ (gal) |
|---|---|
| 5 | 694 |
| 10 | 444 |
| 15 | 250 |
| 20 | 111 |
| 25 | 28 |
| 30 | 0 |

**(a)** Encuentre la rapidez promedio a la que sale el agua del tanque (pendientes y rectas secantes) durante los intervalos $[10, 15]$ y $[15, 20]$.

**(b)** La pendiente de la recta tangente en el punto (15, 250) representa la rapidez a la que el agua sale del tanque después de 15 minutos. Estime esta rapidez promediando las pendientes de las rectas secantes del inciso (a).

**34. Crecimiento de la población mundial** La tabla da la población mundial en el siglo XX.

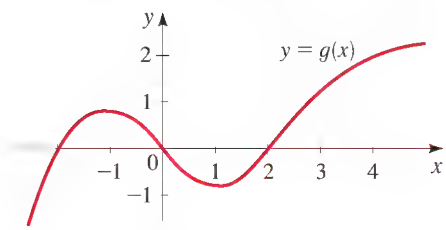
| Año | Población (millones) | Año | Población (millones) |
|---|---|---|---|
| 1900 | 1650 | 1960 | 3040 |
| 1910 | 1750 | 1970 | 3710 |
| 1920 | 1860 | 1980 | 4450 |
| 1930 | 2070 | 1990 | 5280 |
| 1940 | 2300 | 2000 | 6080 |
| 1950 | 2560 | | |

Estime la rapidez de crecimiento de población en 1920 y en 1980 promediando las pendientes de dos rectas secantes.

## DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

**35. Estimación de derivadas a partir de una gráfica** Para la función $g$ cuya gráfica se da, ordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



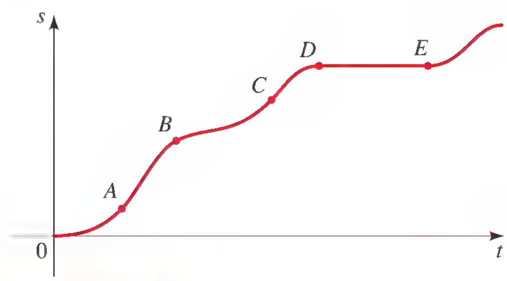

**36. Estimación de velocidades a partir de una gráfica** La gráfica muestra la función de la posición de un auto. Use la forma de la gráfica para explicar sus respuestas a las preguntas siguientes.

**(a)** ¿Cuál es la velocidad inicial del auto?

**(b)** ¿El auto corría más rápido en $B$ o en $C$?

**(c)** ¿El auto reducía su velocidad o aceleraba en $A$, $B$ y $C$?

**(d)** ¿Qué ocurrió entre $D$ y $E$?




**PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO** **Diseño de una "montaña rusa"**

En este proyecto usamos derivadas para determinar cómo conectar diferentes partes de una "montaña rusa" en forma tal que se disfrute un viaje sin alteraciones bruscas. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

# 13.4 LÍMITES EN EL INFINITO; LÍMITES DE SUCESIONES

Límites en el infinito ▶ Límites de sucesiones

En esta sección estudiamos una clase especial de límite llamada *límite en el infinito.* Examinamos el límite de una función $f(x)$ cuando $x$ se hace grande. También examinamos el límite de una sucesión $a_n$ cuando $n$ se hace grande. Los límites de sucesiones se usarán en la Sección 13.5 para ayudarnos a hallar el área bajo la gráfica de una función.

## ▼ Límites en el infinito

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | −1.000000 |
| ±1 | 0.000000 |
| ±2 | 0.600000 |
| ±3 | 0.800000 |
| ±4 | 0.882353 |
| ±5 | 0.923077 |
| ±10 | 0.980198 |
| ±50 | 0.999200 |
| ±100 | 0.999800 |
| ±1000 | 0.999998 |

Investiguemos el comportamiento de la función $f$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando $x$ se hace grande. La tabla del margen da valores de esta función redondeados a seis lugares decimales; la gráfica de $f$ ha sido trazada por computadora en la Figura 1.

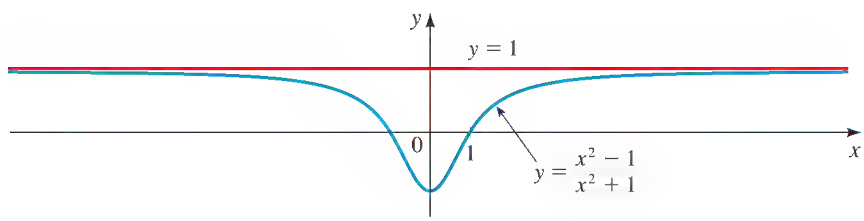



**FIGURA 1**

Cuando $x$ crece cada vez más, se puede ver que los valores de $f(x)$ se acercan más y más a 1. En realidad, parece que podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen a 1 cuanto queramos al tomar $x$ suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica si escribimos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, usamos la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se acercan cada vez más a $L$ cuando $x$ se hace cada vez más grande.

> **LÍMITE EN EL INFINITO**
>
> Sea $f$ una función definida en algún intervalo $(a, \infty)$. Entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a $L$ si tomamos $x$ grande lo suficiente.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty$$

Los límites en el infinito también se estudian en la Sección 3.7.

El símbolo $\infty$ no representa un número. Sin embargo, con frecuencia leemos la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ como

"el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima al infinito, es $L$"

o "el límite de $f(x)$, cuando $x$ se convierte en infinito, es $L$"

o "el límite de $f(x)$, cuando $x$ aumenta sin cota, es $L$"

Las ilustraciones geométricas se muestran en la Figura 2. Nótese que hay muchas formas para que la gráfica de $f$ se aproxime a la recta $y = L$ (que se denomina *asíntota horizontal*) cuando vemos a la extrema derecha.

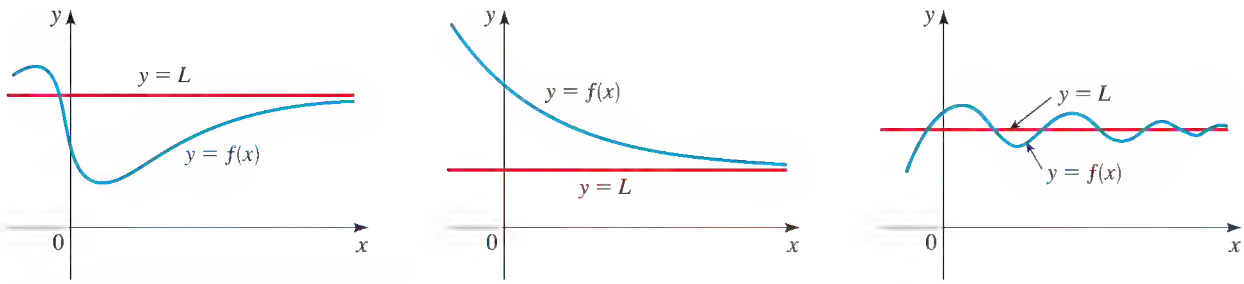



**FIGURA 2** Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

Consultando de nuevo la Figura 1, vemos que para valores negativos de $x$ numéricamente grandes, los valores de $f(x)$ son cercanos a 1. Si dejamos que $x$ decrezca sin límite por valores negativos, podemos hacer que $f(x)$ sea tan cercana a 1 como queramos. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

## LÍMITE EN EL INFINITO NEGATIVO

Sea $f$ una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a $L$ si tomamos $x$ suficientemente grande negativa.

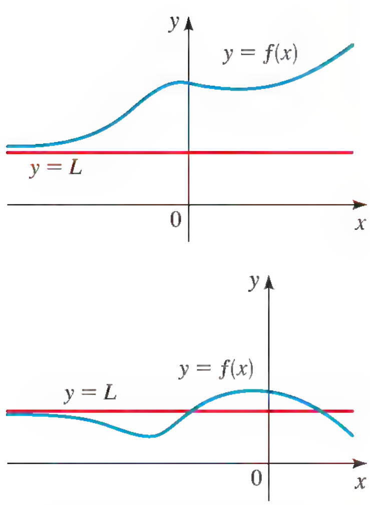



**FIGURA 3** Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando $x$ se aproxima al infinito negativo, es $L$"

La definición está ilustrada en la Figura 3. Observe que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ cuando vemos a la extrema izquierda.

## ASÍNTOTA HORIZONTAL

La recta $y = L$ se **denomina asíntota** horizontal de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

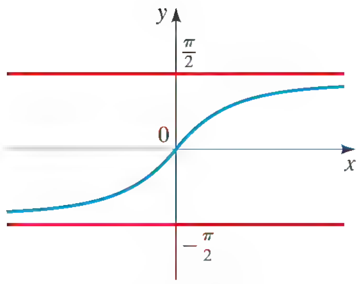



**FIGURA 4** $y = \tan^{-1} x$

Por ejemplo, la curva ilustrada en la Figura 1 tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Como descubrimos en la Sección 5.5, un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1} x$ (vea Figura 4). De hecho,

$$\lim_{x\to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se deduce del hecho que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

## EJEMPLO 1 | Límites en el infinito

Primero investigamos asíntotas horizontales y límites en el infinito para funciones racionales en la Sección 3.7.

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

**SOLUCIÓN** Observe que cuando $x$ es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000} = 0.000001$$

En realidad, al tomar $x$ suficientemente grande, podemos hacer $1/x$ tan cercana a 0 como queramos. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar muestra que cuando $x$ es negativa grande, $1/x$ es negativa pequeña, de modo que también tenemos

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

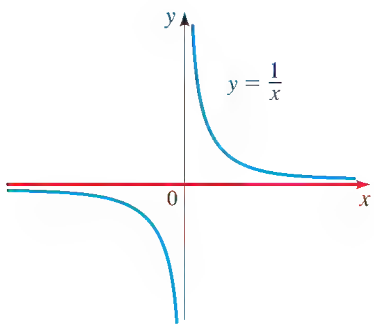



**FIGURA 5** $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje $x$) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Ésta es una hipérbola; vea Figura 5.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Las Leyes de Límites que estudiamos en la Sección 13.2 se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si combinamos la Ley 6 (Límite de una Potencia) con los resultados del Ejemplo 1, obtenemos la siguiente e importante regla para calcular límites.

> Si $k$ es un entero positivo, entonces
>
> $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

## EJEMPLO 2 | Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

**SOLUCIÓN** Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, primero dividimos el numerador y el denominador entre la potencia superior de $x$ que haya en el denomi-

nador. (Podemos suponer que $x \neq 0$, porque estamos interesados sólo en valores grandes de $x$.) En este caso, la potencia superior de $x$ del denominador es $x^2$, de modo que tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } x^2$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{Límite de un cociente}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{Límites de Sumas y Diferencias}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5} \qquad \text{Sea } x \to \infty$$

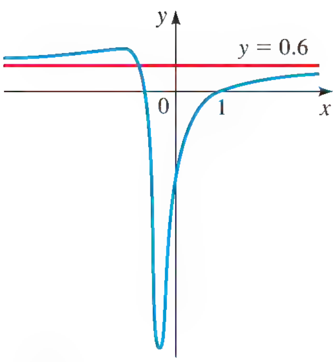



FIGURA 6

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. La Figura 6 ilustra los resultados de estos cálculos al demostrar la forma en que la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

## EJEMPLO 3 | Un límite en el infinito negativo

Use métodos numéricos y gráficos para hallar $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$.

**SOLUCIÓN** De la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ de la Figura 7 y la correspondiente tabla de valores, vemos que

$$\lim_{x\to\ \infty} e^x = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje $x$) es una asíntota horizontal.

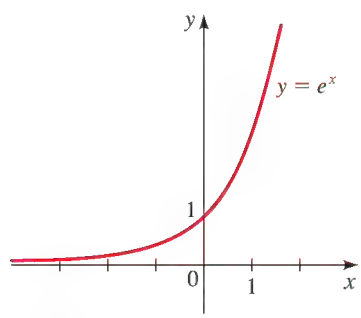



FIGURA 7

| $x$ | $e^x$ |
|---|---|
| 0 | 1.00000 |
| −1 | 0.36788 |
| −2 | 0.13534 |
| −3 | 0.04979 |
| −5 | 0.00674 |
| −8 | 0.00034 |
| −10 | 0.00005 |

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

## EJEMPLO 4 | Una función sin límite en el infinito

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

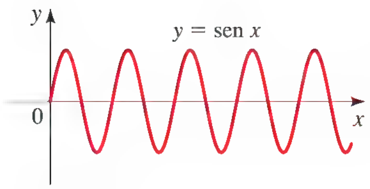



**FIGURA 8**

**SOLUCIÓN** De la gráfica de la Figura 8 y la naturaleza periódica de la función seno vemos que cuando $x$ aumenta, los valores de sen $x$ oscilan entre 1 y $-1$ con frecuencia infinita, de modo que no se aproximan a ningún número definido. Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17** ■

## Límites de sucesiones

En la Sección 12.1 introdujimos la idea de una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Aquí estamos interesados en su comportamiento cuando $n$ se hace grande. Por ejemplo, la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

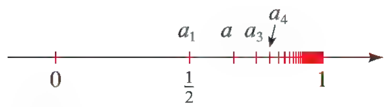



**FIGURA 9**

está representada en la Figura 9 al localizar sus términos sobre una recta numérica y en la Figura 10 al determinar su gráfica. De las Figuras 9 o 10 parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando $n$ se hace grande. Indicamos esto al escribir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

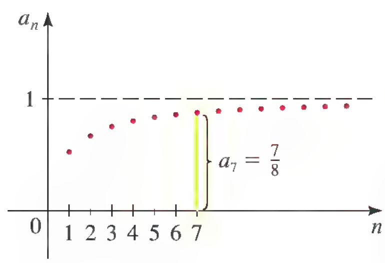



**FIGURA 10**

**DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN**

Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene el **límite** $L$ y escribimos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si el $n$-ésimo término $a_n$ de la sucesión se puede hacer arbitrariamente cercano a $L$ tomando $n$ grande lo suficiente. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, decimos que la sucesión converge (o es convergente). De otro modo, decimos que la sucesión diverge (o es divergente).

Esta definición está ilustrada por la Figura 11.

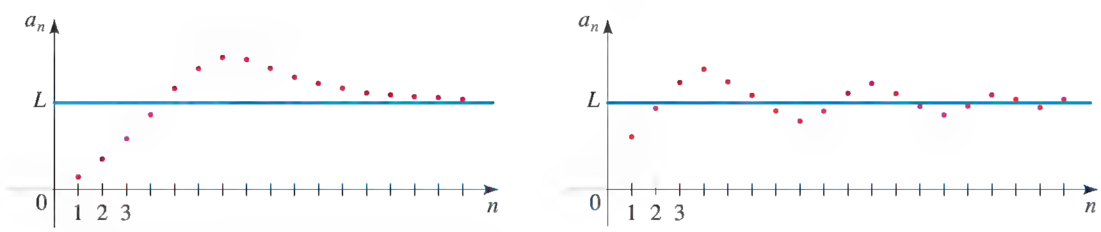



**FIGURA 11** Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si comparamos las definiciones de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} f(x) = L$, vemos que la única diferencia es que se requiere que $n$ sea un entero. Por lo tanto, lo siguiente es verdadero.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando $n$ es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

En particular, como sabemos que $\lim_{x\to\infty} (1/x^k) = 0$ cuando $k$ es un entero positivo, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{si } k \text{ es un entero positivo}$$

Observe que la Leyes de Límites de la Sección 13.2 también se cumplen para límites de sucesiones.

**EJEMPLO 5** | Hallar el límite de una sucesión

Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$.

**SOLUCIÓN** El método es similar al que usamos en el Ejemplo 2: divida el numerador y el denominador entre la potencia superior de $n$, y luego use las Leyes de Límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } n$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \qquad \text{Límites de un Cociente y una Suma}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \text{Sea } n \to \infty$$

Este resultado muestra que el cálculo que hicimos antes a partir de las Figuras 9 y 10 fue correcto.

Por lo tanto, la sucesión $a_n = n/(n+1)$ es convergente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

**EJEMPLO 6** | Una sucesión que diverge

Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

**SOLUCIÓN** Si escribimos los términos de la sucesión, obtenemos

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

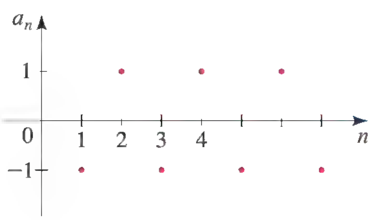



**FIGURA 12**

La gráfica de esta sucesión se muestra en la Figura 12. Como los términos oscilan entre 1 y $-1$ infinitamente, $a_n$ no se aproxima a ningún número. Entonces $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; esto es, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

**EJEMPLO 7** | Hallar el límite de una sucesión

Encuentre el límite de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

**SOLUCIÓN** Antes de calcular el límite, primero simplifiquemos la expresión para $a_n$. Como $n^3 = n \cdot n \cdot n$, ponemos un factor de $n$ debajo de cada factor en el numerador que contiene una $n$:

$$a_n = \frac{15}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora podemos calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{Definición de } a_n$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{Límite de un Producto}$$

$$= \frac{5}{2}(1)(2) = 5 \qquad \text{Sea } n \to \infty$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

# 13.4 EJERCICIOS

## CONCEPTOS

**1.** Sea $f$ una función definida en algún intervalo $(a, \infty)$. Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a _______ al tomar _______ suficientemente grande. En este caso la recta $y = L$ se denomina _______ _______ de la curva $y = f(x)$. Por ejemplo, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$ _______, y la recta $y =$ _______ es una asíntota horizontal.

**2.** Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene el límite $L$ si el $n$-ésimo término $a_n$ de la sucesión se puede hacer arbitrariamente cercano a _______ si se toma $n$ suficientemente_______. Si existe el límite, decimos que la sucesión _______; de otro modo, la sucesión _______.

## HABILIDADES

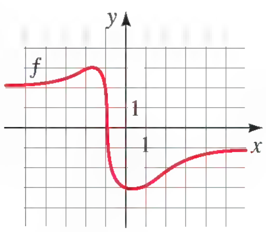
**3-4** ■ **(a)** Use la gráfica de $f$ para hallar los límites siguientes.

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

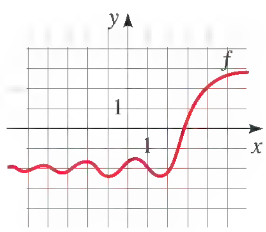
(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

**(b)** Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

**3.**



**4.**



**5-18** ■ Encuentre el límite.

**5.** $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x}$

**6.** $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^4}$

**7.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{5x-1}$

**8.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2-3x}{4x+5}$

**9.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+1}{2+3x^2}$

**10.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{x^3+x+1}$

**11.** $\lim_{t\to\infty} \frac{8t^3+t}{(2t-1)(2t^2+1)}$

**12.** $\lim_{r\to\infty} \frac{4r^3-r^2}{(r+1)^3}$

**13.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1-x^2+x^3}$

**14.** $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t-1}\right)$

**15.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} + 6\right)$

**16.** $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3-x}{3+x} - 2\right)$

**17.** $\lim_{x\to\infty} \cos x$

**18.** $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}^2 x$

**19-22** ■ Use una tabla de valores para estimar el límite. Después use calculadora graficadora para confirmar gráficamente su resultado.

**19.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x}}{4x+1}$

**20.** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x} - 3x\right)$

**21.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$

**22.** $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

**23-34** ■ Si la sucesión es convergente, encuentre su límite. Si es divergente, explique por qué.

**23.** $a_n = \frac{1+n}{n+n^2}$

**24.** $a_n = \frac{5n}{n+5}$

**25.** $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

**26.** $a_n = \frac{n-1}{n^3+1}$

**27.** $a_n = \frac{1}{3^n}$

**28.** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

**29.** $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

**30.** $a_n = \cos n\pi$

**31.** $a_n = \frac{3}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$

**32.** $a_n = \frac{5}{n}\left(n + \frac{4}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right)$

**33.** $a_n = \frac{24}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

**34.** $a_n = \frac{12}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

## APLICACIONES

**35. Concentración de sal**

**(a)** Un tanque contiene 5000 L de agua pura. Salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua es bombeada en el tanque a razón de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal después de $t$ minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}$$

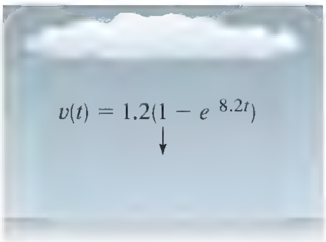
**(b)** ¿Qué ocurre a la concentración cuando $t \to \infty$?

**36. Velocidad de una gota de lluvia** La velocidad descendente de una gota de agua en caída en el tiempo $t$ está modelada por la función

$$v(t) = 1.2(1 - e^{-8.2t})$$

**(a)** Encuentre la velocidad terminal de la gota de agua evaluando $\lim_{t\to\infty} v(t)$. (Use el resultado del Ejemplo 3.)

**(b)** Grafique $v(t)$ y use la gráfica para estimar cuánto tiempo tarda la velocidad de la gota de lluvia en alcanzar 99% de su velocidad terminal.




## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**37. Límite de una sucesión recursiva**

**(a)** Una sucesión está definida en forma recursiva por $a_1 = 0$ y

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Encuentre los primeros diez términos de esta sucesión redondeados a ocho lugares decimales. ¿Esta sucesión parece ser convergente? Si es así, calcule el valor del límite.

**(b)** Suponiendo que la sucesión del inciso (a) es convergente, sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Explique por qué $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ también, y por lo tanto

$$L = \sqrt{2 + L}$$

Resuelva esta ecuación para hallar el valor exacto de $L$.

# 13.5 ÁREAS

El problema del área ▶ Definición de área

Hemos visto que los límites son necesarios para calcular la pendiente de una recta tangente o una rapidez de cambio instantánea. Aquí veremos que también son necesarias para hallar el área de una región con fronteras curvado. El problema de hallar estas áreas tiene consecuencias que van mucho más allá de simplemente hallar el área. (Vea *Enfoque sobre modelado,* página 884.)

## ▼ El problema del área

Uno de los problemas centrales en cálculo es el *problema del área*: encuentre el área de la región $S$ que está bajo la curva $y = f(x)$ de $a$ a $b$. Esto significa que $S$, ilustrada en la Figura 1, está limitada por la gráfica de una función $f$ (donde $f(x) \geq 0$), las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje $x$.

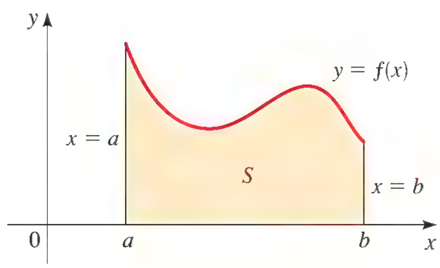



**FIGURA 1**

Al tratar de resolver el problema del área, tenemos que preguntarnos: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta pregunta es fácil de contestar para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, el área está definida como el producto de la longitud y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de un polígono se encuentra dividiéndolo en triángulos (como en la Figura 2) y sumando las áreas de los triángulos.

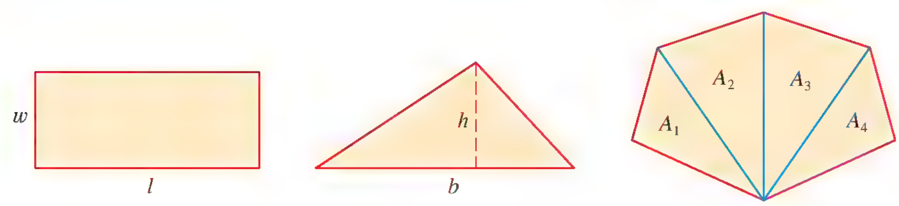



**FIGURA 2** $A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh$ $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

No obstante, no es tan fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región, pero parte del problema del área es hacer precisa esta idea intuitiva dando una definición exacta de área.

Recuerde que al definir una tangente, primero aproximamos la pendiente de la recta tangente por medio de pendientes de rectas secantes, y luego tomamos el límite de estas aproximaciones. Buscamos una idea similar para áreas. Primero aproximamos la región $S$ por medio de rectángulos y, a continuación, tomamos el límite de las áreas de estos rectángulos cuando aumentamos el número de rectángulos. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

### EJEMPLO 1 | Estimar un área usando rectángulos

Use rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 (la región parabólica $S$ ilustrada en la Figura 3).

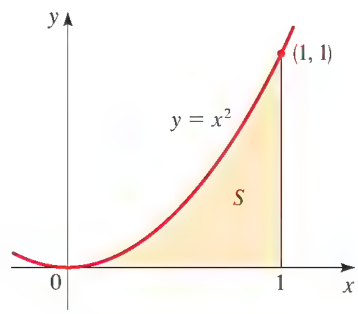
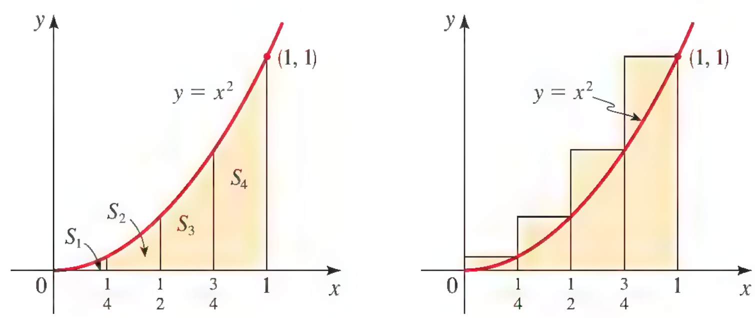



**FIGURA 3**

**SOLUCIÓN** Primero observamos que el área de $S$ debe estar entre 0 y 1 porque $S$ está contenida en un cuadrado con longitud 1 de lado, pero podemos ciertamente mejorar esto. Suponga que dividimos $S$ en cuatro franjas $S_1$, $S_2$, $S_3$ y $S_4$ al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la Figura 4(a). Podemos aproximar cada franja por medio de un rectángulo cuya base es la misma que la franja y cuya altura es la misma que el borde derecho de la franja (vea Figura 4(b)). En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos derechos de los subintervalos $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ y $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.




(a) (b)

**FIGURA 4**

Cada uno de estos rectángulos tiene un ancho $\frac{1}{4}$, y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y $1^2$. Si hacemos que $R_4$ sea la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtenemos

$$R_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

De la Figura 4(b) vemos que el área $A$ de $S$ es menor que $R_4$, de modo que

$$A < 0.46875$$

En lugar de usar los rectángulos de la Figura 4(b), podríamos usar los rectángulos más pequeños de la figura 5 cuyas alturas son los valores de $f$ en los puntos extremos izquierdos de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha colapsado porque su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

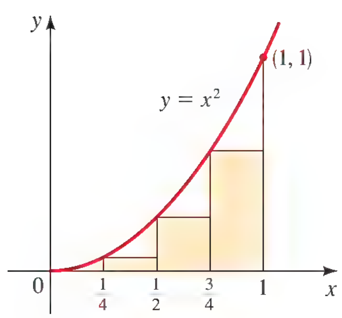



**FIGURA 5**

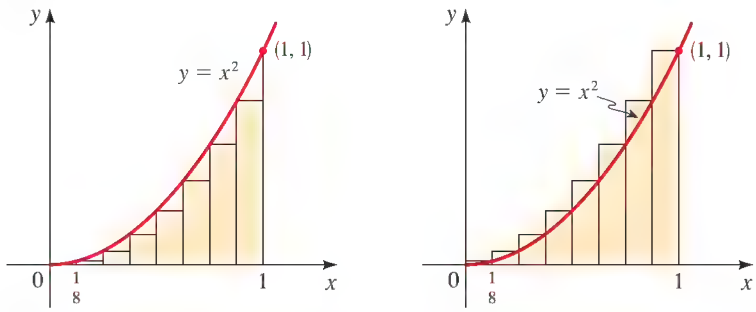
Vemos que el área de $S$ es mayor que $L_4$, de modo que tenemos estimaciones más bajas y más altas para $A$:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Podemos repetir este procedimiento con un número más grande de franjas. La Figura 6 muestra lo que ocurre cuando dividimos la región $S$ en ocho franjas de igual ancho. Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños ($L_8$) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes ($R_8$), obtenemos estimaciones más bajas y más altas para $A$:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Entonces, una posible respuesta para la pregunta es decir que el área verdadera de $S$ está entre 0.2734375 y 0.3984375.




(a) Usando puntos extremos izquierdos (b) Usando puntos extremos derechos

**FIGURA 6** Aproximación de $S$ con ocho rectángulos

| $n$ | $L_n$ | $R_n$ |
|---|---|---|
| 10 | 0.2850000 | 0.3850000 |
| 20 | 0.3087500 | 0.3587500 |
| 30 | 0.3168519 | 0.3501852 |
| 50 | 0.3234000 | 0.3434000 |
| 100 | 0.3283500 | 0.3383500 |
| 1000 | 0.3328335 | 0.3338335 |

Podríamos obtener mejores estimaciones si aumentamos el número de franjas. La tabla del margen muestra los resultados de cálculos similares (con una computadora) usando $n$ rectángulos cuyas alturas se encuentran con puntos extremos izquierdos ($L_n$) o puntos extremos derechos ($R_n$). En particular, vemos con el uso de 50 franjas que el área está entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas lo reducimos todavía más: $A$ está entre 0.3328335 y 0.3338335. Se obtiene una buena estimación al promediar estos números: $A \approx 0.3333335$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

De los valores de la tabla parece como si $R_n$ se aproximara a $\frac{1}{3}$ a medida que $n$ aumenta. Confirmamos esto en el siguiente ejemplo.

## EJEMPLO 2 | El límite de sumas de aproximación

Para la región $S$ del Ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superior se aproxima a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

**SOLUCIÓN** Sea $R_n$ la suma de las áreas de los $n$ rectángulos mostrados en la Figura 7. Cada uno de los rectángulos tiene ancho $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$. Esto es, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Por lo tanto,

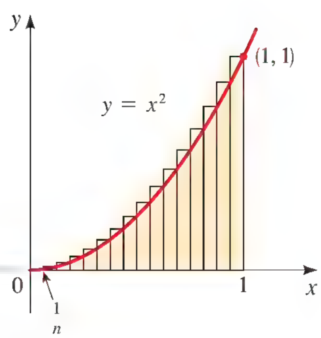



**FIGURA 7**

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Aquí necesitamos la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros $n$ enteros positivos:

Esta fórmula se estudia en la Sección 12.5.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Poniendo la fórmula precedente en nuestra expresión para $R_n$, obtenemos

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \tfrac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Se puede demostrar que las sumas de aproximación inferiores también se aproximan a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

De las Figuras 8 y 9 parece que a medida que $n$ aumenta, tanto $R_n$ como $L_n$ se hacen aproximaciones cada vez mejores al área de $S$. Por lo tanto, *definimos* el área $A$ como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, o sea

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

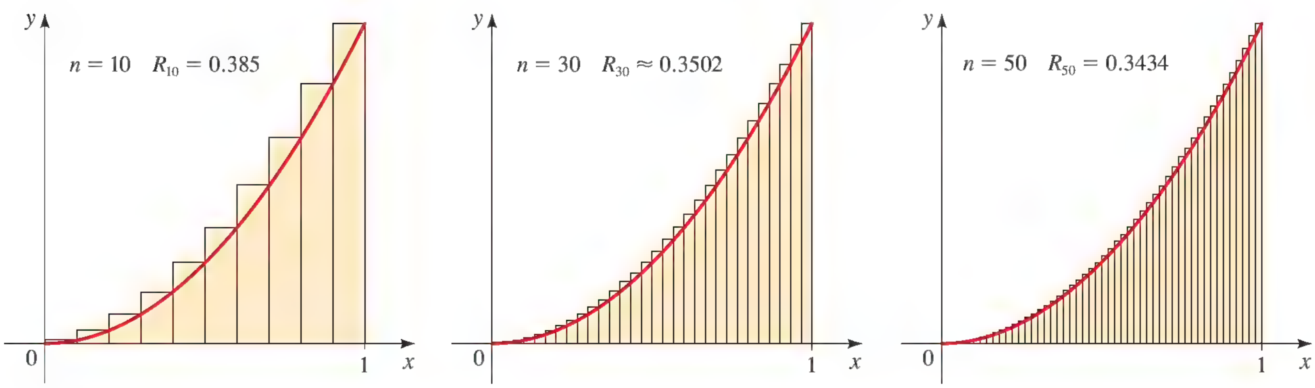



**FIGURA 8**

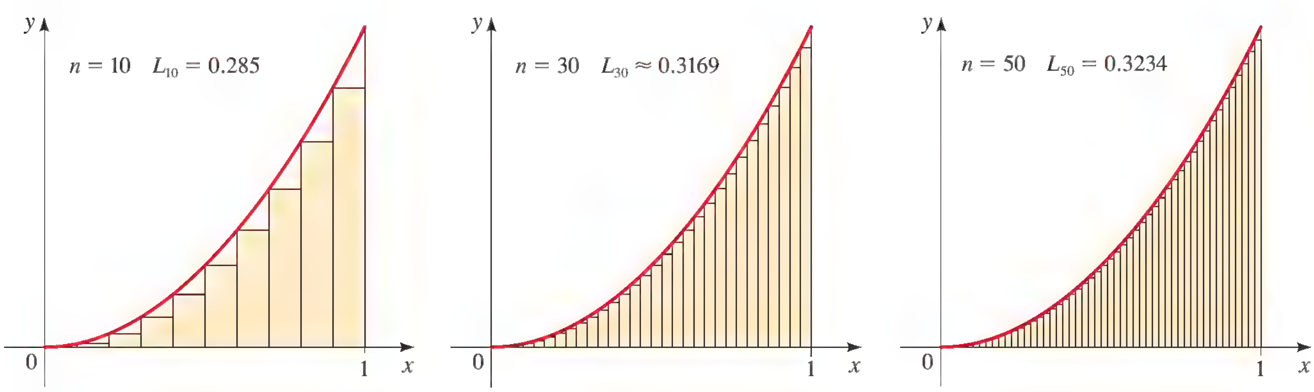



**FIGURA 9**

## Definición de área

Apliquemos la idea de los Ejemplos 1 y 2 a la región $S$ más general de la Figura 1. Empezamos por subdividir $S$ en $n$ franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual ancho como en la Figura 10.

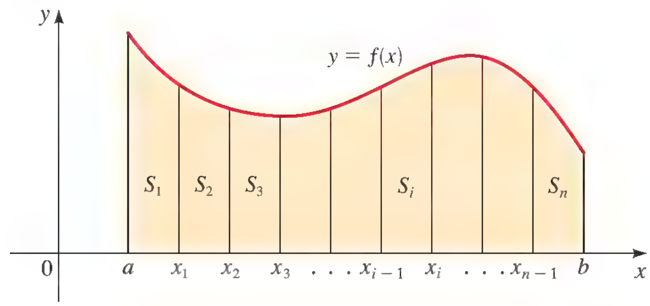



**FIGURA 10**

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las $n$ franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de los intervalos son

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \quad x_3 = a + 3\,\Delta x, \quad \ldots, \quad x_k = a + k\,\Delta x, \quad \ldots$$

Aproximemos la $k$-ésima franja $S_k$ por medio de un rectángulo con ancho $\Delta x$ y altura $f(x_k)$, que es el valor de $f$ en el punto extremo derecho (vea Figura 11). Entonces el área del $k$-ésimo rectángulo es $f(x_k)\,\Delta x$. Lo que consideramos intuitivamente como el área de $S$ es aproximadamente la suma de las áreas de estos rectángulos, que es

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

La Figura 12 muestra esta aproximación para $n = 2, 4, 8$ y $12$.

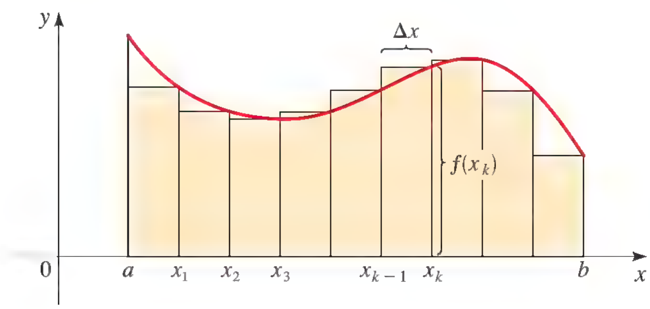
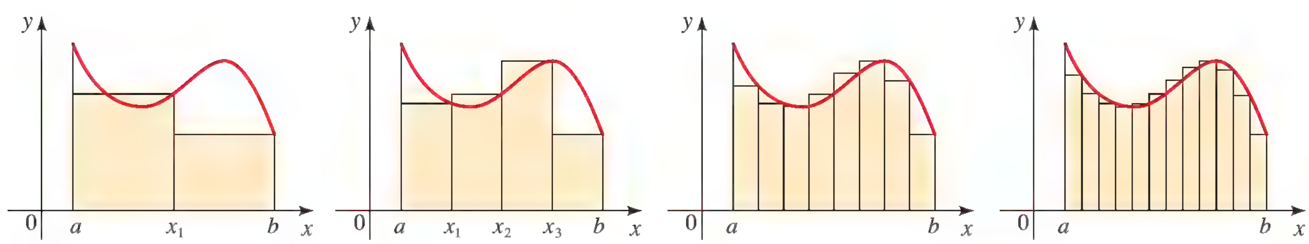



**FIGURA 11**




(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

**FIGURA 12**

Observe que esta aproximación parece hacerse cada vez mejor a medida que el número de franjas aumenta, esto es, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, definimos el área $A$ de la región $S$ en la forma siguiente.

**DEFINICIÓN DE ÁREA**

El **área** $A$ de la región $S$ que está bajo la gráfica de la función continua $f$ es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

Usando notación sigma, escribimos esto como sigue:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Al usar esta fórmula para el área, recuerde que $\Delta x$ es el ancho de un rectángulo de aproximación, $x_k$ es el punto extremo derecho del $k$-ésimo rectángulo, y $f(x_k)$ es su altura. Por lo tanto,

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Punto extremo derecho: $x_k = a + k\,\Delta x$

Altura: $f(x_k) = f(a + k\,\Delta x)$

Cuando trabajemos con sumas, necesitaremos las siguientes propiedades de la Sección 12.1:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

También necesitaremos las siguientes fórmulas para las sumas de las potencias de los primeros $n$ números naturales de la Sección 12.5.

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

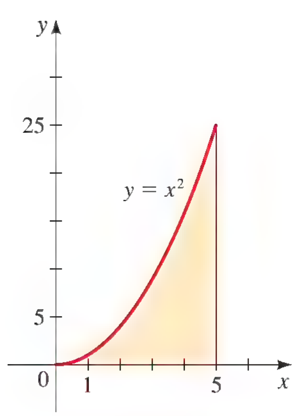



**FIGURA 13**

## EJEMPLO 3 | Hallar el área bajo una curva

Encuentre el área de la región que está bajo la parábola $y = x^2$, $0 \le x \le 5$.

**SOLUCIÓN** La región está graficada en la Figura 13. Para hallar el área, primero hallamos las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la $n$-ésima etapa.

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-0}{n} = \dfrac{5}{n}$

Punto extremo derecho: $x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\dfrac{5}{n}\right) = \dfrac{5k}{n}$

Altura: $f(x_k) = f\left(\dfrac{5k}{n}\right) = \left(\dfrac{5k}{n}\right)^2 = \dfrac{25k^2}{n^2}$

A continuación sustituimos estos valores en la definición de área:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x \qquad \text{Definición de área}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{25k^2}{n^2}\cdot\frac{5}{n} \qquad f(x_k) = \frac{25k^2}{n^2},\ \Delta x = \frac{5}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{125k^2}{n^3} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \text{Factorice } \frac{125}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{Fórmula de la Suma de Cuadrados}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125(2n^2+3n+1)}{6n^2} \qquad \text{Cancele } n \text{ y expanda el numerador}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{Divida el numerador y el denominador entre } n^2$$

$$= \frac{125}{6}(2+0+0) = \frac{125}{3} \qquad \text{Sea } n\to\infty$$

También podemos calcular el límite si escribimos

$$\frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{125}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

como en el Ejemplo 2.

Entonces, el área de la región es $\frac{125}{3} \approx 41.7$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

## EJEMPLO 4 | Hallar el área bajo una curva

Encuentre el área de la región que está bajo la parábola $y = 4x - x^2$, $1 \le x \le 3$.

**SOLUCIÓN** Empezamos por hallar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la $n$-ésima etapa.

Ancho: $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

Punto extremo derecho: $$x_k = a + k\,\Delta x = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2k}{n}$$

Altura: $$f(x_k) = f\left(1+\frac{2k}{n}\right) = 4\left(1+\frac{2k}{n}\right) - \left(1+\frac{2k}{n}\right)^2$$

$$= 4 + \frac{8k}{n} - 1 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}$$

$$= 3 + \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}$$

La Figura 14 muestra la región cuya área está calculada en el Ejemplo 4.

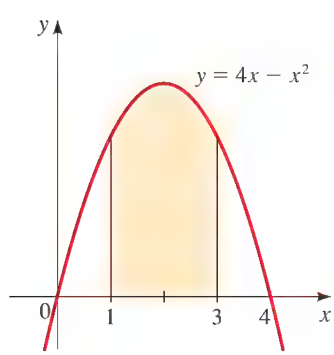



**FIGURA 14**

Entonces, de acuerdo con la definición de área, obtenemos

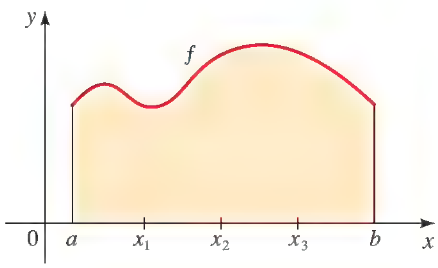
$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3 + \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}(3n) + \frac{8}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(6 + 4\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n} - \frac{4}{3}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[6 + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= 6 + 4\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 1\cdot 2 = \frac{22}{3}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

## 13.5 EJERCICIOS

### CONCEPTOS

**1-2** ■ La gráfica de una función $f$ se muestra a continuación.




**1.** Para hallar el área bajo la gráfica de $f$, primero aproximamos el área por medio de ________. Aproxime el área trazando cuatro rectángulos. El área $R_4$ de esta aproximación es

$$R_4 = ___ + ___ + ___ + ___$$

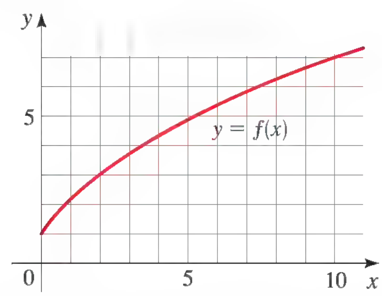
**2.** Sea $R_n$ la aproximación obtenida usando $n$ rectángulos de igual ancho. El área exacta bajo la gráfica de $f$ es

$$A = \lim_{n\to\infty} ____$$

### HABILIDADES

**3.** **(a)** Leyendo valores de la gráfica dada de $f$, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una estimación superior para el área bajo la gráfica dada de $f$ de $x = 0$ a $x = 10$. En cada caso, trace el rectángulo que use.

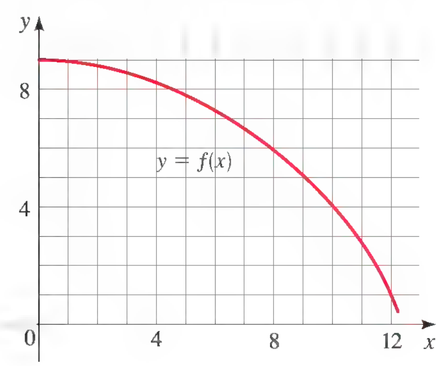
**(b)** Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.




**4.** **(a)** Use seis rectángulos para hallar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica dada de $f$ de $x = 0$ a $x = 12$.
(i) $L_6$ (usando puntos extremos izquierdos)
(ii) $R_6$ (usando puntos extremos derechos)

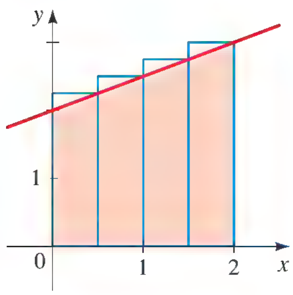
**(b)** ¿$L_6$ es una subestimación o una sobreestimación de la verdadera área?

**(c)** ¿$R_6$ es una subestimación o una sobreestimación de la verdadera área?

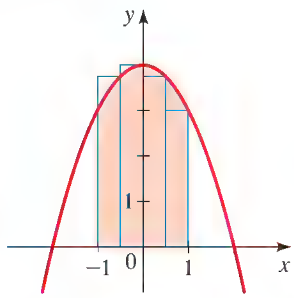


**5-8** ■ Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada, usando para ello los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen ancho igual.)

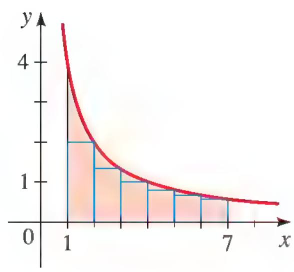
**5.** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



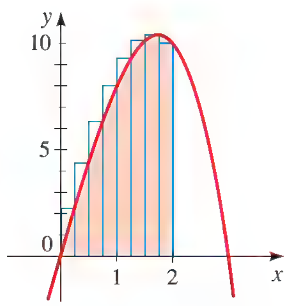

**6.** $f(x) = 4 - x^2$




**7.** $f(x) = \dfrac{4}{x}$




**8.** $f(x) = 9x - x^3$




**9.** **(a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 5$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos ¿La de usted es una subestimación o una sobreestimación?
**(b)** Repita la pate (a) usando puntos extremos izquierdos.

**10.** **(a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 25 - x^2$ de $x = 0$ a $x = 5$ usando cinco rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿La de usted es una subestimación o una sobreestimación?
**(b)** Repita el inciso (a) usando puntos extremos izquierdos.

**11.** **(a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 - x^2$ de $x = -1$ a $x = 2$ usando tres rectángulos de aproximación y puntos extremos derechos. A continuación, mejore su estimación usando para ello seis rectángulos. Trace la gráfica y los rectángulos.
**(b)** Repita el inciso (a) usando puntos extremos izquierdos.

**12.** **(a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, $0 \le x \le 4$, usando cuatro rectángulos de aproximación y tomando los puntos muestrales como
(i) puntos extremos derechos
(ii) puntos extremos izquierdos
**(b)** Mejore sus estimaciones del inciso (a) usando ocho rectángulos.

**13-14** ■ Use la definición de área como un límite para hallar el área de la región que está bajo la curva. Compruebe su respuesta trazando la región y usando geometría.

**13.** $y = 3x, \quad 0 \le x \le 5$ **14.** $y = 2x + 1, \quad 1 \le x \le 3$

**15-20** ■ Encuentre el área de la región que está bajo la gráfica de $f$ sobre el intervalo dado.

**15.** $f(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 2$

**16.** $f(x) = x + x^2, \quad 0 \le x \le 1$

**17.** $f(x) = x^3 + 2, \quad 0 \le x \le 5$

**18.** $f(x) = 4x^3, \quad 2 \le x \le 5$

**19.** $f(x) = x + 6x^2, \quad 1 \le x \le 4$

**20.** $f(x) = 20 - 2x^2, \quad 2 \le x \le 3$

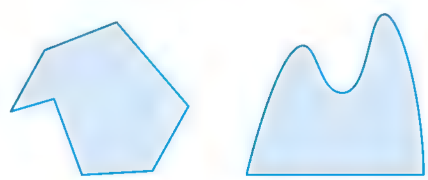
## DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

**21. Aproximación de un área con calculadora** Cuando aproximamos áreas usando rectángulos como en el Ejemplo 1, entonces cuantos más rectángulos usemos la respuesta es más precisa. El siguiente programa de una TI-83 encuentra el área aproximada bajo la gráfica de $f$ en el intervalo $[a, b]$ usando $n$ rectángulos. Para usar el programa, primero guardamos la función $f$ en $Y_1$. El programa pide al usuario ingresar N, que es el número de rectángulos, así como A y B, que son los puntos extremos del intervalo.
**(a)** Aproxime el área bajo la gráfica de $f(x) = x^5 + 2x + 3$ en $[1, 3]$ usando 10, 20 y 100 rectángulos.
**(b)** Aproxime el área bajo la gráfica de $f$ en el intervalo dado, usando 100 rectángulos.

(i) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{en } [0, \pi]$
(ii) $f(x) = e^{-x^2}, \quad \text{en } [-1, 1]$

```
PROGRAM:AREA
:Prompt N
:Prompt A
:Prompt B
:(B-A)/N→D
:0→S
:A→X
:For (K,1,N)
:X+D→X
:S+Y₁→S
:End
:D*S→S
:Disp "AREA IS"
:Disp S
```

**22. Regiones con límites rectos vs. curvos** Escriba un breve ensayo que explique cómo encontraría usted el área de un polígono, es decir, una región limitada por segmentos de rectas. A continuación, explique cómo encontraría usted el área bajo una región cuya frontera es curva, como hicimos en esta sección. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre estos dos procesos?



# CAPÍTULO 13 | REPASO

## VERIFICACIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique verbalmente qué significa la ecuación
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$
¿Es posible que este enunciado sea verdadero y que sin embargo $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique lo que significa decir que
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$$
En esta situación ¿es posible que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$? Explique.

3. Describa varias formas en las que un límite no pueda existir. Ilustre con bosquejos.

4. Exprese las siguientes Leyes de Límites.
   **(a)** Ley de Sumas
   **(b)** Ley de Diferencias
   **(c)** Ley de Múltiplo Constante
   **(d)** Ley de Productos
   **(e)** Ley de Cocientes
   **(f)** Ley de Potencias
   **(g)** Ley de Raíces

5. Escriba una expresión para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

6. Defina la derivada $f'(a)$. Discuta dos formas de interpretar este número.

7. Si $y = f(x)$, escriba expresiones para lo siguiente.
   **(a)** La rapidez de cambio promedio de $y$ con respecto a $x$ entre los números $a$ y $x$.
   **(b)** La rapidez de cambio instantánea de $y$ con respecto a $x$ en $x = a$.

8. Explique el significado de la ecuación
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$
Haga bosquejos para ilustrar las diversas posibilidades.

9. **(a)** ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Trace curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
   **(b)** ¿Cuáles de las siguientes curvas tienen asíntotas horizontales?

| | |
|---|---|
| (i) $y = x^2$ | (iv) $y = \tan^{-1} x$ |
| (ii) $y = 1/x$ | (v) $y = e^x$ |
| (iii) $y = \operatorname{sen} x$ | (vi) $y = \ln x$ |

10. **(a)** ¿Qué es una sucesión convergente?
    **(b)** ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?

11. Suponga que $S$ es la región que está bajo la gráfica de $y = f(x)$, $a \le x \le b$.
    **(a)** Explique cómo se aproxima esta área usando rectángulos.
    **(b)** Escriba una expresión para el área de $S$ como límite de sumas.

## EJERCICIOS

**1-6** ■ Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. A continuación, use una calculadora graficadora para confirmar gráficamente su resultado.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

2. $\displaystyle \lim_{t\to -1} \frac{t+1}{t^3-t}$

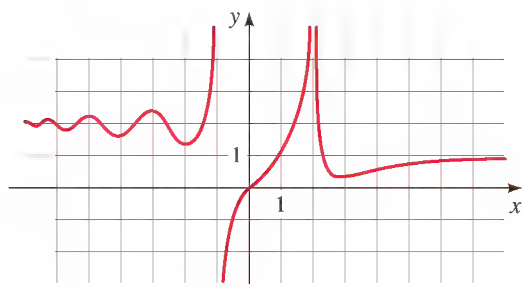
3. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

4. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

5. $\displaystyle \lim_{x\to 1^+} \ln\sqrt{x-1}$

6. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{|x|}$

7. La gráfica de $f$ se muestra en la figura. Encuentre cada límite o explique por qué no existe.
   **(a)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$
   **(c)** $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to -3} f(x)$
   **(e)** $\lim_{x\to 4} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to \infty} f(x)$
   **(g)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to 0} f(x)$




8. Sea
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$
Encuentre cada límite y explique por qué no existe.
   **(a)** $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
   **(c)** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(d)** $\lim_{x\to 2} f(x)$
   **(e)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to 2} f(x)$
   **(g)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to 3} (f(x))^2$

**9-20** ■ Use las Leyes de Límites para evaluar el límite, si existe.

**9.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-3}$

**10.** $\lim_{t\to 1} (t^3 - 3t + 6)$

**11.** $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

**12.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

**13.** $\lim_{u\to 0} \dfrac{(u+1)^2 - 1}{u}$

**14.** $\lim_{z\to 9} \dfrac{\sqrt{z} - 3}{z - 9}$

**15.** $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{|x-3|}$

**16.** $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2 - 2x}\right)$

**17.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x-4}$

**18.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^4 - 3x + 6}$

**19.** $\lim_{x\to\infty} \cos^2 x$

**20.** $\lim_{t\to -\infty} \dfrac{t^4}{t^3 - 1}$

**21-24** ■ Encuentre la derivada de la función en el número dado.

**21.** $f(x) = 3x - 5$, en 4

**22.** $g(x) = 2x^2 - 1$, en $-1$

**23.** $f(x) = \sqrt{x}$, en 16

**24.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, en 1

**25–28** ■ **(a)** Encuentre $f'(a)$. **(b)** Encuentre $f'(2)$ y $f'(-2)$.

**25.** $f(x) = 6 - 2x$

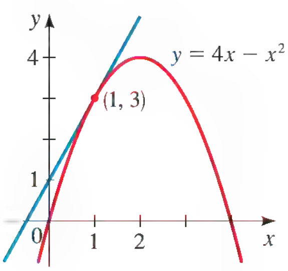
**26.** $f(x) = x^2 - 3x$

**27.** $f(x) = \sqrt{x + 6}$

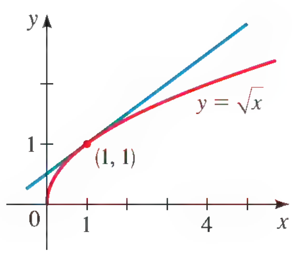
**28.** $f(x) = \dfrac{4}{x}$

**29-30** ■ Encuentre la ecuación de la recta tangente mostrada en la figura.

**29.**




**30.**




**31-34** ■ Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto dado.

**31.** $f(x) = 2x$, en $(3, 6)$

**32.** $f(x) = x^2 - 3$, en $(2, 1)$

**33.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

**34.** $f(x) = \sqrt{x+1}$, en $(3, 2)$

**35.** Una piedra se deja caer desde el techo de un edificio de 640 pies sobre el suelo. Su altura (en pies) después de $t$ segundos está dada por $h(t) = 640 - 16t^2$.

**(a)** Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = 2$.

**(b)** Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = a$.

**(c)** ¿En qué tiempo $t$ llegará la piedra al suelo?

**(d)** ¿Con qué velocidad caerá la piedra al suelo?

**36.** Si un gas está confinado en un volumen fijo, entonces, de acuerdo con la Ley de Boyle, el producto de la presión $P$ y la temperatura $T$ es constante. Para un cierto gas, $PT = 100$, donde $P$ se mide en lb/pulg.$^2$ y $T$ se mide en kelvin (K).

**(a)** Exprese $P$ como una función de $T$.

**(b)** Encuentre la rapidez instantánea de cambio de $P$ con respecto a $T$ cuando $T = 300$ K.

**37-42** ■ Si la sucesión es convergente, encuentre su límite; si es divergente, explique por qué.

**37.** $a_n = \dfrac{n}{5n+1}$

**38.** $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

**39.** $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

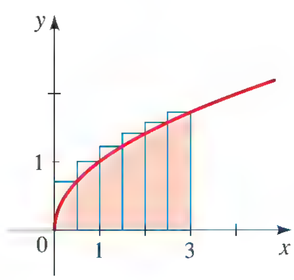
**40.** $a_n = \dfrac{n^3}{2n+6}$

**41.** $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

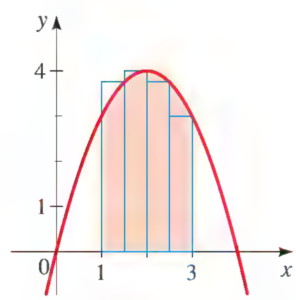
**42.** $a_n = \dfrac{10}{3^n}$

**43-44** ■ Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada usando los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen ancho igual.)

**43.** $f(x) = \sqrt{x}$




**44.** $f(x) = 4x - x^2$




**45-48** ■ Use la definición de límite de área para hallar el área de la región bajo la gráfica de $f$ en el intervalo dado.

**45.** $f(x) = 2x + 3$, $0 \le x \le 2$

**46.** $f(x) = x^2 + 1$, $0 \le x \le 3$

**47.** $f(x) = x^2 - x$, $1 \le x \le 2$

**48.** $f(x) = x^3$, $1 \le x \le 2$

1. **(a)** Use una tabla de valores para estimar el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\text{sen}\, 2x}$$

**(b)** Use calculadora graficadora para confirmar gráficamente su respuesta.

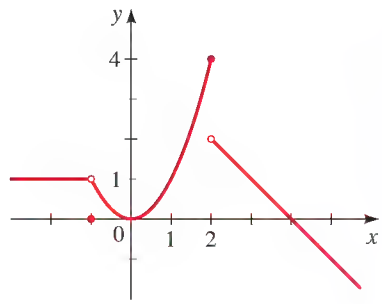
2. Para la función $f$ definida por tramos cuya gráfica se muestra, encuentre:

**(a)** $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to -1} f(x)$

**(d)** $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to 0} f(x)$

**(g)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **(i)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<-1\\ 0 & \text{si } x=-1\\ x^2 & \text{si } -1<x\le 2\\ 4-x & \text{si } 2<x\end{cases}$$




3. Evalúe el límite si existe.

**(a)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$ **(b)** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-8}{x+2}$ **(c)** $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$

**(d)** $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{|x-2|}$ **(e)** $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ **(f)** $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2+x}$

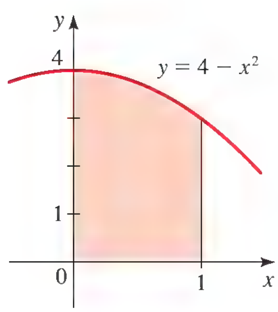
4. Sea $f(x)=x^2-2x$. Encuentre:

**(a)** $f'(x)$ **(b)** $f'(-1), f'(1), f'(2)$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ en el punto donde $x=9$.

6. Encuentre el límite de la sucesión.

**(a)** $a_n=\frac{n}{n^2+4}$ **(b)** $a_n=\sec n\pi$




7. La región trazada en la figura al margen está bajo la gráfica de $f(x)=4-x^2$, arriba del intervalo $0\le x\le 1$.

**(a)** Aproxime el área de la región con cinco rectángulos, igualmente espaciados a lo largo del eje $x$, usando puntos extremos derechos para determinar las alturas de los rectángulos.

**(b)** Use la definición de límite de área para hallar el valor exacto del área de la región.

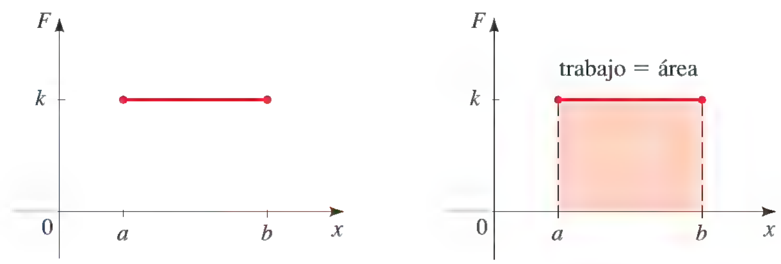
# Interpretaciones de área

El área bajo la gráfica de una función se usa para modelar muchas cantidades en física, economía, ingeniería y otros campos de actividad. Ésta es la razón por la cual el problema del área es tan importante. A continuación mostraremos la forma en que el concepto de trabajo (Sección 9.2) se modela por medio del área. Varias otras aplicaciones se exploran en los problemas.

Recuerde que el trabajo $W$ realizado al mover un cuerpo es el producto de la fuerza $F$ aplicada al cuerpo y la distancia $d$ que el cuerpo se mueve:

$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Esta fórmula se utiliza si la fuerza es *constante*. Por ejemplo, suponga que usted empuja una caja por un piso, moviendo a lo largo del eje $x$ positivo de $x = a$ a $x = b$, y que aplica una fuerza constante $F = k$. La gráfica de $F$ como función de la distancia $x$ se muestra en la Figura 1(a). Observe que el trabajo realizado es $W = Fd = k(b - a)$, que es el área bajo la gráfica de $F$ (vea Figura 1(b)).




(a) (b)

**FIGURA 1** Una fuerza constante $F$

Pero ¿qué pasa si la fuerza *no es* constante? Por ejemplo, suponga que la fuerza que usted aplica a la caja varía con la distancia (empuja con más fuerza en ciertos lugares que en otros). Más precisamente, suponga que usted empuja la caja a lo largo del eje $x$ en la dirección positiva, de $x = a$ a $x = b$, y en cada punto $x$ entre $a$ y $b$ usted aplica una fuerza $f(x)$ a la caja. La Figura 2 muestra una gráfica de la fuerza $f$ como función de la distancia $x$.

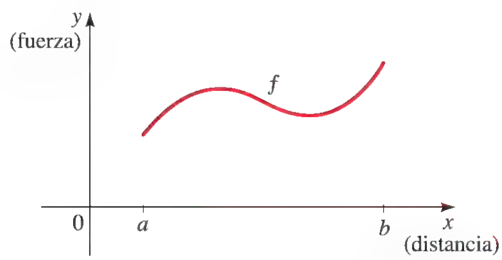



**FIGURA 2** Una fuerza variable

¿Cuánto trabajo se realizó? No podemos aplicar la fórmula para trabajar directamente porque la fuerza no es constante. Entonces, dividamos el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho $\Delta x$, como se ve en la Figura 3(a) en la página siguiente. La fuerza en el punto extremo derecho del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_k)$. Si $n$ es grande, entonces $\Delta x$ es pequeña, de modo que los valores de $f$ no cambian mucho en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. En otras palabras, $f$ es casi constante en el intervalo y el trabajo $W_k$ que es realizado para mover la caja de $x_{k-1}$ a $x_k$ es aproximadamente

$$W_k \approx f(x_k)\Delta x$$

Entonces podemos aproximar el trabajo realizado para mover la caja de $x = a$ a $x = b$ con la ecuación

$$W \approx \sum_{k-1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Parece que esta aproximación mejora a medida que hagamos $n$ más grande (y así hacemos el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ más pequeño). Por lo tanto, definimos el trabajo realizado para mover un cuerpo de $a$ a $b$ como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Nótese que ésta es precisamente el área bajo la gráfica de $f$ entre $x = a$ y $x = b$ como se define en la Sección 13.5. Vea Figura 3(b).

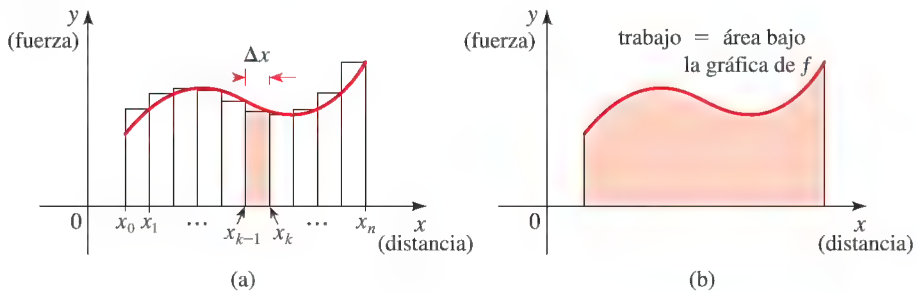



**FIGURA 3** Aproximación de un trabajo

## EJEMPLO | Trabajo realizado por una fuerza variable

Un hombre empuja una caja a lo largo de una recta por una distancia de 18 pies. A una distancia $x$ de su punto de partida, aplica una fuerza dada por $f(x) = 340 - x^2$. Encuentre el trabajo realizado por el hombre.

**SOLUCIÓN** La gráfica de $f$ entre $x = 0$ y $x = 18$ se ilustra en la Figura 4. Observe cómo varía la fuerza que el hombre aplica: empieza empujando con una fuerza de 340 lb pero continuamente aplica menos fuerza.

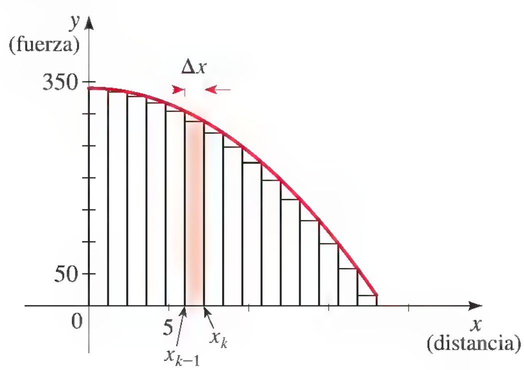



**FIGURA 4**

El trabajo realizado es el área bajo la gráfica de $f$ en el intervalo $[0, 18]$. Para hallar esta área, empezamos por hallar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la $n$-ésima etapa.

Ancho: $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{18-0}{n} = \frac{18}{n}$$

Punto extremo derecho: $$x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\frac{18}{n}\right) = \frac{18k}{n}$$

Altura: $$f(x_k) = f\left(\frac{18k}{n}\right) = 340 - \left(\frac{18k}{n}\right)^2$$

$$= 340 - \frac{324k^2}{n^2}$$

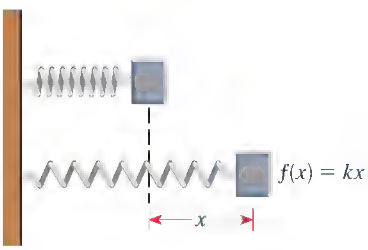
Entonces, de acuerdo con la definición de trabajo, obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(340 - \frac{324k^2}{n^2}\right)\left(\frac{18}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n}\sum_{k=1}^{n} 340 - \frac{(18)(324)}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n}\, 340n - \frac{5832}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(6120 - 972 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}\right) \\ &= 6120 - 972 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4176 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el hombre para mover la caja es de 4176 pies-lb. ■

## PROBLEMAS

1. **Trabajo realizado por un cabrestante** Un cabrestante motorizado se está utilizando para jalar un árbol caído a un camión de transporte. El motor ejerce una fuerza de $f(x) = 1500 + 10x - \frac{1}{2}x^2$ lb sobre el árbol en el instante cuando el árbol se ha movido $x$ pies. El árbol debe ser movido una distancia de 40 pies, de $x = 0$ a $x = 40$. ¿Cuánto trabajo es realizado por el cabrestante para mover el árbol?

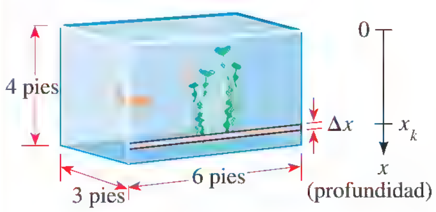



2. **Trabajo realizado por un resorte** La ley de Hooke dice que cuando un resorte se estira, jala con una fuerza proporcional a la cantidad que se estiró. La constante de proporcionalidad es una característica del resorte conocida como **constante de resorte**. Entonces, un resorte con una constante de resorte $k$ ejerce una fuerza $f(x) = kx$ cuando es estirado una distancia $x$.
   Cierto resorte tiene una constante de resorte $k = 20$ lb/pie. Encuentre el trabajo realizado cuando el resorte es jalado de modo que la cantidad por la que es estirado aumenta de $x = 0$ a $x = 2$ pies.

3. **Fuerza sobre el agua** Como lo sabe cualquier buzo, un cuerpo sumergido en el agua experimenta presión, y cuando aumenta la profundidad, también aumenta la presión del agua. A una profundidad de $x$ pies, la presión del agua es $p(x) = 62.5x$ lb/pie$^2$. Para hallar la fuerza ejercida por el agua sobre una superficie, multiplicamos la presión por el área de la superficie:

$$\text{fuerza} = \text{presión} \times \text{área}$$

   Suponga que un acuario que mide 3 pies de ancho, 6 pies de largo y 4 pies de alto está lleno de agua. El fondo del acuario tiene un área de $3 \times 6 = 18$ pies$^2$, y experimenta presión hidráulica de $p(4) = 62.5 \times 4 = 250$ lb/pie$^2$. Entonces la fuerza total ejercida por el agua sobre el fondo es $250 \times 18 = 4500$ lb.




   El agua también ejerce una fuerza sobre los costados del acuario, pero ésta no es tan fácil de calcular porque la presión aumenta de la superficie hacia abajo. Para calcular la fuerza sobre uno de los costados de 4 pies por 6 pies, dividimos su área en $n$ delgadas franjas horizontales de ancho $\Delta x$, como se ve en la figura. El área de cada franja es

$$\text{longitud} \times \text{ancho} = 6\,\Delta x$$

   Si el fondo de la $k$-ésima franja está a una profundidad $x_k$, entonces experimenta presión hidráulica de aproximadamente $p(x_k) = 62.5x_k$ lb/pie$^2$; cuanto más delgada sea la franja, más cercana es la aproximación. Entonces, sobre cada franja el agua ejerce una fuerza de

$$\text{presión} \times \text{área} = 62.5x_k \times 6\,\Delta x = 375x_k\Delta x \text{ lb}$$

   **(a)** Explique por qué la fuerza total ejercida por el agua sobre los costados de 4 pies por 6 pies del acuario es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 375x_k\,\Delta x$$

   donde $\Delta x = 4/n$ y $x_k = 4k/n$.

**(b)** ¿Qué área representa el límite del inciso (a)?

**(c)** Evalúe el límite del inciso (a) para hallar la fuerza ejercida por el agua sobre uno de los costados de 4 pies por 6 pies del acuario.

**(d)** Use la misma técnica para hallar la fuerza ejercida por el agua sobre uno de los costados de 4 pies por 3 pies del acuario.

*Nota:* Los ingenieros usan la técnica indicada en este problema para hallar la fuerza total, ejercida sobre una presa por el agua de un estanque que está atrás de la presa.

4. **Distancia recorrida por un auto** Como distancia $=$ rapidez $\times$ tiempo, es fácil ver que un auto que corre, por ejemplo, a 70 mi/h durante 5 horas recorrerá una distancia de 350 millas. Pero, ¿qué pasa si varía la rapidez, como suele ser en la práctica?

**(a)** Suponga que la rapidez de un cuerpo en movimiento en el tiempo $t$ es $v(t)$. Explique por qué la distancia recorrida por el cuerpo entre los tiempos $t = a$ y $t = b$ es el área bajo la gráfica de $v$ entre $t = a$ y $t = b$.

**(b)** La rapidez de un auto $t$ segundos después que empieza a moverse está dada por la función $v(t) = 6t + 0.1t^3$ pies/s. Encuentre la distancia recorrida por el auto de $t = 0$ a $t = 5$ segundos.

5. **Poder calorífico** Si la temperatura a la intemperie llega a un máximo de 90°F un día y sólo 80°F al siguiente, entonces probablemente diríamos que el primer día fue más caluroso que el segundo. Supongamos, sin embargo, que el primer día la temperatura estaba debajo de 60°F durante la mayor parte del día, alcanzando la alta sólo brevemente, mientras que en el segundo día la temperatura permaneció arriba de 75°F todo el tiempo. Ahora, ¿cuál día es el más caluroso? Para medir mejor qué tan caluroso es un día en particular, los científicos usan el concepto de **grado-hora de calentamiento**. Si la temperatura es una constante $D$ grados durante $t$ horas, entonces el "poder calorífico" generado en este período es $Dt$ grados-hora de calentamiento.

$$\text{grado-hora de calentamiento} = \text{temperatura} \times \text{tiempo}$$

Si la temperatura no es constante, entonces el número de grados-hora de calentamiento es igual al área bajo la gráfica de la función de temperatura durante el período en cuestión.

**(a)** En un día en particular, la temperatura (en °F) estuvo modelada por la función $D(t) = 61 + \frac{6}{5}t - \frac{1}{25}t^2$, donde $t$ se midió en horas desde la medianoche. ¿Cuántos grados-hora de calentamiento se sintieron en este día, de $t = 0$ a $t = 24$?

**(b)** ¿Cuál fue la temperatura máxima en el día descrito en el inciso (a)?

**(c)** En otro día, la temperatura (en °F) estuvo modelada por la función $E(t) = 50 + 5t - \frac{1}{4}t^2$. ¿Cuántos grados-hora de calentamiento se sintieron este día?

**(d)** ¿Cuál fue la máxima temperatura en el día descrito en el inciso (c)?

**(e)** ¿Cuál día fue más "caluroso"?

# EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO CAPÍTULOS 12 Y 13

**1.** Para cada una de las sucesiones siguientes, encuentre el 7° término, el 20avo término y el límite de la sucesión (si existe).

**(a)** $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \ldots$

**(b)** $a_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^3 - n + 4}$

**(c)** La sucesión aritmética con término inicial $a = \frac{1}{2}$ y diferencia común $d = 3$.

**(d)** La sucesión geométrica con término inicial $a = 12$ y razón común $r = \frac{5}{6}$.

**(e)** La sucesión definida en forma recursiva por $a_1 = 0.01$ y $a_n = -2a_{n-1}$.

**2.** Calcule la suma.

**(a)** $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} + 1 + \frac{6}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \cdots + \frac{19}{5} + 4$

**(b)** $3 + 9 + 27 + 81 + \cdots + 3^{10}$

**(c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{9} \frac{5}{2^n}$

**(d)** $6 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \cdots$

**3.** María y Kevin compran en \$350,000 una casa para vacacionar. Pagan \$35,000 de enganche y toman una hipoteca a 15 años para el resto. Si su tasa anual de interés es 6%, ¿cuál será su pago mensual de la hipoteca?

**4.** Una sucesión está definida inductivamente por $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. Use inducción matemática para demostrar que $a_n = n^2$.

**5.** **(a)** Use el Teorema del Binomio para expandir la expresión $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^5$.

**(b)** Encuentre el término que contenga $x^4$ en la expansión binomial de $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^{12}$.

**6.** Sea $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

**(a)** Trace una gráfica de $f$.

**(b)** Evalúe: **(i)** $f(0)$ **(ii)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(iii)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(iv)** $\lim_{x\to 2} f(x)$ **(v)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

**7.** Use una tabla de valores para estimar el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

**8.** Evalúe el límite, si existe.

**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2 + 4x - 21}{x - 3}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 4}{x - 2}$

**9.** Sea $g(x) = x^3$. Encuentre:

**(a)** La derivada de $g$.

**(b)** $g'(-3)$, $g'(0)$ y $g'(a)$

**(c)** La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g$ en el punto $(2, 8)$

**10.** **(a)** Trace la gráfica de la región del plano de coordenadas que está bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ y arriba del eje $x$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

**(b)** Si $A$ es el área de esta región, explique por qué $1 < A < 1.5$.

**(c)** Aproxime el área de la región con cuatro rectángulos, igualmente espaciados en el eje $x$, usando puntos extremos izquierdos para determinar las alturas de los rectángulos.

**(d)** Use la definición de límite de área para hallar el área exacta de la región.

# APÉNDICE Cálculos y cifras significativas

La mayor parte de los ejercicios y ejemplos aplicados de este libro contienen valores aproximados. Por ejemplo, un ejercicio dice que la Luna tiene un radio de 1074 millas. Esto no significa que el radio de la Luna sea exactamente 1074 millas, sino simplemente que éste es el radio redondeado a la milla más cercana.

Un método sencillo para especificar la precisión de un número es indicar cuántas **cifras significativas** tiene. Los dígitos significativos de un número son aquellos que van desde el primer dígito diferente de cero hasta el último dígito diferente de cero (leyendo de izquierda a derecha). Entonces, 1074 tiene cuatro cifras significativas, 1070 tiene tres, 1100 tiene dos y 1000 tiene una cifra significativa. A veces, esta regla puede llevar a ambigüedades. Por ejemplo, si una distancia es 200 km al kilómetro más cercano, entonces el número 200 realmente tiene tres cifras significativas, no sólo una. Esta ambigüedad se evita si usamos notación científica, es decir, si expresamos el número como múltiplo de una potencia de 10:

$$2.00 \times 10^2$$

Cuando trabajan con valores aproximados, los estudiantes a veces cometen el error de dar una respuesta final con *más* cifras significativas que los datos originales. Esto es incorrecto porque no se puede "crear" precisión si se usa una calculadora. El resultado final no puede ser más preciso que las mediciones dadas en el problema. Por ejemplo, suponga que nos indican que se miden los dos lados más cortos de un triángulo rectangulo y que miden 1.25 y 2.33 pulgadas de largo. Por el Teorema de Pitágoras, encontramos, usando calculadora, que la hipotenusa tiene longitud

$$\sqrt{1.25^2 + 2.33^2} \approx 2.644125564 \text{ pulg.}$$

Pero como las longitudes dadas se expresaron a tres cifras significativas, la respuesta no puede ser más precisa. Por lo tanto, sólo podemos decir que la hipotenusa es de 2.64 pulg. de largo, redondeando al centésimo más cercano.

En general, la respuesta final debe ser expresada con la misma precisión que la medición *menos* precisa dada en el enunciado del problema. Las reglas siguientes hacen más preciso este principio.

### REGLAS PARA TRABAJAR CON DATOS APROXIMADOS

1. Cuando multiplique o divida, redondee el resultado final para que tenga tantas *cifras significativas* como el valor dado con el menor número de dígitos significativos.
2. Cuando sume o reste, redondee el resultado final de modo que tenga su último dígito significativo en el *lugar decimal* en el que el valor menos preciso dado tiene su último dígito significativo.
3. Cuando tome potencias o raíces, redondee el resultado final para que tenga el mismo número de *dígitos significativos* que el valor dado.

Como ejemplo, suponga que se mide la superficie plana de una mesa y se encuentra que es de 122.64 pulg. por 37.3 pulg. Expresamos su área y perímetro como sigue:

$$\text{Área} = \text{longitud} \times \text{ancho} = 122.64 \times 37.3 \approx 4570 \text{ pulg.}^2 \qquad \text{Tres dígitos significativos}$$

$$\text{Perímetro} = 2(\text{longitud} + \text{ancho}) = 2(122.64 + 37.3) \approx 319.9 \text{ pulg.} \qquad \text{Dígito de décimas}$$

Observe que, en la fórmula para el perímetro, el valor 2 es un valor exacto, no una medida aproximada. Por lo tanto, no afecta la precisión del resultado final. En general, si un problema comprende sólo valores exactos, podemos expresar la respuesta final con tantos dígitos significativos como deseemos.

Observe también que para hacer el resultado final tan preciso como sea posible, *se debe esperar hasta el último paso para redondear una respuesta.* Si es necesario, use la función de memoria de su calculadora para retener los resultados de cálculos intermedios.

# RESPUESTAS a ejercicios seleccionados y exámenes de capítulo

## PRÓLOGO ■ PÁGINA P4

**1.** No puede ir con suficiente rapidez. **2.** 40% de descuento **3.** 427, $3n + 1$ **4.** 57 min **5.** No, no necesariamente **6.** La misma cantidad **7.** $2\pi$ **8.** El polo norte es uno de tales puntos; hay un número infinito de otros cerca del polo sur.

# CAPÍTULO 1

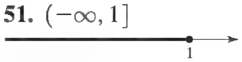
## SECCIÓN 1.1 ■ PÁGINA 10

**1.** Las respuestas pueden variar. **(a)** 2 **(b)** $-3$ **(c)** $\frac{3}{2}$ **(d)** $\sqrt{2}$
**2. (a)** $ba$; Conmutativa **(b)** $(a + b) + c$; Asociativa **(c)** $ab + ac$; Distributiva **3.** $\{x \mid 2 < x < 7\}$; $(2, 7)$
**4.** valor absoluto; positivo **5. (a)** 50 **(b)** $0, -10, 50$ **(c)** $0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, 1.23, -\frac{1}{3}$ **(d)** $\sqrt{7}, \sqrt[3]{2}$
**7.** Propiedad Conmutativa para la adición
**9.** Propiedad Asociativa para la adición **11.** Propiedad Distributiva
**13.** Propiedad Conmutativa para la multiplicación
**15.** $3 + x$ **17.** $4A + 4B$ **19.** $3x + 3y$ **21.** $8m$
**23.** $-5x + 10y$ **25. (a)** $\frac{17}{30}$ **(b)** $\frac{9}{20}$ **27. (a)** 3 **(b)** $\frac{25}{72}$
**29. (a)** $\frac{8}{3}$ **(b)** 6 **31. (a)** $<$ **(b)** $>$ **(c)** $=$ **33. (a)** Falso **(b)** Verdadero **35. (a)** Falso **(b)** Verdadero **37. (a)** $x > 0$ **(b)** $t < 4$ **(c)** $a \geq \pi$ **(d)** $-5 < x < \frac{1}{3}$ **(e)** $|p - 3| \leq 5$
**39. (a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **(b)** $\{2, 4, 6\}$
**41. (a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **(b)** $\{7\}$
**43. (a)** $\{x \mid x \leq 5\}$ **(b)** $\{x \mid -1 < x < 4\}$

**45.** $-3 < x < 0$

**47.** $2 \leq x < 8$

**49.** $x \geq 2$

**51.** $(-\infty, 1]$


**53.** $(-2, 1]$

**55.** $(-1, \infty)$

**57. (a)** $[-3, 5]$ **(b)** $(-3, 5]$

**59.**

**61.**

**63.**

**65. (a)** 100 **(b)** 73 **67. (a)** 2 **(b)** $-1$ **69. (a)** 12 **(b)** 5
**71.** 5 **73. (a)** 15 **(b)** 24 **(c)** $\frac{67}{40}$ **75. (a)** $\frac{7}{9}$ **(b)** $\frac{13}{45}$ **(c)** $\frac{19}{33}$
**77.** Propiedad Distributiva **79. (a)** Sí, no **(b)** 6 pies

## SECCIÓN 1.2 ■ PÁGINA 21

**1. (a)** $5^6$ **(b)** base, exponente **2. (a)** sume, $3^9$ **(b)** reste, $3^3$
**3. (a)** $5^{1/3}$ **(b)** $\sqrt{5}$ **(c)** No **4.** $(4^{1/2})^3 = 8, (4^3)^{1/2} = 8$
**5.** $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **6.** $\frac{2}{3}$ **7.** $5^{-1/2}$ **9.** $\sqrt[3]{4^2}$ **11.** $5^{3/5}$
**13.** $\sqrt[5]{a^2}$ **15. (a)** $-9$ **(b)** 9 **(c)** $\frac{1}{9}$ **17. (a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{1}{8}$ **(c)** 16 **19. (a)** 4 **(b)** 2 **(c)** $\frac{1}{2}$ **21. (a)** $\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** $\frac{1}{2}$
**23. (a)** $\frac{3}{2}$ **(b)** 4 **(c)** $-4$ **25.** 5 **27.** 14 **29.** $7\sqrt{2}$
**31.** $3\sqrt[5]{3}$ **33.** $(x^2 + 4)\sqrt{x}$ **35. (a)** $x^{10}$ **(b)** $12y^7$ **(c)** $\dfrac{1}{x^4}$
**37. (a)** $y^3$ **(b)** $\dfrac{1}{x^4}$ **(c)** $a^6$ **39. (a)** $a^{18}$ **(b)** $\dfrac{a^6}{64}$ **(c)** $\dfrac{1}{24z^4}$
**41. (a)** $8x^7y^5$ **(b)** $4a^5z^5$ **43. (a)** $405x^{10}y^{23}$ **(b)** $500a^{12}b^{19}$
**45. (a)** $\dfrac{3y^2}{z}$ **(b)** $\dfrac{y^2z^9}{x^2}$ **47. (a)** $\dfrac{a^{19}b}{c^9}$ **(b)** $\dfrac{v^{10}}{u^{11}}$
**49. (a)** $\dfrac{4a^8}{b^9}$ **(b)** $\dfrac{125}{x^6y^3}$ **51. (a)** $\dfrac{b^3}{3a}$ **(b)** $\dfrac{s^3}{q^7r^4}$ **53.** $|x|$
**55.** $2x^2$ **57.** $2ab\sqrt[6]{b}$ **59.** $2|x|$ **61. (a)** $x^2$ **(b)** $y^2$
**63. (a)** $w^{5/3}$ **(b)** $4s^{9/2}$ **65. (a)** $4a^4b$ **(b)** $8a^9b^{12}$
**67. (a)** $4st^4$ **(b)** 4 **69. (a)** $\dfrac{1}{x}$ **(b)** $\dfrac{8y^8}{x^2}$ **71. (a)** $y^{3/2}$ **(b)** $10x^{7/12}$ **73. (a)** $2st^{11/6}$ **(b)** $x$ **75. (a)** $y^{1/2}$ **(b)** $\dfrac{4u}{v^2}$
**77. (a)** $6.93 \times 10^7$ **(b)** $7.2 \times 10^{12}$ **(c)** $2.8536 \times 10^{-5}$ **(d)** $1.213 \times 10^{-4}$ **79. (a)** 319,000 **(b)** 272,100,000 **(c)** 0.00000002670 **(d)** 0.000000009999 **81. (a)** $5.9 \times 10^{12}$ mi **(b)** $4 \times 10^{-13}$ cm **(c)** $3.3 \times 10^{19}$ moléculas
**83.** $1.3 \times 10^{-20}$ **85.** $1.429 \times 10^{19}$ **87.** $7.4 \times 10^{-14}$
**89. (a)** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{2x}}{x}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{3x}}{3}$
**91. (a)** $\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt[4]{y}}{y}$ **(c)** $\dfrac{xy^{3/5}}{y}$
**93. (a)** Negativo **(b)** Positivo **(c)** Negativo **(d)** Negativo **(e)** Positivo **(f)** Negativo **95.** $2.5 \times 10^{13}$ mi **97.** $1.3 \times 10^{21}$ L
**99.** $4.03 \times 10^{27}$ moléculas **101. (a)** 28 mi/h **(b)** 167 pies

## SECCIÓN 1.3 ■ PÁGINA 32

**1.** 3; $2x^5, 6x^4, 4x^3$; $2x^3$, $2x^3(x^2 + 3x + 2)$
**2.** 10, 7; 2, 5; $(x + 2)(x + 5)$
**3.** $A^2 + 2AB + B^2$; $4x^2 + 12x + 9$ **4.** $A^2 - B^2$; $25 - x^2$

**5.** $(A + B)(A - B)$; $(2x - 5)(2x + 5)$ **6.** $(A + B)^2$; $(x + 5)^2$
**7.** Trinomio; $x^2, -3x, 7$; 2 **9.** Monomio; $-8$; 0
**11.** Cuatro términos; $-x^4, x^3, -x^2, x$; 4 **13.** $7x + 5$
**15.** $5x^2 - 2x - 4$ **17.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 11$ **19.** $9x + 103$
**21.** $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$ **23.** $21t^2 - 26t + 8$
**25.** $6x^2 + 7x - 5$ **27.** $2x^2 + 5xy - 3y^2$ **29.** $9x^2 + 24x + 16$
**31.** $4u^2 + 4uv + v^2$ **33.** $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **35.** $x^2 - 25$
**37.** $9x^2 - 16$ **39.** $x - 4$ **41.** $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$
**43.** $-8r^3 + 12r^2 - 6r + 1$ **45.** $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$
**47.** $2x^3 - 7x^2 + 7x - 5$ **49.** $x\sqrt{x} - x$ **51.** $y^2 + y$
**53.** $x^4 - a^4$ **55.** $a - b^2$ **57.** $-x^4 + x^2 - 2x + 1$
**59.** $4x^2 + 4xy + y^2 - 9$ **61.** $2x(-x^2 + 8)$ **63.** $(y - 6)(y + 9)$
**65.** $xy(2x - 6y + 3)$ **67.** $(x - 1)(x + 3)$ **69.** $(2x - 5)(4x + 3)$
**71.** $(3x - 1)(x - 5)$ **73.** $(3x + 4)(3x + 8)$ **75.** $(3a - 4)(3a + 4)$
**77.** $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ **79.** $(2s - 5t)(4s^2 + 10st + 25t^2)$
**81.** $(x + 6)^2$ **83.** $(x + 4)(x^2 + 1)$ **85.** $(2x + 1)(x^2 - 3)$
**87.** $(x + 1)(x^2 + 1)$ **89.** $\sqrt{x}(x - 1)(x + 1)$ **91.** $x^{-3/2}(1 + x)^2$
**93.** $(x^2 + 1)^{-1/2}(x^2 + 3)$ **95.** $6x(2x^2 + 3)$ **97.** $(x - 4)(x + 2)$
**99.** $(2x + 3)(x + 1)$ **101.** $9(x - 5)(x + 1)$ **103.** $(7 - 2y)(7 + 2y)$
**105.** $(t - 3)^2$ **107.** $(2x + y)^2$ **109.** $4ab$
**111.** $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$
**113.** $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$ **115.** $x(x + 1)^2$
**117.** $x^2y^3(x + y)(x - y)$ **119.** $(x + 2)(2x^2 + 1)$
**121.** $3(x - 1)(x + 2)$ **123.** $(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$
**125.** $2(x^2 + 4)^4(x - 2)^3(7x^2 - 10x + 8)$
**127.** $(x^2 + 3)^{-4/3}(\frac{1}{3}x^2 + 3)$
**129.** **(d)** $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b - a + c)$

## SECCIÓN 1.4 ■ PÁGINA 41

**1.** (a), (c) **2.** numerador; denominador; $\dfrac{x + 1}{x + 3}$

**3.** numeradores; denominadores; $\dfrac{2x}{x^2 + 4x + 3}$

**4.** **(a)** 3 **(b)** $x(x + 1)^2$ **(c)** $\dfrac{-2x^2 + 1}{x(x + 1)^2}$

**5.** $\mathbb{R}$ **7.** $x \neq 4$ **9.** $x \geq -3$ **11.** $\{x \mid x \neq -1, 2\}$

**13.** $\dfrac{x + 2}{2(x - 1)}$ **15.** $\dfrac{1}{x + 2}$ **17.** $\dfrac{x + 2}{x + 1}$ **19.** $\dfrac{y}{y - 1}$

**21.** $\dfrac{x(2x + 3)}{2x - 3}$ **23.** $\dfrac{1}{4(x - 2)}$ **25.** $\dfrac{x + 3}{x - 3}$ **27.** $\dfrac{1}{t^2 + 9}$

**29.** $\dfrac{x + 4}{x + 1}$ **31.** $\dfrac{x + 5}{(2x + 3)(x + 4)}$ **33.** $\dfrac{(2x + 1)(2x - 1)}{(x + 5)^2}$

**35.** $x^2(x + 1)$ **37.** $\dfrac{x}{yz}$ **39.** $\dfrac{3(x + 2)}{x + 3}$ **41.** $\dfrac{3x + 7}{(x - 3)(x + 5)}$

**43.** $\dfrac{1}{(x + 1)(x + 2)}$ **45.** $\dfrac{3x + 2}{(x + 1)^2}$ **47.** $\dfrac{u^2 + 3u + 1}{u + 1}$

**49.** $\dfrac{2x + 1}{x^2(x + 1)}$ **51.** $\dfrac{2x + 7}{(x + 3)(x + 4)}$ **53.** $\dfrac{x - 2}{(x + 3)(x - 3)}$

**55.** $\dfrac{5x - 6}{x(x - 1)}$ **57.** $\dfrac{-5}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}$ **59.** $\dfrac{(x + 1)^2}{x^2 + 2x - 1}$

**61.** $\dfrac{4x - 7}{(x - 2)(x - 1)(x + 2)}$ **63.** $-xy$ **65.** $\dfrac{y - x}{xy}$ **67.** $\dfrac{1}{1 - x}$

**69.** $-\dfrac{1}{(1 + x)(1 + x + h)}$ **71.** $-\dfrac{2x + h}{x^2(x + h)^2}$ **73.** $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

**75.** $\dfrac{(x + 2)^2(x - 13)}{(x - 3)^3}$ **77.** $\dfrac{x + 2}{(x + 1)^{3/2}}$ **79.** $\dfrac{2x + 3}{(x + 1)^{4/3}}$

**81.** $2 + \sqrt{3}$ **83.** $\dfrac{2(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}$ **85.** $\dfrac{y\sqrt{3} - y\sqrt{y}}{3 - y}$

**87.** $\dfrac{-4}{3(1 + \sqrt{5})}$ **89.** $\dfrac{r - 2}{5(\sqrt{r} - \sqrt{2})}$ **91.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

**93.** Verdadera **95.** Falsa **97.** Falsa **99.** Verdadera

**101.** **(a)** $\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ **(b)** $\frac{20}{3} \approx 6.7$ ohms

## SECCIÓN 1.5 ■ PÁGINA 54

**1.** **(a)** Verdadero **(b)** Falso (porque la cantidad podría ser 0) **(c)** Falso **2.** **(a)** Factorizar en $(x + 1)(x - 5)$ y usar la Propiedad del Producto Cero. **(b)** Sumar 5 a cada lado, entonces completar el cuadrado sumando 4 a ambos lados. **(c)** Insertar coeficientes en la Fórmula Cuadrática **3.** **(a)** 0, 4 **(b)** Factorizar
**4.** **(a)** $\sqrt{2x} = -x$ **(b)** $2x = x^2$ **(c)** 0, 2 **(d)** 0
**5.** Cuadrático; $x + 1$; $W^2 - 5W + 6 = 0$
**6.** Cuadrático; $x^3$; $W^2 + 7W - 8 = 0$ **7.** **(a)** No **(b)** Sí
**9.** **(a)** Sí **(b)** No **11.** 12 **13.** 18 **15.** $-3$ **17.** 12

**19.** $-\frac{3}{4}$ **21.** 30 **23.** $-\frac{1}{3}$ **25.** $\frac{13}{3}$ **27.** $-2$ **29.** $R = \dfrac{PV}{nT}$

**31.** $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ **33.** $x = \dfrac{2d - b}{a - 2c}$ **35.** $x = \dfrac{1 - a}{a^2 - a - 1}$

**37.** $r = \pm\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **39.** $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$

**41.** $t = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$ **43.** $-4, 3$ **45.** 3, 4 **47.** $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

**49.** $-2, \frac{1}{3}$ **51.** $\pm 2$ **53.** $-\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ **55.** $-1 \pm \sqrt{6}$

**57.** $3 \pm 2\sqrt{5}$ **59.** $-2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$ **61.** $0, \frac{1}{4}$ **63.** $-3, 5$ **65.** 2, 5

**67.** $-\frac{3}{2}, 1$ **69.** $-1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ **71.** $\frac{3}{4}$ **73.** $-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$

**75.** No hay solución real **77.** $\dfrac{-8 \pm \sqrt{14}}{10}$ **79.** 2 **81.** 1

**83.** No hay solución real **85.** $-\frac{7}{5}, 2$ **87.** $-50, 100$ **89.** $-4$
**91.** 4 **93.** 3 **95.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ **97.** No hay solución real
**99.** $\pm 3\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{2}$ **101.** $-1, 0, 3$ **103.** 27, 729
**105.** $-2, -\frac{4}{3}$ **107.** 3.99, 4.01 **109.** 4.24 s
**111.** **(a)** Después de 1 s y $1\frac{1}{2}$ s **(b)** Nunca **(c)** 25 pies **(d)** Después de $1\frac{1}{4}$ s **(e)** Después de $2\frac{1}{2}$ s **113.** **(a)** 0.00055, 12.018 m **(b)** 234.375 kg/m$^3$ **115.** **(a)** Después de 17 años, el 1 de enero, 2019 **(b)** Después de 18.612 años, el 12 de agosto de 2020 **117.** 50 **119.** 132.6 pies

## SECCIÓN 1.6 ■ PÁGINA 67

**2.** principal; tasa de interés; tiempo en años **3.** **(a)** $x^2$ **(b)** $lw$

**(c)** $\pi r^2$ **4.** 1.6 **5.** $\dfrac{1}{x}$ **6.** $r = \dfrac{d}{t}, t = \dfrac{d}{r}$ **7.** $3n + 3$

**9.** $\dfrac{160 + s}{3}$ **11.** $0.025x$ **13.** $3w^2$ **15.** $\frac{3}{4}s$ **17.** $\dfrac{25}{3 + x}$

**19.** 400 mi **21.** \$9000 al $4\frac{1}{2}$% y \$3000 al 4% **23.** 7.5% **25.** \$7400 **27.** \$45,000 **29.** Plomero, 70 h; ayudante, 35 h **31.** 40 años de edad **33.** 9 de 1 centavo, 9 de 5 centavos, 9 de diez centavos **35.** 45 pies **37.** 120 pies por 120 pies **39.** 25 pies por 35 pies **41.** 60 pies por 40 pies **43.** 120 pies **45.** **(a)** 9 cm **(b)** 5 pulg. **47.** 4 pulg. **49.** 18 pies **51.** 5 m **53.** 200 mL **55.** 18 g **57.** 0.6 L **59.** 35% **61.** 37 min 20 s **63.** 3 h **65.** Irene 3 h, Henry $4\frac{1}{2}$ h **67.** 4 h

**69.** 500 mi/h **71.** 50 mi/h (o 240 mi/h) **73.** 6 km/h
**75.** 6.4 pies del fulcro **77.** 2 pies por 6 pies por 15 pies
**79.** 13 pulg. por 13 pulg. **81.** 2.88 pies **83.** 16 mi; no **85.** 7.52 pies
**87.** 18 pies **89.** 4.55 pies

## SECCIÓN 1.7 ■ PÁGINA 80

**1. (a)** $<$ **(b)** $\leq$ **(c)** $\leq$ **(d)** $>$ **2. (a)** Verdadero **(b)** Falso
**3. (a)** $[-3, 3]$ **(b)** $(-\infty, -3], [3, \infty)$ **4. (a)** $< 3$ **(b)** $> 3$
**5.** $\{\sqrt{2}, 2, 4\}$ **7.** $\{4\}$ **9.** $\{-2, -1, 2, 4\}$

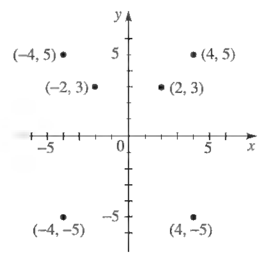
**11.** $(-\infty, \frac{7}{2}]$ **13.** $(4, \infty)$
**15.** $(-\infty, 2]$ **17.** $(-\infty, -\frac{1}{2})$
**19.** $[1, \infty)$ **21.** $(\frac{16}{3}, \infty)$
**23.** $(-\infty, -18)$ **25.** $(-\infty, -1]$
**27.** $[-3, -1)$ **29.** $(2, 6)$
**31.** $[\frac{9}{2}, 5)$ **33.** $(\frac{15}{2}, \frac{21}{2}]$
**35.** $(-2, 3)$ **37.** $(-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [0, \infty)$
**39.** $[-3, 6]$ **41.** $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$
**43.** $(-1, 4)$ **45.** $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$
**47.** $(-2, 2)$ **49.** $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$
**51.** $(-\infty, -2] \cup (-2, 4)$ **53.** $[-1, 3]$
**55.** $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ **57.** $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$
**59.** $(-\infty, -\frac{3}{2})$ **61.** $(-\infty, 5) \cup [16, \infty)$
**63.** $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ **65.** $[-2, -1) \cup (0, 1]$
**67.** $[-2, 0) \cup (1, 3]$ **69.** $(-3, -\frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$
**71.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **73.** $[-4, 4]$
**75.** $(-\infty, -\frac{7}{2}) \cup (\frac{7}{2}, \infty)$ **77.** $[2, 8]$
**79.** $[1.3, 1.7]$ **81.** $(-\infty, -1] \cup [\frac{7}{3}, \infty)$
**83.** $(-4, 8)$ **85.** $(-6.001, -5.999)$
**87.** $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

**89.** $|x| < 3$ **91.** $|x - 7| \geq 5$ **93.** $|x| \leq 2$ **95.** $|x| > 3$
**97.** $|x - 1| \leq 3$ **99.** $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$ **101.** $x < -2$ o $x > 7$
**103. (a)** $x \geq \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ **(b)** $\frac{a - c}{b} \leq x < \frac{2a - c}{b}$
**105.** $68 \leq F \leq 86$ **107.** Más de 200 mi
**109.** Entre 12,000 mi y 14,000 mi
**111. (a)** $-\frac{1}{3}P + \frac{560}{3}$ **(b)** De \$215 a \$290
**113.** Distancias entre 20,000 km y 100,000 km
**115.** De 0 s a 3 s **117.** Entre 0 y 60 mi/h
**119.** Entre 20 y 40 pies **121.** Entre 62.4 y 74.0 pulg.

## SECCIÓN 1.8 ■ PÁGINA 92

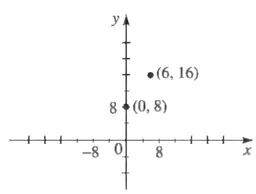
**1.** $(3, -5)$ **2.** $\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$; 10
**3.** $\left(\frac{a + c}{2}, \frac{b + d}{2}\right)$; $(4, 6)$ **4.** 2; 3; No **5. (a)** $y$; $x$; $-1$
**(b)** $x$; $y$; $\frac{1}{2}$ **6.** $(1, 2)$; 3

**7.**



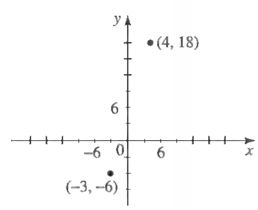

**9. (a)** $\sqrt{13}$ **(b)** $(\frac{3}{2}, 1)$ **11. (a)** 10 **(b)** $(1, 0)$

**13. (a)**



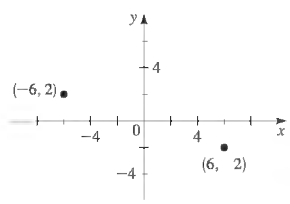

**(b)** 10 **(c)** $(3, 12)$

**15. (a)**



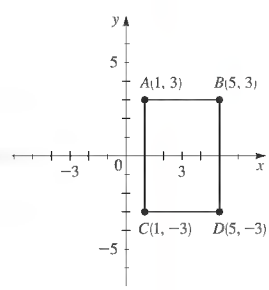

**(b)** 25 **(c)** $(\frac{1}{2}, 6)$

**17. (a)**

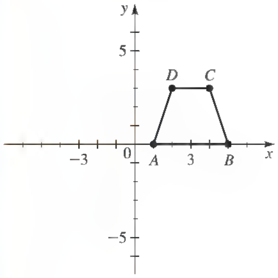



**(b)** $4\sqrt{10}$ **(c)** $(0, 0)$

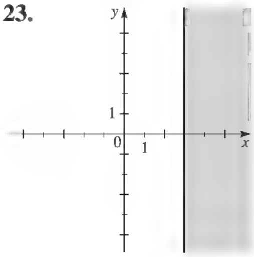
**19.** 24



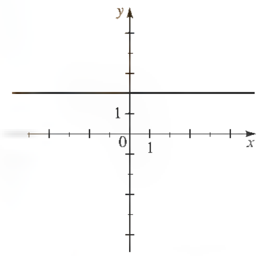
**21.** Trapecio, área $= 9$



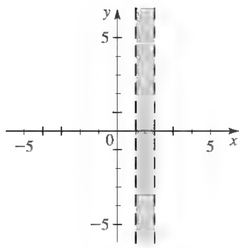
**23.**



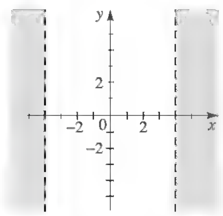
**25.**



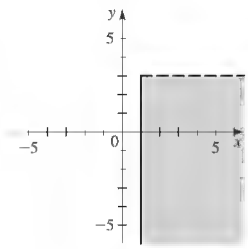
**27.**



**29.**

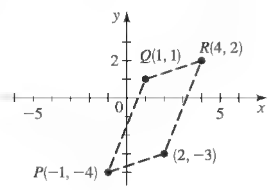


**31.**

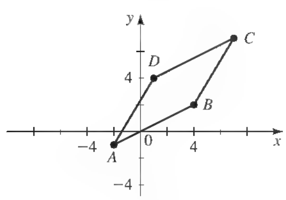


**33.** $A(6, 7)$ **35.** $Q(-1, 3)$ **39.** **(b)** 10 **43.** $(0, -4)$

**45.** $(2, -3)$



**47.** **(a)**



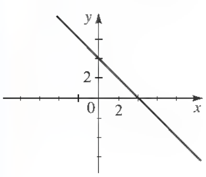
**(b)** $\left(\frac{5}{2}, 3\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

**49.** No, sí, sí **51.** Sí, no, sí

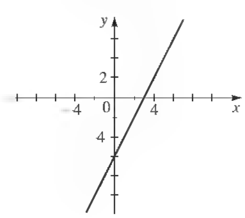
**53.** Puntos de intersección $x$ 0, 4; punto de intersección $y$ 0

**55.** Puntos de intersección $x-2$, 2; puntos de intersección $y-4$, 4

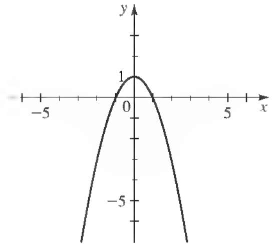
**57.** Punto de intersección $x$ 4, punto de intersección $y$ 4, no hay simetría



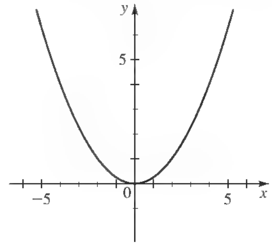
**59.** Punto de intersección $x$ 3, punto de intersección $y-6$, no hay simetría



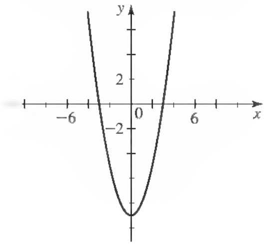
**61.** Punto de intersección $x$ $\pm 1$, punto de intersección $y$ 1, simetría respecto al eje $y$



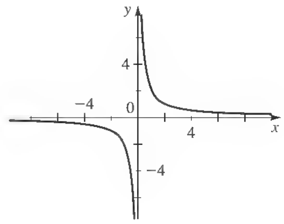
**63.** Punto de intersección $x$ 0, punto de intersección $y$ 0, simetría respecto al eje $y$



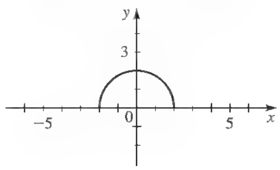
**65.** Punto de intersección $x \pm 3$, punto de intersección $y -9$, simetría respecto al eje $y$



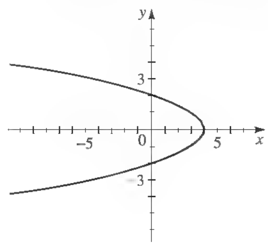
**67.** No hay intersección, simetría respecto al origen



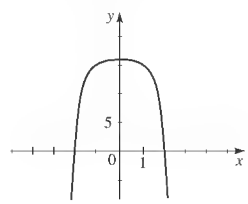
**69.** Puntos de intersección $x$ $\pm 2$, punto de intersección $y$ 2, simetría respecto al eje $y$



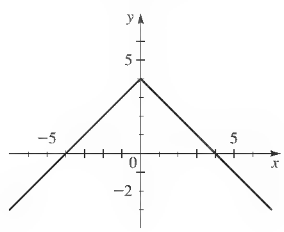
**71.** Punto de intersección $x$ 4, puntos de intersección $y -2$, 2, simetría respecto al eje $x$



**73.** Puntos de intersección $x$ $\pm 2$, punto de intersección $y$ 16, simetría respecto al eje $y$



**75.** Puntos de intersección $x$ $\pm 4$, punto de intersección $y$ 4, simetría respecto al eje $y$

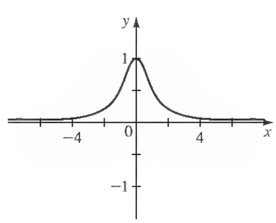


**77.** Simetría respecto al eje $y$

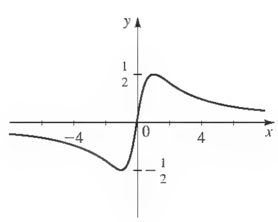
**79.** Simetría respecto al origen

**81.** Simetría respecto al origen

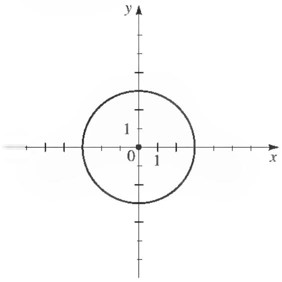
**83.**



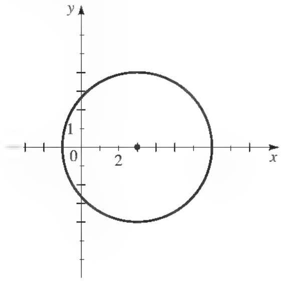
**85.**



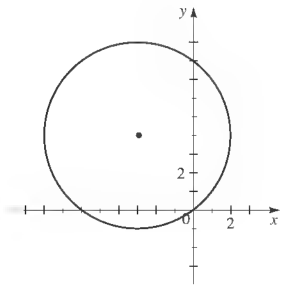
**87.** (0, 0), 3



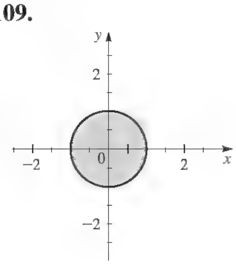
**89.** (3, 0), 4



**91.** (−3, 4), 5



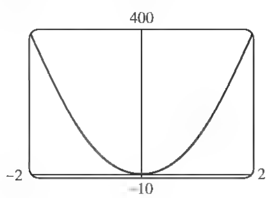
**93.** $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ **95.** $x^2 + y^2 = 65$
**97.** $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$ **99.** $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 9$
**101.** $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ **103.** $(2, -5), 4$ **105.** $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}), \frac{1}{2}$
**107.** $(\frac{3}{4}, 0), \frac{3}{4}$
**109.**



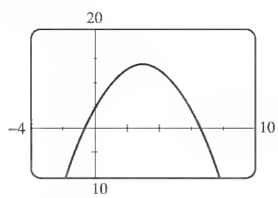
**111.** $12\pi$ **113.** **(a)** 5 **(b)** 31; 25 **(c)** Los puntos $P$ y $Q$ deben estar en la misma calle o la misma avenida.
**115.** **(a)** 2 Mm, 8 Mm **(b)** −1.33, 7.33; 2.40 Mm, 7.60 Mm

## SECCIÓN 1.9 ■ PÁGINA 104

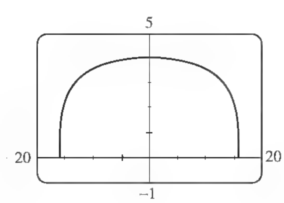
**1.** $x$ **2.** arriba **3.** **(a)** $x = -1, 0, 1, 3$ **(b)** $[-1, 0] \cup [1, 3]$
**4.** **(a)** $x = 1, 4$ **(b)** $(1, 4)$ **5.** (c) **7.** (c) **9.** (c)
**11.**



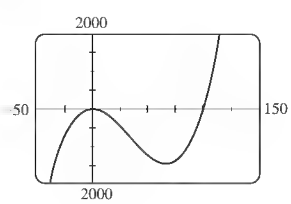
**13.**



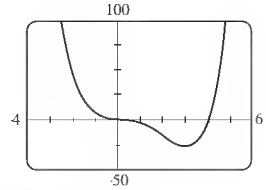
**15.**



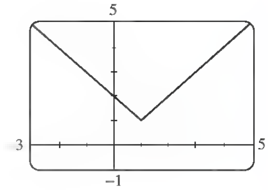
**17.**



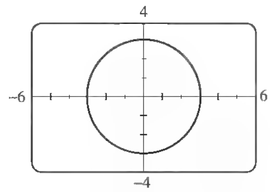
**19.**



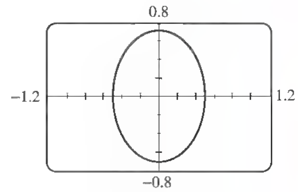
**21.**



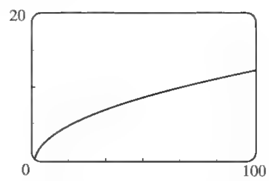
**23.** No **25.** Sí, 2
**27.**



**29.**



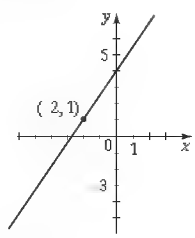
**31.** −4 **33.** $\frac{5}{14}$ **35.** $\pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5.7$ **37.** No hay solución
**39.** 2.5, −2.5 **41.** $5 + 2\sqrt[4]{5} \approx 7.99, 5 - 2\sqrt[4]{5} \approx 2.01$
**43.** 3.00, 4.00 **45.** 1.00, 2.00, 3.00 **47.** 1.62
**49.** −1.00, 0.00, 1.00 **51.** 4 **53.** No hay solución
**55.** 2.55 **57.** −2.05, 0, 1.05 **59.** $[-2.00, 5.00]$
**61.** $(-\infty, 1.00] \cup [2.00, 3.00]$ **63.** $(-1.00, 0) \cup (1.00, \infty)$
**65.** $(-\infty, 0)$ **67.** $(-1, 4)$ **69.** $[-1, 3]$ **71.** 0, 0.01
**73.** **(a)**



**(b)** 67 mi

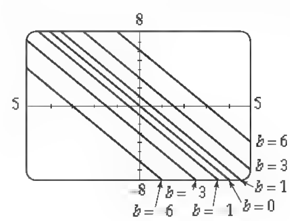
## SECCIÓN 1.10 ■ PÁGINA 115

**1.** $y$; $x$; 2 **2.** **(a)** 3 **(b)** 3 **(c)** $-\frac{1}{3}$ **3.** $y - 2 = 3(x - 1)$
**4.** **(a)** 0; $y = 3$ **(b)** No está definida; $x = 2$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{1}{6}$
**9.** $-\frac{1}{2}$ **11.** $-\frac{9}{2}$ **13.** $-2, \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}$ **15.** $x + y - 4 = 0$
**17.** $3x - 2y - 6 = 0$ **19.** $5x - y - 7 = 0$
**21.** $2x - 3y + 19 = 0$ **23.** $5x + y - 11 = 0$
**25.** $3x - y - 2 = 0$ **27.** $3x - y - 3 = 0$ **29.** $y = 5$
**31.** $x + 2y + 11 = 0$ **33.** $x = -1$ **35.** $5x - 2y + 1 = 0$
**37.** $x - y + 6 = 0$
**39.** **(a)**

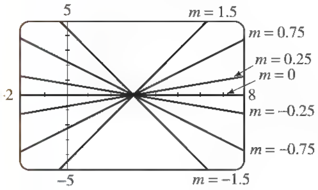


**(b)** $3x - 2y + 8 = 0$

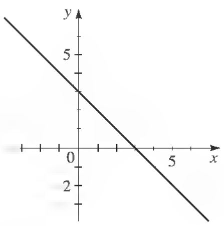
**41.** Todas tienen la misma pendiente.



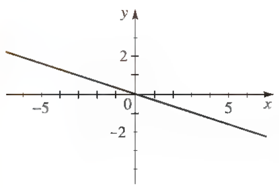
**43.** Todas tienen el mismo punto de intersección $x$.



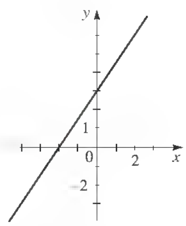
**45.** $-1, 3$



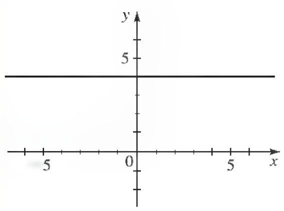
**47.** $\frac{1}{3}, 0$



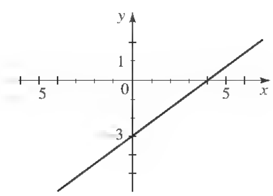
**49.** $\frac{3}{2}, 3$



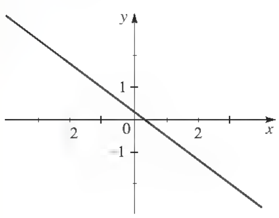
**51.** 0, 4



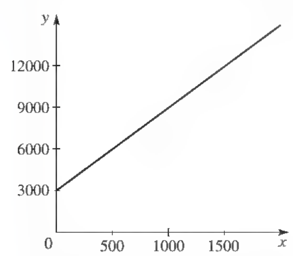
**53.** $\frac{3}{4}, -3$



**55.** $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

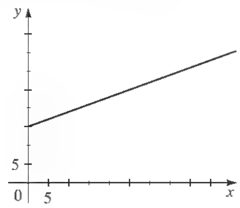


**61.** $x - y - 3 = 0$ **63. (b)** $4x - 3y - 24 = 0$ **65.** 16,667 pies
**67. (a)** 8.34; la pendiente representa el aumento en dosis para un año de aumento en edad. **(b)** 8.34 mg
**69. (a)**

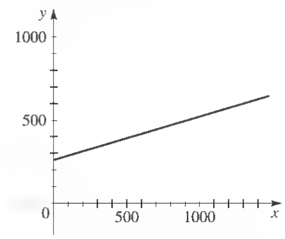


**(b)** La pendiente representa el costo de producción por tostador; el punto de intersección $y$ representa el costo fijo mensual.

**71. (a)** $t = \frac{5}{24}n + 45$ **(b)** 76°F
**73. (a)** $P = 0.434d + 15$, donde $P$ es la presión en lb/pulg.$^2$ y $d$ es la profundidad en pies
**(b)**



**(c)** La pendiente es el aumento en la presión del agua, y el punto de intersección $y$ es la presión del aire en la superficie. **(d)** 196 pies
**75. (a)** $C = \frac{1}{4}d + 260$
**(b)** $635
**(c)** La pendiente representa costo por milla.
**(d)** El punto de intersección $y$ representa el costo mensual fijo.



## SECCIÓN 1.11 ■ PÁGINA 121

**1.** Directamente proporcional; proporcionalidad **2.** Inversamente proporcional; proporcionalidad **3.** Directamente proporcional; inversamente proporcional **4.** $\frac{1}{2}xy$ **5.** $T = kx$ **7.** $v = k/z$

**9.** $y = ks/t$ **11.** $z = k\sqrt{y}$ **13.** $V = klwh$ **15.** $R = k\dfrac{i}{Pt}$

**17.** $y = 7x$ **19.** $R = 12/s$ **21.** $M = 15x/y$ **23.** $W = 360/r^2$
**25.** $C = 16lwh$ **27.** $s = 500/\sqrt{t}$ **29. (a)** $F = kx$ **(b)** 8
**(c)** 32 N **31. (a)** $C = kpm$ **(b)** 0.125 **(c)** $57,500
**33. (a)** $P = ks^3$ **(b)** 0.012 **(c)** 324 **35.** 0.7 dB **37.** 4
**39.** 5.3 mi/h **41. (a)** $R = kL/d^2$ **(b)** 0.002916 **(c)** $R \approx 137\ \Omega$
**43. (a)** 160,000 **(b)** 1,930,670,340 **45.** 36 lb

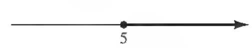
**47. (a)** $f = \dfrac{k}{L}$ **(b)** La reduce a la mitad

## REPASO DEL CAPÍTULO 1 ■ PÁGINA 125

**1.** Propiedad Conmutativa para la adición
**3.** Propiedad Distributiva

**5.** $-2 \le x < 6$

**7.** $[5, \infty)$



**9.** 6 **11.** $\frac{1}{72}$ **13.** $\frac{1}{6}$ **15.** 11 **17.** 4 **19.** $16x^3$ **21.** $12xy^8$

**23.** $x^2y^2$ **25.** $3x^{3/2}y^2$ **27.** $\dfrac{4r^{5/2}}{s^7}$ **29.** $7.825 \times 10^{10}$

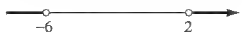
**31.** $1.65 \times 10^{-32}$ **33.** $3xy^2(4xy^2 - y^3 + 3x^2)$
**35.** $(x - 2)(x + 5)$ **37.** $(4t + 3)(t - 4)$ **39.** $(5 - 4t)(5 + 4t)$
**41.** $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
**43.** $x^{-1/2}(x - 1)^2$ **45.** $(x - 2)(4x^2 + 3)$
**47.** $\sqrt{x^2 + 2}(x^2 + x + 2)^2$ **49.** $6x^2 - 21x + 3$ **51.** $-7 + x$

**53.** $2x^3 - 6x^2 + 4x$ **55.** $\dfrac{3(x + 3)}{x + 4}$ **57.** $\dfrac{x + 1}{x - 4}$ **59.** $\dfrac{1}{x + 1}$

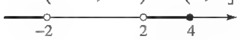
**61.** $\dfrac{1}{2x}$ **63.** $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{3}$ **65.** 5 **67.** No hay solución

**69.** 2, 7 **71.** $-1, \frac{1}{2}$ **73.** $0, \pm\frac{5}{2}$ **75.** $\dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ **77.** $-5$
**79.** 3, 11 **81.** 20 lb de pasitas, 30 lb de nueces
**83.** $\frac{1}{4}(\sqrt{329} - 3) \approx 3.78$ mi/h **85.** 1 h 50 min
**87.** $(-3, \infty)$

**89.** $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$



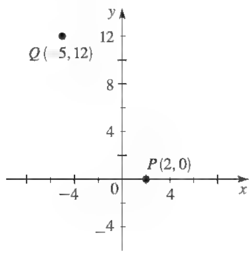

**91.** $(-\infty, -2) \cup (2, 4]$



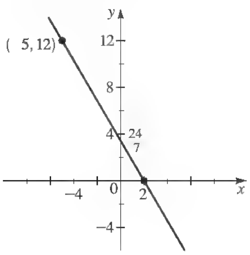

**93.** $[2, 8]$

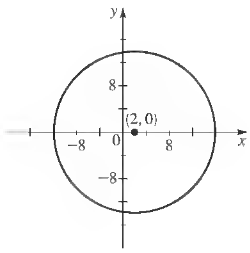
**95.** $-1, 7$ **97.** $[1, 3]$

**99.** **(a)**

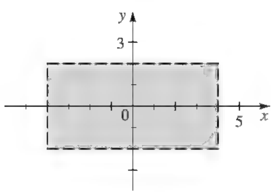



**(b)** $\sqrt{193}$ **(c)** $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$
**(d)** $y = -\frac{12}{7}x + \frac{24}{7}$ **(e)** $(x - 2)^2 + y^2 = 193$

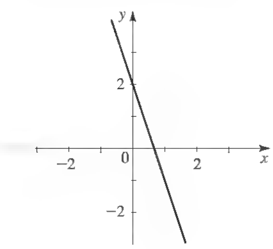


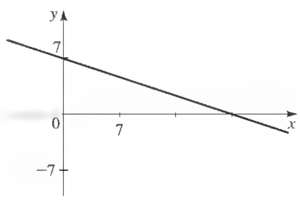




**101.**

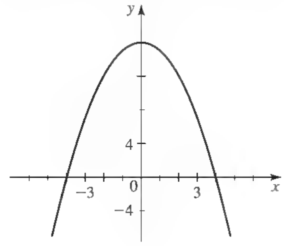


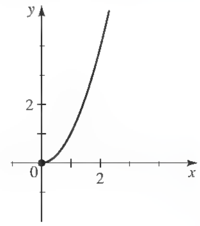
**103.** $B$ **105.** $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 26$
**107.** Circunferencia, centro $(-1, 3)$, radio 1 **109.** No hay gráfica
**111.** No hay simetría **113.** No hay simetría



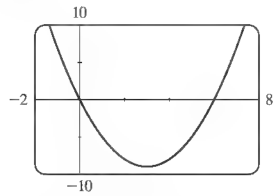


**115.** Simetría respecto al eje $y$ **117.** No hay simetría

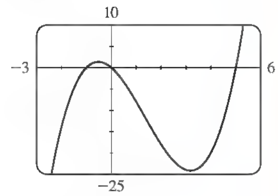




**119.**



**121.**



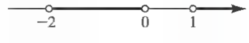
**123.** $2x - 3y - 16 = 0$ **125.** $3x + y - 12 = 0$
**127.** $x + 5y = 0$ **129.** $x^2 + y^2 = 169$, $5x - 12y + 169 = 0$
**131.** **(a)** La pendiente representa la cantidad que el resorte se estira para un aumento de una libra en peso. El punto de intersección $S$ representa la longitud no estirada del resorte. **(b)** 4 pulg.
**133.** $M = 8z$ **135.** **(a)** $I = k/d^2$ **(b)** 64,000 **(c)** 160 candelas
**137.** 11.0 mi/h

## CAPÍTULO 1 EXAMEN ■ PÁGINA 128

**1.** **(a)**

**(b)** $(-\infty, 3], [-1, 4)$ **(c)** 16
**2.** **(a)** 81 **(b)** $-81$ **(c)** $\frac{1}{81}$ **(d)** 25 **(e)** $\frac{9}{4}$ **(f)** $\frac{1}{8}$
**3.** **(a)** $1.86 \times 10^{11}$ **(b)** $3.965 \times 10^{-7}$
**4.** **(a)** $6\sqrt{2}$ **(b)** $48a^5b^7$ **(c)** $\dfrac{x}{9y^7}$ **(d)** $\dfrac{x + 2}{x - 2}$ **(e)** $\dfrac{1}{x - 2}$
**(f)** $-(x + y)$ **5.** $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
**6.** **(a)** $11x - 2$ **(b)** $4x^2 + 7x - 15$ **(c)** $a - b$
**(d)** $4x^2 + 12x + 9$ **(e)** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
**7.** **(a)** $(2x - 5)(2x + 5)$ **(b)** $(2x - 3)(x + 4)$
**(c)** $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$
**(d)** $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
**(e)** $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ **(f)** $xy(x - 2)(x + 2)$
**8.** **(a)** 6 **(b)** 1 **(c)** $-3, 4$ **(d)** $-1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
**(e)** No hay solución real **(f)** $\pm 1, \pm\sqrt{2}$ **(g)** $\frac{2}{3}, \frac{22}{3}$ **9.** 120 mi
**10.** 50 pies por 120 pies
**11.** **(a)** $[-4, 3)$

**(b)** $(-2, 0) \cup (1, \infty)$

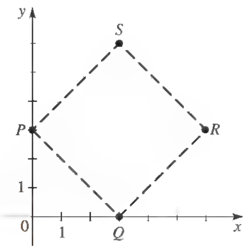



**(c)** $(1, 7)$

**(d)** $(-1, 4]$

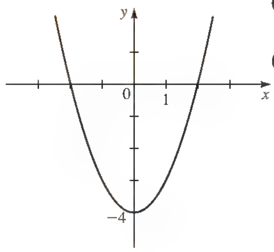
**12.** Entre 41 °F y 50 °F **13.** $0 \le x \le 6$
**14.** **(a)** $-2.94, -0.11, 3.05$ **(b)** $[-1, 2]$

**15.** **(a)** $S(3, 6)$



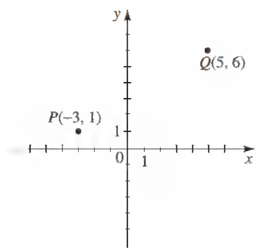

**(b)** 18

**16.** **(a)**



**(b)** Puntos de intersección $-2$, 2
punto de intersección $y$ $-4$
**(c)** Simetría respecto al eje $y$

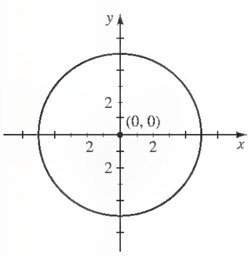
**17.** **(a)**

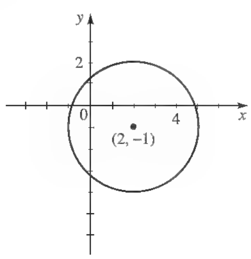



**(b)** $\sqrt{89}$ **(c)** $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ **(d)** $\frac{5}{8}$ **(e)** $y = -\frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$

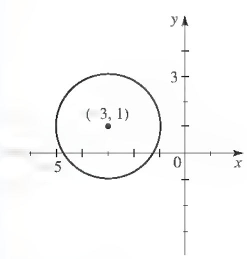
**(f)** $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{89}{4}$

**18.** **(a)** $(0, 0)$, 5 **(b)** $(2, -1)$, 3

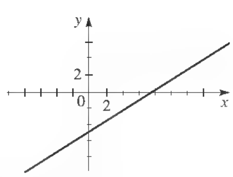



**(c)** $(-3, 1)$, 2



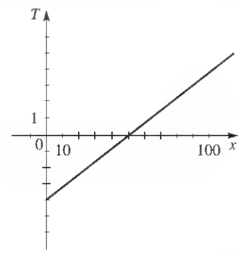

**19.** $y = \frac{2}{3}x - 5$



pendiente $\frac{2}{3}$; punto de intersección $y$ $-5$

**20.** **(a)** $3x + y \quad 3 = 0$ **(b)** $2x + 3y \quad 12 = 0$

**21.** **(a)** 4°C **(b)**

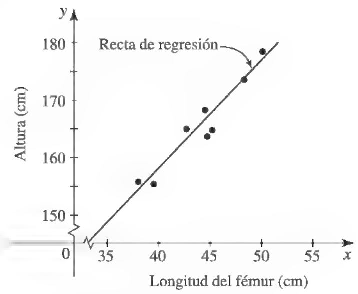


**(c)** La pendiente es el cambio en temperatura, el punto de intersección $x$ es la profundidad a la cual la temperatura es 0 °C, y el punto de intersección $T$ es la temperatura al nivel del suelo.

**22.** **(a)** $M = kwh^2/L$ **(b)** 400 **(c)** 12,000 lb

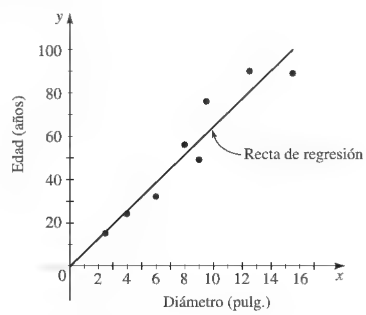
## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 135

**1.** **(a)**



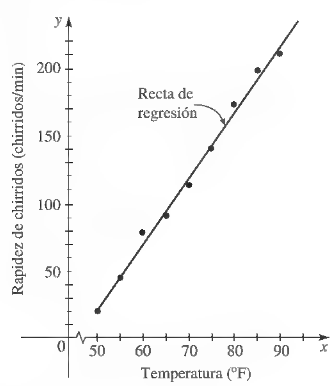

**(b)** $y = 1.8807x + 82.65$
**(c)** 191.7 cm

**3.** **(a)**



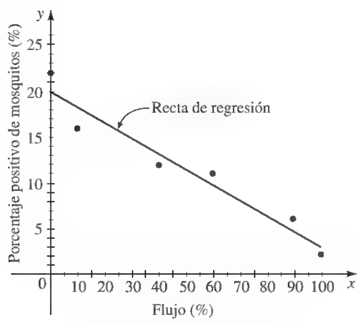

**(b)** $y = 6.451x - 0.1523$
**(c)** 116 años

**5.** **(a)**



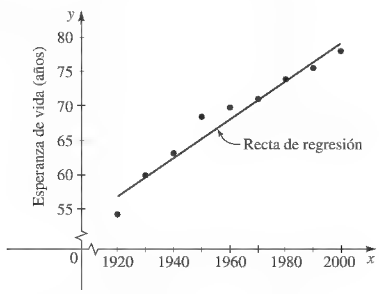

**(b)** $y = 4.857x - 220.97$
**(c)** 265 chirridos/min

**7. (a)**



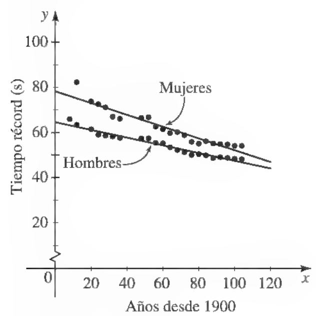

**(b)** $y = -0.168x + 19.89$ **(c)** 8.13%

**9. (a)**




**(b)** $y = 0.2708x - 462.9$ **(c)** 80.3 años

**11. (a)** Hombres: $y = -0.1703x + 64.61$, mujeres $y = -0.2603x + 78.27$; $x$ representa años desde1900 **(b)** 2052




# Capítulo 2

## SECCIÓN 2.1 ■ PÁGINA 149

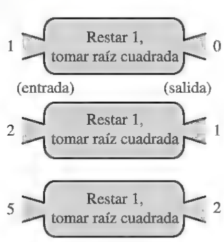
**1.** valor **2.** dominio, rango **3. (a)** $f$ y $g$ **(b)** $f(5) = 10, g(5) = 0$ **4. (a)** elevar al cuadrado, sumar 3

**(b)**

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 19 | 7 | 3 | 7 |

**5.** $f(x) = 2(x + 3)$ **7.** $f(x) = (x - 5)^2$ **9.** Elevar al cuadrado, luego sumar 2 **11.** Restar 4, luego dividir entre 3

**13.**




**15.**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −1 | 8 |
| 0 | 2 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |
| 3 | 8 |

**17.** $3, 3, -6, -\frac{23}{4}, 94$ **19.** $3, -3, 2, 2a + 1, -2a + 1, 2a + 2b + 1$

**21.** $\dfrac{1}{3}, \; 3, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1-a}{1+a}, \dfrac{2-a}{a}$, no está definida

**23.** $-4, 10, -2, 3\sqrt{2}, 2x^2 + 7x + 1, 2x^2 - 3x - 4$

**25.** $6, 2, 1, 2, 2|x|, 2(x^2 + 1)$ **27.** $4, 1, 1, 2, 3$

**29.** $8, -\frac{3}{4}, -1, 0, -1$ **31.** $x^2 + 4x + 5, x^2 + 6$

**33.** $x^2 + 4, x^2 + 8x + 16$ **35.** $3a + 2, 3(a + h) + 2, 3$

**37.** $5, 5, 0$ **39.** $\dfrac{a}{a+1}, \dfrac{a+h}{a+h+1}, \dfrac{1}{(a+h+1)(a+1)}$

**41.** $3 - 5a + 4a^2, 3 - 5a - 5h + 4a^2 + 8ah + 4h^2, -5 + 8a + 4h$

**43.** $(-\infty, \infty)$ **45.** $[-1, 5]$ **47.** $\{x \mid x \neq 3\}$ **49.** $\{x \mid x \neq \pm 1\}$

**51.** $[5, \infty)$ **53.** $(-\infty, \infty)$ **55.** $[\frac{5}{2}, \infty)$ **57.** $[-2, 3) \cup (3, \infty)$

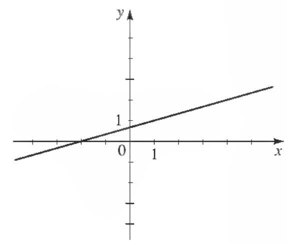
**59.** $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ **61.** $(4, \infty)$ **63.** $(\frac{1}{2}, \infty)$

**65. (a)** $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$

**(b)**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 2 | $\frac{4}{3}$ |
| 4 | 2 |
| 6 | $\frac{8}{3}$ |
| 8 | $\frac{10}{3}$ |

**(c)**

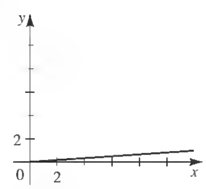


**67. (a)** $T(x) = 0.08x$

**(b)**

| $x$ | $T(x)$ |
|---|---|
| 2 | 0.16 |
| 4 | 0.32 |
| 6 | 0.48 |
| 8 | 0.64 |

**(c)**



**69. (a)** $C(10) = 1532.1, C(100) = 2100$ **(b)** El costo de producir 10 yd y 100 yd 71. **(c)** $C(0) = 1500$ **71. (a)** 50, 0 **(b)** $V(0)$ es el volumen del tanque lleno, y $V(20)$ es el volumen del tanque vacío, 20 minutos más tarde.

**(c)**

| $x$ | $V(x)$ |
|---|---|
| 0 | 50 |
| 5 | 28.125 |
| 10 | 12.5 |
| 15 | 3.125 |
| 20 | 0 |

$V(20)$

**73. (a)** $v(0.1) = 4440, v(0.4) = 1665$
**(b)** El flujo es más rápido cerca del eje central.

**(c)**

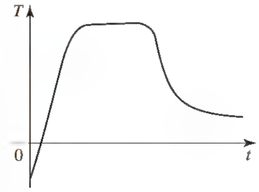
| $r$ | $v(r)$ |
|---|---|
| 0 | 4625 |
| 0.1 | 4440 |
| 0.2 | 3885 |
| 0.3 | 2960 |
| 0.4 | 1665 |
| 0.5 | 0 |

**75.** **(a)** 8.66 m, 6.61 m, 4.36 m
**(b)** Parecerá acortarse.
**77.** **(a)** \$90, \$105, \$100, \$105
**(b)** Costo total de un pedido, incluyendo envío

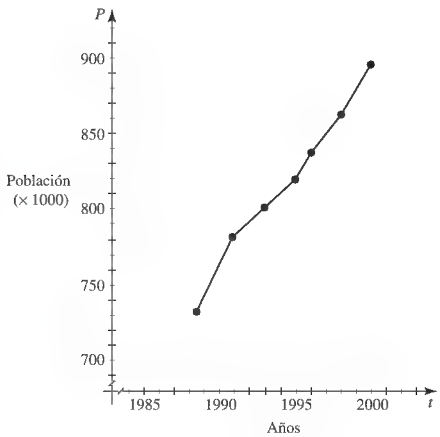
**79.** **(a)** $F(x) = \begin{cases} 15(40 - x) & \text{si } 0 < x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ 15(x - 65) & \text{si } x > 65 \end{cases}$

**(b)** \$150, \$0, \$150
**(c)** Infracciones por violar límites de velocidad

**81.**



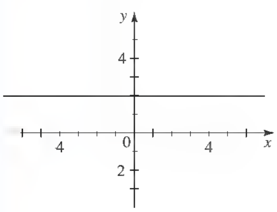

**83.**



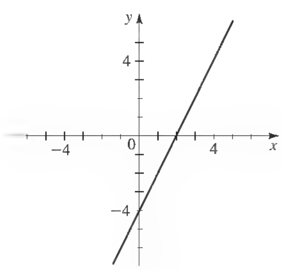

## SECCIÓN 2.2 ■ PÁGINA 159

**1.** $f(x)$, $x^3 + 2$, 10, 10 **2.** 3 **3.** 3
**4.** **(a)** IV **(b)** II **(c)** I **(d)** III

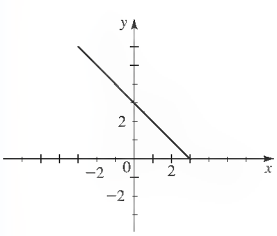
**5.**



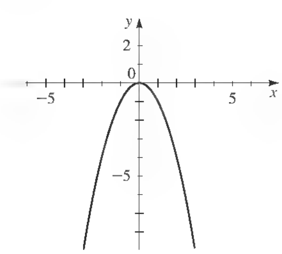
**7.**



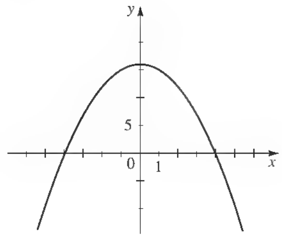
**9.**



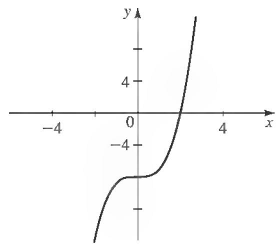
**11.**



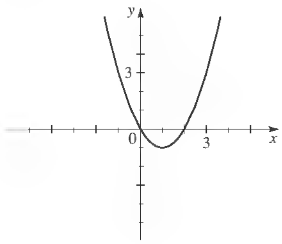
**13.**



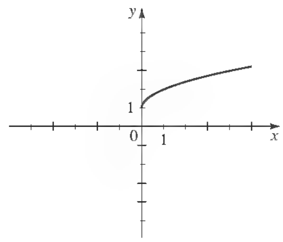
**15.**



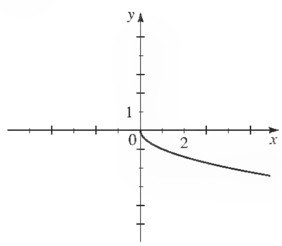
**17.**



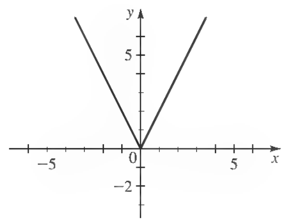
**19.**



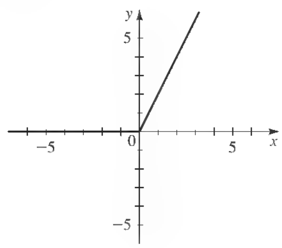
**21.**



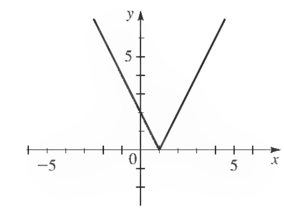
**23.**



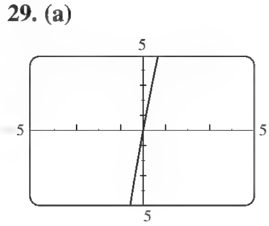
**25.**



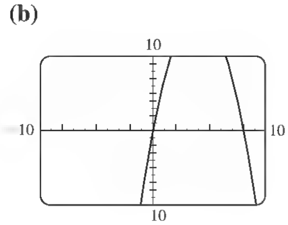
**27.**



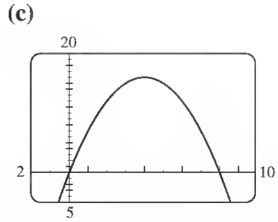
**29.** **(a)**



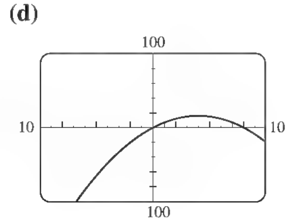
**(b)**



**(c)**

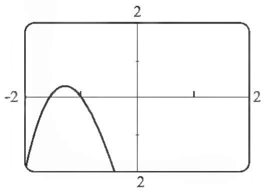


**(d)**

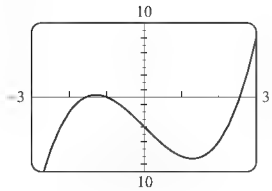


La gráfica (c) es la más apropiada.

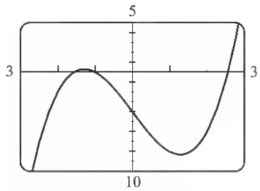
**31.** **(a)**



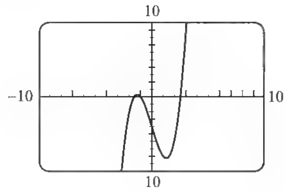
**(b)**



**(c)**

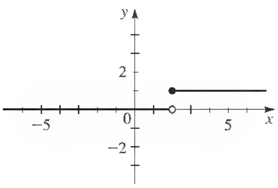


**(d)**

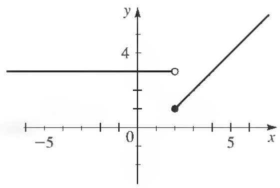


La gráfica (c) es la más apropiada.

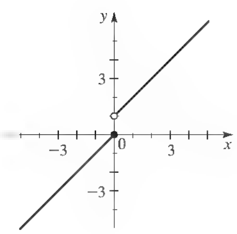
**33.**



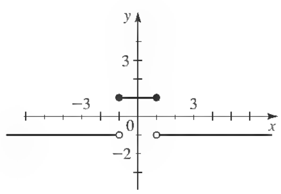
**35.**



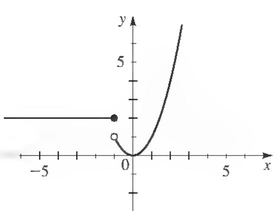
**37.**



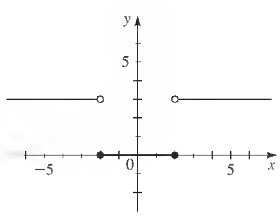
**39.**



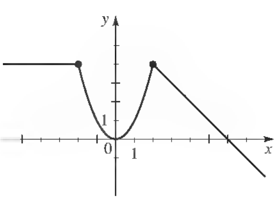
**41.**



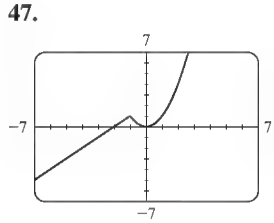
**43.**



**45.**



**47.**



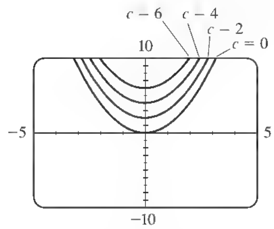
**49.** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**51.** **(a)** Sí **(b)** No **(c)** Sí **(d)** No

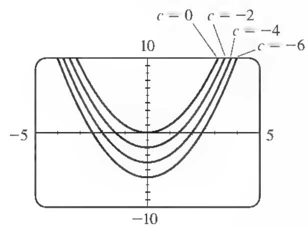
**53.** Función, dominio $[-3, 2]$, rango $[-2, 2]$ **55.** No es una función

**57.** Sí **59.** No **61.** No **63.** Sí **65.** Sí **67.** Sí

**69.** **(a)**

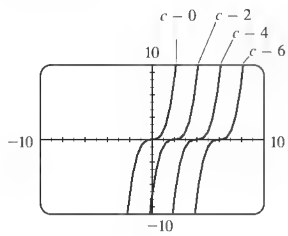



**(b)**

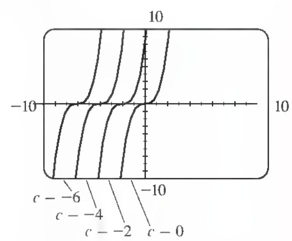



**(c)** Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia arriba $c$ unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia abajo $c$ unidades.

**71.** **(a)**

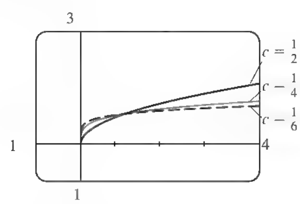



**(b)**

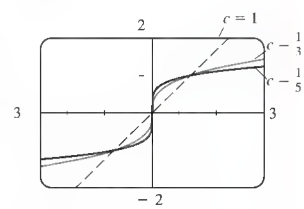



**(c)** Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la gráfica de $y = x^3$ desplazada a la derecha $c$ unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la gráfica de $y = x^3$ desplazada a la izquierda $c$ unidades.

**73.** **(a)**



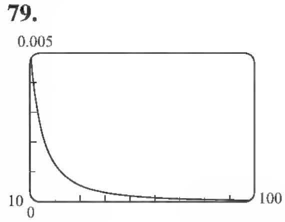
**(b)**



**(c)** Las gráficas de raíces pares son semejantes a $\sqrt{x}$; las gráficas de raíces impares son semejantes a $\sqrt[3]{x}$. Cuando $c$ aumenta, la gráfica de $y = \sqrt[c]{x}$ se hace más pronunciada cerca de 0 y más plana cuando $x > 1$. **75.** $f(x) = -\frac{7}{6}x - \frac{4}{3}, -2 \le x \le 4$

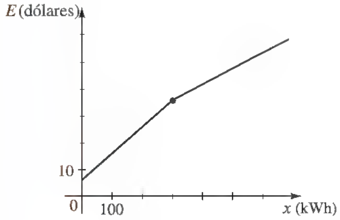
**77.** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, -3 \le x \le 3$

**79.**

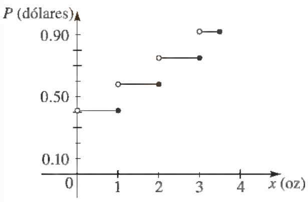


**81. (a)** $E(x) = \begin{cases} 6 + 0.10x & 0 \le x \le 300 \\ 36 + 0.06(x - 300), & x > 300 \end{cases}$

**(b)**



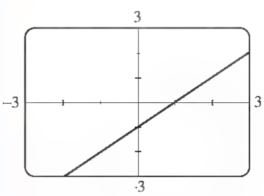

**83.** $P(x) = \begin{cases} 0.44 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0.61 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0.78 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ 0.95 & \text{si } 3 < x \le 3.5 \end{cases}$




## SECCIÓN 2.3 ■ PÁGINA 168

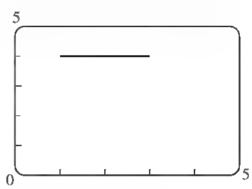
**1.** $a$, 4 **2.** $x$, $y$, $[1, 6]$, $[1, 7]$
**3. (a)** aumentan, $[1, 2]$, $[4, 5]$ **(b)** disminuyen, $[2, 4]$, $[5, 6]$
**4. (a)** máximo, 7, 2 **(b)** mínimo, 2, 4
**5. (a)** 1, −1, 3, 4 **(b)** Dominio $[-3, 4]$, rango $[-1, 4]$
**(c)** −3, 2, 4 **(d)** $-3 \le x \le 2$ y $x = 4$
**7. (a)** 3, 2, 2, 1, 0 **(b)** Dominio [ 4, 4], rango [ 2, 3]

**9. (a)**



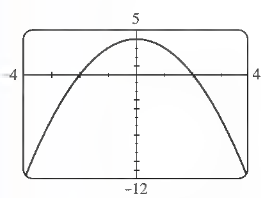

**(b)** Dominio $(-\infty, \infty)$, rango $(-\infty, \infty)$

**11. (a)**



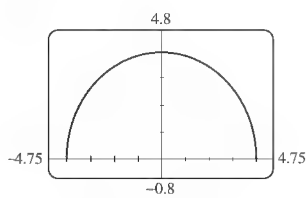

**(b)** Dominio $[1, 3]$, rango $\{4\}$

**13. (a)**



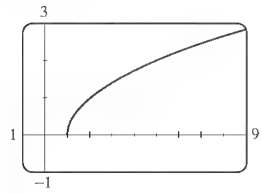

**(b)** Dominio $(-\infty, \infty)$, rango $(-\infty, 4]$

**15. (a)**




**(b)** Dominio $[-4, 4]$, rango $[0, 4]$

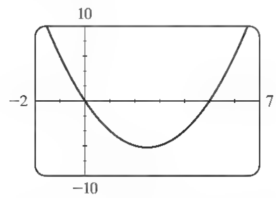
**17. (a)**




**(b)** Dominio $[1, \infty)$, rango $[0, \infty)$

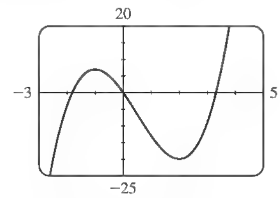
**19. (a)** $[-1, 1]$, $[2, 4]$ **(b)** $[1, 2]$
**21. (a)** $[-2, -1]$, $[1, 2]$ **(b)** $[-3, -2]$, $[-1, 1]$, $[2, 3]$

**23. (a)**



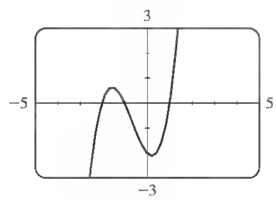

**(b)** Creciente sobre $[2.5, \infty)$; decreciente sobre $(-\infty, 2.5]$

**25. (a)**



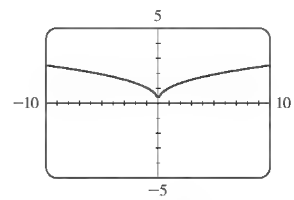

**(b)** Creciente sobre $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$; decreciente sobre $[-1, 2]$

**27. (a)**




**(b)** Creciente sobre $(-\infty, -1.55]$, $[0.22, \infty)$ decreciente sobre $[-1.55, 0.22]$

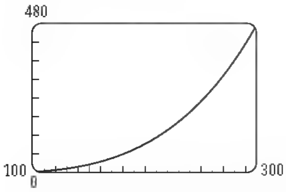
**29. (a)**




**(b)** Creciente sobre $[0, \infty)$; decreciente sobre $(-\infty, 0]$

**31. (a)** Máximo local 2 cuando $x = 0$; mínimo local 1 cuando $x = -2$, mínimo local 0 cuando $x = 2$ **(b)** Creciente sobre $[-2, 0] \cup [2, \infty)$; decreciente sobre $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$
**33. (a)** Máximo local 0 cuando $x = 0$; mínimo local 1 cuando $x = 3$, mínimo local −2 cuando $x = -2$, mínimo local −1 cuando $x = 1$ **(b)** Creciente sobre $[-2, 0] \cup [1, 3]$; decreciente sobre $(-\infty, -2] \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$ **35. (a)** Máximo local $\approx 0.38$ cuando $x \approx -0.58$; mínimo local $\approx -0.38$ cuando $x \approx 0.58$
**(b)** Creciente sobre $(-\infty, -0.58] \cup [0.58, \infty)$; decreciente sobre $[-0.58, 0.58]$ **37. (a)** Máximo local $\approx 0$ cuando $x = 0$; mínimo local $\approx -13.61$ cuando $x \approx -1.71$, mínimo local $\approx -73.32$ cuando $x \approx 3.21$ **(b)** Creciente sobre $[-1.71, 0] \cup [3.21, \infty)$; decreciente sobre ( $\infty$, $-1.71] \cup [0, 3.21]$ **39. (a)** Máximo local $\approx 5.66$ cuando $x \approx 4.00$ **(b)** Creciente sobre $(-\infty, 4.00]$; decreciente sobre $[4.00, 6.00]$ **41. (a)** Máximo local $\approx 0.38$ cuando $x \approx -1.73$; mínimo local $\approx -0.38$ cuando $x \approx 1.73$
**(b)** Creciente sobre $(-\infty, -1.73] \cup [1.73, \infty]$; decreciente sobre $[-1.73, 0) \cup (0, 1.73]$ **43. (a)** 500 MW, 725 MW
**(b)** Entre las 3:00 a.m. y 4:00 a.m. **(c)** Justo antes del mediodía
**45. (a)** Creciente sobre $[0, 30] \cup [32, 68]$; decreciente sobre $[30, 32]$
**(b)** Se sometió a una dieta intensiva y bajó de peso, sólo para aumentar otra vez de peso. **47. (a)** Creciente sobre $[0, 150] \cup [300, \infty)$, decreciente sobre $[150, 300]$ **(b)** Máximo local cuando $x = 150$, mínimo local cuando $x = 300$

**49.** El corredor A ganó la carrera. Todos los corredores terminaron. El corredor B cayó pero se levantó otra vez para llegar en segundo lugar. **51. (a)**



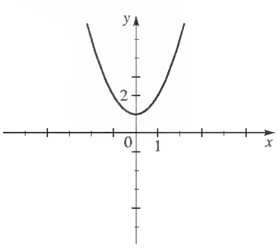

**(b)** Aumenta **53.** 20 mi/h **55.** $r \approx 0.67$ cm

## SECCIÓN 2.4 ▪ PÁGINA 177

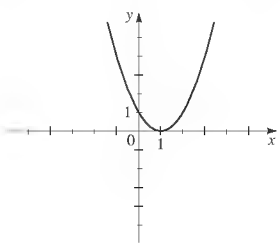
**1.** $\dfrac{100 \text{ millas}}{2 \text{ horas}} = 50$ mi/h **2.** $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **3.** $\dfrac{25 - 1}{5 - 1} = 6$
**4. (a)** secante **(b)** 3 **5.** $\frac{2}{3}$ **7.** $-\frac{4}{5}$ **9.** 3 **11.** 5 **13.** 60
**15.** $12 + 3h$ **17.** $-\dfrac{1}{a}$ **19.** $\dfrac{-2}{a(a+h)}$ **21. (a)** $\frac{1}{2}$
**23.** −0.25 pie/día **25. (a)** 245 personas/año
**(b)** −328.5 personas/año **(c)** 1997–2001 **(d)** 2001–2006
**27. (a)** 7.2 unidades/año **(b)** 8 unidades/año **(c)** −55 unidades/año
**(d)** 2000–2001, 2001–2002 **29.** Primeros 20 minutos: 4.05°F/min, siguientes 20 minutos: 1.5°F/min; primer intervalo

## SECCIÓN 2.5 ▪ PÁGINA 187

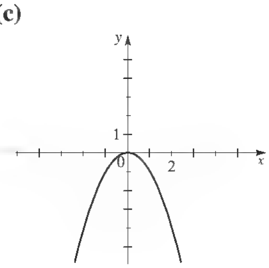
**1. (a)** arriba **(b)** izquierda **2. (a)** abajo **(b)** derecha
**3. (a)** eje $x$ **(b)** eje $y$ **4. (a)** II **(b)** IV **(c)** I **(d)** III
**5. (a)** Se desplaza hacia abajo 5 unidades **(b)** Se desplaza a la derecha 5 unidades **7. (a)** Se refleja en el eje $x$ **(b)** Se refleja en el eje $y$ **9. (a)** Se refleja en el eje $x$, luego se desplaza hacia arriba 5 unidades **(b)** Se estira verticalmente en un factor de 3, luego se desplaza hacia abajo 5 unidades **11. (a)** Se desplaza a la izquierda 1 unidad, se estira verticalmente en un factor de 2, luego se desplaza hacia abajo 3 unidades **(b)** Se desplaza a la derecha 1 unidad, se estira verticalmente en un factor de 2, luego se desplaza hacia arriba 3 unidades **13. (a)** Se contrae horizontalmente en un factor de $\frac{1}{4}$ **(b)** Se estira horizontalmente en un factor de 4
**15. (a)** Se desplaza a la izquierda 2 unidades **(b)** Se desplaza hacia arriba 2 unidades **17. (a)** Se desplaza a la izquierda 2 unidades, luego se desplaza hacia abajo 2 unidades **(b)** Se desplaza a la derecha 2 unidades, luego se desplaza hacia arriba 2 unidades
**19. (a)**



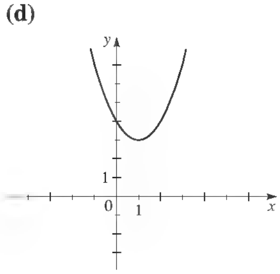
**(b)**



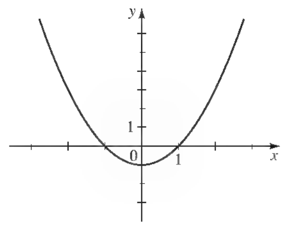
**(c)**



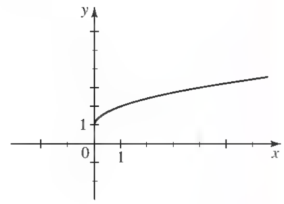
**(d)**



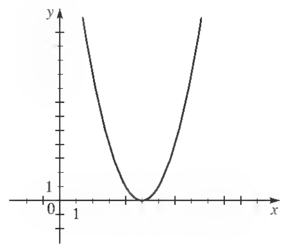
**21.**



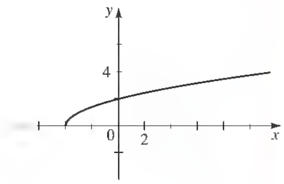
**23.**



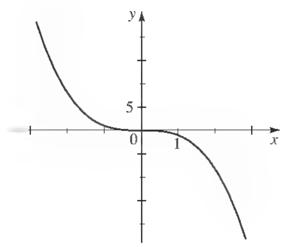
**25.**



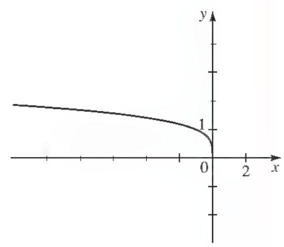
**27.**



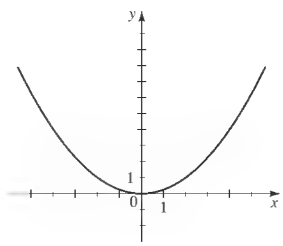
**29.**



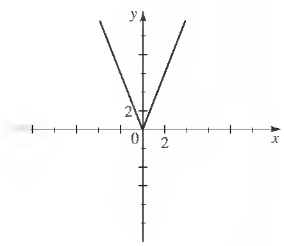
**31.**



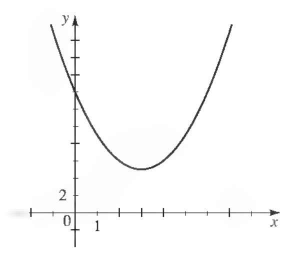
**33.**



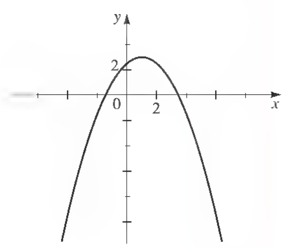
**35.**



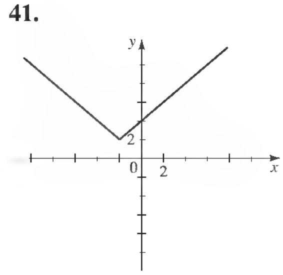
**37.**



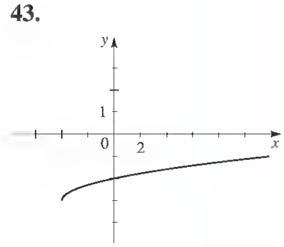
**39.**



**41.**



**43.**



**45.** $f(x) = x^2 + 3$ **47.** $f(x) = \sqrt{x + 2}$

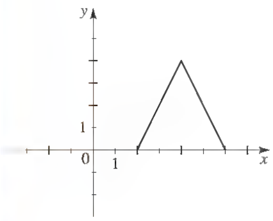
**49.** $f(x) = |x - 3| + 1$ **51.** $f(x) = \sqrt[4]{-x} + 1$

**53.** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$ **55.** $g(x) = (x - 2)^2$

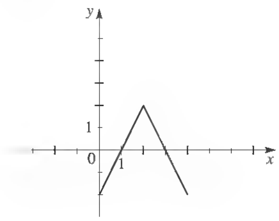
**57.** $g(x) = |x + 1| + 2$ **59.** $g(x) = -\sqrt{x + 2}$

**61.** **(a)** 3 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** 4

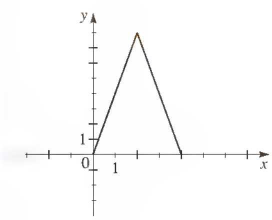
**63.** **(a)**



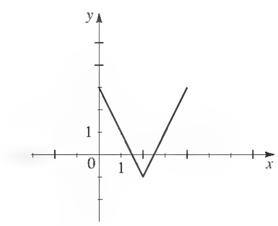
**(b)**



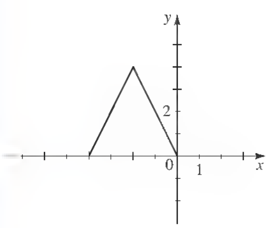
**(c)**



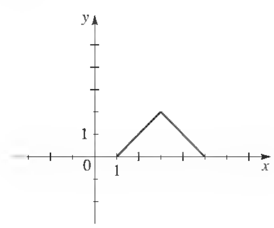
**(d)**



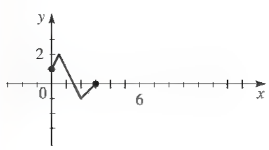
**(e)**



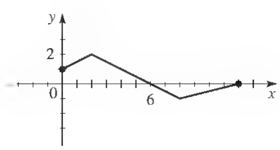
**(f)**



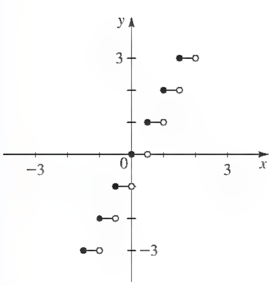
**65.** **(a)**



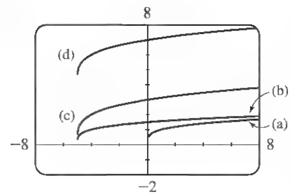
**(b)**



**67.**

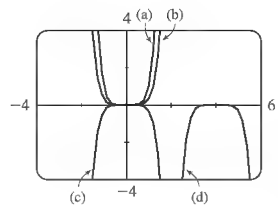


**69.**



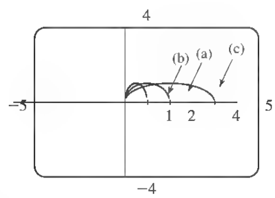

Para el inciso (b) desplace la gráfica en (a) a la izquierda 5 unidades; para el inciso (c) desplace la gráfica en (a) a la izquierda 5 unidades y estire verticalmente en un factor de 2; para el inciso (d) desplace la gráfica en (a) a la izquierda 5 unidades, estire verticalmente en un factor de 2 y luego desplace hacia arriba 4 unidades.

**71.**



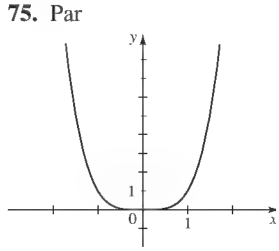

Para el inciso (b) contraiga la gráfica en (a) verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$; para el inciso (c) contraiga la gráfica en (a) verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$ y refleje en el eje $x$; para el inciso (d) desplace la gráfica en (a) a la derecha 4 unidades, contraiga verticalmente en un factor de $\frac{1}{3}$, y luego refleje en el eje $x$.

**73.**



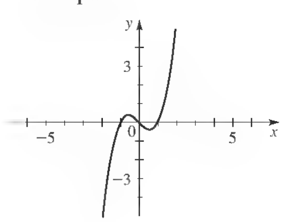

La gráfica del inciso (b) está contraída horizontalmente en un factor de $\frac{1}{2}$ y la gráfica en el inciso (c) está estirada por un factor de 2.

**75.** Par



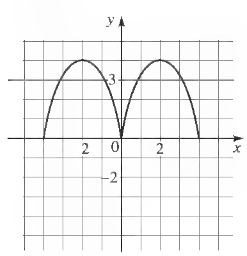
**77.** Ninguno

**79.** Impar

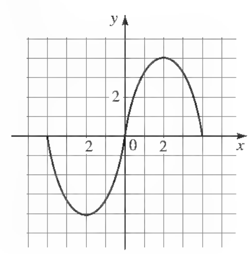


**81.** Ninguno

**83.** **(a)**

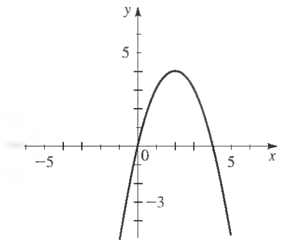


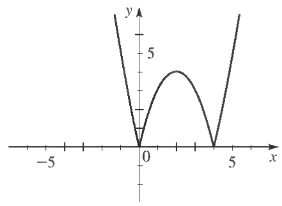
**(b)**



**85.** Para obtener la gráfica de $g$, refleje en el eje $x$ el inciso de la gráfica de $f$ que está abajo del eje $x$.

**87. (a)** **(b)**




**89. (a)** Desplace hacia arriba 4 unidades, contraiga verticalmente en un factor de 0.01 **(b)** Desplace a la derecha 10 unidades; $g(t) = 4 + 0.01(t - 10)^2$

## SECCIÓN 2.6 ■ PÁGINA 196

**1.** 8, $-2$, 15, $\frac{3}{5}$ **2.** $f(g(x))$, 12 **3.** Multiplique por 2, luego sume 1; Sume 1, luego multiplique por 2 **4.** $x + 1$, $2x$, $2x + 1$, $2(x + 1)$

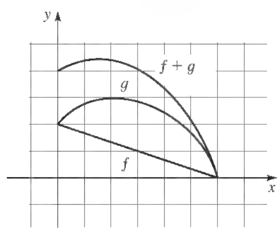
**5.** $(f + g)(x) = x^2 + x - 3, (-\infty, \infty)$;
$(f - g)(x) = -x^2 + x - 3, (-\infty, \infty)$;
$(fg)(x) = x^3 - 3x^2, (-\infty, \infty)$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 3}{x^2}, (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

**7.** $(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 + x}, [-1, 2]$;
$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{1 + x}, [-1, 2]$;
$(fg)(x) = \sqrt{-x^3 - x^2 + 4x + 4}, [-1, 2]$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{4 - x^2}{1 + x}}, (-1, 2]$

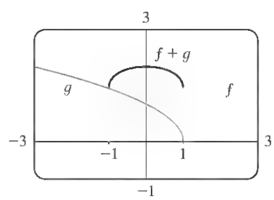
**9.** $(f + g)(x) = \frac{6x + 8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$(f - g)(x) = \frac{-2x + 8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$(fg)(x) = \frac{8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + 4}{2x}, x \neq -4, x \neq 0$

**11.** $[0, 1]$ **13.** $(3, \infty)$

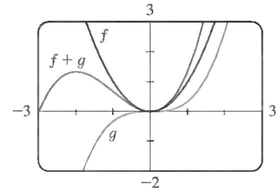
**15.**




**17.**




**19.**




**21. (a)** 1 **(b)** $-23$ **23. (a)** $-11$ **(b)** $-119$
**25. (a)** $-3x^2 + 1$ **(b)** $-9x^2 + 30x - 23$
**27.** 4 **29.** 5 **31.** 4

**33.** $(f \circ g)(x) = 8x + 1, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = 8x + 11, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = 4x + 9, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = 16x - 5, (-\infty, \infty)$

**35.** $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = x^2 + 1, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = x^4, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = x + 2, (-\infty, \infty)$

**37.** $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2x + 4}, x \neq -2$; $(g \circ f)(x) = \frac{2}{x} + 4, x \neq 0$;
$(f \circ f)(x) = x, x \neq 0$, $(g \circ g)(x) = 4x + 12, (-\infty, \infty)$

**39.** $(f \circ g)(x) = |2x + 3|, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = 2|x| + 3, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = |x|, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = 4x + 9, (-\infty, \infty)$

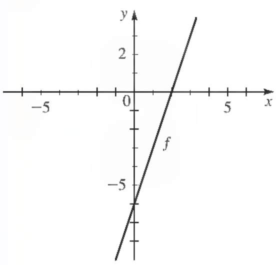
**41.** $(f \circ g)(x) = \frac{2x - 1}{2x}, x \neq 0$; $(g \circ f)(x) = \frac{2x}{x + 1} - 1, x \neq -1$;
$(f \circ f)(x) = \frac{x}{2x + 1}, x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$;
$(g \circ g)(x) = 4x - 3, (-\infty, \infty)$

**43.** $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x + 1}, x \neq -1, x \neq 0$; $(g \circ f)(x) = \frac{x + 1}{x}$, $x \neq -1, x \neq 0$; $(f \circ f)(x) = \frac{x}{2x + 1}, x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2}$;
$(g \circ g)(x) = x, x \neq 0$

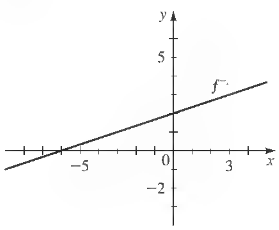
**45.** $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x - 1} - 1$
**47.** $(f \circ g \circ h)(x) = (\sqrt{x} - 5)^4 + 1$
**49.** $g(x) = x - 9$, $f(x) = x^5$
**51.** $g(x) = x^2$, $f(x) = x/(x + 4)$
**53.** $g(x) = 1 - x^3$, $f(x) = |x|$
**55.** $h(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $f(x) = 1/x$
**57.** $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 4 + x$, $f(x) = x^9$
**59.** $R(x) = 0.15x - 0.000002x^2$
**61. (a)** $g(t) = 60t$ **(b)** $f(r) = \pi r^2$ **(c)** $(f \circ g)(t) = 3600\pi t^2$
**63.** $A(t) = 16\pi t^2$ **65. (a)** $f(x) = 0.9x$ **(b)** $g(x) = x - 100$
**(c)** $(f \circ g)(x) = 0.9x - 90$, $(g \circ f)(x) = 0.9x - 100$, $f \circ g$: primero rebaja, luego descuento, $g \circ f$: primero descuento, luego rebaja, $g \circ f$ es el mejor trato

## SECCIÓN 2.7 ■ PÁGINA 204

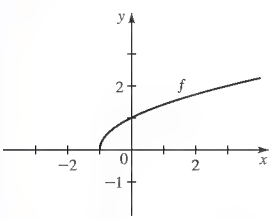
**1.** diferente, Recta Horizontal **2. (a)** uno a uno, $g(x) = x^3$ **(b)** $g^{-1}(x) = x^{1/3}$ **3. (a)** Tome la raíz cúbica, reste 5, luego divida el resultado entre 3 **(b)** $f(x) = (3x + 5)^3, f^{-1}(x) = \dfrac{x^{1/3} - 5}{3}$
**4. (a)** Falso **(b)** Verdadero **5.** No **7.** Sí **9.** No **11.** Sí **13.** Sí **15.** No **17.** No **19.** No **21. (a)** 2 **(b)** 3 **23.** 1
**37.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ **39.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 7)$
**41.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(5 - x)}$ **43.** $f^{-1}(x) = (1/x) - 2$
**45.** $f^{-1}(x) = \dfrac{4x}{1 - x}$ **47.** $f^{-1}(x) = \dfrac{7x + 5}{x - 2}$
**49.** $f^{-1}(x) = (5x - 1)/(2x + 3)$
**51.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2), x \geq 0$
**53.** $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}, x \leq 4$
**55.** $f^{-1}(x) = (x - 4)^3$
**57.** $f^{-1}(x) = x^2 - 2x, x \geq 1$
**59.** $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
**61. (a)**



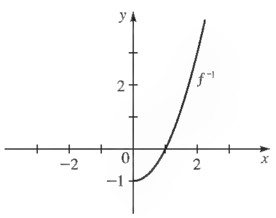
**(b)**



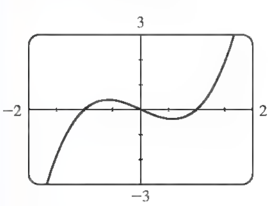
**(c)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 6)$
**63. (a)**



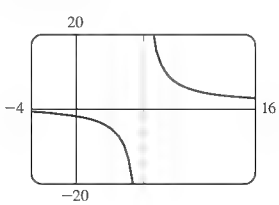
**(b)**



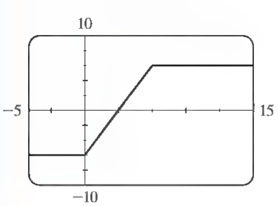
**(c)** $f^{-1}(x) = x^2 - 1, x \geq 0$
**65.** No es uno a uno



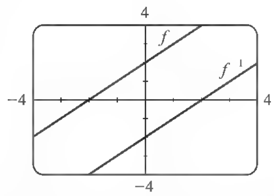
**67.** Uno a uno



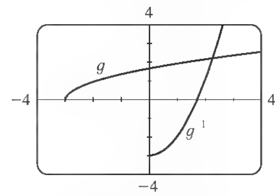
**69.** No es uno a uno



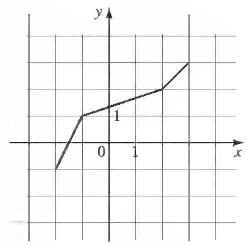
**71. (a)** $f^{-1}(x) = x - 2$
**(b)**



**73. (a)** $g^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0$
**(b)**



**75.** $x \geq 0, f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$ **77.** $x \geq -2, h^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$
**79.**



**81. (a)** $f(x) = 500 + 80x$ **(b)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{80}(x - 500)$, el número de horas trabajadas como función de la tarifa **(c)** 9; si cobra \$1220, trabajó 9 horas
**83. (a)** $v^{-1}(t) = \sqrt{0.25 - \dfrac{t}{18{,}500}}$ **(b)** 0.498; a una distancia de 0.498 del eje central la velocidad es 30
**85. (a)** $F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$; la temperatura Celsius cuando la temperatura Fahrenheit es $x$ **(b)** $F^{-1}(86) = 30$; cuando la temperatura es 86° F, es 30°C
**87. (a)** $f(x) = \begin{cases} 0.1x & \text{si } 0 \leq x \leq 20{,}000 \\ 2000 + 0.2(x - 20{,}000) & \text{si } x > 20{,}000 \end{cases}$
**(b)** $f^{-1}(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } 0 \leq x \leq 2000 \\ 10{,}000 + 5x & \text{si } x > 2000 \end{cases}$
Si usted paga $x$ euros (€) en impuestos, su ingreso es $f^{-1}(x)$.
**(c)** $f^{-1}(10{,}000) =$ € 60,000
**89.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 7)$. Una pizza que cuesta $x$ dólares tiene $f^{-1}(x)$ de aderezo.

## REPASO DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 208

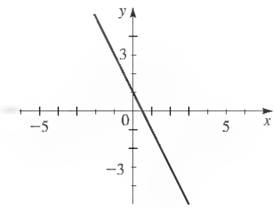
**1.** $f(x) = x^2 - 5$ **3.** Sume 10, luego multiplique el resultado por 3
**5.**

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| −1 | 5 |
| 0 | 0 |
| 1 | −3 |
| 2 | −4 |
| 3 | −3 |

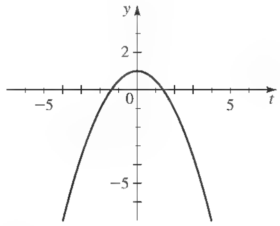
**7. (a)** $C(1000) = 34{,}000$, $C(10{,}000) = 205{,}000$ **(b)** Los costos de imprimir 1000 y 10,000 copias del libro **(c)** $C(0) = 5000$; costos fijos **9.** 6, 2, 18, $a^2 - 4a + 6$, $a^2 + 4a + 6$, $x^2 - 2x + 3$, $4x^2 - 8x + 6$, $2x^2 - 8x + 10$ **11. (a)** No es una función **(b)** Función **(c)** Función, uno a uno **(d)** No es una función
**13.** Dominio $[-3, \infty)$, rango $[0, \infty)$ **15.** $(-\infty, \infty)$

**17.** $[-4, \infty)$ **19.** $\{x \mid x \neq -2, -1, 0\}$ **21.** $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

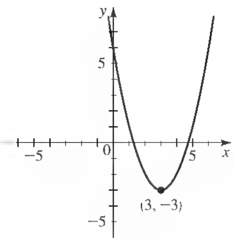
**23.**



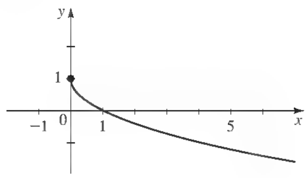

**25.**



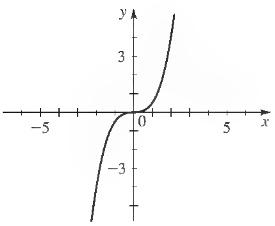

**27.**



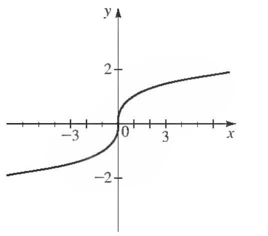

**29.**



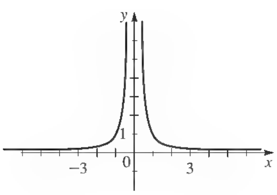

**31.**



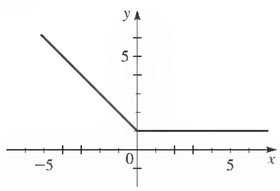

**33.**



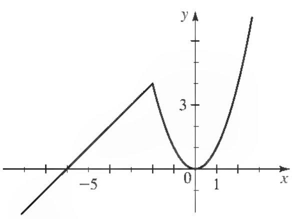

**35.**




**37.**

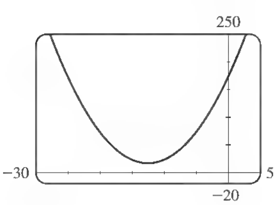



**39.**

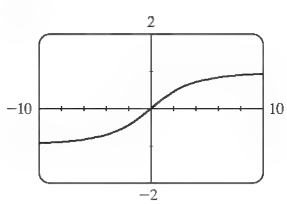



**41.** No **43.** Sí **45.** (iii)

**47.**

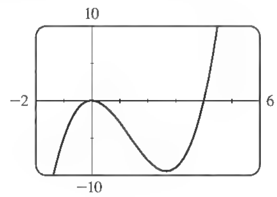



**49.**




**51.** $[-2.1, 0.2] \cup [1.9, \infty)$

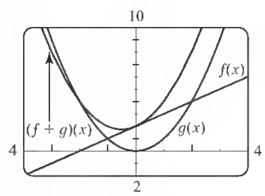
**53.**



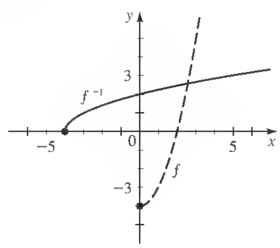

Creciente sobre $(-\infty, 0]$, $[2.67, \infty)$; decreciente sobre $[0, 2.67]$

**55.** 5 **57.** $\dfrac{-1}{3(3 + h)}$ **59.** **(a)** $P(10) = 5010$, $P(20) = 7040$; las poblaciones en 1995 y 2005 **(b)** 203 habitantes/año; promedio anual de aumento de población. **61.** **(a)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ **(b)** Sí, porque es una función lineal **63.** **(a)** Se desplaza hacia arriba 8 unidades **(b)** Se desplaza a la izquierda 8 unidades **(c)** Se estira verticalmente en un factor de 2, luego se desplaza hacia arriba 1 unidad **(d)** Se desplaza a la derecha 2 unidades y hacia abajo 2 unidades **(e)** Se refleja en el eje $y$ **(f)** Se refleja en el eje $y$, luego en el eje $x$ **(g)** Se refleja en el eje $x$ **(h)** Se refleja en la recta $y = x$
**65.** **(a)** Ninguna **(b)** Impar **(c)** Par **(d)** Ninguna
**67.** $g(-1) = -7$ **69.** 68 pies **71.** Máximo local $\approx 3.79$ cuando $x \approx 0.46$; mínimo local $\approx 2.81$ cuando $x \approx -0.46$

**73.**




**75.** **(a)** $(f + g)(x) = x^2 - 6x + 6$
**(b)** $(f - g)(x) = x^2 - 2$
**(c)** $(fg)(x) = -3x^3 + 13x^2 - 18x + 8$
**(d)** $(f/g)(x) = (x^2 - 3x + 2)/(4 - 3x)$
**(e)** $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 15x + 6$
**(f)** $(g \circ f)(x) = -3x^2 + 9x - 2$
**77.** $(f \circ g)(x) = -3x^2 + 6x - 1, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = -9x^2 + 12x - 3, (-\infty, \infty)$;
$(f \circ f)(x) = 9x - 4, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x, (-\infty, \infty)$
**79.** $(f \circ g \circ h)(x) = 1 + \sqrt{x}$ **81.** Sí **83.** No
**85.** No **87.** $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$
**89.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
**91.** **(a), (b)**




**(c)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$

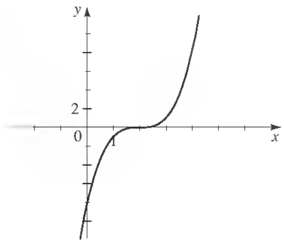
## EXAMEN DEL CAPÍTULO 2 ■ PÁGINA 211

**1.** (a) y (b) son gráficas de funciones, (a) es uno a uno
**2.** **(a)** $2/3, \sqrt{6}/5, \sqrt{a}/(a-1)$ **(b)** $[-1, 0) \cup (0, \infty)$
**3.** **(a)** $f(x) = (x-2)^3$

**(b)**

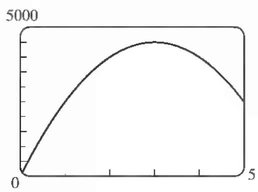
| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −1 | −27 |
| 0 | −8 |
| 1 | −1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |
| 4 | 8 |

**(c)**



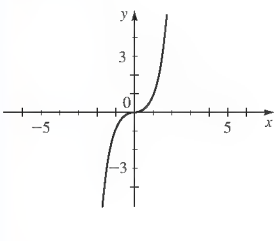
**(d)** Por la Prueba de la Recta Horizontal; tome la raíz cúbica, luego sume 2 **(e)** $f^{-1}(x) = x^{1/3} + 2$ **4.** **(a)** $R(2) = 4000$, $R(4) = 4000$; ingresos totales de ventas con precios de \$2 y \$4

**(b)**

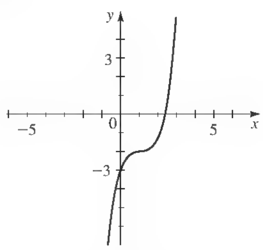


El ingreso aumenta hasta que el precio llega a \$3, luego disminuye

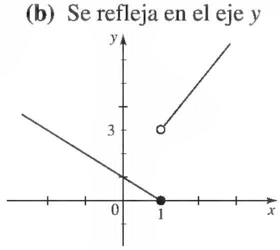
**(c)** \$4500; \$3 **5.** 5
**6.** **(a)**



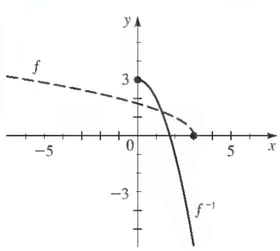
**(b)**



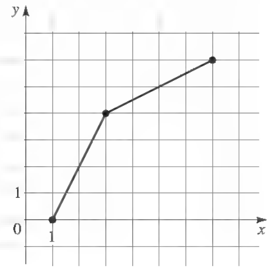
**7.** **(a)** Se desplaza a la derecha 3 unidades, luego se desplaza hacia arriba 2 unidades **(b)** Se refleja en el eje $y$
**8.** **(a)** 3, 0 **(b)**



**9.** **(a)** $(f \circ g)(x) = (x-3)^2 + 1$ **(b)** $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$
**(c)** 2 **(d)** 2 **(e)** $(g \circ g \circ g)(x) = x - 9$
**10.** **(a)** $f^{-1}(x) = 3 - x^2, x \geq 0$
**(b)**

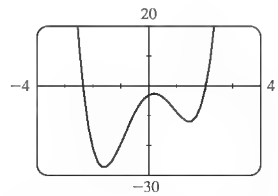


**11.** **(a)** Dominio $[0, 6]$, rango $[1, 7]$
**(b)**



**(c)** $\frac{5}{4}$

**12.** **(a)**



**(b)** No

**(c)** Mínimo local $\approx -27.18$ cuando $x \approx -1.61$; máximo local $\approx -2.55$ cuando $x \approx 0.18$; mínimo local $\approx -11.93$ cuando $x \approx 1.43$ **(d)** $[-27.18, \infty)$
**(e)** Creciente sobre $[-1.61, 0.18] \cup [1.43, \infty)$; decreciente sobre $(-\infty, -1.61] \cup [0.18, 1.43]$

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 218

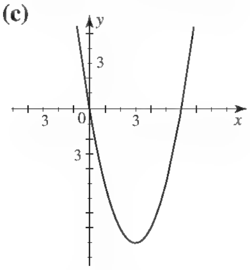
**1.** $A(w) = 3w^2, w > 0$ **3.** $V(w) = \frac{1}{2}w^3, w > 0$
**5.** $A(x) = 10x - x^2, 0 < x < 10$
**7.** $A(x) = (\sqrt{3}/4)x^2, x > 0$
**9.** $r(A) = \sqrt{A/\pi}, A > 0$
**11.** $S(x) = 2x^2 + 240/x, x > 0$
**13.** $D(t) = 25t, t \geq 0$
**15.** $A(b) = b\sqrt{4-b}, 0 < b < 4$
**17.** $A(h) = 2h\sqrt{100-h^2}, 0 < h < 10$
**19.** **(b)** $p(x) = x(19-x)$ **(c)** 9.5, 9.5
**21.** **(b)** $A(x) = x(2400 - 2x)$ **(c)** 600 pies por 1200 pies
**23.** **(a)** $f(w) = 8w + 7200/w$
**(b)** El ancho a lo largo del camino es 30 pies, la longitud es 40 pies
**(c)** 15 pies a 60 pies **25.** **(a)** $A(x) = 15x - \left(\frac{\pi+4}{8}\right)x^2$
**(b)** Ancho $\approx$ 8.40 pies, altura de el inciso rectangular $\approx$ 4.20 pies
**27.** **(a)** $A(x) = x^2 + 48/x$ **(b)** Altura $\approx$ 1.44 pies, ancho $\approx$ 2.88 pies
**29.** **(a)** $A(x) = 2x + \frac{200}{x}$ **(b)** 10 m por 10 m
**31.** **(b)** Al punto $C$, 5.1 millas desde $B$

# CAPÍTULO 3

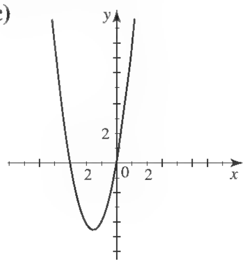
## SECCIÓN 3.1 ■ PÁGINA 229

**1.** cuadrado **2.** **(a)** $(h, k)$ **(b)** hacia arriba, mínimo
**(c)** hacia abajo, máximo
**3.** hacia arriba, $(3, 5)$, 5, mínimo
**4.** hacia abajo, $(3, 5)$, 5, máximo
**5.** **(a)** $(3, 4)$ **(b)** 4 **(c)** $\mathbb{R}, (-\infty, 4]$
**7.** **(a)** $(1, -3)$ **(b)** $-3$ **(c)** $\mathbb{R}, [-3, \infty)$

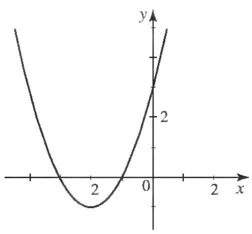
**9.** **(a)** $f(x) = (x - 3)^2 - 9$
**(b)** Vértice $(3, -9)$
puntos intersección $x$ 0, 6
punto de intersección $y$ 0
**(c)**



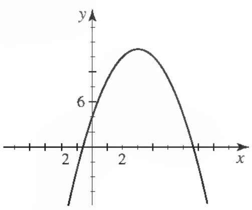

**11.** **(a)** $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$
**(b)** Vértice $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
puntos intersección $x$ $-3$,
punto de intersección $y$ 0
**(c)**



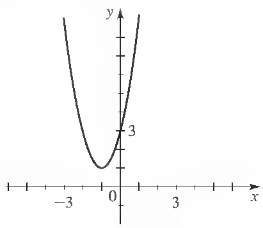

**13.** **(a)** $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
**(b)** Vértice $(-2, -1)$, puntos intersección $x$ $-1$, $-3$, punto de intersección $y$ 3
**(c)**



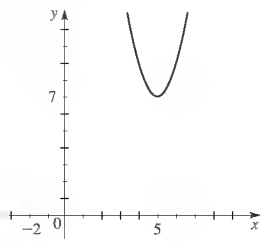

**15.** **(a)** $f(x) = -(x - 3)^2 + 13$
**(b)** Vértice $(3, 13)$; puntos intersección $x$ $3 \pm \sqrt{13}$; punto de intersección $y$ 4
**(c)**



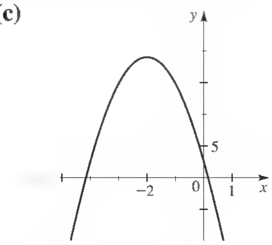

**17.** **(a)** $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1$
**(b)** Vértice $(-1, 1)$; no hay puntos intersección $x$; punto de intersección $y$ 3
**(c)**



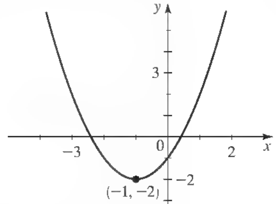

**19.** **(a)** $f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$
**(b)** Vértice $(5, 7)$; no hay puntos intersección $x$; punto de intersección $y$ 57
**(c)**




**21.** **(a)** $f(x) = -4(x + 2)^2 + 19$
**(b)** Vértice $(-2, 19)$; puntos intersección $x$ $-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{19}$; punto de intersección $y$ 3
**(c)**

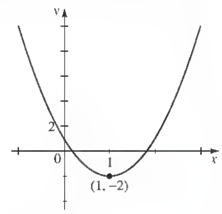



**23.** **(a)** $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
**(b)**



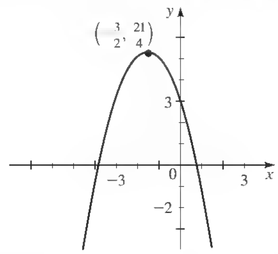

**(c)** Mínimo $f(-1) = -2$

**25.** **(a)** $f(x) = 3(x - 1)^2 - 2$
**(b)**



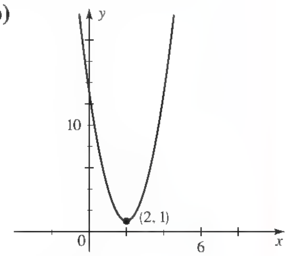

**(c)** Mínimo $f(1) = -2$

**27.** **(a)** $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$
**(b)**



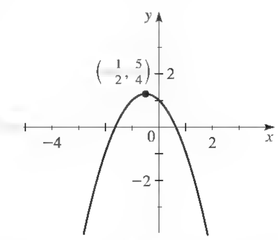

**(c)** Máximo $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

**29.** **(a)** $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
**(b)**




**(c)** Mínimo $g(2) = 1$

**31.** **(a)** $h(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$
**(b)**




**(c)** Máximo $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$
**33.** Mínimo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ **35.** Máximo $f(-3.5) = 185.75$
**37.** Mínimo $f(0.6) = 15.64$ **39.** Mínimo $h(-2) = -8$
**41.** Máximo $f(-1) = \frac{7}{2}$ **43.** $f(x) = 2x^2 - 4x$
**45.** $(-\infty, \infty), (-\infty, 1]$ **47.** $(-\infty, \infty), \left[-\frac{23}{2}, \infty\right)$
**49.** **(a)** $-4.01$ **(b)** $4.011025$
**51.** Máximo local 2; mínimos locales $-1, 0$
**53.** Máximos locales 0, 1; mínimos locales $-2, -1$
**55.** Máximo local $\approx 0.38$ cuando $x \approx -0.58$; mínimo local $\approx -0.38$ cuando $x \approx 0.58$
**57.** Máximo local $\approx 0$ cuando $x = 0$; mínimo local $\approx -13.61$ cuando $x \approx -1.71$; mínimo local $\approx -73.32$ cuando $x \approx 3.21$
**59.** Máximo local $\approx 5.66$ cuando $x \approx 4.00$
**61.** Máximo local $\approx 0.38$ cuando $x \approx -1.73$; mínimo local $\approx -0.38$ cuando $x \approx 1.73$ **63.** 25 pies
**65.** \$4000, 100 unidades **67.** 30 veces **69.** 50 árboles por acre

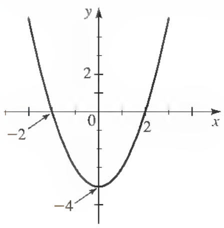
**71.** 600 pies por 1200 pies **73.** Ancho 8.40 pies, altura de la parte rectangular por 4.20 pies **75.** **(a)** $f(x) = x(1200 - x)$ **(b)** 600 pies por 600 pies

**77.** **(a)** $R(x) = x(57{,}000 - 3000x)$ **(b)** \$9.50 **(c)** \$19.00

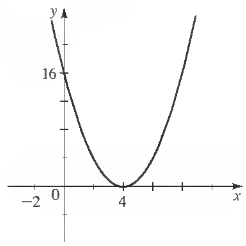
## SECCIÓN 3.2 ▪ PÁGINA 243

**1.** II **2.** **(a)** (ii) **(b)** (iv) **3.** (a), (c) **4.** (a)

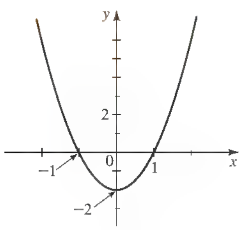
**5.** **(a)**



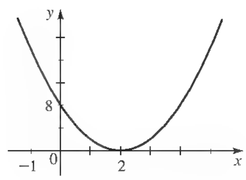

**(b)**



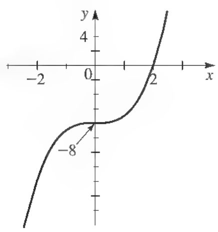

**(c)**



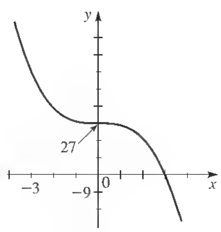

**(d)**



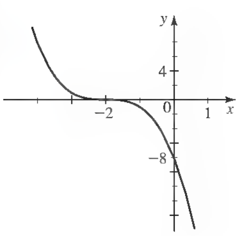

**7.** **(a)**



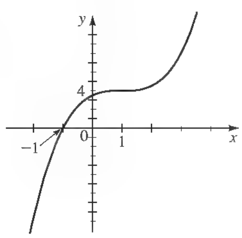

**(b)**




**(c)**

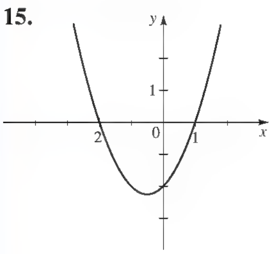



**(d)**

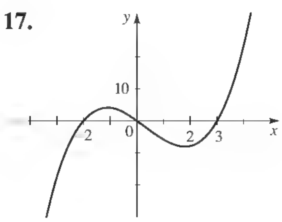



**9.** III **11.** V **13.** VI

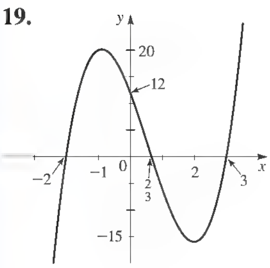
**15.**



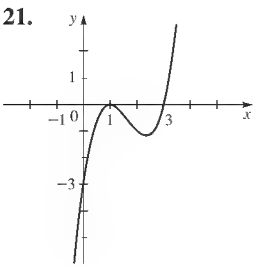

**17.**



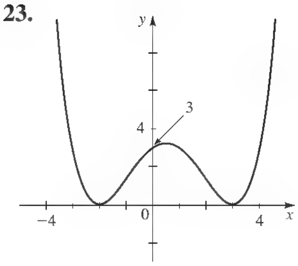

**19.**



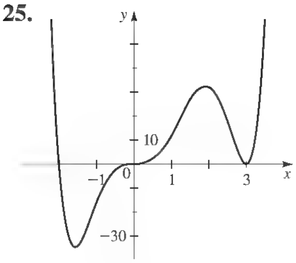

**21.**



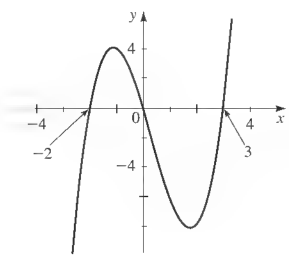

**23.**



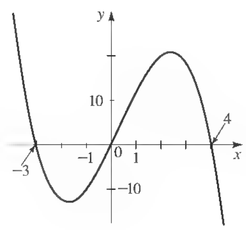

**25.**



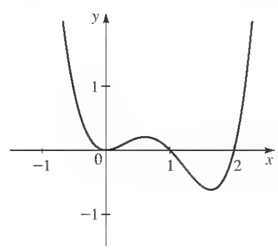

**27.** $P(x) = x(x + 2)(x - 3)$



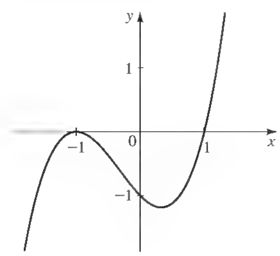

**29.** $P(x) = -x(x + 3)(x - 4)$



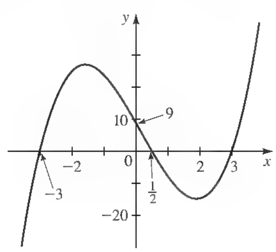

**31.** $P(x) = x^2(x - 1)(x - 2)$



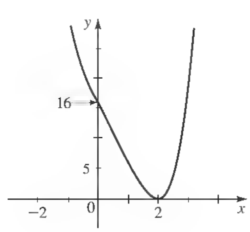

**33.** $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$



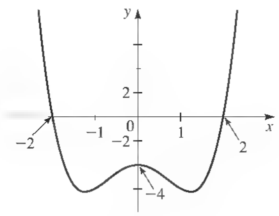

**35.** $P(x) = (2x - 1)(x + 3)(x - 3)$




**37.** $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$

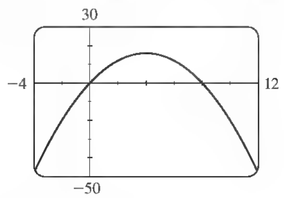


**39.** $P(x) = (x^2 + 1)(x + 2)(x - 2)$



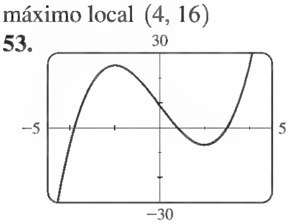
**41.** $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$
**43.** $y \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$
**45.** $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$
**47. (a)** puntos de intersección $x$ 0, 4; punto de intersección $y$ 0 **(b)** $(2, 4)$ **49. (a)** puntos de intersección $x$ $-2$, 1; punto de intersección $y$ $-1$ **(b)** $(-1, -2), (1, 0)$

**51.**



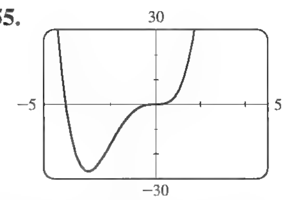
máximo local $(4, 16)$

**53.**



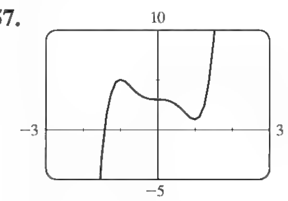
máximo local $(-2, 25)$
mínimo local $(2, -7)$

**55.**



mínimo local $(-3, -27)$

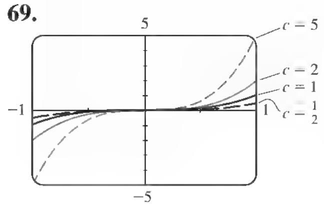
**57.**



máximo local $(-1, 5)$,
mínimo local $(1, 1)$

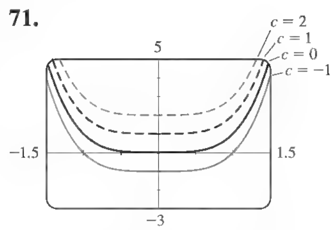
**59.** Un máximo local, no hay mínimo local
**61.** Un máximo local, un mínimo local
**63.** Un máximo local, un mínimo local
**65.** No hay extremos locales
**67.** Un máximo local, dos mínimos locales

**69.**



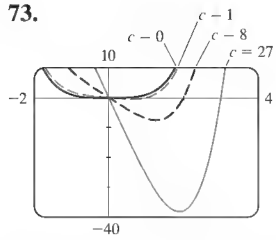

Aumentar el valor de $c$ estira verticalmente la gráfica.

**71.**



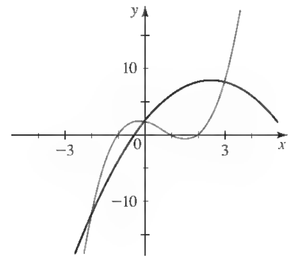

Aumentar el valor de $c$ mueve la gráfica hacia arriba.

**73.**

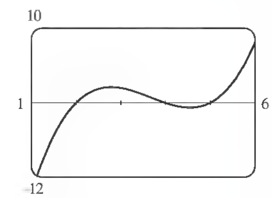



Aumentar el valor de $c$ produce una caída más pronunciada de la gráfica en el cuarto cuadrante y mueve a la derecha el punto de intersección $x$ positivo.

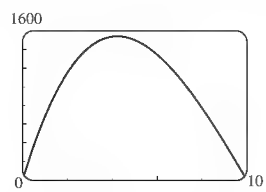
**75. (a)**



**(b)** Tres **(c)** $(0, 2), (3, 8), (-2, -12)$
**77. (d)** $P(x) = P_O(x) + P_E(x)$, donde $P_O(x) = x^5 + 6x^3 - 2x$ y $P_E(x) = -x^2 + 5$
**79. (a)** Dos extremos locales



**81. (a)** 26 licuadoras **(b)** No; \$3276.22
**83. (a)** $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 800x$ **(b)** $0 < x < 10$
**(c)** Volumen máximo $\approx 1539.6$ cm$^3$



## SECCIÓN 3.3 ■ PÁGINA 251

**1.** cociente, residuo **2. (a)** factorice **(b)** $k$
**3.** $(x + 3)(3x - 4) + 8$ **5.** $(2x - 3)(x^2 - 1) - 3$
**7.** $(x^2 + 3)(x^2 - x - 3) + (7x + 11)$

**9.** $x + 1 + \dfrac{-11}{x + 3}$ **11.** $2x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{-\frac{15}{2}}{2x - 1}$

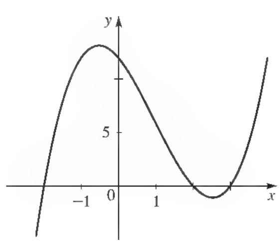
**13.** $2x^2 - x + 1 + \dfrac{4x - 4}{x^2 + 4}$

*En las respuestas 15-37 el primer polinomio dado es el cociente, y el segundo es el residuo*
**15.** $x - 2, -16$ **17.** $2x^2 - 1, -2$ **19.** $x + 2, 8x - 1$
**21.** $3x + 1, 7x - 5$ **23.** $x^4 + 1, 0$ **25.** $x - 2, -2$
**27.** $3x + 23, 138$ **29.** $x^2 + 2, -3$ **31.** $x^2 - 3x + 1, -1$
**33.** $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 4, -2$ **35.** $2x^2 + 4x, 1$

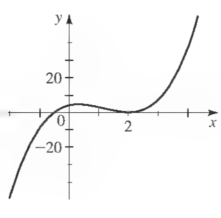
**37.** $x^2 + 3x + 9, 0$ **39.** $-3$ **41.** 12 **43.** $-7$ **45.** $-483$
**47.** 2159 **49.** $\frac{7}{3}$ **51.** $-8.279$ **57.** $-1 \pm \sqrt{6}$
**59.** $x^3 - 3x^2 - x + 3$ **61.** $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$
**63.** $-\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x - 9$ **65.** $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$
**67.** $(x + 2)^2(x - 1)^2$

## SECCIÓN 3.4 ■ PÁGINA 260

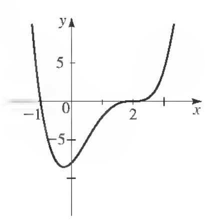
**1.** $a_0, a_n, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{6}, \pm 10, \pm\frac{10}{3}$
**2.** 1, 3, 5; 0 **3.** Verdadero **4.** Falso **5.** $\pm 1, \pm 3$ **7.** $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{2}$ **9.** $\pm 1, \pm 7, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{7}{4}$ **11.** **(a)** $\pm 1, \pm\frac{1}{5}$ **(b)** $-1, 1, \frac{1}{5}$ **13.** **(a)** $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ **(b)** $-\frac{1}{2}, 1, 3$
**15.** $-2, 1; P(x) = (x + 2)^2(x - 1)$
**17.** $-1, 2; P(x) = (x + 1)^2(x - 2)$ **19.** $2; P(x) = (x - 2)^3$
**21.** $-1, 2, 3; P(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$
**23.** $-3, -1, 1; P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)$
**25.** $\pm 1, \pm 2; P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$
**27.** $-4, -2, -1, 1; P(x) = (x + 4)(x + 2)(x - 1)(x + 1)$
**29.** $\pm 2, \pm\frac{3}{2}; P(x) = (x - 2)(x + 2)(2x - 3)(2x + 3)$
**31.** $\pm 2, \frac{1}{3}, 3; P(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(3x - 1)$
**33.** $-1, \pm\frac{1}{2}; P(x) = (x + 1)(2x - 1)(2x + 1)$
**35.** $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1; P(x) = (x - 1)(2x + 3)(2x - 1)$
**37.** $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}; P(x) = (x + 1)(2x + 5)(2x - 3)$
**39.** $-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}; P(x) = (2x - 1)(5x - 2)(2x + 1)$
**41.** $-1, \frac{1}{2}, 2; P(x) = (x + 1)(x - 2)^2(2x - 1)$
**43.** $-3, -2, 1, 3; P(x) = (x + 3)(x + 2)^2(x - 1)(x - 3)$
**45.** $-1, -\frac{1}{3}, 2, 5; P(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x - 5)(3x + 1)$
**47.** $-2, -1 \pm \sqrt{2}$ **49.** $-1, 4, \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ **51.** $3, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
**53.** $\frac{1}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ **55.** $-1, -\frac{1}{2}, -3 \pm \sqrt{10}$
**57.** **(a)** $-2, 2, 3$ **(b)**



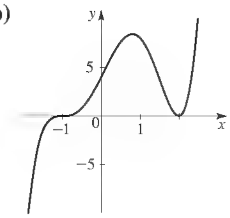
**59.** **(a)** $-\frac{1}{2}, 2$ **(b)**



**61.** **(a)** $-1, 2$ **(b)**



**63.** **(a)** $-1, 2$ **(b)**



**65.** 1 positivo, 2 o 0 negativo; 3 o 1 real **67.** 1 positivo, 1 negativo; 2 real **69.** 2 o 0 positivo, 0 negativo; 3 o 1 real (porque 0 es un cero pero no es positivo ni negativo) **75.** 3, $-2$ **77.** 3, $-1$
**79.** $-2, \frac{1}{2}, \pm 1$ **81.** $\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{5}$ **83.** $-2, 1, 3, 4$ **89.** $-2, 2, 3$
**91.** $-\frac{3}{2}, -1, 1, 4$ **93.** $-1.28, 1.53$ **95.** $-1.50$ **99.** 11.3 pies
**101.** **(a)** Empezó a nevar de nuevo. **(b)** No
**(c)** Justo antes de la medianoche de la noche del sábado
**103.** 2.76 m **105.** 88 pulg. (o 3.21 pulg.)

## SECCIÓN 3.5 ■ PÁGINA 268

**1.** $-1$ **2.** 3, 4 **3.** **(a)** $3 - 4i$ **(b)** $9 + 16 = 25$ **4.** $3 - 4i$
**5.** Parte real 5, parte imaginaria $-7$ **7.** Parte real $-\frac{2}{3}$, parte imaginaria $-\frac{5}{3}$ **9.** Parte real 3, parte imaginaria 0 **11.** Parte real 0, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$ **13.** Parte real $\sqrt{3}$, parte imaginaria 2 **15.** $5 - i$
**17.** $3 + 5i$ **19.** $2 - 2i$ **21.** $-19 + 4i$ **23.** $-4 + 8i$
**25.** $30 + 10i$ **27.** $-33 - 56i$ **29.** $27 - 8i$ **31.** $-i$ **33.** 1
**35.** $-i$ **37.** $\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$ **39.** $-5 + 12i$ **41.** $-4 + 2i$ **43.** $2 - \frac{4}{3}i$
**45.** $-i$ **47.** $5i$ **49.** $-6$ **51.** $(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})i$
**53.** 2 **55.** $-i\sqrt{2}$ **57.** $\pm 7i$ **59.** $2 \pm i$ **61.** $-1 \pm 2i$
**63.** $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **65.** $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ **67.** $-\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **69.** $\dfrac{-6 \pm \sqrt{6}i}{6}$
**71.** $1 \pm 3i$

## SECCIÓN 3.6 ■ PÁGINA 276

**1.** $5, -2, 3, 1$ **2.** **(a)** $x - a$ **(b)** $(x - a)^m$ **3.** $n$
**4.** $a - bi$ **5.** **(a)** $0, \pm 2i$ **(b)** $x^2(x - 2i)(x + 2i)$
**7.** **(a)** $0, 1 \pm i$ **(b)** $x(x - 1 - i)(x - 1 + i)$
**9.** **(a)** $\pm i$ **(b)** $(x - i)^2(x + i)^2$
**11.** **(a)** $\pm 2, \pm 2i$ **(b)** $(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$
**13.** **(a)** $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$ **(b)** $(x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$
**15.** **(a)** $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
**(b)** $(x - 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) \times$
$(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})$

*En las respuestas 17-33 se da primeramente la forma factorizada, a continuación se dan los ceros con multiplicidad de cada uno en paréntesis.*

**17.** $(x - 5i)(x + 5i); \pm 5i\ (1)$
**19.** $[x - (-1 + i)][x - (-1 - i)]; -1 + i\ (1), -1 - i\ (1)$
**21.** $x(x - 2i)(x + 2i); 0\ (1), 2i\ (1), -2i\ (1)$
**23.** $(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i); 1\ (1), -1\ (1), i\ (1), -i\ (1)$
**25.** $16(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}i)(x + \frac{3}{2}i); \frac{3}{2}\ (1), -\frac{3}{2}\ (1), \frac{3}{2}i\ (1), -\frac{3}{2}i\ (1)$
**27.** $(x + 1)(x - 3i)(x + 3i); -1\ (1), 3i\ (1), -3i\ (1)$
**29.** $(x - i)^2(x + i)^2; i\ (2), -i\ (2)$
**31.** $(x - 1)(x + 1)(x - 2i)(x + 2i); 1\ (1), -1\ (1), 2i\ (1), -2i\ (1)$
**33.** $x(x - i\sqrt{3})^2(x + i\sqrt{3})^2; 0\ (1), i\sqrt{3}\ (2), -i\sqrt{3}\ (2)$
**35.** $P(x) = x^2 - 2x + 2$ **37.** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
**39.** $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

**41.** $R(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5$

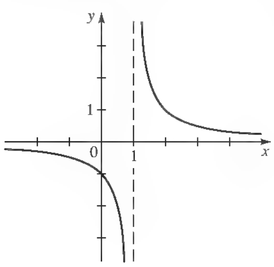
**43.** $T(x) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 12$

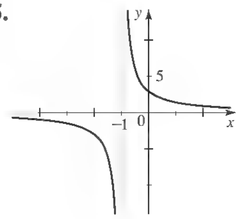
**45.** $-2, \pm 2i$ **47.** $1, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ **49.** $2, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

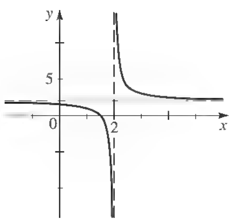
**51.** $-\frac{3}{2}, -1 \pm i\sqrt{2}$ **53.** $-2, 1, \pm 3i$ **55.** $1, \pm 2i, \pm i\sqrt{3}$
**57.** 3 (multiplicidad 2), $\pm 2i$ **59.** $-\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2), $\pm i$
**61.** 1 (multiplicidad 3), $\pm 3i$ **63.** **(a)** $(x - 5)(x^2 + 4)$
**(b)** $(x - 5)(x - 2i)(x + 2i)$ **65.** **(a)** $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 9)$
**(b)** $(x - 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i)$
**67.** **(a)** $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$
**(b)** $(x - 2)(x + 2)[x - (1 + i\sqrt{3})][x - (1 - i\sqrt{3})] \times [x + (1 + i\sqrt{3})][x + (1 - i\sqrt{3})]$ **69.** **(a)** 4 real
**(b)** 2 real, 2 imaginaria **(c)** 4 imaginaria

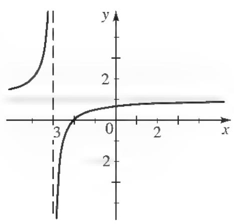
## SECCIÓN 3.7 ■ PÁGINA 289

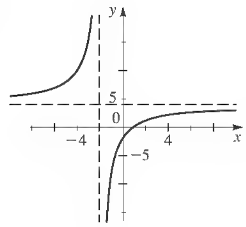
**1.** $-\infty, \infty$ **2.** 2 **3.** $-1, 2$ **4.** $\frac{1}{3}$ **5.** $-2, 3$ **6.** 1
**7.** **(a)** $-3, -19, -199, -1999$; 5, 21, 201, 2001;
1.2500, 1.0417, 1.0204, 1.0020; 0.8333, 0.9615, 0.9804, 0.9980
**(b)** $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$; $r(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$
**(c)** Asíntota horizontal $y = 1$
**9.** **(a)** $-22, -430, -40{,}300, -4{,}003{,}000$;
$-10, -370, -39{,}700, -3{,}997{,}000$;
0.3125, 0.0608, 0.0302, 0.0030;
$-0.2778, -0.0592, -0.0298, -0.0030$
**(b)** $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$; $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$
**(c)** Asíntota horizontal $y = 0$ **11.** punto de intersección $x$ 1, punto de intersección $y$ $-\frac{1}{4}$ **13.** puntos de intersección $x$ $-1, 2$; punto de intersección y $\frac{1}{3}$ **15.** puntos de intersección $x$ $-3, 3$; no hay punto de intersección $y$ **17.** punto de intersección $x$ 3, punto de intersección $y$ 3, vertical $x = 2$; horizontal $y = 2$ **19.** puntos de intersección $-1, 1$; punto de intersección $y$ $\frac{1}{4}$; vertical $x = -2, x = 2$; horizontal $y = 1$
**21.** Vertical $x = 2$; horizontal $y = 0$ **23.** Horizontal $y = 0$
**25.** Vertical $x = \frac{1}{2}, x = -1$; horizontal $y = 3$
**27.** Vertical $x = \frac{1}{3}, x = -2$; horizontal $y = \frac{5}{3}$
**29.** Vertical $x = 0$; horizontal $y = 3$
**31.** Vertical $x = 1$

**33.**


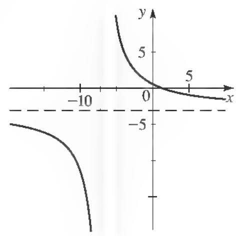
**35.**


**37.**


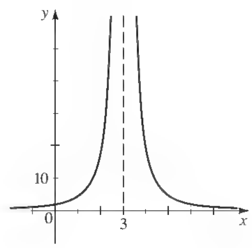
**39.**


**41.**


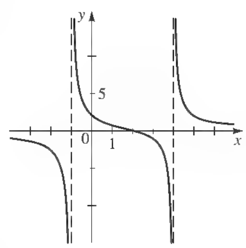
punto de intersección $x$ 1
punto de intersección y $-2$
vertical $x = -2$
horizontal $y = 4$
dominio $\{x \mid x \neq -2\}$
rango $\{y \mid y \neq 4\}$

**43.**


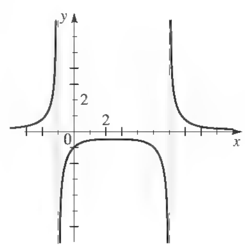
punto de intersección $x$ $\frac{4}{3}$
punto de intersección $y$ $\frac{4}{7}$
vertical $x = -7$
horizontal $y = -3$
dominio $\{x \mid x \neq -7\}$
rango $\{y \mid y \neq -3\}$

**45.**


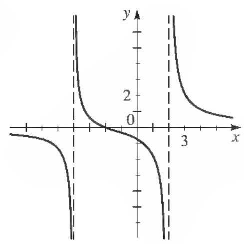
punto de intersección $y$ 2
vertical $x = 3$
horizontal $y = 0$
dominio $\{x \mid x \neq 3\}$
rango $\{y \mid y > 0\}$

**47.**


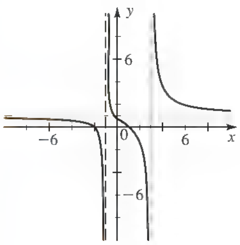
punto de intersección $x$ 2
punto de intersección $y$ 2
vertical $x = -1, x = 4$
horizontal $y = 0$
dominio $\{x \mid x \neq -1, 4\}$
rango $\mathbb{R}$

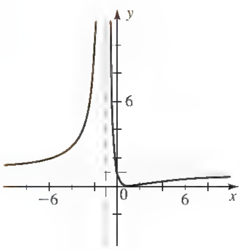
**49.**


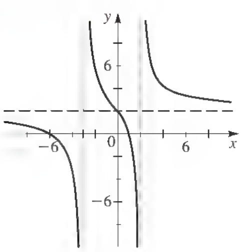
punto de intersección $y$ $-1$
vertical $x = -1, x = 6$
horizontal $y = 0$
dominio $\{x \mid x \neq -1, 6\}$
rango $\{y \mid y \leq -0.5 \text{ o } y > 0\}$

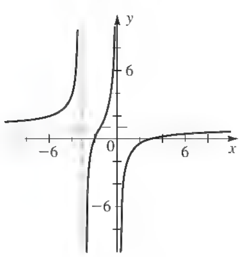
**51.**


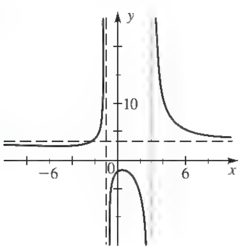
punto de intersección $-2$
punto de intersección $y$ $-\frac{3}{4}$
vertical $x = -4, x = 2$
horizontal $y = 0$
dominio $\{x \mid x \neq -4, 2\}$
rango $\mathbb{R}$

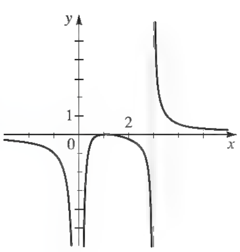
**53.** 
puntos de intersección $x$ $-2, 1$
punto de intersección $y$ $\frac{2}{3}$
vertical $x = -1, x = 3$
horizontal $y = 1$
dominio $\{x \mid x \neq -1, 3\}$
rango $\mathbb{R}$

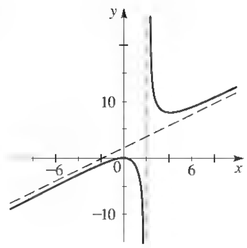
**55.** 
punto de intersección $x$ 1
punto de intersección $y$ 1
vertical $x = -1$
horizontal $y = 1$
dominio $\{x \mid x \neq -1\}$
rango $\{y \mid y \geq 0\}$

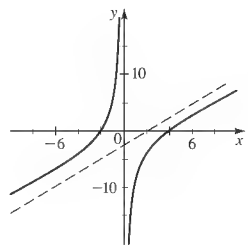
**57.** 
puntos de intersección $x$ $-6, 1$
punto de intersección $y$ 2
vertical $x = -3, x = 2$
horizontal $y = 2$
dominio $\{x \mid x \neq -3, 2\}$
rango $\mathbb{R}$

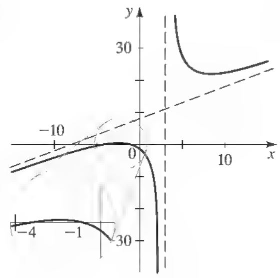
**59.** 
puntos de intersección $x$ 2, 3
vertical $x = -3, x = 0$
horizontal $y = 1$
dominio $\{x \mid x \neq -3, 0\}$
rango $\mathbb{R}$

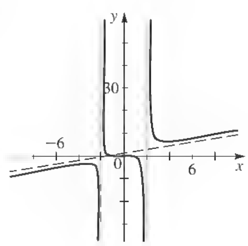
**61.** 
punto de intersección $y$ $-2$
vertical $x = -1, x = 3$
horizontal $y = 3$
dominio $\{x \mid x \neq -1, 3\}$
rango $\{y \mid y \leq -1.5 \text{ o } y \geq 2.4\}$

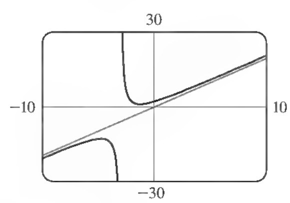
**63.** 
punto de intersección $x$ 1
vertical $x = 0, x = 3$
horizontal $y = 0$
dominio $\{x \mid x \neq 0, 3\}$
rango $\mathbb{R}$

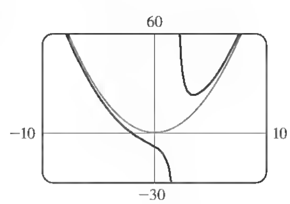
**65.** 
pendiente $y = x + 2$
vertical $x = 2$

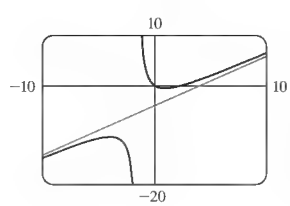
**67.** 
pendiente $y = x - 2$
vertical $x = 0$

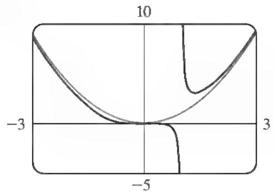
**69.** 
pendiente $y = x + 8$
vertical $x = 3$

**71.** 
pendiente $y = x + 1$
vertical $x = 2, x = -2$

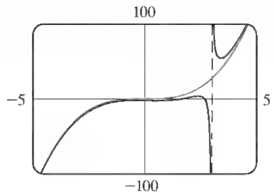
**73.** 
vertical $x = -3$

**75.** 
vertical $x = 2$

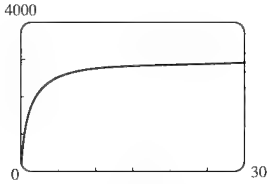
**77.** 
vertical $x = -1.5$
puntos de intersección $x$ 0, 2.5
punto de intersección $y$ 0, local máximo $(-3.9, -10.4)$
mínimo local $(0.9, 0.6)$
comportamiento final: $y = x - 4$

**79.** 


vertical $x = 1$
punto de intersección $x$ 0
punto de intersección $y$ 0
mínimo local (1.4, 3.1)
comportamiento final: $y = x^2$

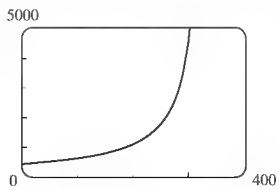
**81.** 


vertical $x = 3$
puntos de intersección $x$ 1.6, 2.7
punto de intersección $y$ −2
máximos locales (−0.4, −1.8), (2.4, 3.8)
mínimo local (0.6, −2.3), (3.4, 54.3)
comportamiento final $y = x^3$

**83.** **(a)** 

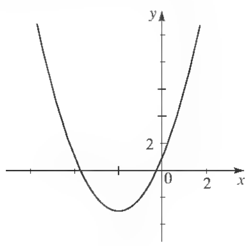

**(b)** Se nivela en 3000.

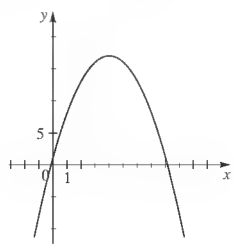
**85.** **(a)** 2.50 mg/L **(b)** Disminuye a 0. **(c)** 16.61 h

**87.** 

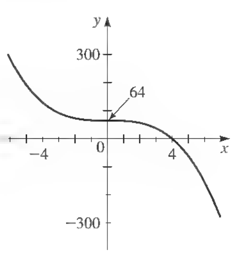

Si la rapidez del tren se aproxima a la rapidez del sonido, entonces la frecuencia aumenta indefinidamente (un estampido sónico).

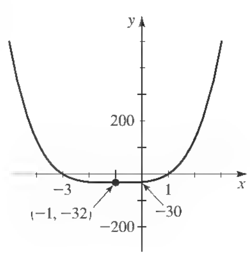
## REPASO DEL CAPÍTULO 3 ■ PÁGINA 292

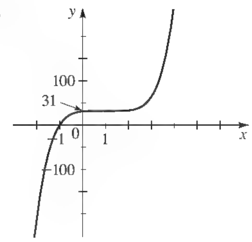
**1.** **(a)** $f(x) = (x + 2)^2 \quad 3$
**(b)** 

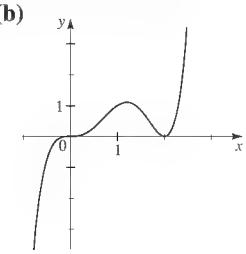

**3.** **(a)** $g(x) = -(x \quad 4)^2 + 17$
**(b)** 

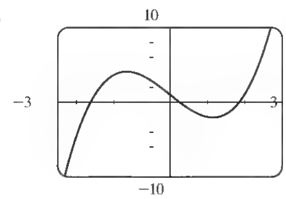

**5.** Mínimo $f(-1) = -7$ **7.** 68 pies

**9.** 

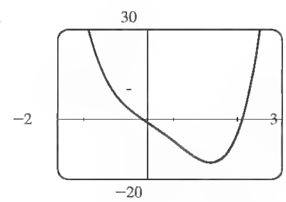

**11.** 


**13.** 

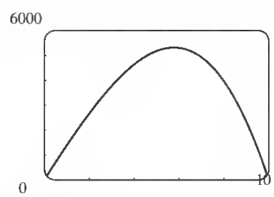

**15.** **(a)** 0 (multiplicidad 3), 2 (multiplicidad 2)
**(b)** 


**17.** 


puntos de intersección $x$ −2.1, 0.3, 1.9
punto de intersección $y$ 1
máximo local (−1.2, 4.1)
mínimo local (1.2, −2.1)
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

**19.** 

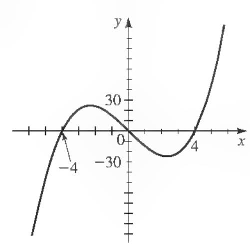

puntos de intersección $x$ −0.1, 2.1
punto de intersección $y$ −1
mínimo local (1.4, −14.5)
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

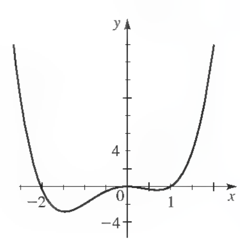
**21.** **(a)** $S = 13.8x(\ 100\ -^2x$ **(b)** $0 \le x \le 10$
**(c)** 


**(d)** 5.8 pulg.

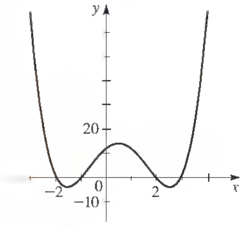
*En las respuestas 23-29 el primer polinomio dado es el cociente, y el segundo es el residuo.*

**23.** $x - 1, 3$ **25.** $x^2 + 3x + 23, 94$
**27.** $x^3 - 5x^2 + 17x \quad 83, 422$ **29.** $2x - 3, 12$
**31.** 3 **35.** 8 **37.** **(a)** ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18
**(b)** 2 o 0 positivo, 3 o 1 negativo

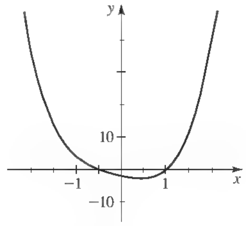
**39.** **(a)** −4, 0, 4
**(b)** 


**41.** **(a)** −2, 0 (multiplicidad 2), 1
**(b)** 

**43.** **(a)** −2, −1, 2, 3
**(b)**

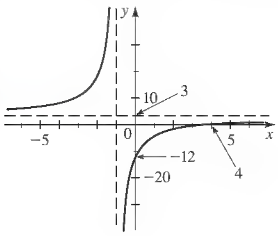



**45.** **(a)** $-\frac{1}{2}$, 1
**(b)**

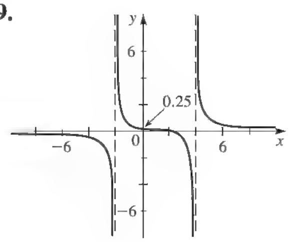



**47.** $3 + i$ **49.** $8 - i$ **51.** $\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ **53.** $i$ **55.** 2
**57.** $4x^3 - 18x^2 + 14x + 12$ **59.** No; como los complejos conjugados de ceros imaginarios también serán ceros, la polinomial tendría 8 ceros, contradiciendo el requisito de que tiene grado 4.
**61.** −3, 1, 5 **63.** $-1 \pm 2i$, −2 (multiplicidad 2)
**65.** ±2, 1 (multiplicidad 3) **67.** $\pm 2, \pm 1 \pm i\sqrt{3}$
**69.** $1, 3, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ **71.** $x = -0.5, 3$ **73.** $x \approx -0.24, 4.24$
**75.** $2, P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$

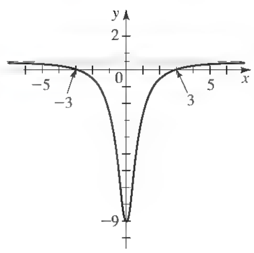
**77.**



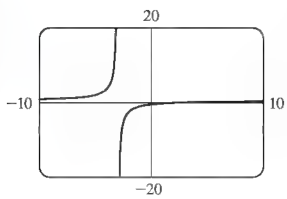

**79.**




**81.**

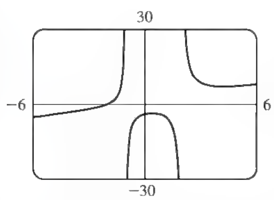



**83.**




punto de intersección x 3
punto de intersección y −0.5
vertical $x = -3$
horizontal $y = 0.5$
no hay extremos locales

**85.**

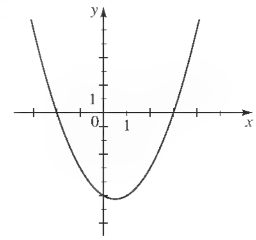



punto de intersección x −2
punto de intersección y −4
vertical $x = -1, x = 2$
pendiente $y = x + 1$
máximo local (0.425, −3.599)
mínimo local (4.216, 7.175)

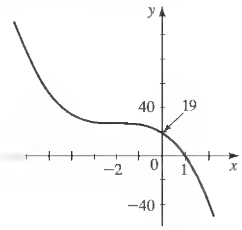
**87.** (−2, −28), (1, 26), (2, 68), (5, 770)

## EXAMEN DE CAPÍTULO ■ PÁGINA 295

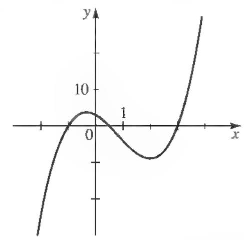
**1.** $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$



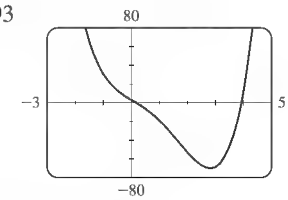

**2.** Mínimo $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ **3.** **(a)** 2500 pies **(b)** 1000 pies
**4.**



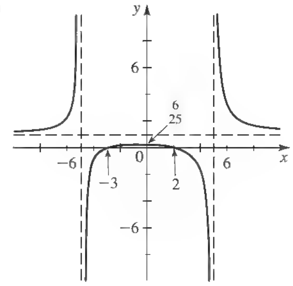

**5.** **(a)** $x^3 + 2x^2 + 2, 9$ **(b)** $x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}, \frac{15}{2}$
**6.** **(a)** $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ **(b)** $2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$
**(c)** $-1, \frac{1}{2}, 3$ **(d)**



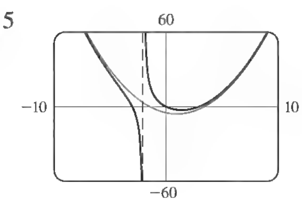

**7.** **(a)** $7 + i$ **(b)** $-1 - 5i$ **(c)** $18 + i$ **(d)** $\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i$
**(e)** 1 **(f)** $6 - 2i$ **8.** $3, -1 \pm i$ **9.** $(x - 1)^2(x - 2i)(x + 2i)$
**10.** $x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9$
**11.** **(a)** 4, 2 o 0 positivo; 0 negativo
**(c)** 0.17, 3.93




**(d)** Mínimo local (2.8, −70.3)
**12.** **(a)** $r, u$ **(b)** $s$ **(c)** $s$ **(d)**



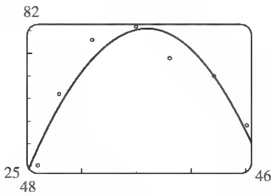

**(e)** $x^2 - 2x - 5$



## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 298

**1. (a)** $y = -0.275428x^2 + 19.7485x - 273.5523$

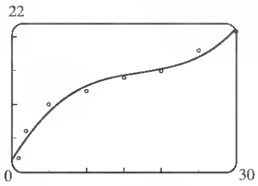
**(b)**




**(c)** 35.85 lb/pulg.$^2$

**3. (a)** $y = 0.00203708x^3 - 0.104521x^2 + 1.966206x + 1.45576$

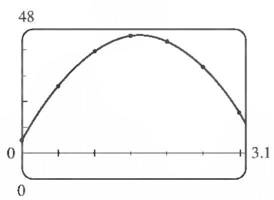
**(b)**




**(c)** 43 vegetales **(d)** 2.0 s

**5. (a)** Grado 2

**(b)** $y = -16.0x^2 + 51.8429x + 4.20714$



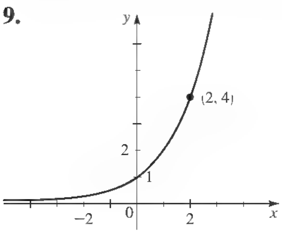

**(c)** 0.3 s y 2.9 s **(d)** 46.2 pies

# CAPÍTULO 4

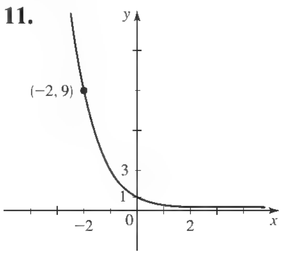
## SECCIÓN 4.1 ■ PÁGINA 307

**1.** 5; $\frac{1}{25}$, 1, 25, 15,625 **2. (a)** III **(b)** I **(c)** II **(d)** IV **3. (a)** hacia abajo **(b)** a la derecha **4.** principal, tasa de interés por año, número de veces que el interés se capitalice por año, número de años, cantidad después de $t$ años: \$112.65 **5.** 2.000, 7.103, 77.880, 1.587 **7.** 0.885, 0.606, 0.117, 1.837

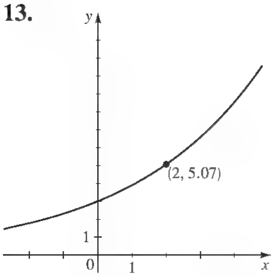
**9.**



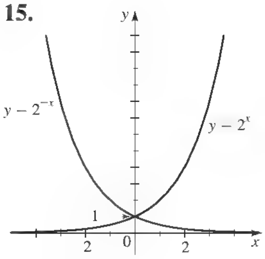

**11.**



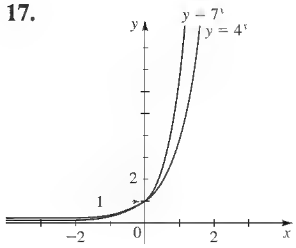

**13.**




**15.**

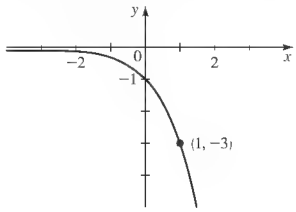



**17.**

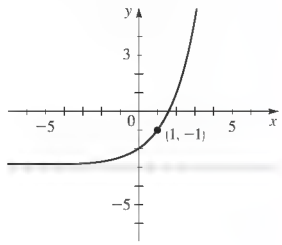



**19.** $f(x) = 3^x$ **21.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **23.** II

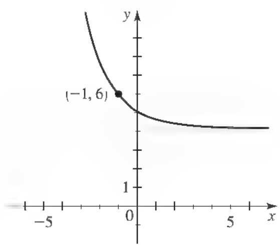
**25.** $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



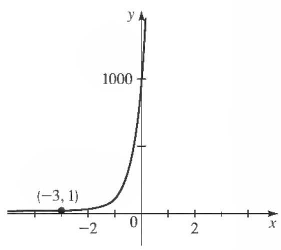

**27.** $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



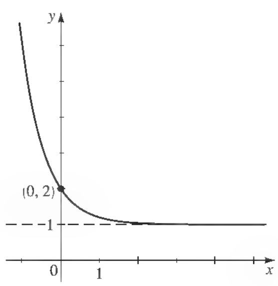

**29.** $\mathbb{R}, (4, \infty), y = 4$



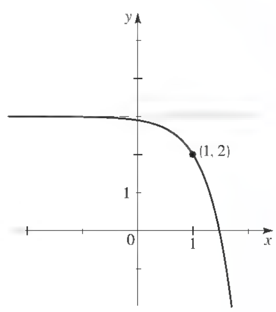

**31.** $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



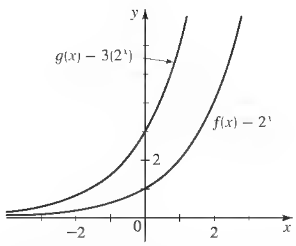

**33.** $\mathbb{R}, (1, \infty), y = 1$




**35.** $\mathbb{R}, (-\infty, 3), y = 3$

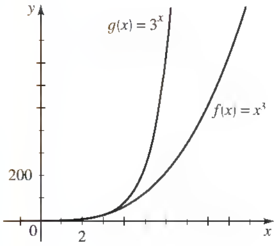



**37. (a)**



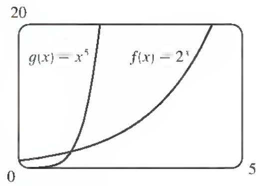

**(b)** La gráfica de $g$ es más pronunciada que la de $f$.

**39.**

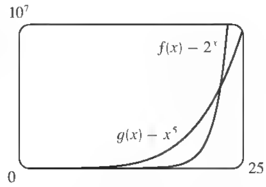



**41. (a)**

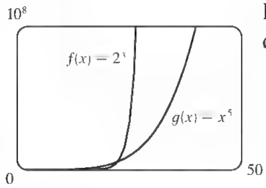
(i)




(ii)



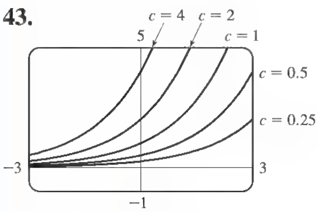

(iii)




La gráfica de $f$ por último aumenta con mucha mayor rapidez que la de $g$.

**(b)** 1.2, 22.4

**43.**




Cuanto mayor sea el valor de $c$, con más rapidez crece la gráfica.

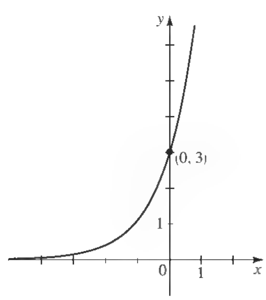
**45. (a)** Creciente sobre $(-\infty, 0.50]$; decreciente sobre $[0.50, \infty)$ **(b)** $(0, 1.78]$ **47. (a)** $1500 \cdot 2^t$ **(b)** 25,165,824,000
**49.** \$5203.71, \$5415.71, \$5636.36, \$5865.99, \$6104.98, \$6353.71
**51. (a)** \$11,605.41 **(b)** \$13,468.55 **(c)** \$15,630.80
**53. (a)** \$519.02 **(b)** \$538.75 **(c)** \$726.23 **55.** \$7678.96
**57.** 8.30%

## SECCIÓN 4.2 ■ PÁGINA 312

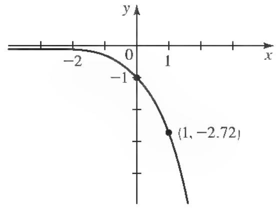
**1.** natural; 2.71828 **2.** principal, tasa de interés por año, número de años; cantidad después de $t$ años; \$112.75
**3.** 20.085, 1.259, 2.718, 0.135

**5.**

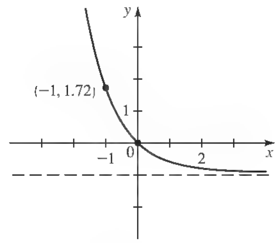
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| −2 | 0.41 |
| −1 | 1.10 |
| −0.5 | 1.82 |
| 0 | 3 |
| 0.5 | 4.95 |
| 1 | 8.15 |
| 2 | 22.17 |



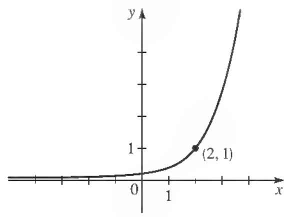

**7.** $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



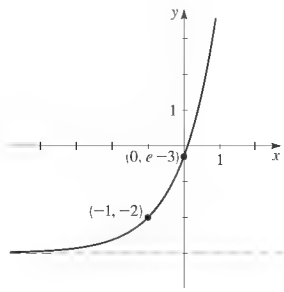

**9.** $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$



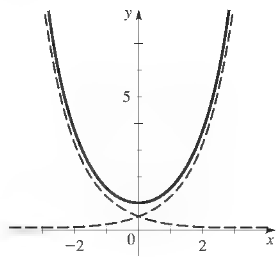

**11.** $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



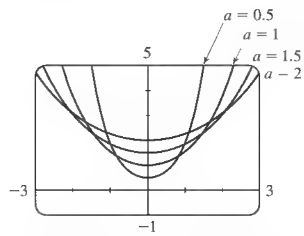

**13.** $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$




**15. (a)**

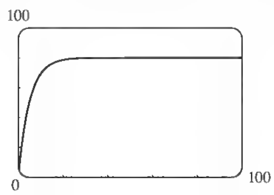



**17. (a)**



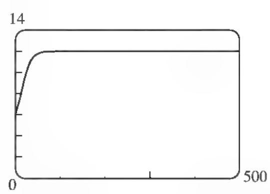

**(b)** Cuanto mayor sea el valor de $a$, más ancha es la gráfica.

**19.** Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$
**21. (a)** 13 kg **(b)** 6.6 kg
**23. (a)** 0 **(b)** 50.6 pies/s, 69.2 pies/s
**(c)**




**(d)** 80 pies/s

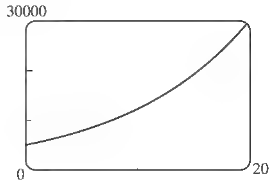
**25. (a)** 100 **(b)** 482, 999, 1168 **(c)** 1200
**27. (a)** 11.79 mil millones, 11.97 mil millones
**(b)**




**(c)** 12 mil millones

**29.** \$7213.18, \$7432.86, \$7659.22, \$7892.48, \$8132.84, \$8380.52
**31. (a)** \$2145.02 **(b)** \$2300.55 **(c)** \$3043.92 **33. (a)** \$768.05 **(b)** \$769.22 **(c)** \$769.82 **(d)** \$770.42 **35.** (a) es el mejor.

**37. (a)** $A(t) = 5000e^{0.09t}$ **(b)**




**(c)** Después de 17.88 años

## SECCIÓN 4.3 ■ PÁGINA 322

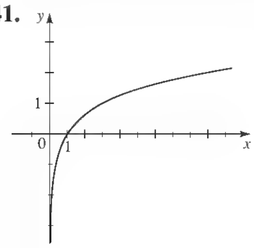
**1.** $10^x$

| $x$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ | $10^{-1}$ | $10^{-2}$ | $10^{-3}$ | $10^{1/2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\log x$ | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $\frac{1}{2}$ |

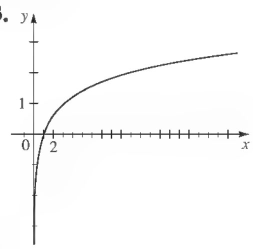
**2.** $9; 1, 0, -1, 2, \frac{1}{2}$
**3. (a)** $\log_5 125 = 3$ **(b)** $5^2 = 25$ **4. (a)** III **(b)** II **(c)** I **(d)** IV
**5.**

| Forma logarítmica | Forma exponencial |
|---|---|
| $\log_8 8 = 1$ | $8^1 = 8$ |
| $\log_8 64 = 2$ | $8^2 = 64$ |
| $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ | $8^{2/3} = 4$ |
| $\log_8 512 = 3$ | $8^3 = 512$ |
| $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ | $8^{-1} = \frac{1}{8}$ |
| $\log_8 \frac{1}{64} = -2$ | $8^{-2} = \frac{1}{64}$ |

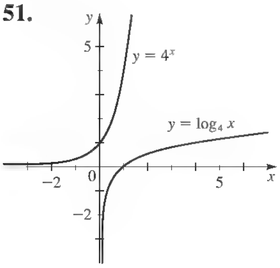
**7. (a)** $5^2 = 25$ **(b)** $5^0 = 1$ **9. (a)** $8^{1/3} = 2$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$
**11. (a)** $e^x = 5$ **(b)** $e^5 = y$ **13. (a)** $\log_5 125 = 3$
**(b)** $\log_{10} 0.0001 = -4$ **15. (a)** $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
**17. (a)** $\ln 2 = x$ **(b)** $\ln y = 3$ **19. (a)** 1 **(b)** 0 **(c)** 2
**21. (a)** 2 **(b)** 2 **(c)** 10 **23. (a)** $-3$ **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $-1$
**25. (a)** 37 **(b)** 8 **(c)** $\sqrt{5}$ **27. (a)** $-\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** $-1$
**29. (a)** 32 **(b)** 4 **31. (a)** 5 **(b)** 27 **33. (a)** 100 **(b)** 25
**35. (a)** 2 **(b)** 4 **37. (a)** 0.3010 **(b)** 1.5465 **(c)** $-0.1761$
**39. (a)** 1.6094 **(b)** 3.2308 **(c)** 1.0051
**41.**



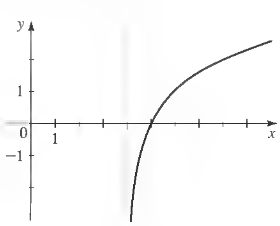

**43.**



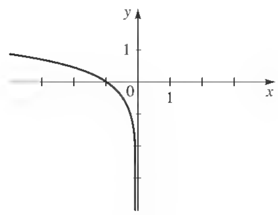

**45.** $y = \log_5 x$ **47.** $y = \log_9 x$ **49.** I
**51.**



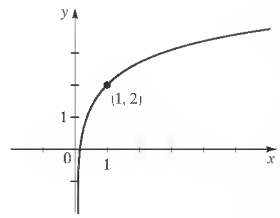

**53.** $(4, \infty), \mathbb{R}, x = 4$



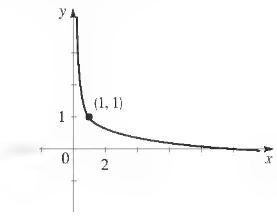

**55.** $(-\infty, 0), \mathbb{R}, x = 0$



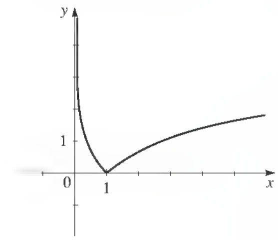

**57.** $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



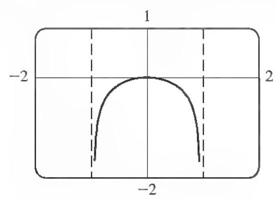

**59.** $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$




**61.** $(0, \infty), [0, \infty), x = 0$

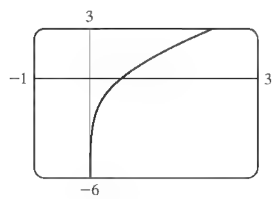



**63.** $(-3, \infty)$ **65.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **67.** $(0, 2)$
**69.**



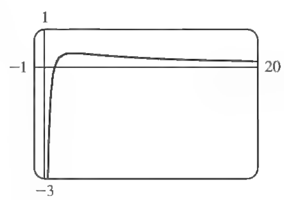

dominio $(-1, 1)$
asíntotas verticales $x = 1$, $x = -1$
máximo local $(0, 0)$

**71.**



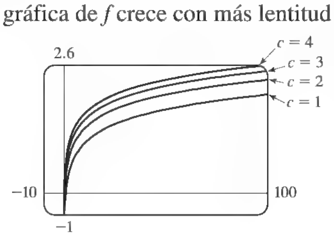

dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
no hay máximo ni mínimo

**73.**




dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
asíntota horizontal $y = 0$
máximo local $\approx (2.72, 0.37)$

**75.** $(f \circ g)(x) = 2^{x+1}, (-\infty, \infty); (g \circ f)(x) = 2^x + 1, (-\infty, \infty)$
**77.** $(f \circ g)(x) = \log_2 (x - 2), (2, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = \log_2 x - 2, (0, \infty)$
**79.** La gráfica de $f$ crece con más lentitud que $g$.
**81. (a)**




**(b)** La gráfica de $f(x) = \log(cx)$ es la gráfica de $f(x) = \log(x)$ desplazada hacia arriba $\log c$ unidades.

**83.** **(a)** $(1, \infty)$ **(b)** $f^{-1}(x) = 10^{2^x}$

**85.** **(a)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ **(b)** $(0, 1)$ **87.** 2602 años

**89.** 11.5 años, 9.9 años, 8.7 años **91.** 5.32, 4.32

## SECCIÓN 4.4 ■ PÁGINA 329

**1.** suma; $\log_5 25 + \log_5 125 = 2 + 3$
**2.** diferencia; $\log_5 25 - \log_5 125 = 2 - 3$
**3.** por el; $10 \cdot \log_5 25$
**4.** **(a)** $2 \log x + \log y - \log z$

**(b)** $\log\left(\dfrac{x^2y}{z}\right)$

**5.** 10, $e$; Cambio de Base; $\log_7 12 = \dfrac{\log 12}{\log 7} = 1.277$

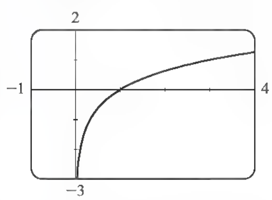
**6.** Verdadero **7.** $\frac{3}{2}$ **9.** 2 **11.** 3 **13.** 3 **15.** 200 **17.** 4
**19.** $1 + \log_2 x$ **21.** $\log_2 x + \log_2(x - 1)$
**23.** $10 \log 6$ **25.** $\log_2 A + 2 \log_2 B$ **27.** $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y$
**29.** $\frac{1}{3}\log_5(x^2 + 1)$ **31.** $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$
**33.** $3 \log x + 4 \log y - 6 \log z$
**35.** $\log_2 x + \log_2(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 1)$
**37.** $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$ **39.** $\frac{1}{4}\log(x^2 + y^2)$
**41.** $\frac{1}{2}[\log(x^2 + 4) - \log(x^2 + 1) - 2\log(x^3 - 7)]$
**43.** $3 \ln x + \frac{1}{2}\ln(x - 1) - \ln(3x + 4)$ **45.** $\log_3 160$

**47.** $\log_2(AB/C^2)$ **49.** $\log\left(\dfrac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$

**51.** $\ln(5x^2(x^2 + 5)^3)$

**53.** $\log\left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)$ **55.** 2.321928 **57.** 2.523719

**59.** 0.493008 **61.** 3.482892
**63.**




**69.** **(a)** $P = c/W^k$ **(b)** 1866, 64
**71.** **(a)** $M = -2.5 \log B + 2.5 \log B_0$

## SECCIÓN 4.5 ■ PÁGINA 338

**1.** **(a)** $e^x = 25$ **(b)** $x = \ln 25$ **(c)** 3.219
**2.** **(a)** $\log 3(x - 2) = \log x$ **(b)** $3(x - 2) = x$ **(c)** 3
**3.** 1.3979 **5.** −0.9730 **7.** −0.5850 **9.** 1.2040 **11.** 0.0767
**13.** 0.2524 **15.** 1.9349 **17.** −43.0677 **19.** 2.1492
**21.** 6.2126 **23.** −2.9469 **25.** −2.4423 **27.** 14.0055
**29.** $\ln 2 \approx 0.6931$, 0 **31.** $\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.5493$ **33.** $\pm 1$ **35.** $0, \frac{4}{3}$
**37.** $e^{10} \approx 22026$ **39.** 0.01 **41.** $\frac{95}{3}$ **43.** −7 **45.** 5 **47.** 5
**49.** $\frac{13}{12}$ **51.** 4 **53.** 6 **55.** $\frac{3}{2}$ **57.** $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ **59.** 2.21
**61.** 0.00, 1.14 **63.** −0.57 **65.** 0.36
**67.** $2 < x < 4$ o $7 < x < 9$ **69.** $\log 2 < x < \log 5$

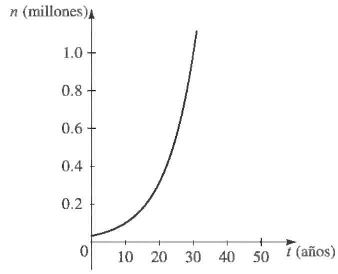
**71.** $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln x}{2 \ln 2}$ **73.** $f^{-1}(x) = 2^x + 1$

**75.** **(a)** \$6435.09 **(b)** 8.24 años **77.** 6.33 años **79.** 8.15 años

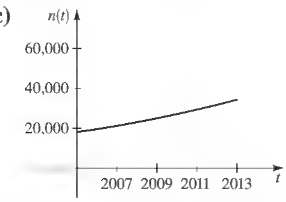
**81.** 13 días **83.** **(a)** 7337 **(b)** 1.73 años **85.** **(a)** $P = P_0 e^{-h/k}$
**(b)** 56.47 kPa **87.** **(a)** $t = -\frac{5}{13}\ln(1 - \frac{13}{60}I)$ **(b)** 0.218 s

## SECCIÓN 4.6 ■ PÁGINA 350

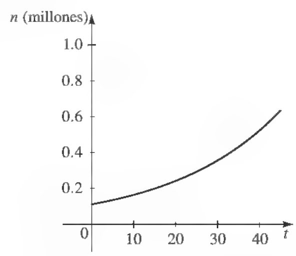
**1.** **(a)** $n(t) = 10 \cdot 2^{2t/3}$ **(b)** $1.05 \times 10^8$ **(c)** Después de 14.9 h
**3.** **(a)** 3125 **(b)** 317,480
**(c)**




**5.** **(a)** $n(t) = 18{,}000e^{0.08t}$ **(b)** 34,137
**(c)**



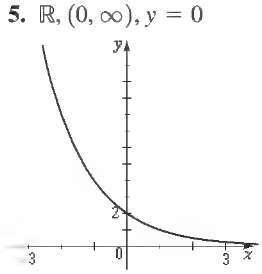

**7.** **(a)** 233 millones **(b)** 181 millones
**9.** **(a)** $n(t) = 112{,}000 \cdot 2^{t/18}$ **(b)** $n(t) = 112{,}000e^{0.0385t}$
**(c)** **(d)** En el año 2045

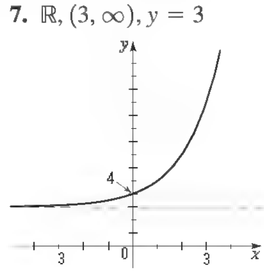



**11.** **(a)** 20,000 **(b)** $n(t) = 20{,}000e^{0.1096t}$ **(c)** Sobre 48,000
**(d)** 2017 **13.** **(a)** $n(t) = 8600e^{0.1508t}$ **(b)** Sobre 11,600
**(c)** 4.6 h **15.** **(a)** $n(t) = 29.76e^{0.012936t}$ millones
**(b)** 53.5 años **(c)** 38.55 millones **17.** **(a)** $m(t) = 22 \cdot 2^{-t/1600}$
**(b)** $m(t) = 22e^{-0.000433t}$ **(c)** 3.9 mg **(d)** 463.4 años
**19.** 18 años **21.** 149 h **23.** 3560 años
**25.** **(a)** 210°F **(b)** 153°F **(c)** 28 min
**27.** **(a)** 137°F **(b)** 116 min
**29.** **(a)** 2.3 **(b)** 3.5 **(c)** 8.3
**31.** **(a)** $10^{-3}$ M **(b)** $3.2 \times 10^{-7}$ M
**33.** $4.8 \le \text{pH} \le 6.4$ **35.** $\log 20 \approx 1.3$ **37.** El doble de intenso
**39.** 8.2 **41.** 73 dB **43.** **(b)** 106 dB

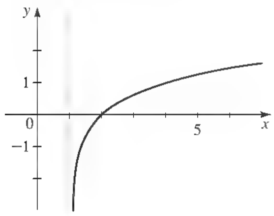
## REPASO DEL CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 353

**1.** 0.089, 9.739, 55.902 **3.** 11.954, 2.989, 2.518
**5.** $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$ **7.** $\mathbb{R}$, $(3, \infty)$, $y = 3$

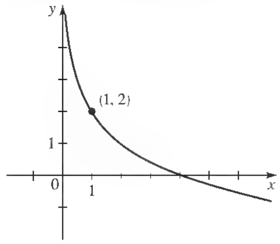


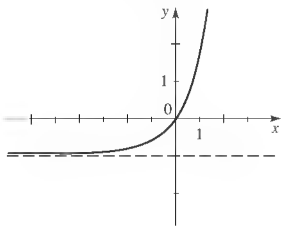
**9.** $(1, \infty), \mathbb{R}, x = 1$



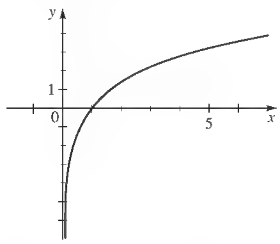
**11.** $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



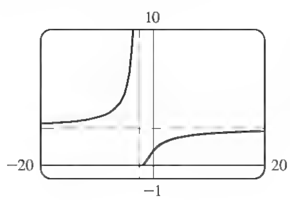

**13.** $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$



**15.** $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$

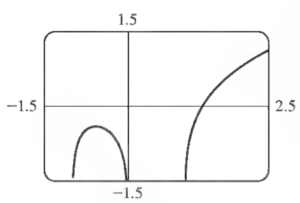


**17.** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ **19.** $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **21.** $2^{10} = 1024$
**23.** $10^y = x$ **25.** $\log_2 64 = 6$ **27.** $\log 74 = x$ **29.** 7 **31.** 45
**33.** 6 **35.** −3 **37.** $\frac{1}{2}$ **39.** 2 **41.** 92 **43.** $\frac{2}{3}$
**45.** $\log A + 2 \log B + 3 \log C$ **47.** $\frac{1}{2}[\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)]$
**49.** $2 \log_5 x + \frac{3}{2} \log_5(1 - 5x) - \frac{1}{2} \log_5(x^3 - x)$
**51.** log 96 **53.** $\log_2\left(\frac{(x - y)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ **55.** $\log\left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$
**57.** 5 **59.** 2.60 **61.** −1.15 **63.** −4, 2
**65.** −15 **67.** 3 **69.** 0.430618
**71.** 2.303600
**73.**



asíntota vertical
$x = -2$
asíntota horizontal
$y = 2.72$
no hay máximo ni mínimo

**75.**

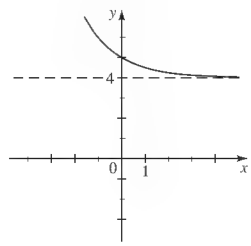


asíntotas verticales
$x = -1, x = 0, x = 1$
máximo local
$\approx (-0.58, -0.41)$

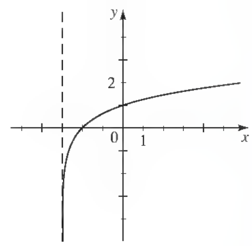
**77.** 2.42 **79.** $0.16 < x < 3.15$
**81.** Creciente sobre $(-\infty, 0]$ y $[1.10, \infty)$, decreciente sobre $[0, 1.10]$
**83.** 1.953445 **85.** −0.579352 **87.** $\log_4 258$
**89. (a)** \$16,081.15 **(b)** \$16,178.18 **(c)** \$16,197.64
**(d)** \$16,198.31 **91.** 1.83 años **93.** 4.341%
**95. (a)** $n(t) = 30e^{0.15t}$ **(b)** 55 **(c)** 19 años
**97. (a)** 9.97 mg **(b)** $1.39 \times 10^5$ años
**99. (a)** $n(t) = 150e^{-0.0004359t}$ **(b)** 97.0 mg **(c)** 2520 años
**101. (a)** $n(t) = 1500e^{0.1515t}$ **(b)** 7940
**103.** 7.9, básico **105.** 8.0

## EXAMEN DE CAPÍTULO 4 ■ PÁGINA 356

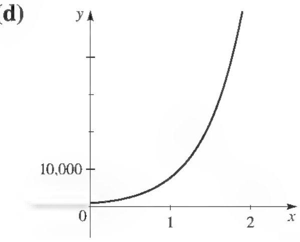
**1. (a)** $\mathbb{R}, (4, \infty), y = 4$



**(b)** $(-3, \infty), \mathbb{R}, x = -3$



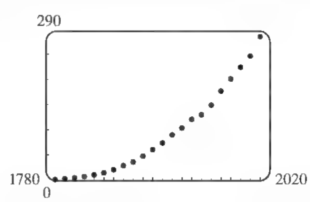
**2. (a)** $\log_6 25 = 2x$ **(b)** $e^3 = A$
**3. (a)** 36 **(b)** 3 **(c)** $\frac{3}{2}$ **(d)** 3 **(e)** $\frac{2}{3}$ **(f)** 2
**4.** $\frac{1}{3}[\log(x + 2) - 4 \log x - \log(x^2 + 4)]$
**5.** $\ln\left(\frac{x\sqrt{3 - x^4}}{(x^2 + 1)^2}\right)$ **6. (a)** 4.32 **(b)** 0.77 **(c)** 5.39 **(d)** 2
**7. (a)** $n(t) = 1000e^{2.07944t}$
**(b)** 22,627 **(c)** 1.3 h
**(d)**



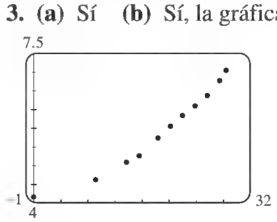
**8. (a)** $A(t) = 12{,}000\left(1 + \frac{0.056}{12}\right)^{12t}$
**(b)** \$14,195.06 **(c)** 9.249 años
**9. (a)** $A(t) = 3e^{-0.069t}$ **(b)** 0.048 g **(c)** después de 3.6 minutos
**10.** 1995 veces más intenso

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 363

**1. (a)**



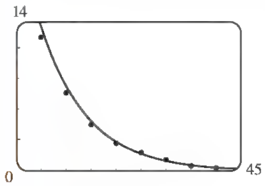
**(b)** $y = ab^t$, donde $a = 1.180609 \times 10^{-15}$, $b = 1.0204139$, y $y$ es la población en millones en el año $t$ **(c)** 515.9 millones
**(d)** 207.8 millones **(e)** No
**3. (a)** Sí **(b)** Sí, la gráfica de dispersión parece lineal.



**(c)** $\ln E = 4.551436 + 0.092383t$, donde $t$ es años desde 1970 y $E$ es el gasto en miles de millones de dólares
**(d)** $E = 94.76838139e^{at}$, donde $a = 0.0923827621$
**(e)** 3478.5 mil millones de dólares

**5. (a)** $I_0 = 22.7586444$, $k = 0.1062398$

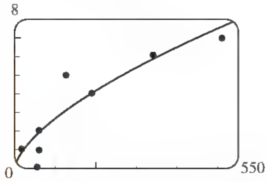
**(b)**




**(c)** 47.3 pies

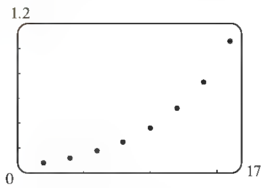
**7. (a)** $S = 0.14A^{0.64}$

**(b)**

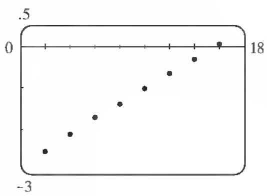


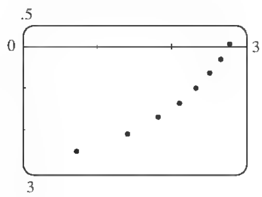

**(c)** 4 especies

**9. (a)**




**(b)**



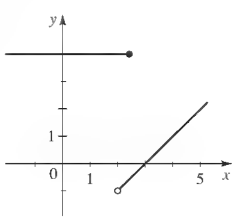

**(c)** Función exponencial
**(d)** $y = ab^x$ donde $a = 0.057697$ y $b = 1.200236$

**11. (a)** $y = \dfrac{c}{1 + ae^{bx}}$, donde $a = 49.10976596$, $b = 0.4981144989$, y $c = 500.855793$ **(b)** 10.58 días

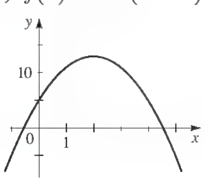
## EXAMEN ACUMULATIVO DEL REPASO PARA LOS CAPÍTULOS 2,3 Y 4 ■ PÁGINA 367

**1. (a)** $(-\infty, \infty)$ **(b)** $[-4, \infty)$ **(c)** 12, 0, 0, 2, $2\sqrt{3}$, no definido
**(d)** $x^2 - 4$, $\sqrt{x + 6}$, $-4 + h^2$ **(e)** $\frac{1}{8}$
**(f)** $f \circ g = x + 4 - \sqrt{x + 4}$, $g \circ f = |x - 2|$, $f(g(12)) = 0$, $g(f(12)) = 10$ **(g)** $g^{-1}(x) = x^2 - 4$, $x \geq 0$

**2. (a)** 4, 4, 4, 0, 1 **(b)**



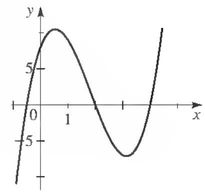

**3. (a)** $f(x) = -2(x - 2)^2 + 13$ **(b)** Máximo 13
**(c)**




**(d)** Creciente sobre $(-\infty, 2]$; decreciente sobre $[2, \infty)$
**(e)** Se desplaza hacia arriba 5 unidades
**(f)** Se desplaza a la izquierda 3 unidades

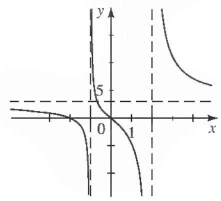
**4.** $f$, D; $g$, C; $r$, A; $s$, F; $h$, B; $k$, E

**5. (a)** $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{2}$ **(b)** 2, 4, $-\frac{1}{2}$
**(c)** $P(x) = 2(x - 2)(x - 4)(x + \frac{1}{2})$ **(d)**

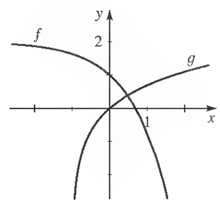



**6. (a)** 1 (multiplicidad 2); $-1$, $1 + i$, $1 - i$ (multiplicidad 1)
**(b)** $Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$
**(c)** $Q(x) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 - 2x + 2)$

**7.** puntos de intersección $x$ 0, $-2$; punto de intersección $y$ 0; asíntota horizontal $y = 3$; asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -1$




**8.**




**9. (a)** $-4$ **(b)** $5 \log x + \frac{1}{2}\log(x - 1) - \log(2x - 3)$

**10. (a)** 4 **(b)** ln 2, ln 4 **11. (a)** \$29,396.15
**(b)** Después de 6.23 años **(c)** 12.837 años

**12. (a)** $P(t) = 120e^{0.0565t}$ **(b)** 917 **(c)** Después de 49.8 meses

# CAPÍTULO 5

## SECCIÓN 5.1 ■ PÁGINA 375

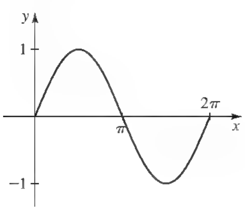
**1. (a)** (0, 0), 1 **(b)** $x^2 + y^2 = 1$ **(c)** (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 0 **2. (a)** terminal **(b)** $(0, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, 0)$
**9.** $-\frac{4}{5}$ **11.** $-2\sqrt{2}/3$ **13.** $3\sqrt{5}/7$ **15.** $P(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
**17.** $P(-\sqrt{5}/3, \frac{2}{3})$ **19.** $P(-\sqrt{2}/3, -\sqrt{7}/3)$
**21.** $t = \pi/4$, $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; $t = \pi/2$, $(0, 1)$;
$t = 3\pi/4$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$; $t = \pi$, $(-1, 0)$;
$t = 5\pi/4$, $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; $t = 3\pi/2$, $(0, -1)$;
$t = 7\pi/4$, $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; $t = 2\pi$, $(1, 0)$
**23.** $(0, 1)$ **25.** $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$ **27.** $(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$
**29.** $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ **31.** $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
**33. (a)** $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ **(b)** $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ **(c)** $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ **(d)** $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
**35. (a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/3$ **(d)** $\pi/6$
**37. (a)** $2\pi/7$ **(b)** $2\pi/9$ **(c)** $\pi - 3 \approx 0.14$ **(d)** $2\pi - 5 \approx 1.28$
**39. (a)** $\pi/3$ **(b)** $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$
**41. (a)** $\pi/4$ **(b)** $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
**43. (a)** $\pi/3$ **(b)** $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$
**45. (a)** $\pi/4$ **(b)** $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
**47. (a)** $\pi/6$ **(b)** $(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$
**49. (a)** $\pi/3$ **(b)** $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ **51. (a)** $\pi/3$ **(b)** $(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$
**53.** $(0.5, 0.8)$ **55.** $(0.5, -0.9)$

## SECCIÓN 5.2 ▪ PÁGINA 384

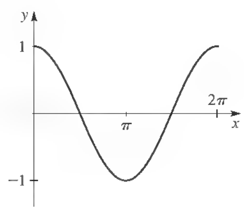
**1.** $y, x, y/x$ **2.** 1, 1 **3.** $t = \pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = \pi/2$, sen $t = 1$, cos $t = 0$; $t = 3\pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = \pi$, sen $t = 0$, cos $t = -1$; $t = 5\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = 3\pi/2$, sen $t = -1$, cos $t = 0$; $t = 7\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = 2\pi$, sen $t = 0$, cos $t = 1$
**5.** **(a)** $\sqrt{3}/2$ **(b)** $-1/2$ **(c)** $-\sqrt{3}$
**7.** **(a)** $-1/2$ **(b)** $-1/2$ **(c)** $-1/2$
**9.** **(a)** $-\sqrt{2}/2$ **(b)** $-\sqrt{2}/2$ **(c)** $\sqrt{2}/2$
**11.** **(a)** $\sqrt{3}/2$ **(b)** $2\sqrt{3}/3$ **(c)** $\sqrt{3}/3$
**13.** **(a)** $-1$ **(b)** 0 **(c)** 0
**15.** **(a)** 2 **(b)** $-2\sqrt{3}/3$ **(c)** 2
**17.** **(a)** $-\sqrt{3}/3$ **(b)** $\sqrt{3}/3$ **(c)** $-\sqrt{3}/3$
**19.** **(a)** $\sqrt{2}/2$ **(b)** $-\sqrt{2}$ **(c)** $-1$
**21.** **(a)** $-1$ **(b)** 1 **(c)** $-1$ **23.** **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** 0
**25.** sen $0 = 0$, cos $0 = 1$, tan $0 = 0$, sec $0 = 1$, otras no definidas
**27.** sen $\pi = 0$, cos $\pi = -1$, tan $\pi = 0$, sec $\pi = -1$, otras no definidas
**29.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$ **31.** $-\sqrt{11}/4, \sqrt{5}/4, -\sqrt{55}/5$
**33.** $\sqrt{13}/7, -6/7, -\sqrt{13}/6$ **35.** $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$ **37.** $\frac{21}{29}, -\frac{20}{29}, -\frac{21}{20}$
**39.** **(a)** 0.8 **(b)** 0.84147 **41.** **(a)** 0.9 **(b)** 0.93204
**43.** **(a)** 1 **(b)** 1.02964 **45.** **(a)** $-0.6$ **(b)** $-0.57482$
**47.** Negativo **49.** Negativo **51.** II **53.** II
**55.** sen $t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$
**57.** tan $t = (\text{sen } t)/\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$
**59.** sec $t = -\sqrt{1 + \tan^2 t}$
**61.** tan $t = \sqrt{\sec^2 t - 1}$
**63.** $\tan^2 t = (\text{sen}^2 t)/(1 - \text{sen}^2 t)$
**65.** cos $t = -\frac{4}{5}$, tan $t = -\frac{3}{4}$, csc $t = \frac{5}{3}$, sec $t = -\frac{5}{4}$, cot $t = -\frac{4}{3}$
**67.** sen $t = -2\sqrt{2}/3$, cos $t = \frac{1}{3}$, tan $t = -2\sqrt{2}$, csc $t = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$, cot $t = -\sqrt{2}/4$
**69.** sen $t = -\frac{3}{5}$, cos $t = \frac{4}{5}$, csc $t = -\frac{5}{3}$, sec $t = \frac{5}{4}$, cot $t = -\frac{4}{3}$
**71.** cos $t = -\sqrt{15}/4$, tan $t = \sqrt{15}/15$, csc $t = -4$, sec $t = -4\sqrt{15}/15$, cot $t = \sqrt{15}$
**73.** Impar **75.** Impar **77.** Par **79.** Ninguna de éstas
**81.** $y(0) = 4$, $y(0.25) = -2.828$, $y(0.50) = 0$, $y(0.75) = 2.828$, $y(1.00) = -4$, $y(1.25) = 2.828$
**83.** **(a)** 0.49870 amp **(b)** $-0.17117$ amp

## SECCIÓN 5.3 ▪ PÁGINA 396

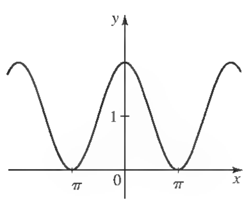
**1.** 1, $2\pi$



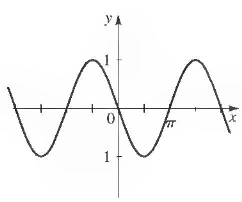
**2.** 3, $\pi$



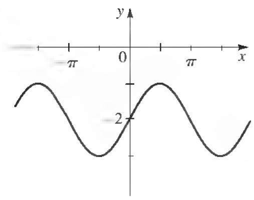
**3.**



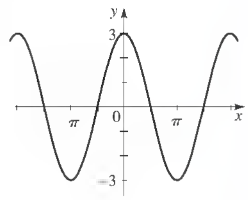
**5.**



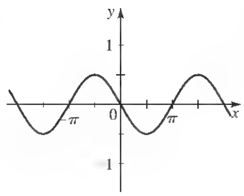
**7.**



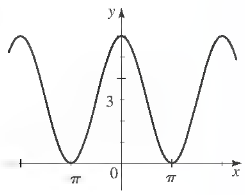
**9.**



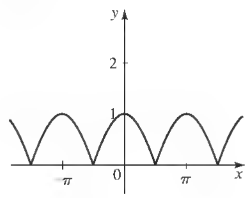
**11.**



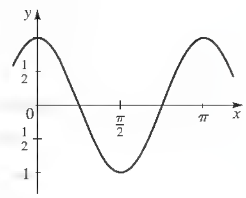
**13.**



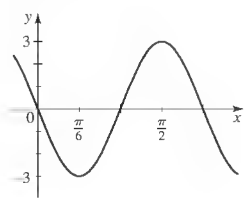
**15.**



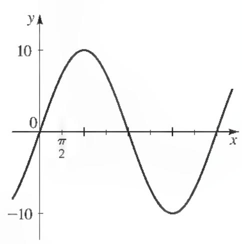
**17.** 1, $\pi$



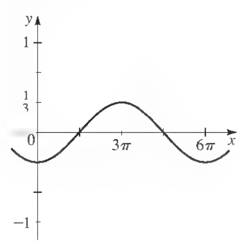
**19.** 3, $2\pi/3$



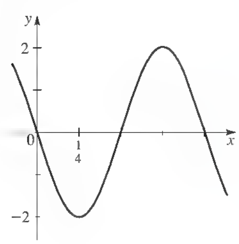
**21.** 10, $4\pi$



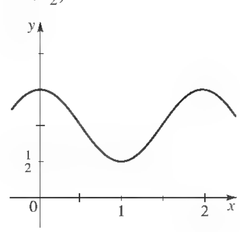
**23.** $\frac{1}{3}$, $6\pi$



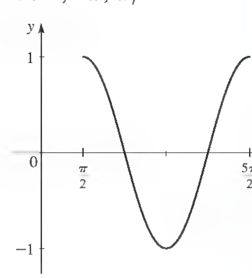
**25.** 2, 1



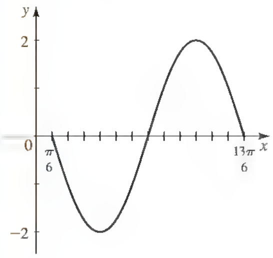
**27.** $\frac{1}{2}$, 2



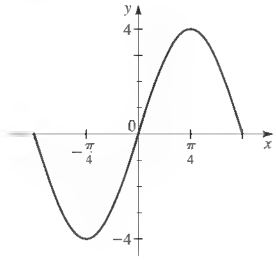
**29.** 1, $2\pi$, $\pi/2$



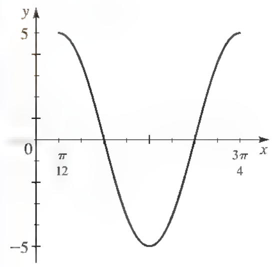
**31.** $2, 2\pi, \pi/6$



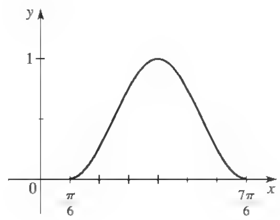

**33.** $4, \pi, -\pi/2$



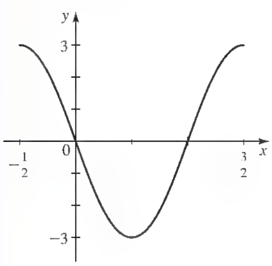

**35.** $5, 2\pi/3, \pi/12$



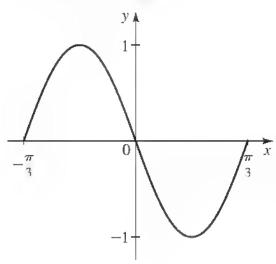

**37.** $\frac{1}{2}, \pi, \pi/6$




**39.** $3, 2, \quad \frac{1}{2}$

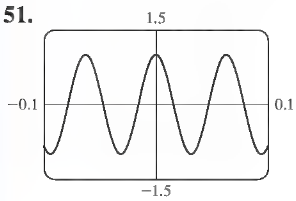



**41.** $1, 2\pi/3, \quad \pi/3$

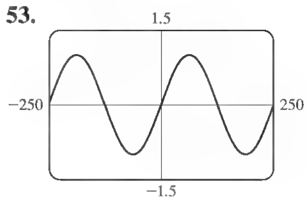



**43.** **(a)** $4, 2\pi, 0$ **(b)** $y = 4 \text{ sen } x$
**45.** **(a)** $\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3}, 0$ **(b)** $y = \frac{3}{2} \cos 3x$
**47.** **(a)** $\frac{1}{2}, \pi, -\frac{\pi}{3}$ **(b)** $y = -\frac{1}{2} \cos 2\left(x + \pi/3\right)$
**49.** **(a)** $4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ **(b)** $y = 4 \text{ sen } \frac{4\pi}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

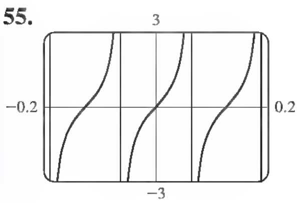
**51.**



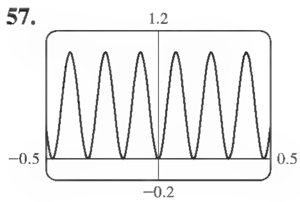

**53.**



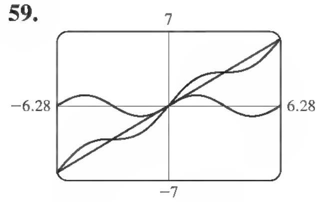

**55.**



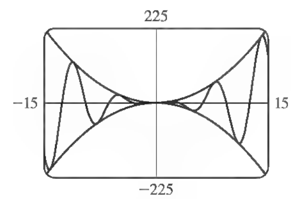

**57.**




**59.**

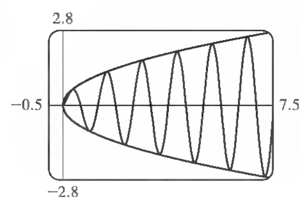



**61.**



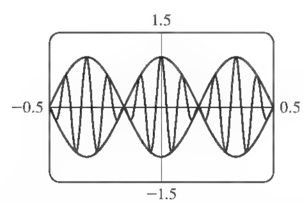

$y = x^2 \text{ sen } x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$

**63.**



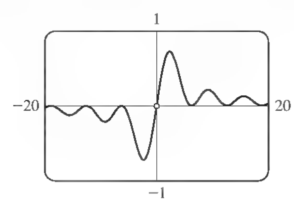

$y = \sqrt{x} \text{ sen } 5\pi x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$

**65.**



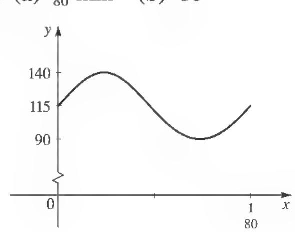

$y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$ es una curva senoidal que está entre las gráficas de $y = \cos 3\pi x$ y $y = -\cos 3\pi x$

**67.** Valor máximo 1.76 cuando $x \approx 0.94$, valor mínimo $-1.76$ cuando $x \approx -0.94$ (Los mismos valores máximo y mínimo se presentan en un número infinito de otros valores de $x$.)
**69.** Valor máximo 3.0 cuando $x \approx 1.57$, valor mínimo $-1.00$ cuando $x \approx \quad 1.57$ (Los mismos valores máximo y mínimo se presentan en un número infinito de otros valores de $x$.)
**71.** 1.16 **73.** 0.34, 2.80
**75.** **(a)** Impar **(b)** $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$
**(c)**




**(d)** $f(x)$ se aproxima a 0
**(e)** $f(x)$ se aproxima a 0

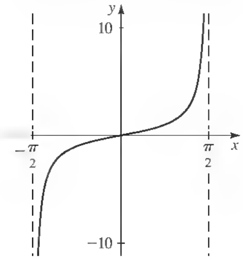
**77.** **(a)** 20 s **(b)** 6 pies
**79.** **(a)** $\frac{1}{80}$ min **(b)** 80
**(c)**



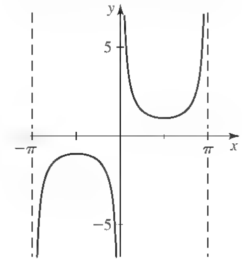

**(d)** $\frac{140}{90}$; es más alto de lo normal

## SECCIÓN 5.4 ■ PÁGINA 405

**1.** $\pi$; $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n$ un entero

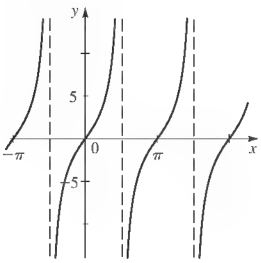



**2.** $2\pi$; $n\pi$, $n$ un entero

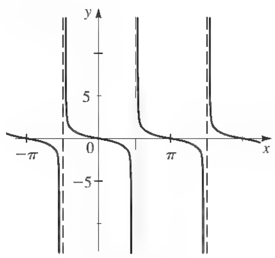



**3.** II **5.** VI **7.** IV

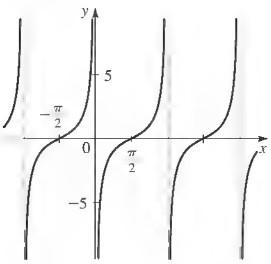
**9.** $\pi$



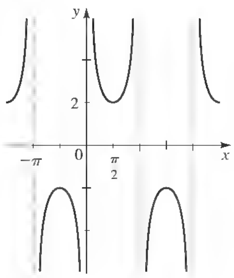

**11.** $\pi$



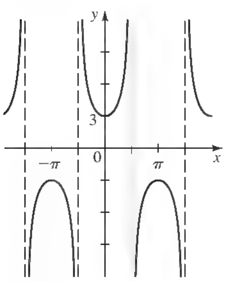

**13.** $\pi$



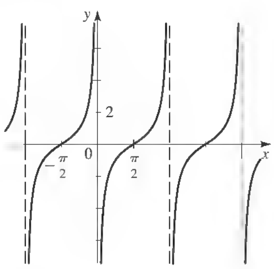

**15.** $2\pi$



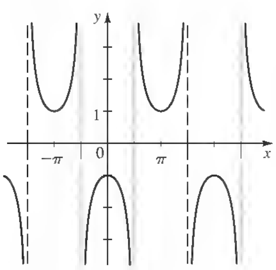

**17.** $2\pi$



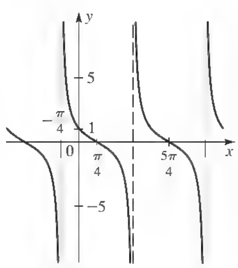

**19.** $\pi$



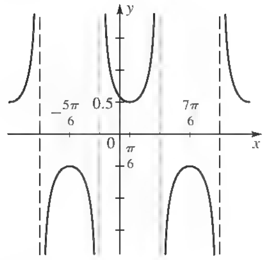

**21.** $2\pi$



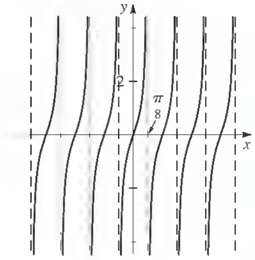

**23.** $\pi$



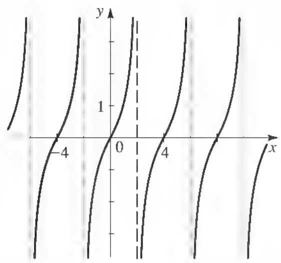

**25.** $2\pi$



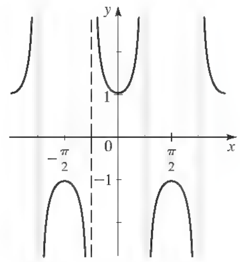

**27.** $\pi/4$



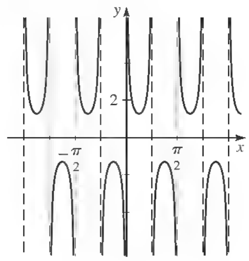

**29.** 4



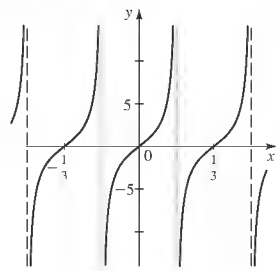

**31.** $\pi$



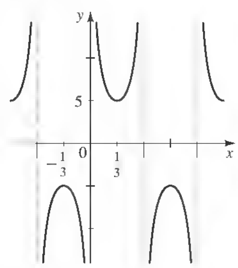

**33.** $\pi/2$



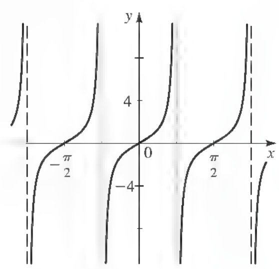

**35.** $\frac{1}{3}$



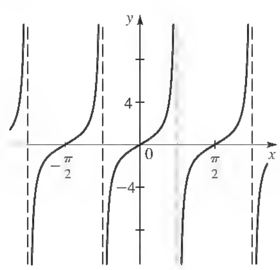

**37.** $\frac{4}{3}$



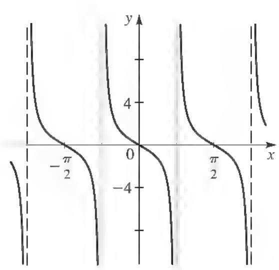

**39.** $\pi/2$



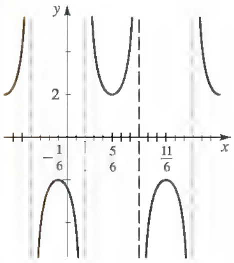

**41.** $\pi/2$



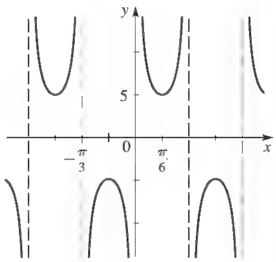

**43.** $\pi/2$



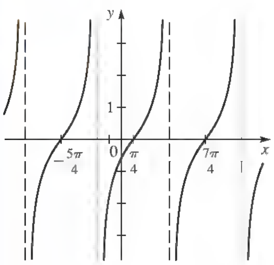
**45.** 2



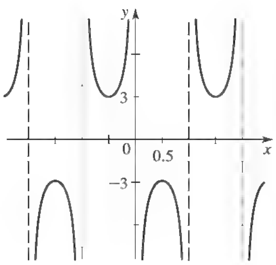
**47.** $2\pi/3$



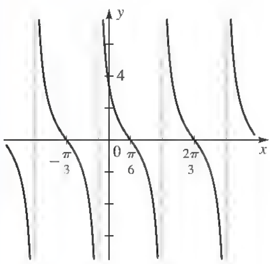
**49.** $3\pi/2$



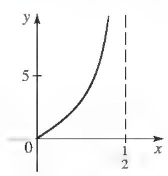
**51.** 2



**53.** $\pi/2$



**57. (a)** 1.53 mi, 3.00 mi, 18.94 mi
**(b)**



**(c)** $d(t)$ se aproxima al $\infty$

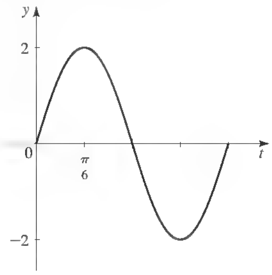
## SECCIÓN 5.5 ■ PÁGINA 411

**1. (a)** $[-\pi/2, \pi/2]$, $y$, $x$, $\pi/6$, $\pi/6$, $\frac{1}{2}$
**(b)** $[0, \pi]$; $y$, $x$, $\pi/3$, $\pi/3$, $\frac{1}{2}$ **2.** $[\ \ 1, 1]$; (b)
**3. (a)** $\pi/2$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** No está definida
**5. (a)** $\pi$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $5\pi/6$
**7. (a)** $-\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
**9. (a)** $2\pi/3$ **(b)** $-\pi/4$ **(c)** $\pi/4$ **11.** 0.72973
**13.** 2.01371 **15.** 2.75876 **17.** 1.47113 **19.** 0.88998
**21.** −0.26005 **23.** $\frac{1}{4}$ **25.** 5
**27.** No está definida **29.** $5\pi/6$ **31.** $-\pi/6$ **33.** $\pi/6$ **35.** $\pi/6$
**37.** $-\pi/3$ **39.** $\sqrt{3}/3$ **41.** $\frac{1}{2}$ **43.** $-\sqrt{2}/2$

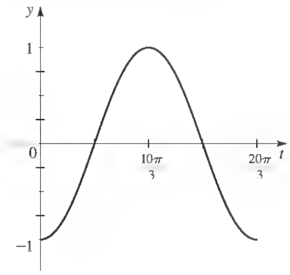
## SECCIÓN 5.6 ■ PÁGINA 420

**1. (a)** $a$ sen $\omega t$ **(b)** $a$ cos $\omega t$
**2. (a)** $ke^{\ ct}$ sen $\omega t$ **(b)** $ke^{\ ct}$ cos $\omega t$

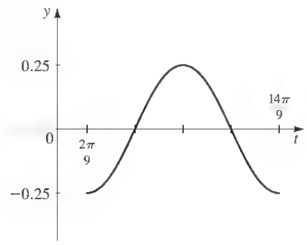
**3. (a)** 2, $2\pi/3$, $3/(2\pi)$
**(b)**



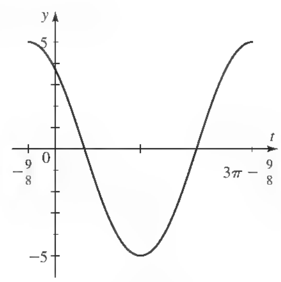
**5. (a)** 1, $20\pi/3$, $3/(20\pi)$
**(b)**



**7. (a)** $\frac{1}{4}$, $4\pi/3$, $3/(4\pi)$
**(b)**

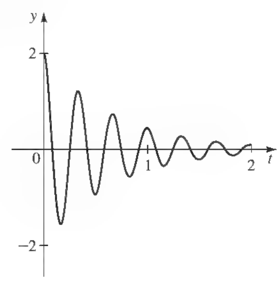


**9. (a)** 5, $3\pi$, $1/(3\pi)$
**(b)**

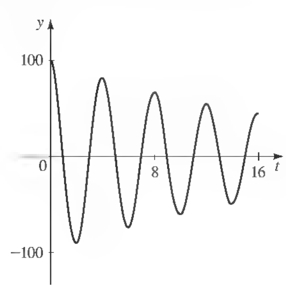


**11.** $y = 10\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ **13.** $y = 6\,\text{sen}(10t)$
**15.** $y = 60\cos(4\pi t)$ **17.** $y = 2.4\cos(1500\pi t)$

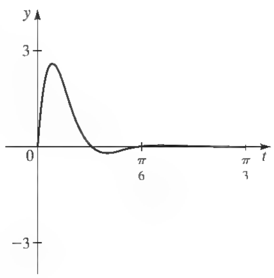
**19. (a)** $y = 2e^{\ 1.5t}\cos 6\pi t$
**(b)**



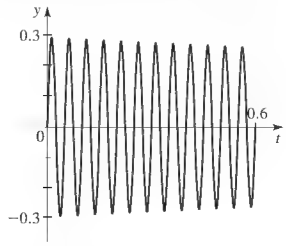
**21. (a)** $y = 100e^{\ 0.05t}\cos\dfrac{\pi}{2}t$
**(b)**



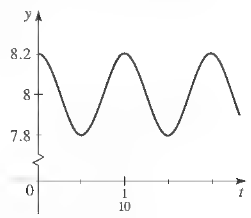
**23.** **(a)** $y = 7e^{10t}$ sen $12t$ **(b)**




**25.** **(a)** $y = 0.3e^{0.2t}$ sen$(40\pi t)$
**(b)**

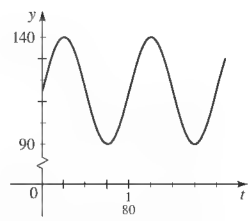



**27.** **(a)** 10 ciclos por minuto
**(b)**

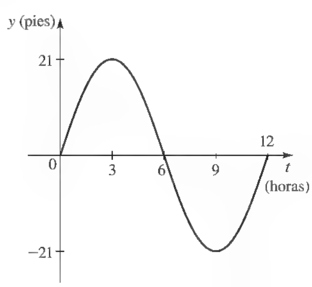



**(c)** 0.4 m

**29.** **(a)** 25, 0.0125, 80 **(b)**



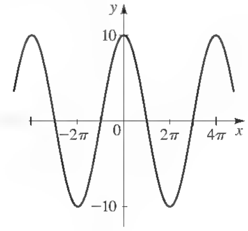

**(c)** El período disminuye y la frecuencia aumenta.
**31.** $d(t) = 5$ sen$(5\pi t)$
**33.** $y = 21$ sen$\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$



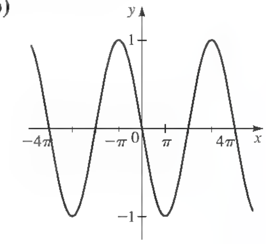

**35.** $y = 5\cos(2\pi t)$ **37.** $y = 11 + 10$ sen$\left(\dfrac{\pi t}{10}\right)$
**39.** $y = 3.8 + 0.2$ sen$\left(\dfrac{\pi}{5}t\right)$
**41.** $f(t) = 10$ sen$\left(\dfrac{\pi}{12}(t - 8)\right) + 90$
**43.** **(a)** 45 V **(b)** 40 **(c)** 40 **(d)** $E(t) = 45\cos(80\pi t)$
**45.** $f(t) = e^{0.9t}$ sen $\pi t$ **47.** $e = \dfrac{1}{3}\ln 4 \approx 0.46$

## REPASO DEL CAPÍTULO 5 ▪ PÁGINA 424

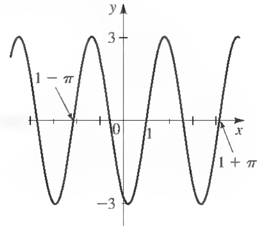
**1.** **(b)** $\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3$ **3.** **(a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$
**(c)** sen $t = \sqrt{3}/2$, $\cos t = -\frac{1}{2}$, $\tan t = -\sqrt{3}$, $\csc t = 2\sqrt{3}/3$, $\sec t = -2$, $\cot t = -\sqrt{3}/3$
**5.** **(a)** $\pi/4$ **(b)** $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
**(c)** sen $t = -\sqrt{2}/2$, $\cos t = -\sqrt{2}/2$, $\tan t = 1$, $\csc t = -\sqrt{2}$, $\sec t = -\sqrt{2}$, $\cot t = 1$
**7.** **(a)** $\sqrt{2}/2$ **(b)** $-\sqrt{2}/2$ **9.** **(a)** 0.89121 **(b)** 0.45360
**11.** **(a)** 0 **(b)** No definido **13.** **(a)** No definido **(b)** 0
**15.** **(a)** $-\sqrt{3}/3$ **(b)** $-\sqrt{3}$ **17.** (sen $t$)/(1 − sen$^2 t$)
**19.** (sen $t$)/$\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$
**21.** $\tan t = -\frac{5}{12}$, $\csc t = \frac{13}{5}$, $\sec t = -\frac{13}{12}$, $\cot t = -\frac{12}{5}$
**23.** sen $t = 2\sqrt{5}/5$, $\cos t = -\sqrt{5}/5$, $\tan t = -2$, $\sec t = -\sqrt{5}$
**25.** $(16 - \sqrt{17})/4$ **27.** 3
**29.** **(a)** $10, 4\pi, 0$
**(b)**



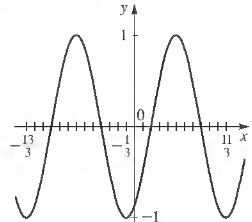

**31.** **(a)** $1, 4\pi, 0$
**(b)**



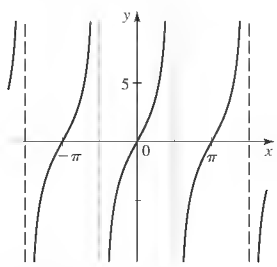

**33.** **(a)** $3, \pi, 1$
**(b)**



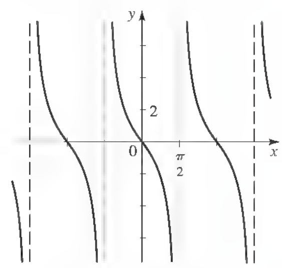

**35.** **(a)** $1, 4, -\frac{1}{3}$
**(b)**



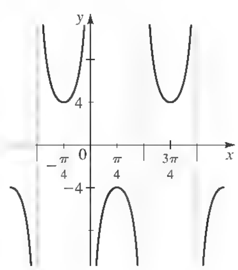

**37.** $y = 5$ sen $4x$
**39.** $y = \frac{1}{2}$ sen $2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)$
**41.** $\pi$



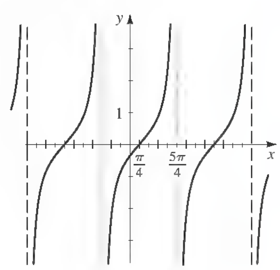

**43.** $\pi$




**45.** $\pi$

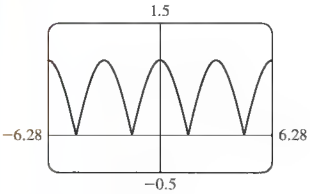



**47.** $2\pi$



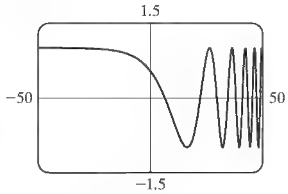
**49.** $\frac{\pi}{2}$ **51.** $\frac{\pi}{6}$

**53.** **(a)**



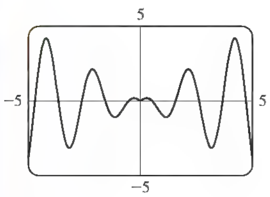

**(b)** Período $\pi$
**(c)** Par

**55.** **(a)**



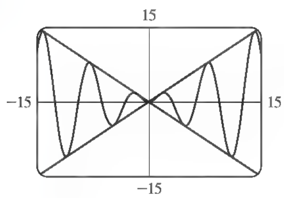

**(b)** No periódica
**(c)** Ninguna

**57.** **(a)**



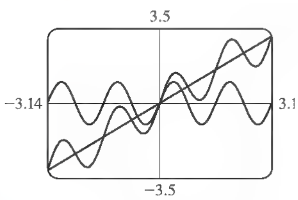

**(b)** No periódica
**(c)** Par

**59.**




$y = x \text{ sen } x$ es una función senoidal cuya gráfica está entre las de $y = x$ y $y = -x$

**61.**

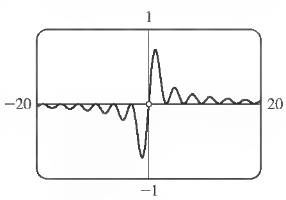



Las gráficas están relacionadas por adición gráfica.

**63.** 1.76, −1.76 **65.** 0.30, 2.84

**67.** **(a)** Impar **(b)** $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

**(c)**




**(d)** $f(x)$ se aproxima a 0
**(e)** $f(x)$ se aproxima a 0

**69.** $y = 50 \cos(16\pi t)$

**71.** $y = 4 \cos(\frac{\pi}{6} t)$

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 5 ▪ PÁGINA 426

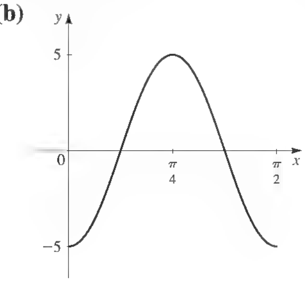
**1.** $y = -\frac{5}{6}$ **2.** **(a)** $\frac{4}{5}$ **(b)** $\frac{3}{5}$ **(c)** $\frac{4}{3}$ **(d)** $-\frac{5}{3}$

**3.** **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\sqrt{2}/2$ **(c)** $\sqrt{3}$ **(d)** 1

**4.** $\tan t = -(\text{sen } t)/\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$ **5.** $-\frac{2}{15}$

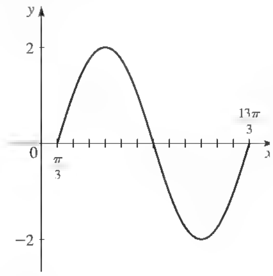
**6.** **(a)** $5, \pi/2, 0$

**(b)**

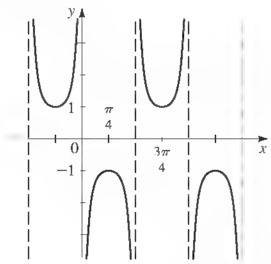



**7.** **(a)** $2, 4\pi, \pi/3$

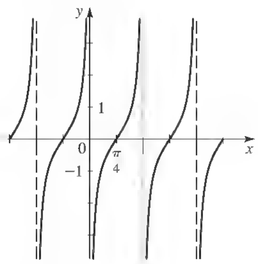
**(b)**




**8.** $\pi$



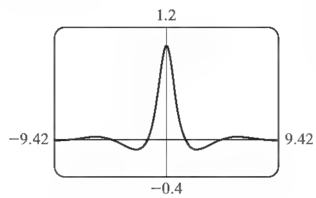

**9.** $\pi/2$




**10.** **(a)** $\pi/4$ **(b)** $5\pi/6$ **(c)** 0 **(d)** 1/2

**11.** $y = 2 \text{ sen } 2(x + \pi/3)$

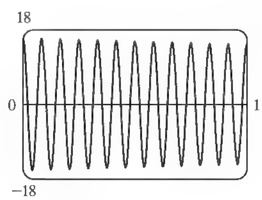
**12.** **(a)**




**(b)** Par
**(c)** Valor mínimo −0.11 cuando $x \approx \pm 2.54$, valor máximo 1 cuando $x = 0$

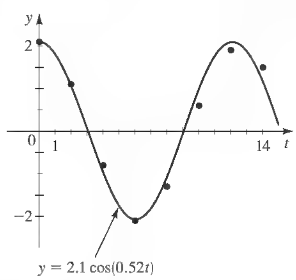
**13.** $y = 5 \text{ sen}(4\pi t)$

**14.** $y = 16e^{-0.1t} \cos 24\pi t$




## ENFOQUE SOBRE MODELADO ▪ PÁGINA 430

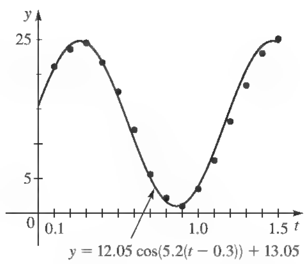
**1.** **(a)** y **(c)**




**(b)** $y = 2.1 \cos(0.52t)$

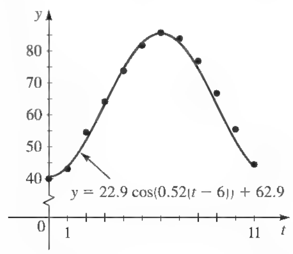
**(d)** $y = 2.05 \text{ sen}(0.50t + 1.55) - 0.01$ **(e)** La fórmula de (d) se reduce a $y = 2.05 \cos(0.50t - 0.02) - 0.01$. Igual que (b), redondeada a un decimal.

**3.** **(a)** y **(c)**



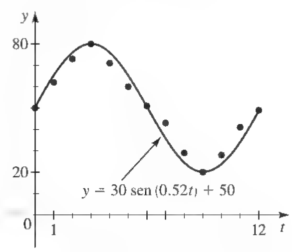

**(b)** $y = 12.05\cos(5.2(t - 0.3)) + 13.05$
**(d)** $y = 11.72\,\text{sen}(5.05t + 0.24) + 12.96$ **(e)** La fórmula de (d) se reduce a $y = 11.72\cos(5.05(t - 0.26)) + 12.96$. Cercana, pero no idéntica, a (b).

**5.** **(a)** y **(c)**



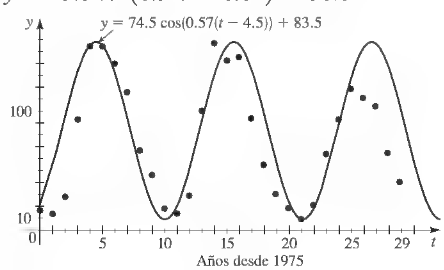

**(b)** $y = 22.9\cos(0.52(t - 6)) + 62.9$, donde $y$ es la temperatura (°F) y $t$ es meses (enero = 0)
**(d)** $y = 23.4\,\text{sen}(0.48t - 1.36) + 62.2$

**7.** **(a)** y **(c)**




**(b)** $y = 30\,\text{sen}(0.52t) + 50$ donde $y$ es la población de lechuzas en el año $t$ **(d)** $y = 25.8\,\text{sen}(0.52t - 0.02) + 50.6$

**9.** **(a)** y **(c)**




**(b)** $y = 74.5\cos(0.57(t - 4.5)) + 83.5$, donde $y$ es la cantidad promedio de manchas solares diarias, y $t$ es los años desde 1975
**(d)** $y = 67.65\,\text{sen}(0.62t - 1.65) + 74.5$

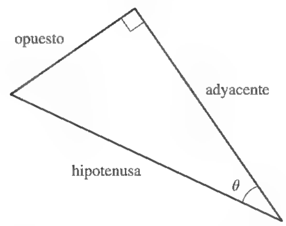
# CAPÍTULO 6

## SECCIÓN 6.1 ■ PÁGINA 440

**1.** **(a)** arc, 1 **(b)** $\pi/180$ **(c)** $180/\pi$ **2.** **(a)** $r\theta$ **(b)** $\frac{1}{2}r^2\theta$
**3.** $2\pi/5 \approx 1.257$ rad **5.** $-\pi/4 \approx -0.785$ rad
**7.** $-5\pi/12 \approx -1.309$ rad **9.** $6\pi \approx 18.850$ rad
**11.** $8\pi/15 \approx 1.676$ rad **13.** $\pi/24 \approx 0.131$ rad **15.** 210°
**17.** −225° **19.** $540/\pi \approx 171.9°$ **21.** $-216/\pi \approx -68.8°$
**23.** 18° **25.** −24° **27.** 410°, 770°, −310°, −670°
**29.** $11\pi/4$, $19\pi/4$, $-5\pi/4$, $-13\pi/4$
**31.** $7\pi/4$, $15\pi/4$, $-9\pi/4$, $-17\pi/4$ **33.** Sí **35.** Sí **37.** Sí
**39.** 13° **41.** 30° **43.** 280° **45.** $5\pi/6$ **47.** $\pi$ **49.** $\pi/4$
**51.** $55\pi/9 \approx 19.2$ **53.** 4 **55.** 4 mi **57.** 2 rad ≈ 114.6°
**59.** $36/\pi \approx 11.459$ m **61.** **(a)** 35.45 **(b)** 25 **63.** 50 $m^2$
**65.** 4 m **67.** 6 $cm^2$ **69.** 13.9 mi **71.** $330\pi$ mi ≈ 1037 mi
**73.** 1.6 millones de millas **75.** 1.15 mi
**77.** $360\pi$ $\text{pulg}^2 \approx 1130.97$ $\text{pulg}^2$ **79.** **(a)** $90\pi$ rad/min
**(b)** $1440\pi$ pulg./min ≈ 4523.9 pulg./min
**81.** $32\pi/15$ pies/s ≈ 6.7 pies/s **83.** 1039.6 mi/h **85.** 2.1 m/s
**87.** **(a)** $10\pi$ cm ≈ 31.4 cm **(b)** 5 cm **(c)** 3.32 cm **(d)** 86.8 $cm^3$

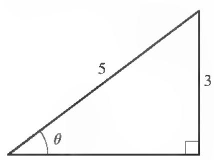
## SECCIÓN 6.2 ■ PÁGINA 448

**1.** **(a)**

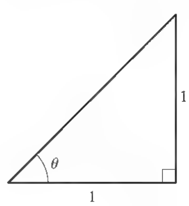



**(b)** $\dfrac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \dfrac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}, \dfrac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ **(c)** semejante

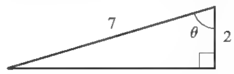
**2.** $\text{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$
**3.** $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$
**5.** $\text{sen}\,\theta = \frac{40}{41}$, $\cos\theta = \frac{9}{41}$, $\tan\theta = \frac{40}{9}$, $\csc\theta = \frac{41}{40}$, $\sec\theta = \frac{41}{9}$, $\cot\theta = \frac{9}{40}$
**7.** $\text{sen}\,\theta = 2\sqrt{13}/13$, $\cos\theta = 3\sqrt{13}/13$, $\tan\theta = \frac{2}{3}$, $\csc\theta = \sqrt{13}/2$, $\sec\theta = \sqrt{13}/3$, $\cot\theta = \frac{3}{2}$
**9.** **(a)** $3\sqrt{34}/34$, $3\sqrt{34}/34$ **(b)** $\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ **(c)** $\sqrt{34}/5$, $\sqrt{34}/5$
**11.** $\frac{25}{2}$ **13.** $13\sqrt{3}/2$ **15.** 16.51658
**17.** $x = 28\cos\theta$, $y = 28\,\text{sen}\,\theta$
**19.** $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$




**21.** $\text{sen}\,\theta = \sqrt{2}/2$, $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, $\tan\theta = 1$, $\csc\theta = \sqrt{2}$, $\sec\theta = \sqrt{2}$

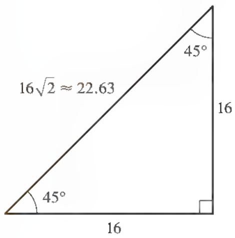



**23.** $\text{sen}\,\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\cos\theta = \frac{2}{7}$, $\tan\theta = 3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\cot\theta = 2\sqrt{5}/15$

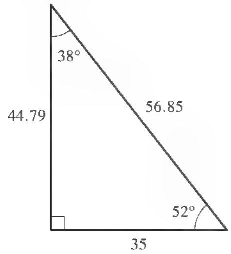



**25.** $(1 + \sqrt{3})/2$ **27.** 1 **29.** $\frac{1}{2}$

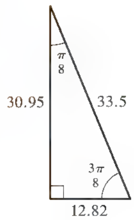
**31.**



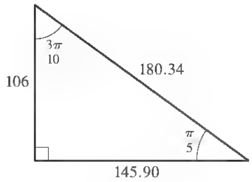

**33.**




**35.**




**37.**



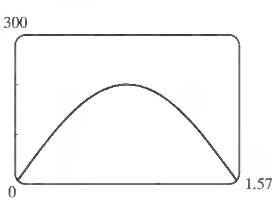

**39.** sen $\theta \approx 0.45$, cos $\theta \approx 0.89$, tan $\theta = 0.50$, csc $\theta \approx 2.24$, sec $\theta \approx 1.12$, cot $\theta = 2.00$ **41.** 230.9 **43.** 63.7
**45.** $x = 10 \tan\theta \operatorname{sen}\theta$ **47.** 1026 pies **49.** **(a)** 2100 mi **(b)** No
**51.** 19 pies **53.** 345 pies **55.** 415 pies, 152 pies **57.** 2570 pies
**59.** 5808 pies **61.** 91.7 millones de millas **63.** 3960 mi
**65.** 0.723 AU

## SECCIÓN 6.3 ■ PÁGINA 459

**1.** $y/r$, $x/r$, $y/x$ **2.** cuadrante, positivo, negativo, negativo
**3.** **(a)** 30° **(b)** 30° **(c)** 30° **5.** **(a)** 45° **(b)** 90° **(c)** 75°
**7.** **(a)** $\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $\pi/3$ **9.** **(a)** $2\pi/7$ **(b)** $0.4\pi$ **(c)** 1.4
**11.** $\frac{1}{2}$ **13.** $-\sqrt{3}/2$ **15.** $-\sqrt{3}$ **17.** 1 **19.** $-\sqrt{3}/2$
**21.** $\sqrt{3}/3$ **23.** $\sqrt{3}/2$ **25.** $-1$ **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** 2 **31.** $-1$
**33.** No definido **35.** III **37.** IV
**39.** $\tan\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$
**41.** $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$
**43.** $\sec\theta = -\sqrt{1 + \tan^2\theta}$
**45.** $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
**47.** $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
**49.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}/3$, $\sec\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\cot\theta = \sqrt{3}$
**51.** $\operatorname{sen}\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\tan\theta = -3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\sec\theta = -\frac{7}{2}$, $\cot\theta = -2\sqrt{5}/15$
**53.** **(a)** $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$ **(b)** $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}/4$ **(c)** $\frac{3}{4}$, 0.88967 **55.** 19.1
**57.** 66.1° **59.** $(4\pi/3) - \sqrt{3} \approx 2.46$
**63.** **(b)**

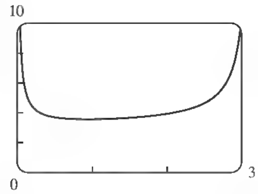
| $\theta$ | 20° | 60° | 80° | 85° |
|---|---|---|---|---|
| $h$ | 1922 | 9145 | 29,944 | 60,351 |

**65.** **(a)** $A(\theta) = 400 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$
**(b)**




**(c)** ancho = profundidad ≈ 14.14 pulg.
**67.** **(a)** $9\sqrt{3}/4$ pies ≈ 3.897 pies, $\frac{9}{16}$ pies = 0.5625 pies
**(b)** 23.982 pies, 3.462 pies

**69.** **(a)**



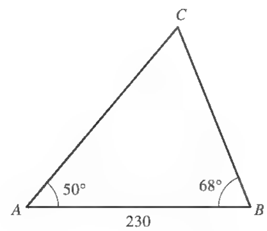

**(b)** 0.946 rad o 54°

## SECCIÓN 6.4 ■ PÁGINA 467

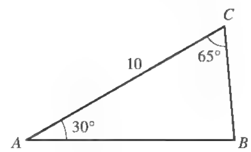
**1.** **(a)** $[-1, 1]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ **(b)** $[-1, 1]$, $[0, \pi]$
**(c)** $\mathbb{R}$, $(-\pi/2, \pi/2)$ **2.** **(a)** $\frac{8}{10}$ **(b)** $\frac{6}{10}$ **(c)** $\frac{8}{6}$ **3.** **(a)** $\pi/6$
**(b)** $5\pi/6$ **(c)** $-\pi/4$ **5.** **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/6$
**7.** 0.46677 **9.** 1.82348 **11.** 1.24905 **13.** No definida
**15.** 36.9° **17.** 34.7° **19.** 34.9° **21.** 30°, 150°
**23.** 44.4°, 135.6° **25.** 45.6° **27.** $\frac{4}{5}$ **29.** $\frac{13}{5}$ **31.** $\frac{12}{5}$
**33.** $\sqrt{1 - x^2}$ **35.** $x/\sqrt{1 - x^2}$ **37.** 72.5°, 19 pies
**39.** **(a)** $h = 2\tan\theta$ **(b)** $\theta = \tan^{-1}(h/2)$
**41.** **(a)** $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(h/680)$ **(b)** $\theta = 0.826$ rad
**43.** **(a)** 54.1° **(b)** 48.3°, 32.2°, 24.5°. La función $\operatorname{sen}^{-1}$ no está definida para valores fuera del intervalo $[-1, 1]$.

## SECCIÓN 6.5 ■ PÁGINA 473

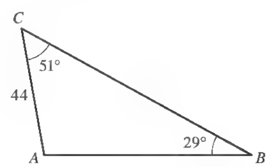
**1.** $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$ **2.** ALA, LLA **3.** 318.8 **5.** 24.8
**7.** 44° **9.** $\angle C = 114°$, $a \approx 51$, $b \approx 24$ **11.** $\angle A = 44°$, $\angle B = 68°$, $a \approx 8.99$ **13.** $\angle C = 62°$, $a \approx 200$, $b \approx 242$




**15.** $\angle B = 85°$, $a \approx 5$, $c \approx 9$




**17.** $\angle A = 100°$, $a \approx 89$, $c \approx 71$




**19.** $\angle B \approx 30°$, $\angle C \approx 40°$, $c \approx 19$ **21.** No hay solución
**23.** $\angle A_1 \approx 125°$, $\angle C_1 \approx 30°$, $a_1 \approx 49$; $\angle A_2 \approx 5°$, $\angle C_2 \approx 150°$, $a_2 \approx 5.6$ **25.** No hay solución
**27.** $\angle A_1 \approx 57.2°$, $\angle B_1 \approx 93.8°$, $b_1 \approx 30.9$; $\angle A_2 \approx 122.8°$, $\angle B_2 \approx 28.2°$, $b_2 \approx 14.6$
**29.** **(a)** 91.146° **(b)** 14.427° **33.** **(a)** 1018 mi **(b)** 1017 mi
**35.** 219 pies **37.** 55.9 m **39.** 175 pies **41.** 192 m
**43.** 0.427 AU, 1.119 AU

## SECCIÓN 6.6 ■ PÁGINA 480

**1.** $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ **2.** SSS, SAS **3.** 28.9 **5.** 47
**7.** 29.89° **9.** 15 **11.** $\angle A \approx 39.4°$, $\angle B \approx 20.6°$, $c \approx 24.6$

**13.** $\angle A \approx 48°$, $\angle B \approx 79°$, $c \approx 3.2$
**15.** $\angle A \approx 50°$, $\angle B \approx 73°$, $\angle C \approx 57°$
**17.** $\angle A_1 \approx 83.6°$, $\angle C_1 \approx 56.4°$, $a_1 \approx 193$;
$\angle A_2 \approx 16.4°$, $\angle C_2 \approx 123.6$, $a_2 \approx 54.9$ **19.** No hay tal triángulo
**21.** 2 **23.** 25.4 **25.** 89.2° **27.** 24.3 **29.** 54 **31.** 26.83
**33.** 5.33 **35.** 40.77 **37.** 3.85 cm$^2$ **39.** 2.30 mi **41.** 23.1 mi
**43.** 2179 mi **45. (a)** 62.6 mi **(b)** S 18.2° E **47.** 96°
**49.** 211 pies **51.** 3835 pies **53.** \$165,554

## REPASO DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 483

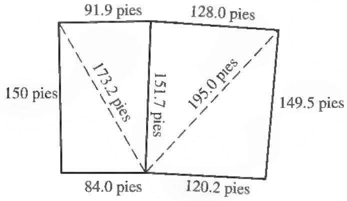
**1. (a)** $\pi/3$ **(b)** $11\pi/6$ **(c)** $3\pi/4$ **(d)** $\pi/2$
**3. (a)** 450° **(b)** −30° **(c)** 405° **(d)** $(558/\pi)° \approx 177.6°$
**5.** 8 m **7.** 82 pies **9.** 0.619 rad ≈ 35.4° **11.** 18,151 pies$^2$
**13.** $300\pi$ rad/min ≈ 942.5 rad/min,
7539.8 pulg./min = 628.3 pies/min
**15.** $\text{sen}\,\theta = 5/\sqrt{74}$, $\cos\theta = 7/\sqrt{74}$, $\tan\theta = \frac{5}{7}$,
$\csc\theta = \sqrt{74}/5$, $\sec\theta = \sqrt{74}/7$, $\cot\theta = \frac{7}{5}$
**17.** $x \approx 3.83$, $y \approx 3.21$ **19.** $x \approx 2.92$, $y \approx 3.11$
**21.** $A = 70°$, $a \approx 2.819$, $b \approx 1.026$
**23.** $A \approx 16.3°$, $C \approx 73.7°$, $c = 24$
**25.** $a = \cot\theta$, $b = \csc\theta$ **27.** 48 m **29.** 1076 mi **31.** $\sqrt{2}/2$
**33.** 1 **35.** $-\sqrt{3}/3$ **37.** $-\sqrt{2}/2$ **39.** $2\sqrt{3}/3$ **41.** $-\sqrt{3}$
**43.** $\text{sen}\,\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$,
$\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$ **45.** 60°
**47.** $\tan\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}/\cos\theta$
**49.** $\tan^2\theta = \text{sen}^2\theta/(1 - \text{sen}^2\theta)$
**51.** $\text{sen}\,\theta = \sqrt{7}/4$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = 4\sqrt{7}/7$, $\cot\theta = 3\sqrt{7}/7$
**53.** $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
**55.** $-\sqrt{5}/5$ **57.** 1 **59.** $\pi/3$ **61.** $2/\sqrt{21}$ **63.** $x/\sqrt{1 + x^2}$
**65.** $\theta = \cos^{-1}(x/3)$ **67.** 5.32 **69.** 148.07 **71.** 9.17
**73.** 54.1° o 125.9° **75.** 80.4° **77.** 77.3 mi **79.** 3.9 mi
**81.** 32.12

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 6 ■ PÁGINA 487

**1.** $11\pi/6$, $-3\pi/4$ **2.** 240°, −74.5°
**3. (a)** $240\pi$ rad/min ≈ 753.98 rad/min
**(b)** 12,063.7 pies/min = 137 mi/h **4. (a)** $\sqrt{2}/2$
**(b)** $\sqrt{3}/3$ **(c)** 2 **(d)** 1 **5.** $(26 + 6\sqrt{13})/39$
**6.** $a = 24\,\text{sen}\,\theta$, $b = 24\cos\theta$ **7.** $(4 - 3\sqrt{2})/4$
**8.** $-\frac{13}{12}$ **9.** $\tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ **10.** 19.6 pies
**11. (a)** $\theta = \tan^{-1}(x/4)$ **(b)** $\theta = \cos^{-1}(3/x)$ **12.** $\frac{40}{41}$
**13.** 9.1 **14.** 250.5 **15.** 8.4 **16.** 19.5 **17.** 78.6° **18.** 40.2°
**19. (a)** 15.3 m$^2$ **(b)** 24.3 m **20. (a)** 129.9° **(b)** 44.9
**21.** 554 pies

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 490

**1.** 1.41 mi **3.** 14.3 m **5. (c)** 2349.8 pies
**7.**




# CAPÍTULO 7

## SECCIÓN 7.1 ■ PÁGINA 498

**1.** todos; **2.** $\cos(-x) = \cos x$ **3.** $\text{sen}\,t$ **5.** $\tan\theta$ **7.** $-1$
**9.** $\csc u$ **11.** $\tan\theta$ **13.** 1 **15.** $\cos y$ **17.** $\text{sen}^2 x$ **19.** $\sec x$
**21.** $2\sec u$ **23.** $\cos^2 x$ **25.** $\cos\theta$

**27. (a)** $\text{Lado Izq} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x} = \text{Lado Der}$

**29.** $\text{Lado Izq} = \text{sen}\,\theta \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \text{Lado Der}$

**31.** $\text{Lado Izq} = \cos u \dfrac{1}{\cos u} \cot u = \text{Lado Der}$

**33.** $\text{Lado Izq} = \text{sen}\,B + \cos B \dfrac{\cos B}{\text{sen}\,B}$
$= \dfrac{\text{sen}^2 B + \cos^2 B}{\text{sen}\,B} = \dfrac{1}{\text{sen}\,B} = \text{Lado Der}$

**35.** $\text{Lado Izq} = -\dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha = \dfrac{-\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$
$= \dfrac{-1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{Lado Der}$

**37.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}$
$= \dfrac{1}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta} = \text{Lado Der}$

**39.** $\text{Lado Izq} = 1 - \cos^2\beta = \text{sen}^2\beta = \text{Lado Der}$

**41.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{(\text{sen}\,x + \cos x)^2}{(\text{sen}\,x + \cos x)(\text{sen}\,x - \cos x)} = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\text{sen}\,x - \cos x}$
$= \dfrac{(\text{sen}\,x + \cos x)(\text{sen}\,x - \cos x)}{(\text{sen}\,x - \cos x)(\text{sen}\,x - \cos x)} = \text{Lado Der}$

**43.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{\frac{1}{\cos t} - \cos t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \dfrac{\cos t}{\cos t} = \dfrac{1 - \cos^2 t}{1} = \text{Lado Der}$

**45.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = \text{Lado Der}$

**47.** $\text{Lado Izq} = \cot x \cos x + \cot x - \csc x \cos x - \csc x$
$= \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} - \dfrac{1}{\text{sen}\,x} = \dfrac{\cos^2 x - 1}{\text{sen}\,x}$
$= \dfrac{-\text{sen}^2 x}{\text{sen}\,x} = \text{Lado Der}$

**49.** $\text{Lado Izq} = \text{sen}^2 x\left(1 + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}\right) = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = \text{Lado Der}$

**51.** $\text{Lado Izq} = 2(1 - \text{sen}^2 x) - 1 = 2 - 2\,\text{sen}^2 x - 1 = \text{Lado Der}$

**53.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} \cdot \dfrac{1 + \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$
$= \dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha(1 + \cos\alpha)} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha(1 + \cos\alpha)} = \text{Lado Der}$

**55.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$
$= \dfrac{\text{sen}^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \text{Lado Der}$

**57.** $\text{Lado Izq} = \dfrac{\text{sen}\,x - 1}{\text{sen}\,x + 1} \cdot \dfrac{\text{sen}\,x + 1}{\text{sen}\,x + 1} = \dfrac{\text{sen}^2 x - 1}{(\text{sen}\,x + 1)^2} = \text{Lado Der}$

**59.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t\cos t + \cos^2 t}{\operatorname{sen} t\cos t}$

$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}{\operatorname{sen} t\cos t} + \dfrac{2\operatorname{sen} t\cos t}{\operatorname{sen} t\cos t} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t\cos t} + 2$

$=$ Lado Der

**61.** Lado Izq $= \dfrac{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}} \cdot \dfrac{\cos^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u} =$ Lado Der

**63.** Lado Izq $= \dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} \cdot \dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$= \dfrac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x} =$ Lado Der

**65.** Lado Izq $= (\sec v - \tan v) \cdot \dfrac{\sec v + \tan v}{\sec v + \tan v}$

$= \dfrac{\sec^2 v - \tan^2 v}{\sec v + \tan v} =$ Lado Der

**67.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x\operatorname{sen} x}}$

$= (\operatorname{sen} x + \cos x)\dfrac{\cos x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} =$ Lado Der

**69.** Lado Izq $= \dfrac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{\cos x} - 1} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen} x\cos x} = \dfrac{\cos x(1 - \cos x)}{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}$

$= \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$ Lado Der

**71.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} - \dfrac{\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u}(1 - \cos^2 u)$

$=$ Lado Der

**73.** Lado Izq $= (\sec^2 x - \tan^2 x)(\sec^2 x + \tan^2 x) =$ Lado Der

**75.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\cos\theta - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{\frac{\operatorname{sen}^2\theta - 1}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta - 1)} =$ Lado Der

**77.** Lado Izq $= \dfrac{-\operatorname{sen}^2 t + \tan^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = -1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$

$= -1 + \sec^2 t =$ Lado Der

**79.** Lado Izq $= \dfrac{\sec x - \tan x + \sec x + \tan x}{(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)}$

$= \dfrac{2\sec x}{\sec^2 x - \tan^2 x} =$ Lado Der

**81.** Lado Izq $= \tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x = \tan^2 x + 2 + \cot^2 x$

$= (\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) =$ Lado Der

**83.** Lado Izq $= \dfrac{\frac{1}{\cos u} - 1}{\frac{1}{\cos u} + 1} \cdot \dfrac{\cos u}{\cos u} =$ Lado Der

**85.** Lado Izq $= \dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

$= \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x =$ Lado Der

**87.** Lado Izq $= \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

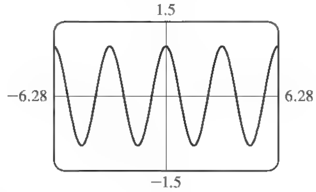
$= \dfrac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 =$ Lado Der

**89.** Lado Izq $= \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^4 = \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x\cos x}\right)^4$

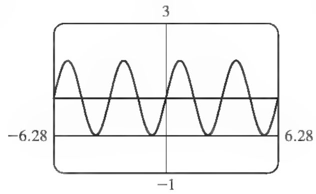
$= \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x\cos x}\right)^4 =$ Lado Der

**91.** $\tan\theta$ **93.** $\tan\theta$ **95.** $3\cos\theta$

**97.** Sí




**99.** No




## SECCIÓN 7.2 ■ PÁGINA 505

**1.** adición; $\operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$

**2.** sustracción; $\cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

**3.** $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **5.** $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **7.** $2 - \sqrt{3}$ **9.** $-\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

**11.** $\sqrt{3} - 2$ **13.** $-\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **15.** $\sqrt{2}/2$ **17.** $\frac{1}{2}$ **19.** $\sqrt{3}$

**21.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - u)}{\cos(\frac{\pi}{2} - u)} = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos u - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u}{\cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u}$

$= \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u} =$ Lado Der

**23.** Lado Izq $= \dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - u)} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u}$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen} u} =$ Lado Der

**25.** Lado Izq $= \operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{2} - \cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$ Lado Der

**27.** Lado Izq $= \operatorname{sen} x\cos\pi - \cos x\operatorname{sen}\pi =$ Lado Der

**29.** Lado Izq $= \dfrac{\tan x - \tan\pi}{1 + \tan x\tan\pi} =$ Lado Der

**31.** Lado Izq $= \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} x\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x =$ Lado Der

**33.** Lado Izq $= \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$

$-(\operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y) =$ Lado Der

**35.** Lado Izq $= \dfrac{1}{\tan(x - y)} = \dfrac{1 + \tan x\tan y}{\tan x - \tan y}$

$= \dfrac{1 + \frac{1}{\cot x}\frac{1}{\cot y}}{\frac{1}{\cot x} - \frac{1}{\cot y}} \cdot \dfrac{\cot x\cot y}{\cot x\cot y} =$ Lado Der

**37.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \dfrac{\operatorname{sen} x\cos y - \cos x\operatorname{sen} y}{\cos x\cos y}$

$=$ Lado Der

**39.** Lado Izq $= \dfrac{\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y - (\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y)}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

$= \dfrac{2 \cos x \operatorname{sen} y}{2 \cos x \cos y} =$ Lado Der

**41.** Lado Izq $= \operatorname{sen}((x + y) + z)$

$= \operatorname{sen}(x + y) \cos z + \cos(x + y) \operatorname{sen} z$

$= \cos z[\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y]$

$+ \operatorname{sen} z[\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y] =$ Lado Der

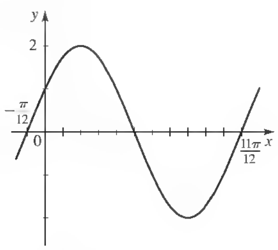
**43.** $\dfrac{\sqrt{1 - x^2} + xy}{\sqrt{1 + y^2}}$ **45.** $\dfrac{x - y}{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{1 + y^2}}$

**47.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ **49.** $\dfrac{3 - 2\sqrt{14}}{\sqrt{7} + 6\sqrt{2}}$ **51.** $\frac{1}{10}(3 + 4\sqrt{3})$

**53.** $2\sqrt{5}/65$ **55.** $2 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **57.** $5\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{7\pi}{4}\right)$

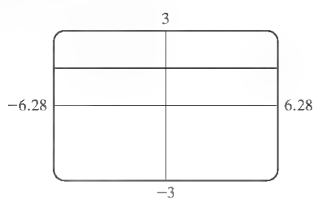
**59. (a)** $g(x) = 2 \operatorname{sen} 2\left(x + \dfrac{\pi}{12}\right)$

**(b)**




**63.** $\tan \gamma = \frac{17}{6}$

**65. (a)**




$\operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

**67.** $\pi/2$ **69. (b)** $k = 10\sqrt{3}, \phi = \pi/6$

## SECCIÓN 7.3 ■ PÁGINA 514

**1.** Ángulo doble; $2 \operatorname{sen} x \cos x$

**2.** Medio ángulo; $\pm\sqrt{(1 - \cos x)/2}$

**3.** $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{120}{119}$ **5.** $-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ **7.** $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$ **9.** $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}$

**11.** $\frac{1}{2}(\frac{3}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x)$

**13.** $\frac{1}{16}(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x)$

**15.** $\frac{1}{32}(\frac{3}{4} - \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 8x)$

**17.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ **19.** $\sqrt{2} - 1$ **21.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

**23.** $\sqrt{2} - 1$ **25.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ **27.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

**29. (a)** sen 36° **(b)** sen $6\theta$ **31. (a)** cos 68° **(b)** cos $10\theta$

**33. (a)** tan 4° **(b)** tan $2\theta$ **37.** $\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10, \frac{1}{3}$

**39.** $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})/6}, \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})/6}, 3 + 2\sqrt{2}$

**41.** $\sqrt{6}/6, -\sqrt{30}/6, -\sqrt{5}/5$

**43.** $\dfrac{2x}{1 + x^2}$ **45.** $\sqrt{\dfrac{1 - x}{2}}$ **47.** $\frac{336}{625}$ **49.** $\frac{8}{7}$ **51.** $\frac{7}{25}$

**53.** $-8\sqrt{3}/49$ **55.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x)$ **57.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x)$

**59.** $\frac{3}{2}(\cos 11x + \cos 3x)$ **61.** $2 \operatorname{sen} 4x \cos x$

**63.** $2 \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x$ **65.** $-2 \cos \frac{9}{2}x \operatorname{sen} \frac{5}{2}x$ **67.** $(\sqrt{2} + \sqrt{3})/2$

**69.** $\frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)$ **71.** $\sqrt{2}/2$ **73.** Lado Izq $= \cos(2 \cdot 5x) =$ Lado Der

**75.** Lado Izq $= \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$

$= 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x =$ Lado Der

**77.** Lado Izq $= \dfrac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{2(2 \operatorname{sen} x \cos x)(\cos 2x)}{\operatorname{sen} x}$

$=$ Lado Der

**79.** Lado Izq $= \dfrac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x)} = \dfrac{2}{\tan x + \cot x}$

$= \dfrac{2}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$

$= 2 \operatorname{sen} x \cos x =$ Lado Der

**81.** Lado Izq $= \tan(2x + x) = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

$= \dfrac{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\tan x}$

$= \dfrac{2 \tan x + \tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x - 2 \tan x \tan x} =$ Lado Der

**83.** Lado Izq $= (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

$= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x =$ Lado Der

**85.** Lado Izq $= \dfrac{2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x}{2 \cos 3x \cos 2x} = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} =$ Lado Der

**87.** Lado Izq $= \dfrac{2 \operatorname{sen} 5x \cos 5x}{2 \operatorname{sen} 5x \cos 4x} =$ Lado Der

**89.** Lado Izq $= \dfrac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}$

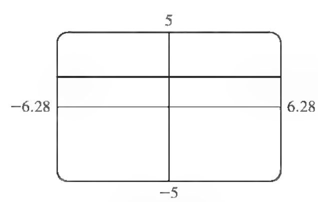
$= \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)} =$ Lado Der

**95.** Lado Izq $= \dfrac{(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x) + (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x) + \operatorname{sen} 3x}{(\cos x + \cos 5x) + (\cos 2x + \cos 4x) + \cos 3x}$

$= \dfrac{2 \operatorname{sen} 3x \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 3x \cos x + \operatorname{sen} 3x}{2 \cos 3x \cos 2x + 2 \cos 3x \cos x + \cos 3x}$

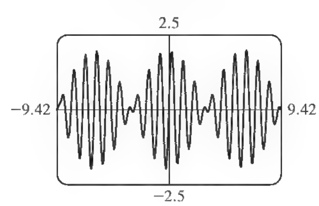
$= \dfrac{\operatorname{sen} 3x(2 \cos 2x + 2 \cos x + 1)}{\cos 3x(2 \cos 2x + 2 \cos x + 1)} =$ Lado Der

**97. (a)**

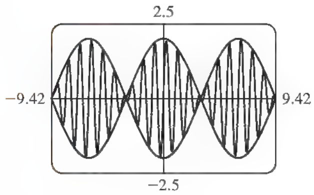



$\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

**99. (a)**

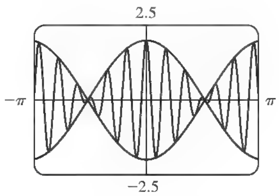


**(c)**




La gráfica $y = f(x)$ está entre las otras dos gráficas.

**101. (a)** $P(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$ **(b)** $Q(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$
**107. (a)** y **(c)**




La gráfica de $f$ está entre las gráficas de $y = 2\cos t$ y $y = -2\cos t$. Entonces, la intensidad del sonido varía entre $y = \pm 2\cos t$.

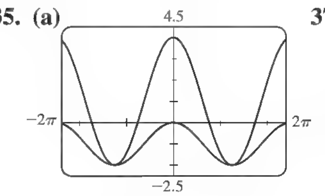
## SECCIÓN 7.4 ■ PÁGINA 522

**1.** número infinito **2.** no, número infinito
**3.** 0.3; $x \approx -9.7, -6.0, -3.4, 0.3, 2.8, 6.6, 9.1$
**4. (a)** 0.30, 2.84 **(b)** $2\pi, 0.30 + 2k\pi, 2.84 + 2k\pi$
**5.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
**7.** $(2k+1)\pi$ **9.** $1.32 + 2k\pi, 4.97 + 2k\pi$
**11.** $-0.47 + 2k\pi, 3.61 + 2k\pi$
**13.** $-\frac{\pi}{3} + k\pi$ **15.** $1.37 + k\pi$
**17.** $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi;$
$-7\pi/6, -5\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 17\pi/6, 19\pi/6$
**19.** $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi;$
$-7\pi/4, -5\pi/4, \pi/4, 3\pi/4, 9\pi/4, 11\pi/4$
**21.** $1.29 + 2k\pi, 5.00 + 2k\pi; -5.00, -1.29, 1.29, 5.00, 7.57, 11.28$
**23.** $-1.47 + k\pi; -7.75, -4.61, -1.47, 1.67, 4.81, 7.95$
**25.** $(2k+1)\pi$ **27.** $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$
**29.** $0.20 + 2k\pi, 2.94 + 2k\pi$ **31.** $-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi$
**33.** $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi$ **35.** $-1.11 + k\pi, 1.11 + k\pi$
**37.** $\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi$
**39.** $-1.11 + k\pi, 1.11 + k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$
**41.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ **43.** $0.34 + 2k\pi, 2.80 + 2k\pi$
**45.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ **47.** No hay solución **49.** $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
**51.** $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$
**53.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$ **55.** $k\pi, 0.73 + 2k\pi, 2.41 + 2k\pi$ **57.** 44.95°
**59. (a)** 0° **(b)** 60°, 120° **(c)** 90°, 270° **(d)** 180°

## SECCIÓN 7.5 ■ PÁGINA 528

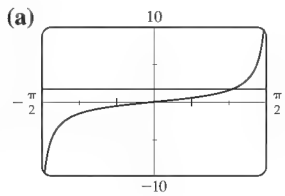
**1.** $\operatorname{sen} x = 0, k\pi$ **2.** $\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x\cos x = 0$, $\operatorname{sen} x = 0, 1 + 2\cos x = 0$ **3.** $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
**5.** $(2k+1)\pi, 1.23 + 2k\pi, 5.05 + 2k\pi$
**7.** $k\pi, 0.72 + 2k\pi, 5.56 + 2k\pi$ **9.** $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
**11.** $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, (2k+1)\pi$ **13.** $(2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
**15.** $2k\pi$ **17. (a)** $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$
**(b)** $\pi/9, 5\pi/9, 7\pi/9, 11\pi/9, 13\pi/9, 17\pi/9$
**19. (a)** $\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi$ **(b)** $\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$
**21. (a)** $\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$ **(b)** $5\pi/18, 11\pi/18, 17\pi/18, 23\pi/18, 29\pi/18, 35\pi/18$ **23. (a)** $4k\pi$ **(b)** 0
**25. (a)** $4\pi + 6k\pi, 5\pi + 6k\pi$ **(b)** Ninguna
**27. (a)** $0.62 + \frac{k\pi}{2}$ **(b)** 0.62, 2.19, 3.76, 5.33
**29. (a)** $k\pi$ **(b)** $0, \pi$ **31. (a)** $\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi$
**(b)** $\pi/6, \pi/4, 5\pi/6, 7\pi/6, 5\pi/4, 11\pi/6$
**33. (a)** $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi$
**(b)** $\pi/6, 3\pi/4, 5\pi/6, 7\pi/4$

**35. (a)**




$(\pm 3.14, -2)$
**(b)** $((2k+1)\pi, -2)$

**37. (a)**




$(1.04, 1.73)$
**(b)** $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \sqrt{3}\right)$

**39.** $\pi/8, 3\pi/8, 5\pi/8, 7\pi/8, 9\pi/8, 11\pi/8, 13\pi/8, 15\pi/8$
**41.** $\pi/3, 2\pi/3$ **43.** $\pi/2, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$ **45.** 0
**47.** $0, \pi$ **49.** $0, \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3, 5\pi/3$ **51.** $\pi/6, 3\pi/2$
**53.** $k\pi/2$ **55.** $\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$
**57.** $0, \pm 0.95$ **59.** 1.92 **61.** $\pm 0.71$
**63.** 0.94721° o 89.05279° **65. (a)** día 34 (3 de febrero), día 308 (4 de noviembre) **(b)** 275 días

## REPASO DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 530

**1.** Lado Izq $= \operatorname{sen}\theta\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) = \cos\theta + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$
$= \frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} =$ Lado Der

**3.** Lado Izq $= (1 - \text{sen}^2 x)\csc x - \csc x = \csc x - \text{sen}^2 x \csc x - \csc x$

$= -\text{sen}^2 x \dfrac{1}{\text{sen}\, x} =$ Lado Der

**5.** Lado Izq $= \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \dfrac{\tan^2 x}{\text{sen}^2 x} = \cot^2 x - \dfrac{1}{\cos^2 x} =$ Lado Der

**7.** Lado Izq $= \dfrac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}(1 - \text{sen}\, x)} = \dfrac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} =$ Lado Der

**9.** Lado Izq $= \text{sen}^2 x \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} + \cos^2 x \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \text{sen}^2 x$

$=$ Lado Der

**11.** Lado Izq $= \dfrac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1} = \dfrac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{2\cos^2 x} = \dfrac{2\,\text{sen}\, x}{2\cos x}$

$=$ Lado Der

**13.** Lado Izq $= \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x} = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x} =$ Lado Der

**15.** Lado Izq $= \frac{1}{2}[\cos((x + y) - (x - y))$

$- \cos((x + y) + (x - y))]$

$= \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x)$

$= \frac{1}{2}[1 - 2\,\text{sen}^2 y - (1 - 2\,\text{sen}^2 x)]$

$= \frac{1}{2}(2\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}^2 y) =$ Lado Der

**17.** Lado Izq $= 1 + \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x} = 1 + \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

$= 1 + \dfrac{1}{\cos x} - 1 =$ Lado Der

**19.** Lado Izq $= \cos^2 \frac{x}{2} - 2\,\text{sen}\, \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \text{sen}^2 \frac{x}{2}$

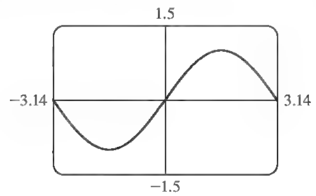
$= 1 - \text{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) =$ Lado Der

**21.** Lado Izq $= \dfrac{2\,\text{sen}\, x \cos x}{\text{sen}\, x} - \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}$

$= 2\cos x - 2\cos x + \dfrac{1}{\cos x} =$ Lado Der

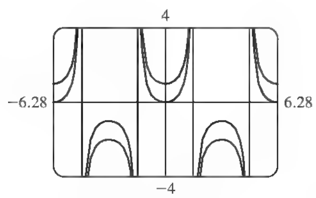
**23.** Lado Izq $= \dfrac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} =$ Lado Der

**25. (a)**



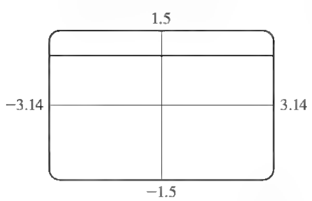

**(b)** Sí

**27. (a)**




**(b)** No

**29. (a)**




$2\,\text{sen}^2 3x + \cos 6x = 1$

**31.** 0.85, 2.29 **33.** $0, \pi$ **35.** $\pi/6, 5\pi/6$ **37.** $\pi/3, 5\pi/3$
**39.** $2\pi/3, 4\pi/3$ **41.** $\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4, 4\pi/3, 5\pi/3, 7\pi/4$
**43.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 7\pi/6, 3\pi/2, 11\pi/6$ **45.** $\pi/6$

**47.** 1.18 **49. (a)** 63.4° **(b)** No **(c)** 90° **51.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

**53.** $\sqrt{2} - 1$ **55.** $\sqrt{2}/2$ **57.** $\sqrt{2}/2$ **59.** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$

**61.** $2\dfrac{\sqrt{10} + 1}{9}$ **63.** $\frac{2}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ **65.** $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})/6}$

**67.** $-\dfrac{12\sqrt{10}}{31}$ **69.** $\dfrac{2x}{1 - x^2}$ **71. (a)** $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{10}{x}\right)$

**(b)** 286.4 pies

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 7 ■ PÁGINA 532

**1. (a)** Lado Izq $= \dfrac{\text{sen}\, \theta}{\cos \theta}\,\text{sen}\, \theta + \cos \theta = \dfrac{\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta}$

$=$ Lado Der

**(b)** Lado Izq $= \dfrac{\tan x}{1 - \cos x} \cdot \dfrac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{\tan x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$

$= \dfrac{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}(1 + \cos x)}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}\, x} \cdot \dfrac{1 + \cos x}{\cos x} =$ Lado Der

**(c)** Lado Izq $= \dfrac{2\tan x}{\sec^2 x} = \dfrac{2\,\text{sen}\, x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 2\,\text{sen}\, x \cos x$

$=$ Lado Der

**2.** $\tan \theta$ **3. (a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ **(c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

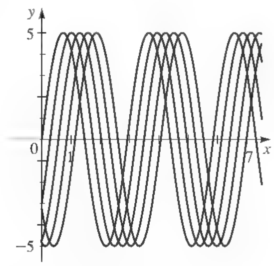
**4.** $(10 - 2\sqrt{5})/15$
**5. (a)** $\frac{1}{2}(\text{sen}\, 8x - \text{sen}\, 2x)$ **(b)** $-2\cos \frac{7}{2}x\, \text{sen}\, \frac{3}{2}x$ **6.** $-2$
**7. (a)** 0.34, 2.80 **(b)** $\pi/3, \pi/2, 5\pi/3$ **(c)** $2\pi/3, 4\pi/3$
**(d)** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6, 3\pi/2$ **8.** 0.58, 2.56, 3.72, 5.70 **9.** $\frac{1519}{1681}$

**10.** $\dfrac{\sqrt{1 - x^2} - xy}{\sqrt{1 + y^2}}$

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 536

**1. (a)** $y = -5\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$

**(b)**




Sí, es una onda viajera.

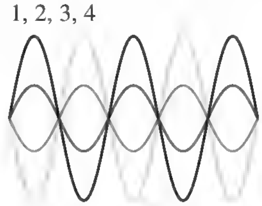
**(c)** $v = \pi/4$

**3.** $y(x, t) = 2.7\,\text{sen}(0.68x - 4.10t)$

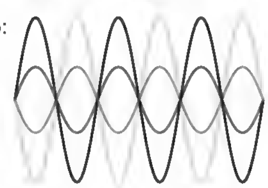
**5.** $y(x, t) = 0.6\,\text{sen}(\pi x)\cos(40\pi t)$

**7. (a)** 1, 2, 3, 4

**(b)** 5:



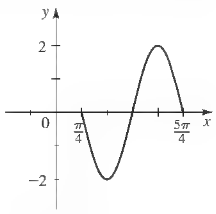
6:



**(c)** $880\pi$ **(d)** $y(x, t) = \operatorname{sen} t \cos(880\pi t)$; $y(x, t) = \operatorname{sen}(2t)\cos(880\pi t)$; $y(x, t) = \operatorname{sen}(3t)\cos(880\pi t)$; $y(x, t) = \operatorname{sen}(4t)\cos(880\pi t)$

## EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO PARA LOS CAPÍTULOS 5,6 Y 7 ■ PÁGINA 539

**1.** **(a)** $\sqrt{5}/3$ **(b)** $-2/3$ **(c)** $-\sqrt{5}/2$ **(d)** $3\sqrt{3}/5$
**2.** **(a)** $2\sqrt{10}/7$ **(b)** $7/3$ **(c)** $3\sqrt{10}/20$
**3.** **(a)** $-\sqrt{3}/2$ **(b)** $-1$ **(c)** $2\sqrt{3}/3$ **(d)** $-1$
**4.** $\operatorname{sen} t = -24/25$, $\tan t = -24/7$, $\cot t = -7/24$, $\sec t = 25/7$, $\csc t = -25/24$ **5.** **(a)** $2, \pi, \pi/4$ **(b)**

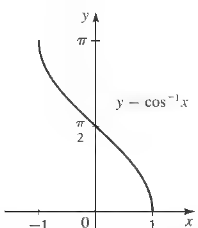


**6.** $y = 3\cos\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})$ **7.** **(a)** $h(t) = 45 - 40\cos 8\pi t$ **(b)** $2\sqrt{19} \approx 8.7$ cm **8.** **(a)** 7.2 **(b)** 92.9°

**9.** **(a)**
$$\text{Lado Izq} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\tan\theta(\sec\theta + 1)} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\tan\theta(\sec\theta + 1)} = \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta(\sec\theta + 1)} = \text{Lado Der}$$

**(b)**
$$\text{Lado Der} = 1 - (1 - 2\operatorname{sen}^2 2\theta) = 2\operatorname{sen}^2 2\theta = 2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 = \text{Lado Izq}$$

**10.** $2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$ **11.** **(a)** Dominio $[-1, 1]$, rango $[0, \pi]$



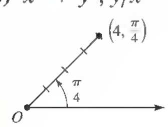

**(b)** $5\pi/6$ **(c)** $\sqrt{1 - x^2}/x$ **12.** $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$

# CAPÍTULO 8

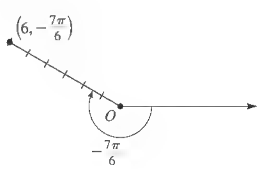
## SECCIÓN 8.1 ■ PÁGINA 546

**1.** coordenada; $(1, 1)$, $(\sqrt{2}, \pi/4)$ **2.** **(a)** $r\cos\theta$, $r\operatorname{sen}\theta$ **(b)** $x^2 + y^2$, $y/x$

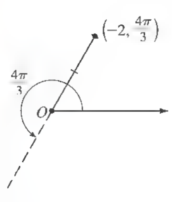
**3.**



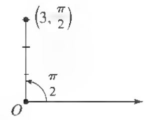

**5.**




**7.**

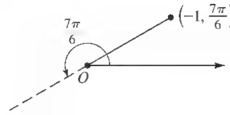



**9.**



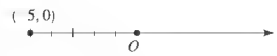

$\left(-3, \frac{3\pi}{2}\right), \left(3, \frac{5\pi}{2}\right)$

**11.**




$\left(-1, -\frac{5\pi}{6}\right), \left(1, \frac{\pi}{6}\right)$

**13.**



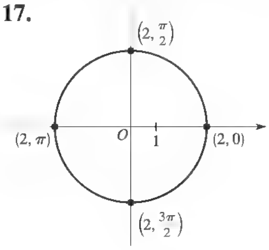

$(-5, 2\pi), (5, \pi)$

**15.** $Q$ **17.** $Q$ **19.** $P$ **21.** $P$ **23.** $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$ **25.** $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ **27.** $(2\sqrt{3}, 2)$ **29.** $(1, -1)$ **31.** $(-5, 0)$ **33.** $(3\sqrt{6}, -3\sqrt{2})$ **35.** $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ **37.** $(4, \pi/4)$ **39.** $(5, \tan^{-1}\frac{4}{3})$ **41.** $(6, \pi)$ **43.** $\theta = \pi/4$ **45.** $r = \tan\theta\sec\theta$ **47.** $r = 4\sec\theta$ **49.** $x^2 + y^2 = 49$ **51.** $x = 0$ **53.** $x = 6$ **55.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ **57.** $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$ **59.** $(x^2 + y^2 - 2y)^2 = x^2 + y^2$ **61.** $y - x = 1$ **63.** $x^2 - 3y^2 + 16y - 16 = 0$ **65.** $x^2 + y^2 = \frac{y}{x}$ **67.** $y = \pm\sqrt{3}x$

## SECCIÓN 8.2 ■ PÁGINA 553

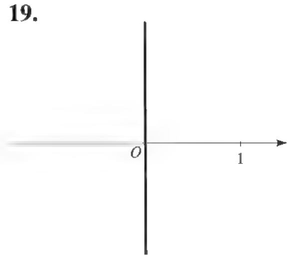
**1.** circunferencias, rayos **2.** **(a)** satisface **(b)** circunferencia, 3, polo; recta, polo, 1 **3.** VI **5.** II **7.** I **9.** Simétrica respecto a $\theta = \pi/2$
**11.** Simétrica respecto al eje polar
**13.** Simétrica respecto a $\theta = \pi/2$
**15.** Los tres tipos de simetría

**17.**



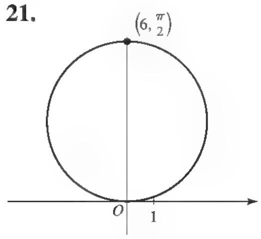

$x^2 + y^2 = 4$

**19.**



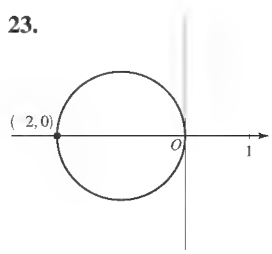
$x = 0$

**21.**

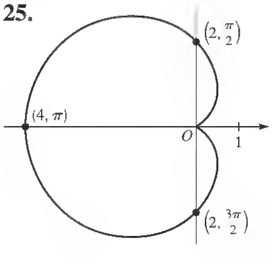



$x^2 + (y - 3)^2 = 9$

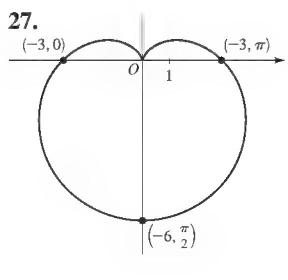
**23.**



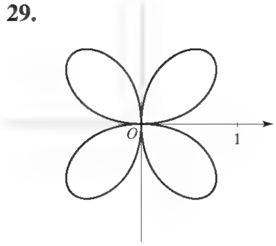

**25.**



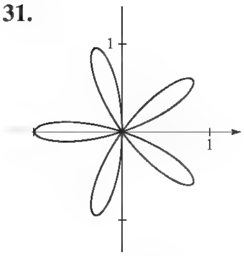

**27.**



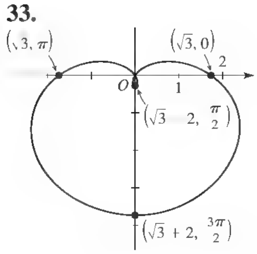
**29.**



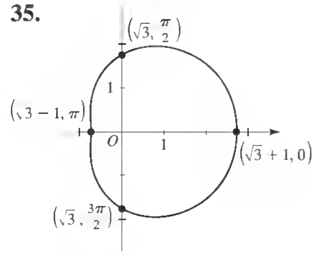
**31.**



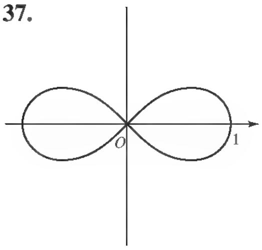
**33.**



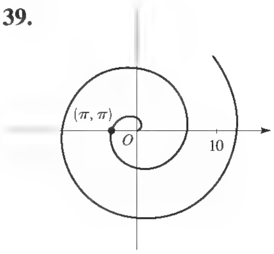

**35.**



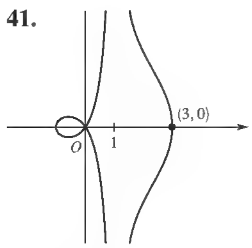

**37.**



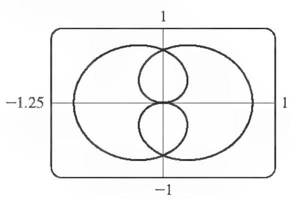
**39.**



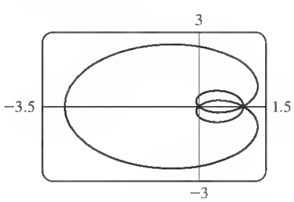

**41.**




**43.** $0 \le \theta \le 4\pi$

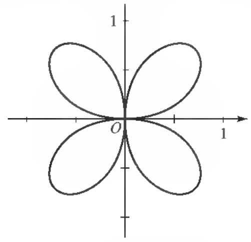


**45.** $0 \le \theta \le 4\pi$

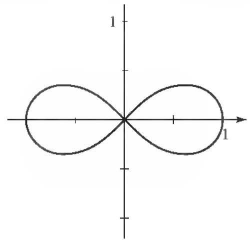


**47.** La gráfica de $r = 1 + \text{sen}\, n\theta$ tiene $n$ lazos. **49.** IV **51.** III

**53.**

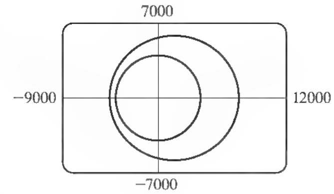


**55.**



**57.** $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right), \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

**59.** **(a)** Elíptica



**(b)** $\pi$; 540 mi

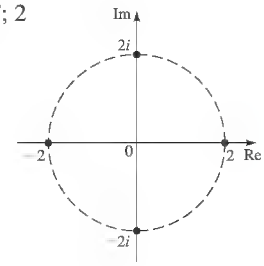
## SECCIÓN 8.3 ■ PÁGINA 562

**1.** real, imaginaria, $(a, b)$ **2.** **(a)** $\sqrt{a^2 + b^2}, b/a$
**(b)** $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

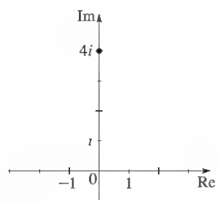
**3.** **(a)** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $\sqrt{3} + i$

**(b)** $1 + i$, $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

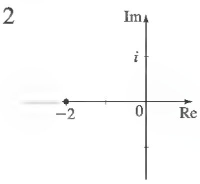
**4.** $n$; cuatro; 2, $2i$, $-2$, $-2i$; 2



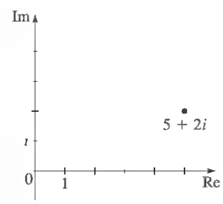
**5.** 4



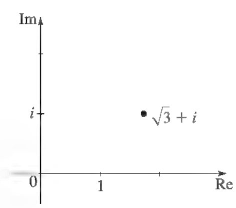
**7.** 2



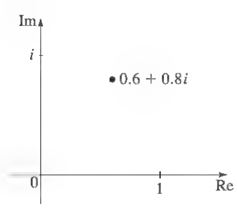
**9.** $\sqrt{29}$



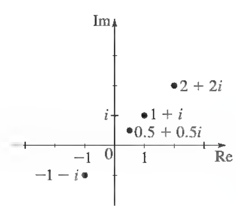

**11.** 2



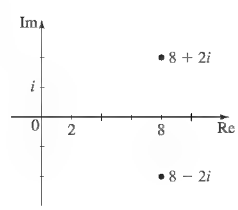

**13.** 1



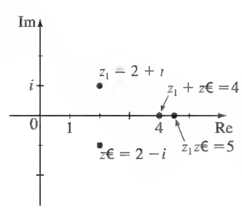

**15.**

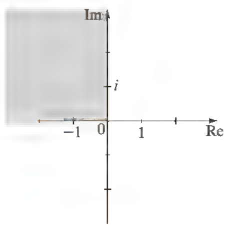


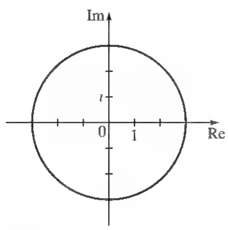

**17.**

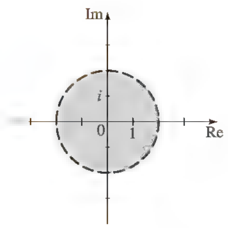


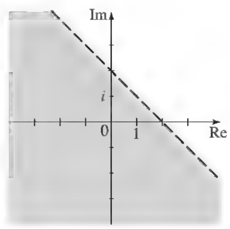

**19.**



**21.** 


**23.** 


**25.** 


**27.** 


**29.** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ **31.** $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4}\right)$

**33.** $4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{6}\right)$ **35.** $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

**37.** $5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$ **39.** $8\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{6}\right)$

**41.** $20(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$ **43.** $5\left[\cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)\right]$

**45.** $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **47.** $8\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

**49.** $\sqrt{5}\left[\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

**51.** $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

**53.** $z_1z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{4\pi}{3}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{3}$

**55.** $z_1z_2 = 15\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{5}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

**57.** $z_1z_2 = 8(\cos 150° + i\,\text{sen}\,150°)$

$z_1/z_2 = 2(\cos 90° + i\,\text{sen}\,90°)$

**59.** $z_1z_2 = 100(\cos 350° + i\,\text{sen}\,350°)$

$z_1/z_2 = \frac{4}{25}(\cos 50° + i\,\text{sen}\,50°)$

**61.** $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$

$z_1z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

**63.** $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$z_1z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{12}\right)$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{6}\right)$

**65.** $z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 4(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)$

$z_1z_2 = 20\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

**67.** $z_1 = 20(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi)$

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_1z_2 = 40\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 10\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$

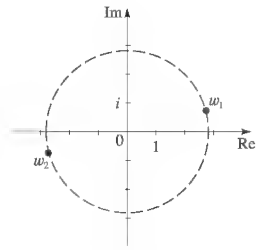
$\dfrac{1}{z_1} = \frac{1}{20}(\cos\pi - i\,\text{sen}\,\pi)$

**69.** $-1024$ **71.** $512(-\sqrt{3} + i)$ **73.** $-1$ **75.** $4096$

**77.** $8(-1 + i)$ **79.** $\frac{1}{2048}(-\sqrt{3} - i)$

**81.** $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right)$,

$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{12}\right)$

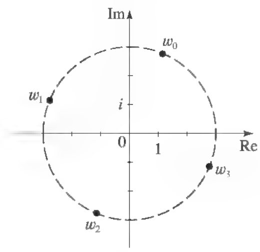



**83.** $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{8}\right)$,

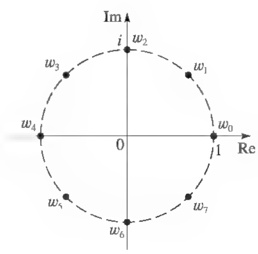
$3\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{8}\right)$,

$3\left(\cos\dfrac{11\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{11\pi}{8}\right)$,

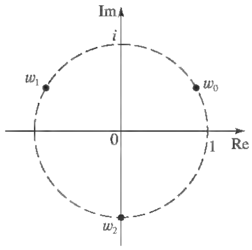
$3\left(\cos\dfrac{15\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\dfrac{15\pi}{8}\right)$



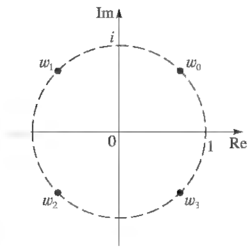

**85.** $\pm 1,\ \pm i,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$



**87.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i, -i$




**89.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$



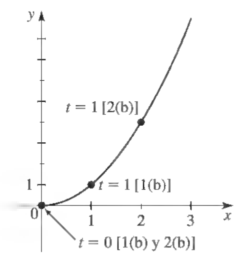

**91.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

**93.** $2\left(\cos\dfrac{\pi}{18} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{18}\right), 2\left(\cos\dfrac{13\pi}{18} + i \operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{18}\right),$
$2\left(\cos\dfrac{25\pi}{18} + i \operatorname{sen}\dfrac{25\pi}{18}\right)$

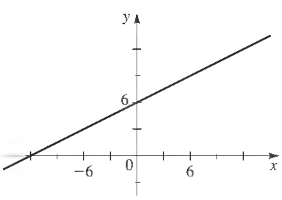
**95.** $2^{1/6}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}\right), 2^{1/6}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{12}\right),$
$2^{1/6}\left(\cos\dfrac{21\pi}{12} + i \operatorname{sen}\dfrac{21\pi}{12}\right)$

## SECCIÓN 8.4 ■ PÁGINA 569

**1.** **(a)** parámetro **(b)** (0, 0), (1, 1) **(c)** $x^2$; parábola
**2.** **(a)** Verdadero **(b)** (0, 0), (2, 4) **(c)** $x^2$; trayectoria

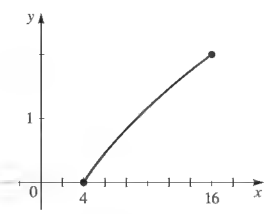



**3.** **(a)**



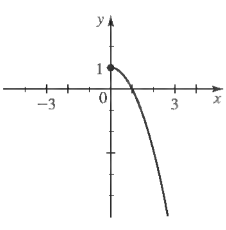

**(b)** $x - 2y + 12 = 0$

**5.** **(a)**



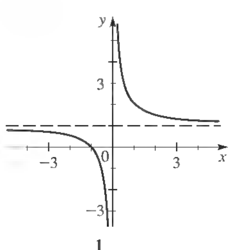

**(b)** $x = (y + 2)^2$

**7.** **(a)**



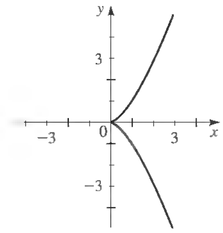

**(b)** $x = \sqrt{1 - y}$

**9.** **(a)**



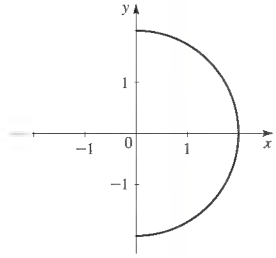

**(b)** $y = \dfrac{1}{x} + 1$

**11.** **(a)**



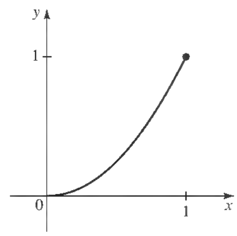

**(b)** $x^3 = y^2$

**13.** **(a)**



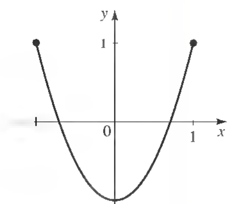

**(b)** $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0$

**15.** **(a)**



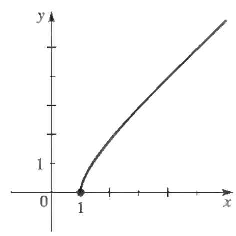

**(b)** $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$

**17.** **(a)**



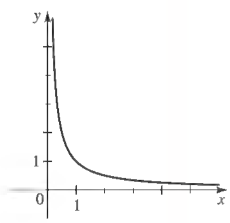

**(b)** $y = 2x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1$

**19.** **(a)**



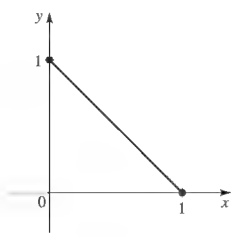

**(b)** $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1, y \geq 0$

**21.** **(a)**




**(b)** $xy = 1, x \geq 0$

**23.** **(a)**




**(b)** $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$

**25.** 3, (3, 0), en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $2\pi$

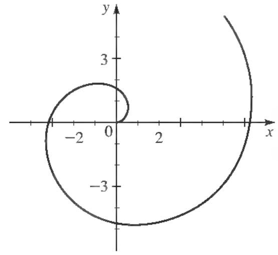
**27.** 1, (0, 1), en el sentido de las manecillas del reloj, $\pi$

**29.** $x = 4 + t, y = -1 + \frac{1}{2}t$

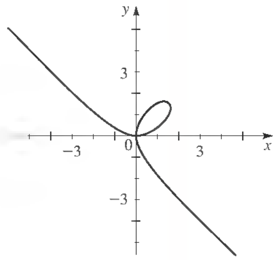
**31.** $x = 6 + t, y = 7 + t$

**33.** $x = a \cos t, y = a \operatorname{sen} t$

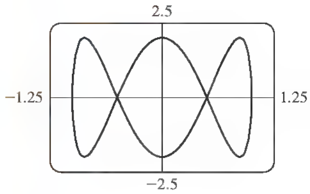
**37.**



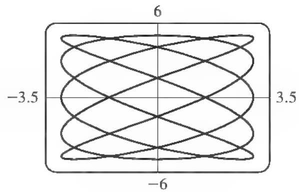

**39.**



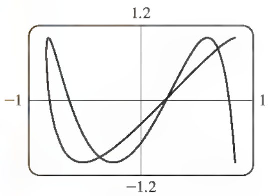
**43.**



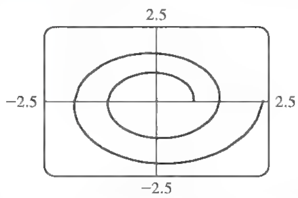

**45.**




**47.**

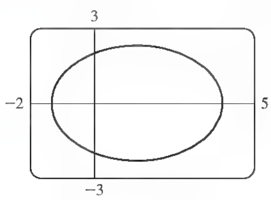



**49. (a)** $x = 2^{t/12} \cos t,\ y = 2^{t/12} \operatorname{sen} t$
**(b)**



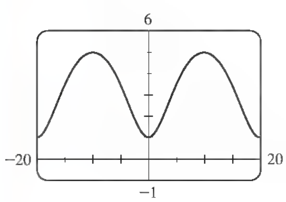

**51. (a)** $x = \dfrac{4 \cos t}{2 - \cos t},\ y = \dfrac{4 \operatorname{sen} t}{2 - \cos t}$

**(b)**

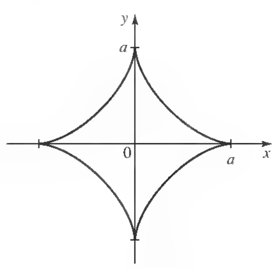



**53.** III **55.** II

**57.**

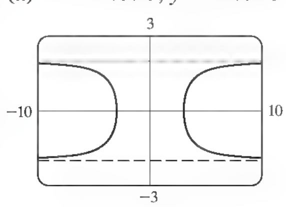



**59. (b)** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



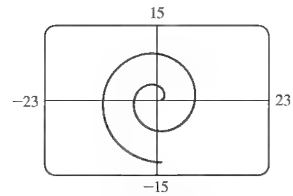

**61.** $x = a(\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cot \theta),\ y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

**63. (a)** $x = a \sec \theta,\ y = b \operatorname{sen} \theta$
**(b)**



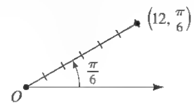

**65.** $y = a - a \cos\left(\dfrac{x + \sqrt{2ay - y^2}}{a}\right)$

**67. (b)**



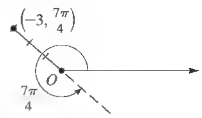

## REPASO DEL CAPÍTULO 8 ▪ PÁGINA 572

**1. (a)**



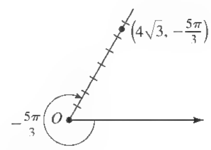

**(b)** $(6\sqrt{3}, 6)$

**3. (a)**



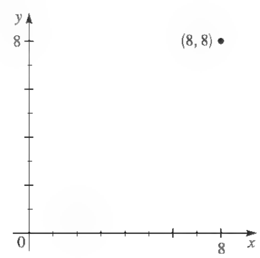

**(b)** $\left(\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

**5. (a)**




**(b)** $(2\sqrt{3}, 6)$

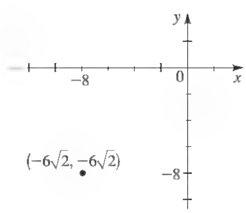
**7. (a)**




**(b)** $\left(8\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

**(c)** $\left(-8\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

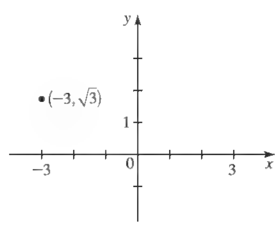
**9. (a)**




**(b)** $\left(12, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

**(c)** $\left(-12, \dfrac{\pi}{4}\right)$

**11. (a)**

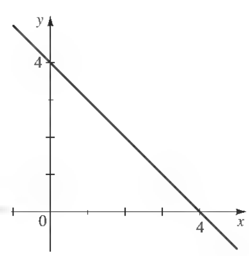



**(b)** $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

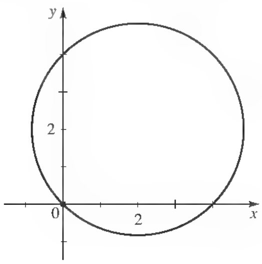
**(c)** $\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{6}\right)$

**13. (a)** $r = \dfrac{4}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$

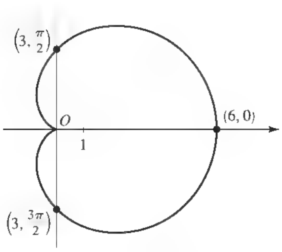
**(b)**



**15. (a)** $r = 4(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$
**(b)**

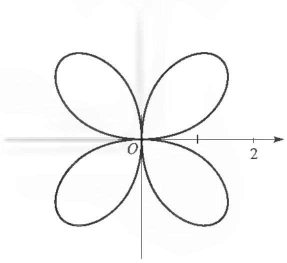



**17. (a)**



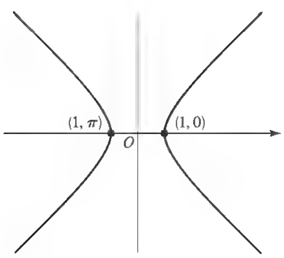

**(b)** $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

**19. (a)**



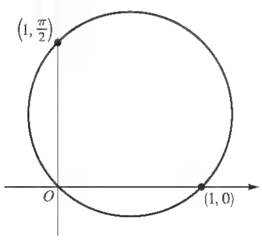

**(b)** $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$

**21. (a)**



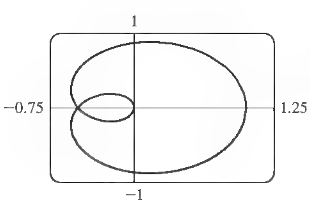

**(b)** $x^2 - y^2 = 1$

**23. (a)**

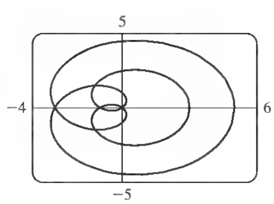



**(b)** $x^2 + y^2 = x + y$

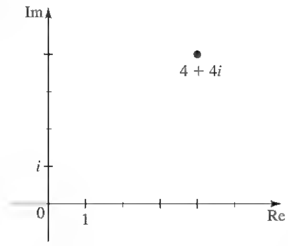
**25.** $0 \le \theta \le 6\pi$




**27.** $0 \le \theta \le 6\pi$

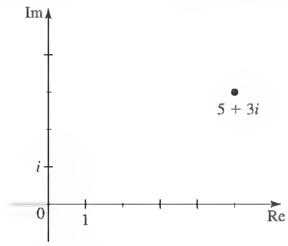



**29. (a)**



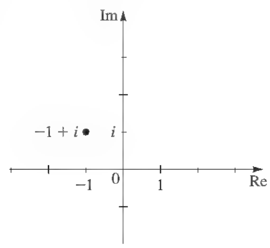

**(b)** $4\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}$ **(c)** $4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

**31. (a)**




**(b)** $\sqrt{34}, \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ **(c)** $\sqrt{34}\left[\cos\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{3}{5}\right)\right]$

**33. (a)**

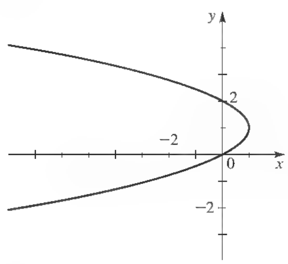



**(b)** $\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}$ **(c)** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

**35.** $8(-1 + i\sqrt{3})$ **37.** $-\frac{1}{32}(1 + i\sqrt{3})$ **39.** $\pm 2\sqrt{2}(1 - i)$

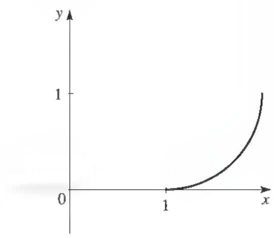
**41.** $\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

**43. (a)**



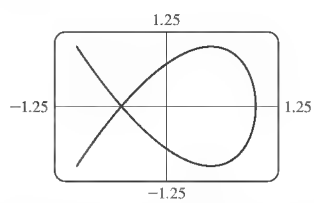

**(b)** $x = 2y - y^2$

**45. (a)**




**(b)** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $1 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$

**47.**

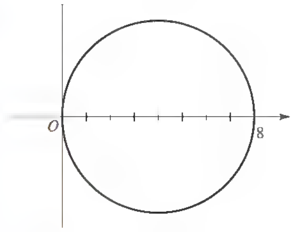



**49.** $x = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta), y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta + \tan\theta)$

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 8 ■ PÁGINA 574

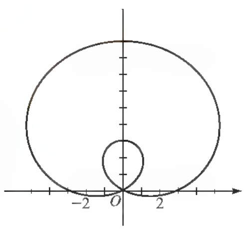
**1. (a)** $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ **(b)** $(4\sqrt{3}, 5\pi/6), (-4\sqrt{3}, 11\pi/6)$

**2. (a)** circunferencia

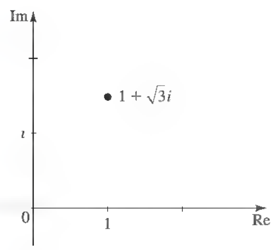



**(b)** $(x - 4)^2 + y^2 = 16$

**3.** caracol



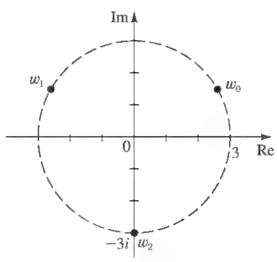

**4. (a)**



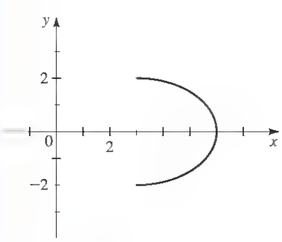

**(b)** $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $-512$

**5.** $-8, \sqrt{3} + i$

**6.** $-3i, 3\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$




**7. (a)**




**(b)** $\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 3$

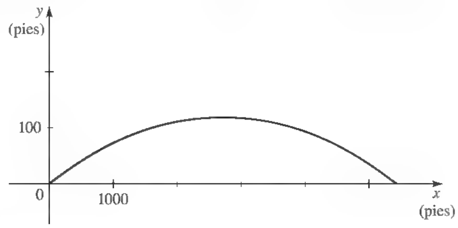
**8.** $x = 3 + t, y = 5 + 2t$

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 577

**1.** $y = -\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 + (\tan\theta)x$

**3. (a)** 5.45 s **(b)** 118.7 pies **(c)** 5426.5 pies

**(d)**

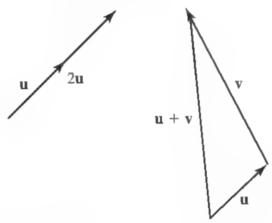



**5.** $\frac{v_0^2\operatorname{sen}^2\theta}{2g}$ **7.** No, $\theta \approx 23°$

# CAPÍTULO 9

## SECCIÓN 9.1 ■ PÁGINA 587

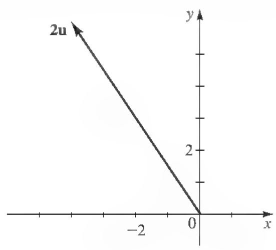
**1. (a)** $A$, $B$



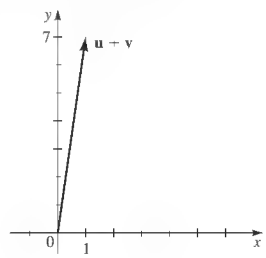

**(b)** $(2, 1), (4, 3), \langle 2, 2\rangle, \langle -3, 6\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle -1, 8\rangle$

**2. (a)** $\sqrt{a^2 + b^2}, 2\sqrt{2}$ **(b)** $(|\mathbf{w}|\cos\theta, |\mathbf{w}|\operatorname{sen}\theta)$

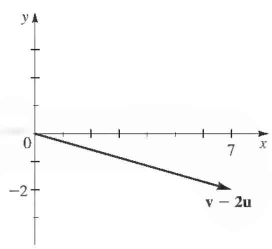
**3.**




**5.**

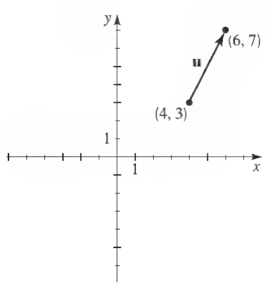



**7.**

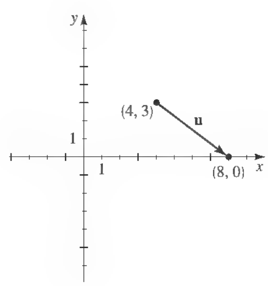



**9.** $\langle 3, 3\rangle$ **11.** $\langle 3, -1\rangle$ **13.** $\langle 5, 7\rangle$ **15.** $\langle -4, -3\rangle$ **17.** $\langle 0, 2\rangle$

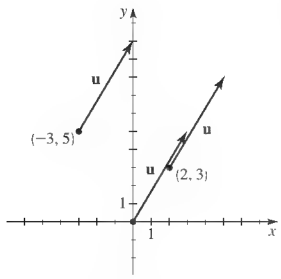
**19.**



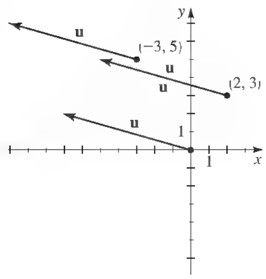

**21.**



**23.**



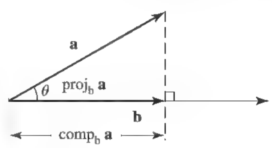

**25.**




**27.** $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **29.** $3\mathbf{i}$ **31.** $\langle 4, 14\rangle, \langle -9, -3\rangle, \langle 5, 8\rangle, \langle -6, 17\rangle$
**33.** $\langle 0, -2\rangle, \langle 6, 0\rangle, \langle -2, -1\rangle, \langle 8, -3\rangle$
**35.** $4\mathbf{i}$, $9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $5\mathbf{i}$ $2\mathbf{j}$, $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
**37.** $\sqrt{5}, \sqrt{13}, 2\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{13}, \sqrt{26}, \sqrt{10}, \sqrt{5}$ · $\sqrt{13}$
**39.** $\sqrt{101}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{101}, \sqrt{2}, \sqrt{73}, \sqrt{145}, \sqrt{101}$ $2\sqrt{2}$
**41.** $20\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ **43.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
**45.** $4 \cos 10°\mathbf{i} + 4 \text{ sen } 10°\mathbf{j} \approx 3.94\mathbf{i} + 0.69\mathbf{j}$
**47.** 5, 53.13° **49.** 13, 157.38° **51.** 2, 60° **53.** $15\sqrt{3}, -15$
**55.** $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **57.** S 84.26° O **59.** **(a)** $40\mathbf{j}$ **(b)** $425\mathbf{i}$
**(c)** $425\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$ **(d)** 427 mi/h, N 84.6° E
**61.** 794 mi/h, N 26.6° O **63.** **(a)** $10\mathbf{i}$ **(b)** $10\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j}$
**(c)** $20\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j}$ **(d)** 26.5 mi/h, N 49.1° E
**65.** **(a)** $22.8\mathbf{i} + 7.4\mathbf{j}$ **(b)** 7.4 mi/h, 22.8 mi/h
**67.** **(a)** $\langle 5, -3\rangle$ **(b)** $\langle -5, 3\rangle$ **69.** **(a)** $-4\mathbf{j}$ **(b)** $4\mathbf{j}$
**71.** **(a)** $\langle -7.57, 10.61\rangle$ **(b)** $\langle 7.57, -10.61\rangle$
**73.** $\mathbf{T}_1 \approx -56.5\mathbf{i} + 67.4\mathbf{j}, \mathbf{T}_2 \approx 56.5\mathbf{i} + 32.6\mathbf{j}$

## SECCIÓN 9.2 ■ PÁGINA 595

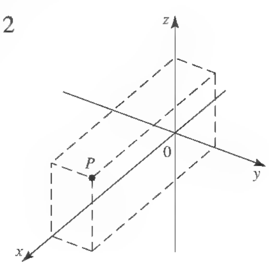
**1.** $a_1a_2 + b_1b_2$ número real o escalar **2.** $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$; perpendicular
**3.** **(a)** $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ **(b)** $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\right)\mathbf{b}$




**4.** $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$
**5.** **(a)** 2 **(b)** 45° **7.** **(a)** 13 **(b)** 56° **9.** **(a)** ·1 **(b)** 97°
**11.** **(a)** $5\sqrt{3}$ **(b)** 30° **13.** **(a)** 1 **(b)** 86° **15.** Sí **17.** No
**19.** Sí **21.** 9 **23.** −5 **25.** $-\frac{12}{5}$ **27.** −24
**29.** **(a)** $\langle 1, 1\rangle$ **(b)** $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle -3, 3\rangle$
**31.** **(a)** $\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ **(b)** $\mathbf{u}_1 = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
**33.** **(a)** $\langle -\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\rangle$ **(b)** $\mathbf{u}_1 = \langle -\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{28}{5}, \frac{21}{5}\rangle$
**35.** −28 **37.** 25 **45.** 16 pies-lb **47.** 8660 pies-lb **49.** 1164 lb
**51.** 23.6°

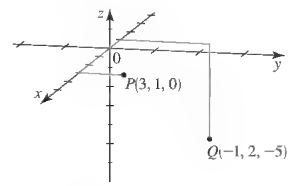
## SECCIÓN 9.3 ■ PÁGINA 602

**1.** $x, y, z$; (5, 2, 3); $y = 2$



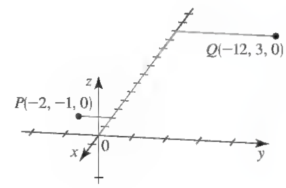

**2.** $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;
$\sqrt{38}$; $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$

**3.** **(a)**



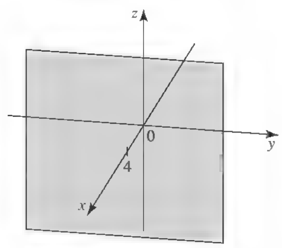

**(b)** $\sqrt{42}$

**5.** **(a)**

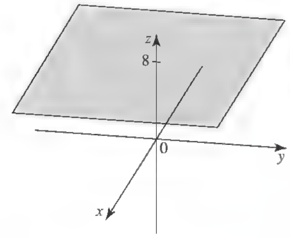



**(b)** $2\sqrt{29}$

**7.** Plano paralelo al plano $yz$




**9.** Plano paralelo al plano $xy$




**11.** $(x$ $2)^2 + (y + 5)^2 + (z$ $3)^2 = 25$
**13.** $(x$ $3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 6$
**15.** Centro: (5, −1, −4), radio: $\sqrt{51}$
**17.** Centro: (6, 1, 0), radio: $\sqrt{37}$
**19.** **(a)** Círculo, centro: (0, 2, −10), radio: $3\sqrt{11}$
**(b)** Círculo, centro: (4, 2, 10), radio: $5\sqrt{3}$ **21.** **(a)** 3

## SECCIÓN 9.4 ■ PÁGINA 608

**1.** unitario, $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$; $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$; 4, (−2), 4, ⟨0, 7, −24⟩ **2.** $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$; 0; 0, perpendicular **3.** $\langle -1, -1, 5\rangle$ **5.** $\langle -6, -2, 0\rangle$
**7.** (5, 4, −1) **9.** (1, 0, −1) **11.** 3 **13.** $5\sqrt{2}$
**15.** $\langle 2, -3, 2\rangle, \langle 2, -11, 4\rangle, \langle 6, -23, \frac{19}{2}\rangle$
**17.** $\mathbf{i} - 2\mathbf{k}, \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, 3\mathbf{i} + \frac{7}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **19.** $12\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
**21.** $3\mathbf{i}$ $3\mathbf{j}$ **23.** **(a)** ⟨3, 1, 2⟩ **(b)** $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ $2\mathbf{k}$ **25.** 4
**27.** 1 **29.** Sí **31.** No **33.** 116.4° **35.** 100.9°
**37.** $\alpha \approx 65°, \beta \approx 56°, \gamma = 45°$ **39.** $\alpha \approx 73°, \beta \approx 65°, \gamma \approx 149°$
**41.** $\pi/4$ **43.** 125° **47.** **(a)** $-7\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 25\mathbf{k}$ **(b)** $25\sqrt{2}$

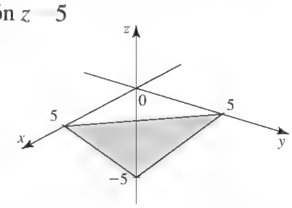
## SECCIÓN 9.5 ■ PÁGINA 615

**1.** $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{k}$, $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
**2.** perpendicular, perpendicular **3.** $9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
**5.** 0 **7.** $-4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **9.** **(a)** $\langle 0, 2, 2\rangle$ **(b)** $\left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$
**11.** **(a)** $14\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ **(b)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$
**13.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **15.** 100 **17.** $\langle 0, 2, 2\rangle$ **19.** $\langle 10, -10, 0\rangle$ **21.** $4\sqrt{6}$
**23.** $\frac{5\sqrt{14}}{2}$ **25.** $\sqrt{14}$ **27.** $18\sqrt{3}$ **29.** **(a)** 0 **(b)** Sí

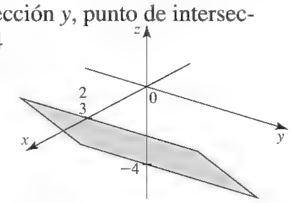
**31.** **(a)** 55 **(b)** No, 55 **33.** **(a)** $-2$ **(b)** No, 2
**35.** **(a)** $2{,}700{,}000\sqrt{3}$ **(b)** 4677 litros

## SECCIÓN 9.6 ■ PÁGINA 619

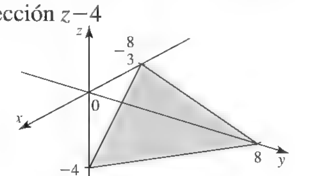
**1.** paramétricas; $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$
**2.** $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
**3.** $x = 1 + 3t, y = 2t, z = -2 - 3t$
**5.** $x = 3, y = 2 - 4t, z = 1 + 2t$
**7.** $x = 1 + 2t, y = 0, z = -2 - 5t$
**9.** $x = 1 + t, y = -3 + 4t, z = 2 - 3t$
**11.** $x = 1 - t, y = 1 + t, z = 2t$
**13.** $x = 3 + 4t, y = 7 - 4t, z = -5$
**15.** **(a)** $x + y - z = 5$ **(b)** punto de intersección $x$ 5, punto de intersección $y$ 5, punto de intersección $z$ $-5$




**17.** **(a)** $6x - z = 4$ **(b)** punto de intersección $\frac{2}{3}$, no hay punto de intersección $y$, punto de intersección z $-4$




**19.** **(a)** $3x - y + 2z = -8$ **(b)** punto de intersección $x$ $-\frac{8}{3}$, punto de intersección $y$ 8, punto de intersección $z$ $-4$

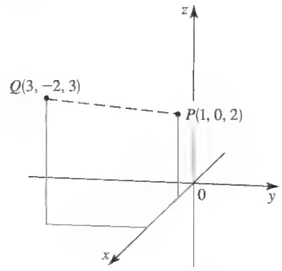



**21.** $5x - 3y - z = 35$ **23.** $x - 3y = 2$ **25.** $2x - 3y - 9z = 0$
**27.** $x = 2t, y = 5t, z = 4 - 4t$ **29.** $x = 2, y = -1 + t, z = 5$
**31.** $12x + 4y + 3z = 12$ **33.** $x - 2y + 4z = 0$

## REPASO DEL CAPÍTULO 9 ■ PÁGINA 621

**1.** $\sqrt{13}, \langle 6, 4\rangle, \langle -10, 2\rangle, \langle -4, 6\rangle, \langle -22, 7\rangle$
**3.** $\sqrt{5}, 3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + 3\mathbf{j}, 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
**5.** $\langle 3, -4\rangle$ **7.** 4, 120° **9.** $\langle 10, 10\sqrt{3}\rangle$
**11.** **(a)** $(4.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) \times 10^4$ **(b)** $4.8 \times 10^4$ lb, N 85.2° E
**13.** 5, 25, 60 **15.** $2\sqrt{2}$, 8, 0 **17.** Sí **19.** No, 45°
**21.** **(a)** $\dfrac{17\sqrt{37}}{37}$ **(b)** $\langle \frac{102}{37}, -\frac{17}{37}\rangle$
**(c)** $\mathbf{u}_1 = \langle \frac{102}{37}, -\frac{17}{37}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{9}{37}, \frac{54}{37}\rangle$
**23.** **(a)** $-\dfrac{14\sqrt{97}}{97}$ **(b)** $-\frac{56}{97}\mathbf{i} + \frac{126}{97}\mathbf{j}$
**(c)** $\mathbf{u}_1 = -\frac{56}{97}\mathbf{i} + \frac{126}{97}\mathbf{j}, \mathbf{u}_2 = \frac{153}{97}\mathbf{i} + \frac{68}{97}\mathbf{j}$

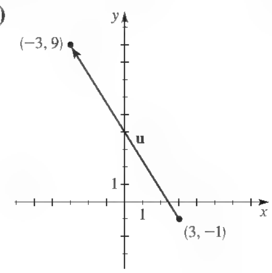
**25.** 3




**27.** $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
**29.** Centro: $(1, 3, -2)$, radio: 4
**31.** $6, \langle 6, 1, 3\rangle, \langle 2, -5, 5\rangle, \langle -1, -\frac{15}{2}, 5\rangle$
**33.** **(a)** $-1$ **(b)** No, 92.8° **35.** **(a)** 0 **(b)** Sí
**37.** **(a)** $\langle -2, 17, -5\rangle$ **(b)** $\left\langle -\dfrac{\sqrt{318}}{159}, \dfrac{17\sqrt{318}}{318}, -\dfrac{5\sqrt{318}}{318}\right\rangle$
**39.** **(a)** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{j} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\mathbf{k}$
**41.** $\frac{15}{2}$ **43.** 9 **45.** $x = 2 + 3t, y = t, z = -6$
**47.** $x = 6 - 2t, y = -2 + 3t, z = -3 + t$
**49.** $2x + 3y - 5z = 2$ **51.** $7x + 7y + 6z = 20$
**53.** $x = 2 - 2t, y = 0, z = -4t$

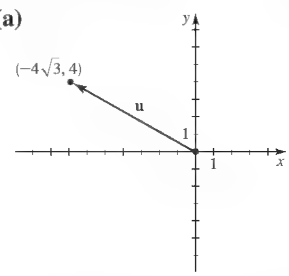
## EXAMEN DEL CAPÍTULO 9 ■ PÁGINA 623

**1.** **(a)**




**(b)** $-6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ **(c)** $2\sqrt{34}$

**2.** **(a)** $\langle 19, -3\rangle$ **(b)** $5\sqrt{2}$ **(c)** 0 **(d)** Sí
**3.** **(a)**




**(b)** 8, 150°

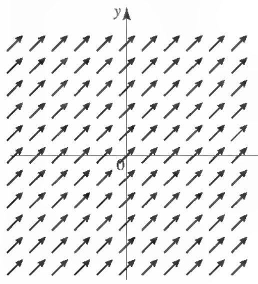
**4.** **(a)** $14\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\mathbf{j}$ **(b)** 17.4 mi/h, N 53.4° E **5.** **(a)** 45.0°
**(b)** $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ **(c)** $\frac{5}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$ **6.** 90 **7.** **(a)** 6
**(b)** $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 36$
**(c)** $\langle 2, -4, 4\rangle = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ **8.** **(a)** $11\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **(b)** $\sqrt{6}$
**(c)** $-1$ **(d)** $-3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ **(e)** $3\sqrt{35}$ **(f)** 18 **(g)** 96.3°
**9.** $\left\langle \dfrac{7\sqrt{6}}{18}, \dfrac{\sqrt{6}}{9}, -\dfrac{\sqrt{6}}{18}\right\rangle, \left\langle -\dfrac{7\sqrt{6}}{18}, -\dfrac{\sqrt{6}}{9}, \dfrac{\sqrt{6}}{18}\right\rangle$

**10. (a)** $\langle 4, -3, 4\rangle$ **(b)** $4x - 3y + 4z = 4$ **(c)** $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

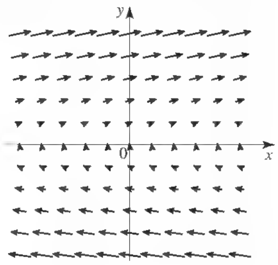
**11.** $x = 2 - 2t, y = -4 + t, z = 7 - 2t$

## CAPÍTULO 9 ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 626

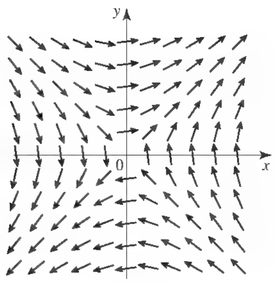
**1.**



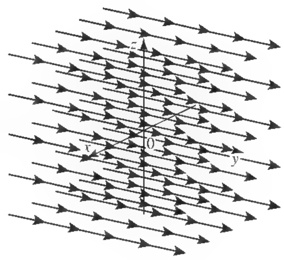
**3.**



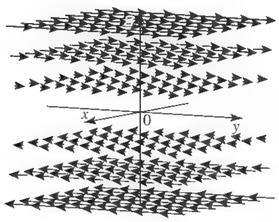
**5.**



**7.**

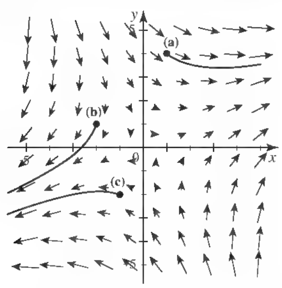


**9.**



**11.** II **13.** I **15.** IV **17.** III

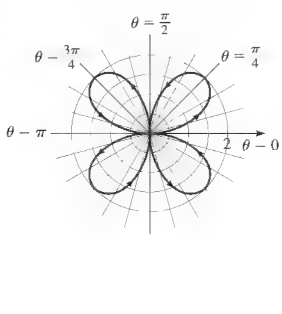
**19.**



## EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO PARA CAPÍTULOS 8 Y 9 ■ PÁGINA 628

**1.** $(8\sqrt{2}, 7\pi/4), (-8\sqrt{2}, 3\pi/4)$

**2. (a)**



**(b)** $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4xy$

**3. (a)** $z = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

**(b)** $zw = 12\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i,$

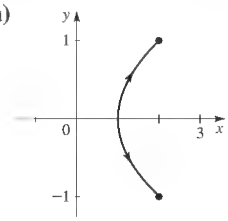
$z/w = \dfrac{1}{3}\left(\cos\dfrac{17\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{17\pi}{12}\right)$

**(c)** $z^{10} = 1024\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right) = 512 + 512\sqrt{3}i$

**(d)** $\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{18}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{23\pi}{18}\right),$

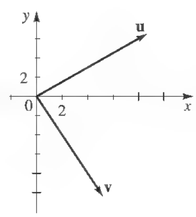
$\sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{35\pi}{18} + i\operatorname{sen}\dfrac{35\pi}{18}\right)$

**4. (a)**



**(b)** $x = y^2 + 1$, parábola

**5. (a)**



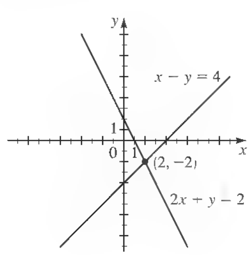
**(b)** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 13, -4\rangle$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle 11, 22\rangle$, $\theta \approx 100.3°$, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\rangle$ **(c)** 82

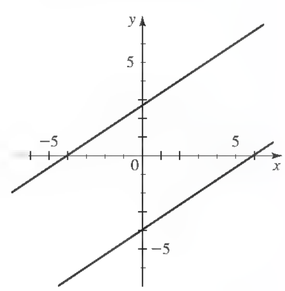
**6. (a)** 3 **(b)** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$
**(c)** $x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3 - 2t$
**7. (a)** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \langle 2, -13, -3\rangle$, perpendicular
**(b)** $2x - 13y - 3z = 21$

# CAPÍTULO 10

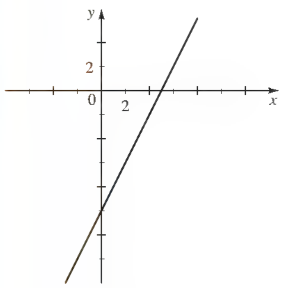
## SECCIÓN 10.1 ■ PÁGINA 638

**1.** $x, y$; ecuación; $(2, 1)$ **2.** sustitución, eliminación, gráfica **3.** no, número infinito **4.** número infinito; $1 - t$; $(1, 0), (-3, 4), (5, -4)$ **5.** $(3, 2)$ **7.** $(3, 1)$ **9.** $(2, 1)$ **11.** $(1, 2)$ **13.** $(-2, 3)$
**15.** $(2, -2)$ **17.** No hay solución





**19.** Un número infinito de soluciones




**21.** (2, 2) **23.** (3, −1) **25.** (2, 1) **27.** (3, 5) **29.** (1, 3) **31.** (10, −9) **33.** (2, 1) **35.** No hay solución **37.** $\left(x, \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ **39.** $\left(x, 3 - \frac{3}{2}x\right)$ **41.** (−3, −7) **43.** $\left(x, 5 - \frac{5}{6}x\right)$ **45.** (5, 10) **47.** No hay solución **49.** (3.87, 2.74) **51.** (61.00, 20.00) **53.** $\left(-\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1}\right)$ **55.** $\left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b}\right)$ **57.** 22, 12 **59.** 5 monedas de 10 centavos, 9 de veinticinco **61.** 200 galones de gasolina regular, 80 galones de Premium **63.** Velocidad del avión 120 mi/h, velocidad del viento 30 mi/h **65.** 200 g de A, 40 g de B **67.** 25%, 10% **69.** \$14,000 al 5%, \$56,000 al 8% **71.** Juan $2\frac{1}{4}$ h, María $2\frac{1}{2}$ h **73.** 25

## SECCIÓN 10.2 ■ PÁGINA 646

**1.** $x + 3z = 1$ **2.** −3; $4y - 5z = -4$ **3.** Lineal **5.** No lineal **7.** (1, 3, 2) **9.** (4, 0, 3) **11.** $\left(5, 2, -\frac{1}{2}\right)$

**13.** $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ -y - 4z = 4 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3y + 7z = 14 \end{cases}$

**17.** (2, 1, −3) **19.** (1, 2, 1) **21.** (5, 0, 1) **23.** (0, 1, 2) **25.** $(1 - 3t, 2t, t)$ **27.** No hay solución **29.** No hay solución **31.** $(3 - t, -3 + 2t, t)$ **33.** $\left(2 - 2t, -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}t, t\right)$ **35.** (1, −1, 1, 2) **37.** \$30,000 en bonos a corto plazo, \$30,000 en bonos a plazo intermedio, \$40,000 en bonos a largo plazo **39.** 250 acres de maíz, 500 acres de trigo, 450 acres de frijol de soja **41.** Imposible **43.** 50 Mango medianoche, 60 Torrente tropical, 30 polvo de piña **45.** 1500 acciones de A, 1200 acciones de B, 1000 acciones de C

## SECCIÓN 10.3 ■ PÁGINA 659

**1.** dependiente, inconsistente

**2.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

**3.** **(a)** $x$ y $y$ **(b)** dependiente **(c)** $x = 3 + t, y = 5 - 2t, z = t$ **4.** **(a)** $x = 2, y = 1, z = 3$ **(b)** $x = 2 - t, y = 1 - t, z = t$ **(c)** No hay solución **5.** 3 × 2 **7.** 2 × 1 **9.** 1 × 3

**11.** **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

**13.** **(a)** Sí **(b)** No **(c)** $\begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

**15.** **(a)** No **(b)** No **(c)** $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y + 5z = 1 \end{cases}$

**17.** **(a)** Sí **(b)** Sí **(c)** $\begin{cases} x + 3y - w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

**19.** (1, 1, 2) **21.** (1, 0, 1) **23.** (−1, 0, 1) **25.** (−1, 5, 0) **27.** (10, 3, −2) **29.** No hay solución **31.** $(2 - 3t, 3 - 5t, t)$ **33.** No hay solución **35.** $(-2t + 5, t - 2, t)$ **37.** $x = -\frac{1}{2}s + t + 6, y = s, z = t$ **39.** (−2, 1, 3) **41.** No hay solución **43.** (−9, 2, 0) **45.** $x = 5 - t, y = -3 + 5t, z = t$ **47.** (0, −3, 0, −3) **49.** (−1, 0, 0, 1) **51.** $x = \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t, y = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t, z = s, w = t$ **53.** $\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}t, -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t, \frac{9}{4} + \frac{3}{4}t, t\right)$ **55.** 2 VitaMax, 1 Vitron, 2 VitaPlus **57.** Carrera de 5 millas, nadar 2 millas, ciclismo 30 millas **59.** Imposible

## SECCIÓN 10.4 ■ PÁGINA 669

**1.** dimensión **2.** **(a)** columna, renglones **(b)** (ii), (iii) **3.** (i), (ii)

**4.** $\begin{bmatrix} 4 & 9 & -7 \\ 7 & -7 & 0 \\ 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ **5.** No **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

**11.** Imposible **13.** $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & -7 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

**17.** No hay solución **19.** $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 25 & -20 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$ **21.** **(a)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**(b)** Imposible **23.** **(a)** $\begin{bmatrix} 10 & -25 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}$ **(b)** Imposible

**25.** **(a)** Imposible **(b)** $\begin{bmatrix} 14 & -14 \end{bmatrix}$

**27.** **(a)** $\begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 14 & -7 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -17 \end{bmatrix}$

**29.** **(a)** $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$

**31.** **(a)** $\begin{bmatrix} 4 & -45 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 8 & -335 \\ 0 & 343 \end{bmatrix}$

**33.** **(a)** $\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \end{bmatrix}$ **(b)** Imposible

**35.** $x = 2, y = -1$ **37.** $x = 1, y = -2$

**39.** $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

**41.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

**43.** Sólo $ACB$ está definido. $ACB = \begin{bmatrix} -3 & -21 & 27 & -6 \\ -2 & -14 & 18 & -4 \end{bmatrix}$

**45.** **(a)** $[4{,}690 \quad 1{,}690 \quad 13{,}210]$ **(b)** Ingreso total en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim, respectivamente.

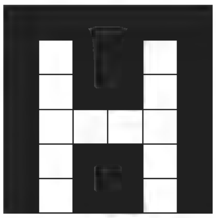
**47.** **(a)** $[105{,}000 \quad 58{,}000]$ **(b)** El primer elemento es la cantidad total (en onzas) de salsa de tomate producida, y el segundo elemento es la cantidad total (en onzas) de pasta de tomate producida.

**49.**

**(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

**(c)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**(d)** $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$



**(e)** La letra E

## SECCIÓN 10.5 ■ PÁGINA 680

**1.** **(a)** identidad **(b)** A, A **(c)** inversa

**2.** **(a)** $\overset{A}{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}\overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

**(c)** $\overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}}\overset{B}{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}} = \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$ **(d)** $x = -1, y = 3$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

**9.** $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ **13.** No hay inversa

**15.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

**19.** .No hay inversa **21.** $\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$

**23.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **25.** $x = 12, y = -8$

**27.** $x = 126, y = -50$ **29.** $x = -38, y = 9, z = 47$
**31.** $x = -20, y = 10, z = 16$ **33.** $x = 3, y = 2, z = 1$
**35.** $x = 3, y = -2, z = 2$ **37.** $x = 8, y = 1, z = 0, w = 3$

**39.** $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **41.** $\frac{1}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

**43.** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} & \frac{2}{x^2} \end{bmatrix}$; no existe inversa para $x = 0$

**45.** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{x} & 0 \\ e^{-x} & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; .existe inversa para toda $x$

**47.** **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** 1 onza A, 1 onza B, 2 onzas C

**(c)** 2 onzas A, 0 onza B, 1 onza C **(d)** No

**49.** **(a)** $\begin{cases} x + y + 2z = 675 \\ 2x + y + z = 600 \\ x + 2y + z = 625 \end{cases}$

**(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675 \\ 600 \\ 625 \end{bmatrix}$ **(c)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Ella gana \$125 en una enciclopedia estándar, \$150 en una de lujo y \$200 en una en piel.

## SECCIÓN 10.6 ■ PÁGINA 690

**1.** Verdadero **2.** Verdadero **3.** Verdadero **4.** **(a)** $2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1 = 11$
**(b)**
$+1(2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1) - 0(3 \cdot 4 - 0 \cdot 1) + 2(3 \cdot (-3) - 0 \cdot 2) = -7$
**5.** 6 **7.** $-4$ **9.** No existe **11.** $\frac{1}{8}$ **13.** 20, 20
**15.** $-12$, 12 **17.** 0, 0 **19.** 4, tiene una inversa
**21.** 5000, tiene una inversa **23.** 0, no tiene inversa
**25.** $-4$, tiene una inversa **27.** $-18$ **29.** 120 **31.** **(a)** $-2$
**(b)** $-2$ **(c)** Sí **33.** $(-2, 5)$ **35.** $(0.6, -0.4)$ **37.** $(4, -1)$
**39.** $(4, 2, -1)$ **41.** $(1, 3, 2)$ **43.** $(0, -1, 1)$ **45.** $\left(\frac{189}{29}, -\frac{108}{29}, \frac{88}{29}\right)$
**47.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right)$ **49.** *abcde* **51.** 0, 1, 2 **53.** 1, $-1$ **55.** 21
**57.** $\frac{63}{2}$

**61.** **(a)** $\begin{cases} 100a + 10b + c = 25 \\ 225a + 15b + c = 33\frac{3}{4} \\ 1600a + 40b + c = 40 \end{cases}$

**(b)** $y = -0.05x^2 + 3x$

## SECCIÓN 10.7 ■ PÁGINA 697

**1.** (iii) **2.** (ii) **3.** $\dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x + 2}$

**5.** $\dfrac{A}{x - 2} + \dfrac{B}{(x - 2)^2} + \dfrac{C}{x + 4}$ **7.** $\dfrac{A}{x - 3} + \dfrac{Bx + C}{x^2 + 4}$

**9.** $\dfrac{Ax + B}{x^2 + 1} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 2}$

**11.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{2x - 5} + \dfrac{C}{(2x - 5)^2} + \dfrac{D}{(2x - 5)^3} + \dfrac{Ex + F}{x^2 + 2x + 5} + \dfrac{Gx + H}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

**13.** $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ **15.** $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+4}$ **17.** $\dfrac{2}{x-3} - \dfrac{2}{x+3}$

**19.** $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}$ **21.** $\dfrac{3}{x-4} - \dfrac{2}{x+2}$

**23.** $\dfrac{-\frac{1}{2}}{2x-1} + \dfrac{\frac{3}{2}}{4x-3}$ **25.** $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{2x-1}$

**27.** $\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **29.** $\dfrac{1}{2x+3} - \dfrac{3}{(2x+3)^2}$

**31.** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x+2}$

**33.** $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^3}$

**35.** $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{(x+3)^2}$

**37.** $\dfrac{x+1}{x^2+3} - \dfrac{1}{x}$ **39.** $\dfrac{2x-5}{x^2+x+2} + \dfrac{5}{x^2+1}$

**41.** $\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x+2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{1}{x}$ **43.** $x^2 + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2+1}$

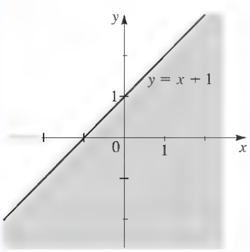
**45.** $A = \dfrac{a+b}{2}, B = \dfrac{a-b}{2}$

## SECCIÓN 10.8 ■ PÁGINA 701

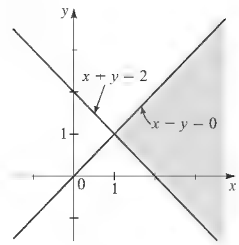
**1.** $(4, 8), (-2, 2)$ **3.** $(4, 16), (-3, 9)$
**5.** $(2, -2), (-2, 2)$ **7.** $(-25, 5), (-25, -5)$
**9.** $(-3, 4)$ $(3, 4)$ **11.** $(-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)$
**13.** $(-1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2}), (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}), (\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}})$
**15.** $(2, 4), (\;\frac{5}{2}, \frac{7}{4})$ **17.** $(0, 0), (1, \;1), (-2, -4)$
**19.** $(4, 0)$ **21.** $(-2, -2)$ **23.** $(6, 2), (-2, -6)$
**25.** No hay solución
**27.** $(\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2)$
**29.** $(3, \;\frac{1}{2}), (\;3, \;\frac{1}{2})$ **31.** $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$
**33.** $(2.00, 20.00), (-8.00, 0)$ **35.** $(-4.51, 2.17), (4.91, -0.97)$
**37.** $(1.23, 3.87), (\;0.35, \;4.21)$
**39.** $(-2.30, -0.70), (0.48, -1.19)$ **41.** 12 cm por 15 cm
**43.** 15, 20 **45.** $(400.50, 200.25)$, 447.77 m **47.** $(12, 8)$

## SECCIÓN 10.9 ■ PÁGINA 708

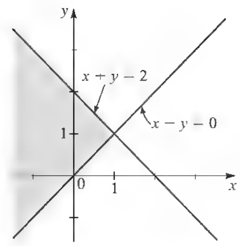
**1.** ecuación; $y = x + 1$; de prueba



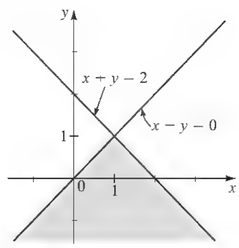

**2. (a)**



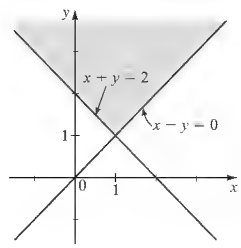

**(b)**



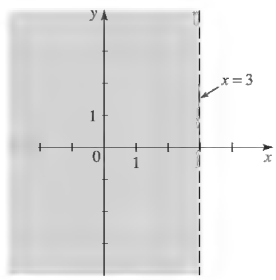

**(c)**



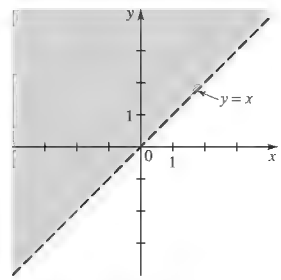

**(d)**



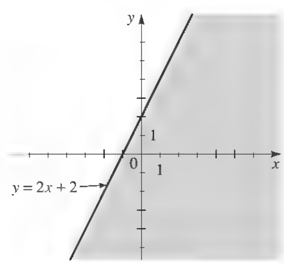

**3.**



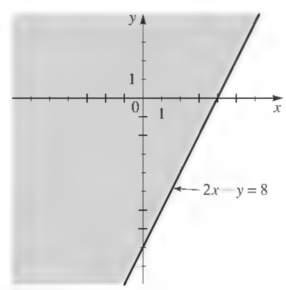

**5.**



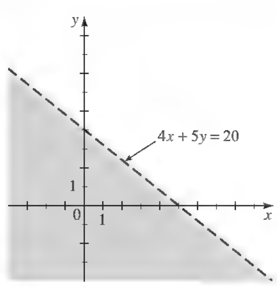

**7.**



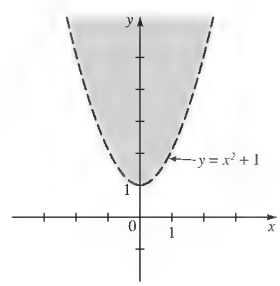

**9.**



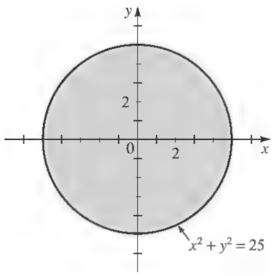

**11.**




**13.**

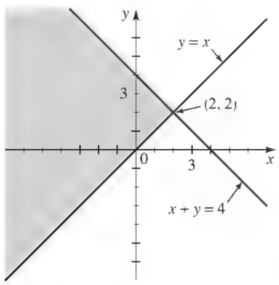


**15.**



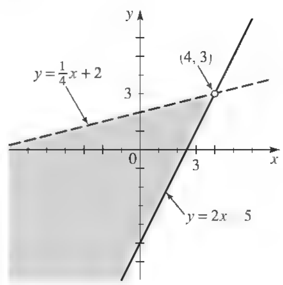

**17.** $y \le \frac{1}{2}x - 1$ **19.** $x^2 + y^2 > 4$

**21.**



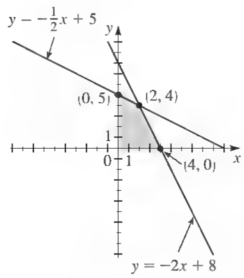

No limitado

**23.**



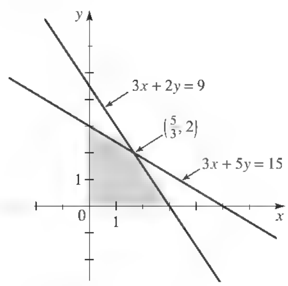

No limitado

**25.**



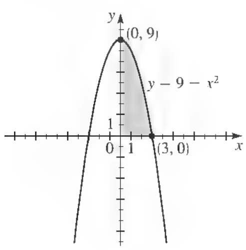

Limitado

**27.**



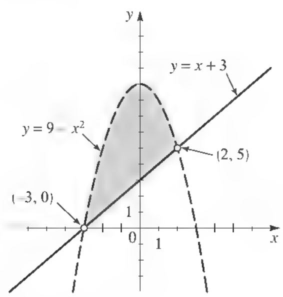

Limitado

**29.**



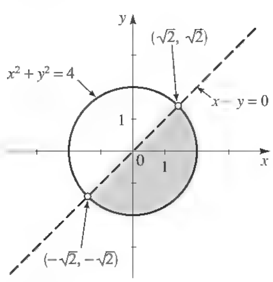

Limitado

**31.**



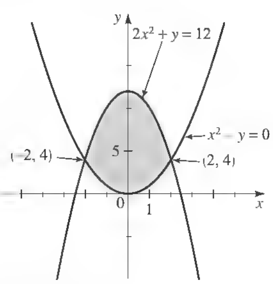

Limitado

**33.**



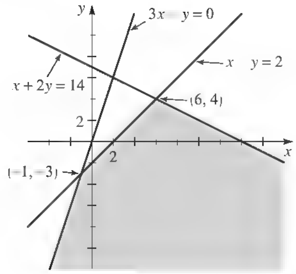

Limitado

**35.**



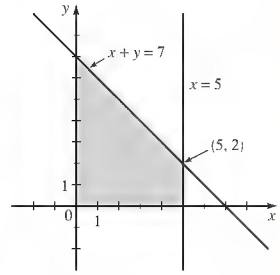

Limitado

**37.**



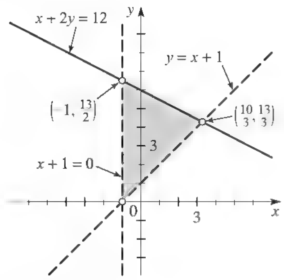

No limitado

**39.**



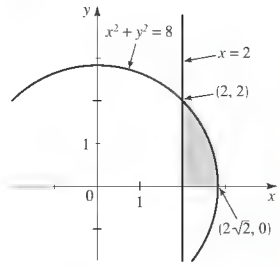

Limitado

**41.**



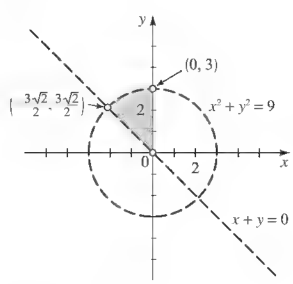

Limitado

**43.**



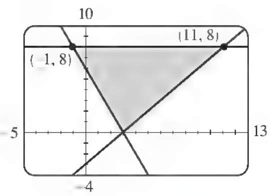

Limitado

**45.**

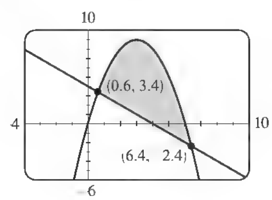



Limitado

**47.**

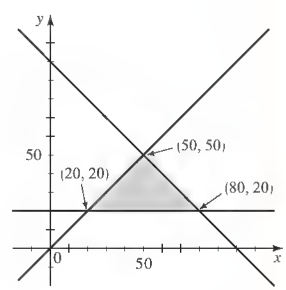



**49.**



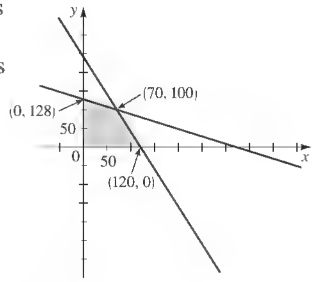

**51.** $x$ = número de libros de ficción
$y$ = número de libros no de ficción

$$\begin{cases} x + y \le 100 \\ 20 \le y, \quad x \ge y \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$



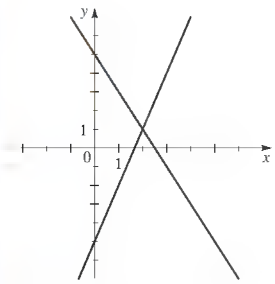
**53.** $x$ = número de paquetes estándar
$y$ = número de paquetes de lujo

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}y \le 80 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y \le 90 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

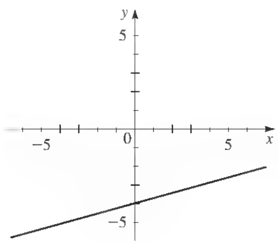



## REPASO DEL CAPÍTULO 10 ■ PÁGINA 711

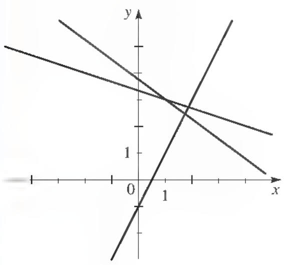
**1.** $(2, 1)$




**3.** $x$ = cualquier número
$y = \frac{2}{7}x - 4$




**5.** No hay solución




**7.** $(\ \ 3, 3), (2, 8)$ **9.** $\left(\frac{16}{7}, -\frac{14}{3}\right)$ **11.** $(21.41, -15.93)$
**13.** $(11.94, -1.39), (12.07, 1.44)$
**15.** **(a)** $2 \times 3$ **(b)** Sí **(c)** No
**(d)** $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ \quad\ \ y = \ \ 3 \end{cases}$
**17.** **(a)** $3 \times 4$ **(b)** Sí **(c)** Sí
**(d)** $\begin{cases} x \quad + 8z = \ \ 0 \\ \quad y + 5z = -1 \\ \qquad\ \ 0 = \ \ 0 \end{cases}$
**19.** **(a)** $3 \times 4$ **(b)** No **(c)** No
**(d)** $\begin{cases} \quad\ \ y - 3z = 4 \\ x + \ \ y \qquad = 7 \\ x + 2y + \ \ z = 2 \end{cases}$
**21.** $(1, 1, 2)$ **23.** No hay solución **25.** $(-8, -7, 10)$
**27.** No hay solución **29.** $(1, 0, 1, \ \ 2)$
**31.** $x = -4t + 1, y = -t \ \ 1, z = t$
**33.** $x = 6 - 5t, y = \frac{1}{2}(7 - 3t), z = t$ **35.** $\left(-\frac{4}{3}t + \frac{4}{3}, \frac{5}{3}t - \frac{2}{3}, t\right)$
**37.** $(s + 1, 2s - t + 1, s, t)$ **39.** No hay solución
**41.** $(1, t + 1, t, 0)$ **43.** \$3000 al 6%, \$6000 al 7%
**45.** \$11,250 en el banco A, \$22,500 en el banco B, \$26,250 en el banco C
**47.** Imposible **49.** $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

**51.** $[10 \quad 0 \quad -5]$ **53.** $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 10 \\ 1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} 30 & 22 & 2 \\ -9 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

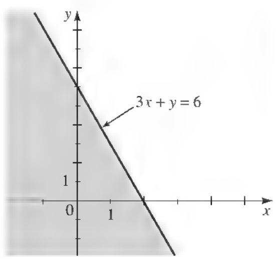
**57.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **61.** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ **63.** $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

**65.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -4 & 5 & -9 \end{bmatrix}$ **67.** $1, \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **69.** 0, no hay inversa

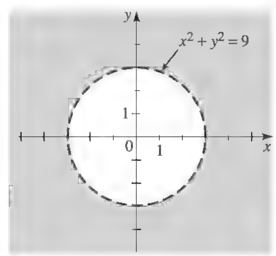
**71.** $-1, \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ **73.** $24, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

**75.** $(65, 154)$ **77.** $\left(\ \ \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$ **79.** $\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **81.** $\left(\ \ \frac{87}{26}, \frac{21}{26}, \frac{3}{2}\right)$
**83.** 11 **85.** $\dfrac{2}{x \ \ 5} + \dfrac{1}{x + 3}$ **87.** $\dfrac{-4}{x} + \dfrac{4}{x \ \ 1} + \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$
**89.** $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{x + 2}{x^2 + 1}$
**91.** $(2, 1)$ **93.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right), (2, -2)$ **95.** $x + y^2 \le 4$

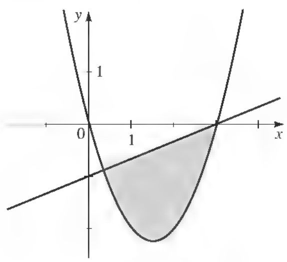
**97.**



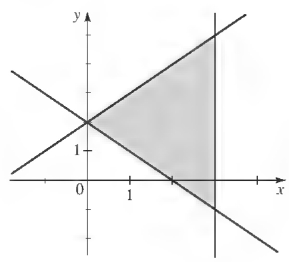

**99.**



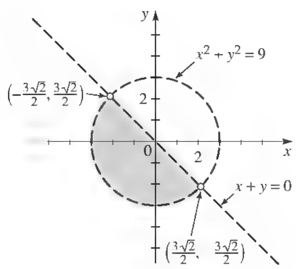

**101.**




**103.**

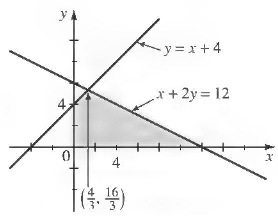



**105.**




Limitado

**107.**

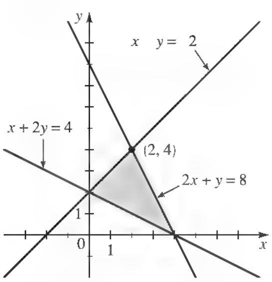



Limitado

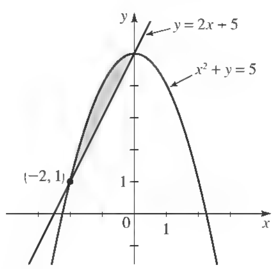
**109.** $x = \dfrac{b + c}{2}, y = \dfrac{a + c}{2}, z = \dfrac{a + b}{2}$ **111.** 2, 3

## EXAMEN DEL CAPÍTULO ■ PÁGINA 714

**1.** **(a)** Lineal **(b)** $(-2, 3)$ **2.** **(a)** No lineal **(b)** $(1, -2), (\frac{5}{3}, 0)$
**3.** $(-0.55, -0.78), (0.43, -0.29), (2.12, 0.56)$
**4.** Viento 60 km/h, avión 300 km/h
**5.** **(a)** Forma escalonada por renglones **(b)** Forma escalonada por renglones reducida **(c)** Ninguna **6.** **(a)** $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)$ **(b)** No hay solución
**7.** $\left(-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}t, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}t, t\right)$
**8.** Café \$1.50, jugo \$1.75, rosquilla \$0.75
**9.** **(a)** Dimensiones incompatibles
**(b)** Dimensiones incompatibles
**(c)** $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 36 & 58 \\ 0 & -3 \\ 18 & 28 \end{bmatrix}$ **(e)** $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
**(f)** $B$ no es cuadrada **(g)** $B$ no es cuadrada **(h)** $-3$
**10.** **(a)** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \end{bmatrix}$ **(b)** $(70, 90)$
**11.** $|A| = 0, |B| = 2, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$
**12.** $(5, -5, -4)$
**13.** **(a)** $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+2}$ **(b)** $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2+3}$
**14.** **(a)**

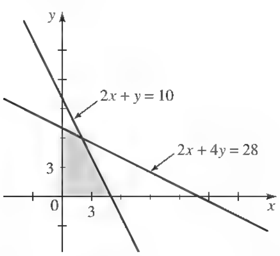



**(b)**




## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 720

**1.** 198, 195
**3.**




máximo 161
mínimo 135

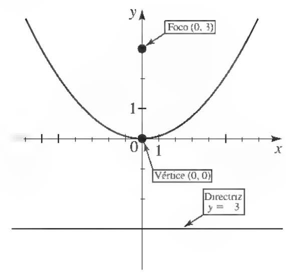
**5.** 3 mesas, 34 sillas **7.** 30 cajas de toronjas, 30 cajas de naranjas
**9.** 15 Pasadena a Santa Mónica, 3 Pasadena a El Toro, 0 Long Beach a Santa Mónica, 16 Long Beach a El Toro
**11.** 90 estándar, 40 de lujo **13.** \$7500 en bonos municipales, \$2500 en certificados bancarios, \$2000 en bonos de alto riesgo
**15.** 4 juegos, 32 educacionales, 0 utilería

# CAPÍTULO 11

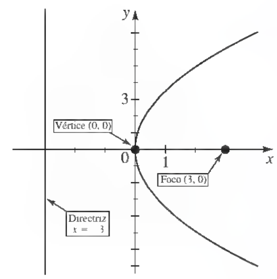
## SECCIÓN 11.1 ■ PÁGINA 730

**1.** foco, directriz **2.** $F(0, p), y = -p, F(0, 3), y = -3$
**3.** $F(p, 0), x = -p, F(3, 0), x = -3$

**4.** **(a)**



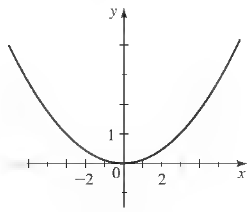

**(b)**



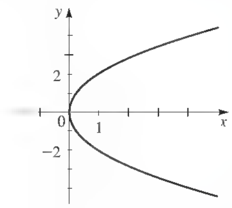

**5.** III **7.** II **9.** VI

*Orden de respuestas: foco; directriz; diámetro focal*

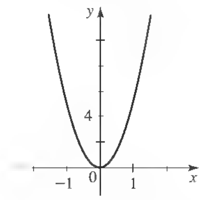
**11.** $F(0, \frac{9}{4}); y = -\frac{9}{4}; 9$



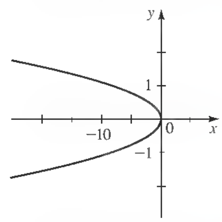
**13.** $F(1, 0); x = -1; 4$



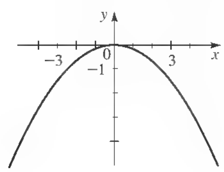
**15.** $F(0, \frac{1}{20}); y = -\frac{1}{20}; \frac{1}{5}$



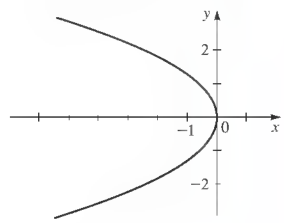
**17.** $F(-\frac{1}{32}, 0); x = \frac{1}{32}; \frac{1}{8}$



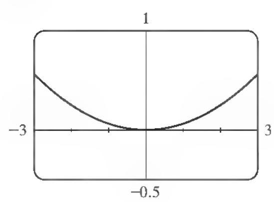
**19.** $F(0, -\frac{3}{2}); y = \frac{3}{2}; 6$



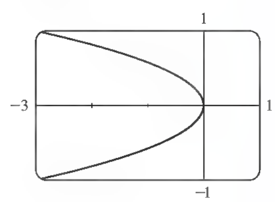
**21.** $F(-\frac{5}{12}, 0); x = \frac{5}{12}; \frac{5}{3}$



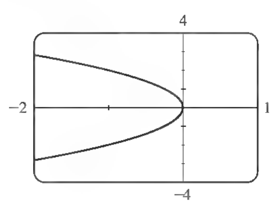
**23.**



**25.**

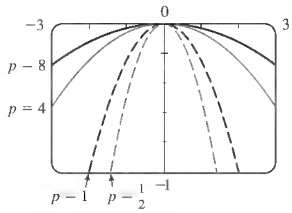


**27.**



**29.** $x^2 = 8y$ **31.** $y^2 = -32x$ **33.** $y^2 = -8x$ **35.** $x^2 = 40y$
**37.** $y^2 = 4x$ **39.** $x^2 = 20y$ **41.** $x^2 = 8y$ **43.** $y^2 = -16x$
**45.** $y^2 = -3x$ **47.** $x = y^2$ **49.** $x^2 = -4\sqrt{2}y$
**51. (a)** $x^2 = -4py$, $p = \frac{1}{2}$, 1, 4, y 8

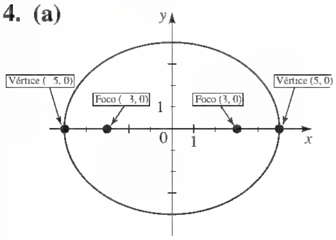
**(b)** Cuanto más cercana está la directriz del vértice, la parábola es más pronunciada.



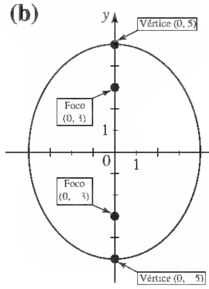

**53. (a)** $y^2 = 12x$ **(b)** $8\sqrt{15} \approx 31$ cm **55.** $x^2 = 600y$

## SECCIÓN 11.2 ▪ PÁGINA 738

**1.** suma; focos
**2.** $(a, 0), (-a, 0)$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $(5, 0), (-5, 0), (3, 0), (-3, 0)$
**3.** $(0, a), (0, -a)$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $(0, 5), (0, -5), (0, 3), (0, -3)$
**4. (a)**



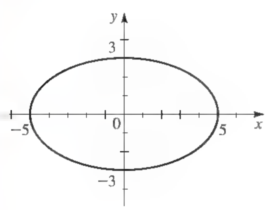

**(b)**



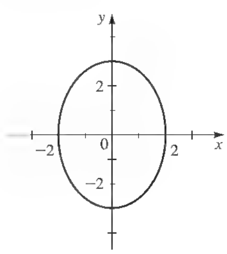

**5.** II **7.** I

*Orden de respuestas: vértices; focos; excentricidad; eje mayor y eje menor*

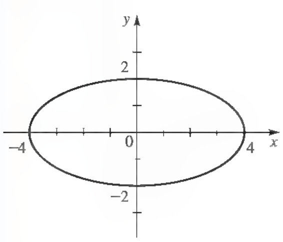
**9.** $V(\pm 5, 0)$; $F(\pm 4, 0)$; $\frac{4}{5}$; 10, 6



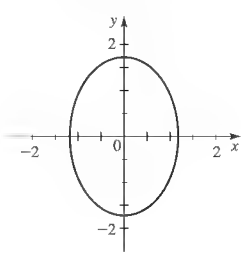
**11.** $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{5})$; $\sqrt{5}/3$; 6, 4



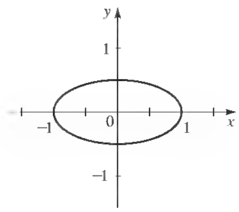
**13.** $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; $\sqrt{3}/2$; 8, 4



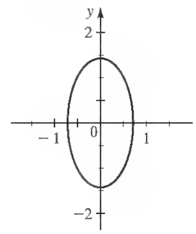
**15.** $V(0, \pm\sqrt{3})$; $F(0, \pm\sqrt{3/2})$; $1/\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$



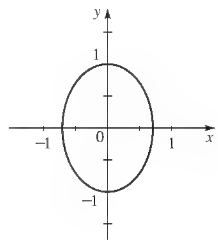
**17.** $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{3}/2, 0)$; $\sqrt{3}/2$; 2, 1



**19.** $V(0, \pm\sqrt{2})$; $F(0, \pm\sqrt{3/2})$; $\sqrt{3}/2$; $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

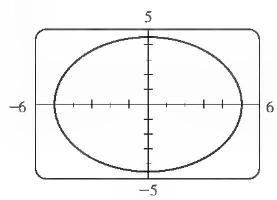


**21.** $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm 1/\sqrt{2})$; $1/\sqrt{2}$; 2, $\sqrt{2}$

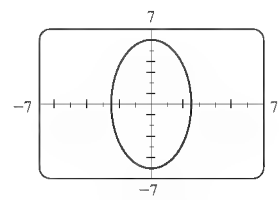


**23.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ **25.** $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ **27.** $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

**29.**



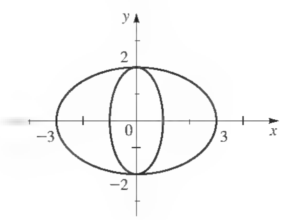
**31.**



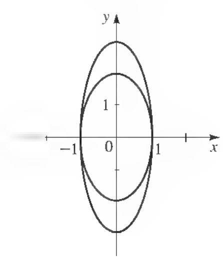
**33.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **35.** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **37.** $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{13} = 1$

**39.** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{91} = 1$ **41.** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ **43.** $\dfrac{64x^2}{225} + \dfrac{64y^2}{81} = 1$

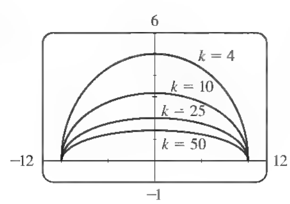
**45.** $(0, \pm 2)$



**47.** $(\pm 1, 0)$



**49. (a)**




**(b)** Ejes mayores y vértices comunes; la excentricidad aumenta cuando $k$ aumenta.

**51.** $\dfrac{x^2}{2.2500 \times 10^{16}} + \dfrac{y^2}{2.2491 \times 10^{16}} = 1$

**53.** $\dfrac{x^2}{1{,}455{,}642} + \dfrac{y^2}{1{,}451{,}610} = 1$

**55.** $5\sqrt{39}/2 \approx 15.6$ in.

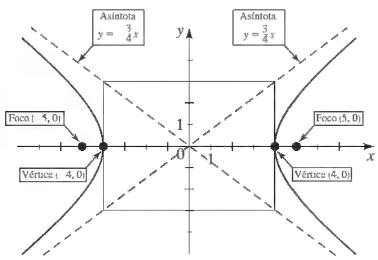
## SECCIÓN 11.3 ■ PÁGINA 747

**1.** diferencia; focos

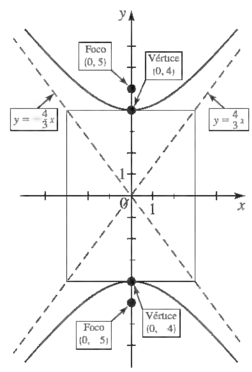
**2.** $(-a, 0), (a, 0); \sqrt{a^2 + b^2}; (-4, 0), (4, 0), (-5, 0), (5, 0)$

**3.** $(0, -a), (0, a); \sqrt{a^2 + b^2}; (0, -4), (0, 4), (0, -5), (0, 5)$

**4.** **(a)**



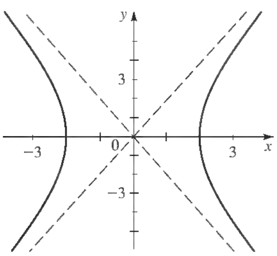

**(b)**



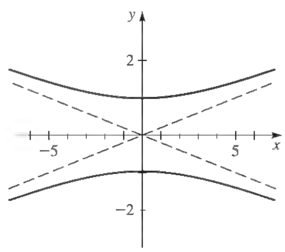

**5.** III **7.** II

*Orden de respuestas: vértices; focos; asíntotas*

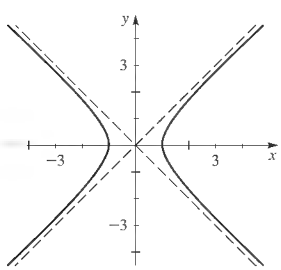
**9.** $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $y = \pm 2x$



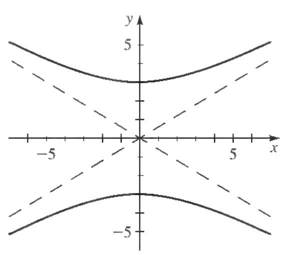
**11.** $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm\sqrt{26})$; $y = \pm \frac{1}{5}x$



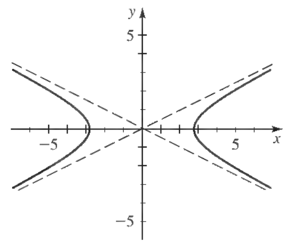
**13.** $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$



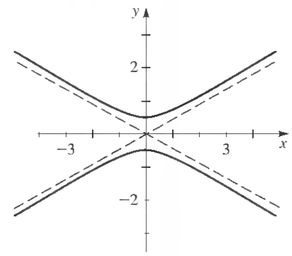
**15.** $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm \frac{3}{5}x$



**17.** $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$; $F(\pm\sqrt{10}, 0)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$

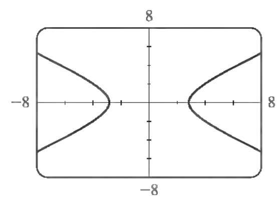


**19.** $V(0, \pm \frac{1}{2})$; $F(0, \pm\sqrt{5}/2)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$

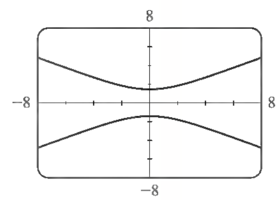


**21.** $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ **23.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **25.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4y^2}{9} = 1$

**27.**



**29.**

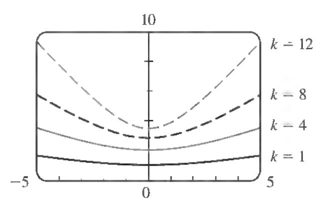


**31.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **33.** $y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$ **35.** $x^2 - \dfrac{y^2}{25} = 1$

**37.** $\dfrac{5y^2}{64} - \dfrac{5x^2}{256} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **41.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

**43.** **(b)** $x^2 - y^2 = c^2/2$

**47.** **(b)**



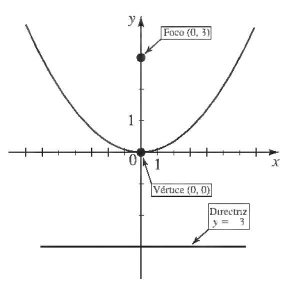

Cuando $k$ aumenta, las asíntotas se hacen más pronunciadas.

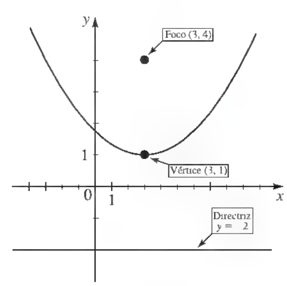
**49.** $x^2 - y^2 = 2.3 \times 10^{19}$

## SECCIÓN 11.4 ■ PÁGINA 755

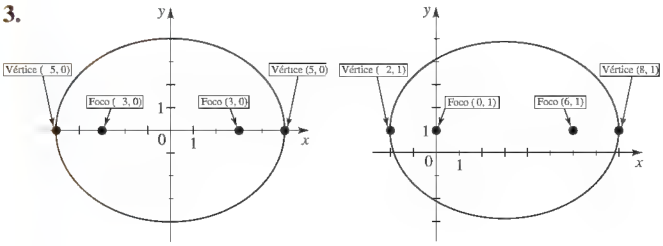
**1.** **(a)** ) derecha; izquierda **(b)** hacia arriba; hacia abajo

**2.**

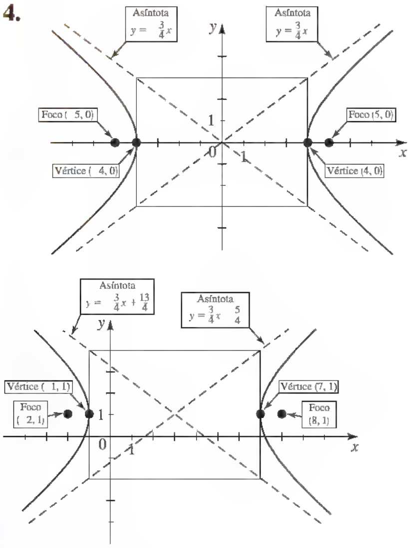


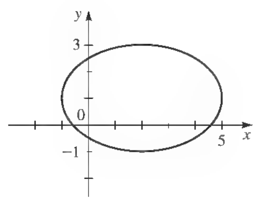
**3.**



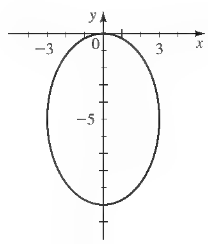

**4.**



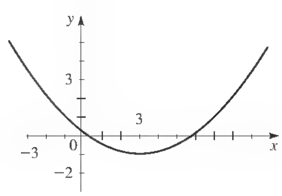

**5.** Centro $C(2, 1)$; focos $F(2 \pm \sqrt{5}, 1)$; vértices $V_1(-1, 1)$, $V_2(5, 1)$; eje mayor 6, eje menor 4



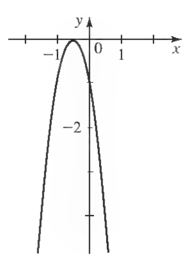
**7.** Centro $C(0, -5)$; focos $F_1(0, -1)$, $F_2(0, -9)$; vértices $V_1(0, 0)$, $V_2(0, -10)$; eje mayor 10, eje menor 6



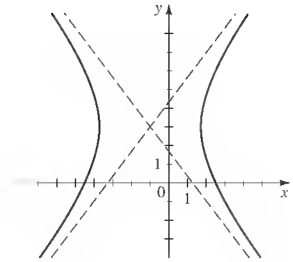
**9.** Vértice $V(3, -1)$; foco $F(3, 1)$; directriz $y = -3$



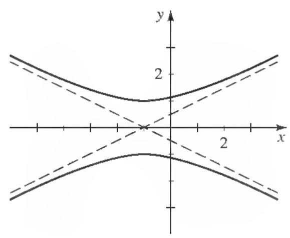
**11.** Vértice $V(-\frac{1}{2}, 0)$; foco $F(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$; directriz $y = \frac{1}{16}$



**13.** Centro $C(-1, 3)$; focos $F_1(-6, 3)$, $F_2(4, 3)$; vértices $V_1(-4, 3)$, $V_2(2, 3)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}(x + 1) + 3$



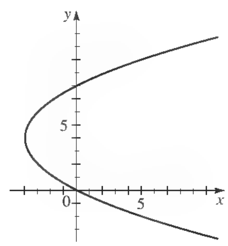
**15.** Centro $C(-1, 0)$; focos $F(-1, \pm\sqrt{5})$; vértices $V(-1, \pm 1)$; asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$



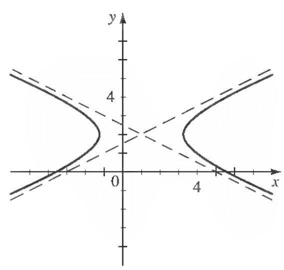
**17.** $x^2 = -\frac{1}{4}(y - 4)$ **19.** $\dfrac{(x - 5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

**21.** $(y - 1)^2 - x^2 = 1$

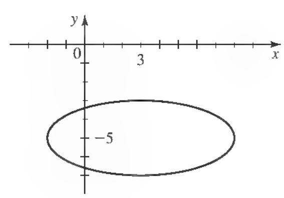
**23.** Parábola; $V(-4, 4)$; $F(-3, 4)$; $x = -5$



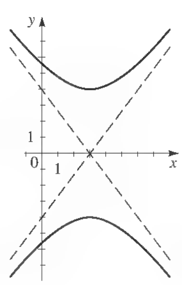
**25.** Hipérbola; $C(1, 2)$; $F_1(-\frac{3}{2}, 2)$, $F_2(\frac{7}{2}, 2)$; $V(1 \pm \sqrt{5}, 2)$; asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1) + 2$



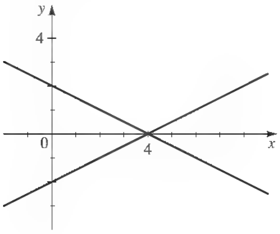
**27.** Elipse; $C(3, -5)$; $F(3 \pm \sqrt{21}, -5)$; $V_1(-2, -5)$, $V_1(8, -5)$; eje mayor 10, eje menor 4



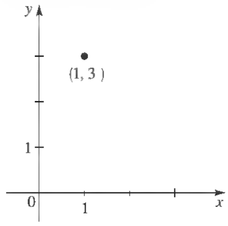
**29.** Hipérbola; $C(3, 0)$; $F(3, \pm 5)$; $V(3, \pm 4)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}(x - 3)$



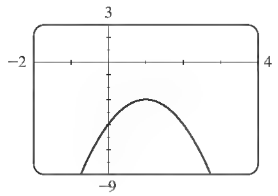
**31.** Cónica degenerada (par de rectas), $y = \pm\frac{1}{2}(x - 4)$



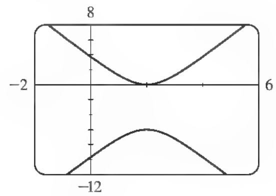
**33.** Punto $(1, 3)$



**35.**

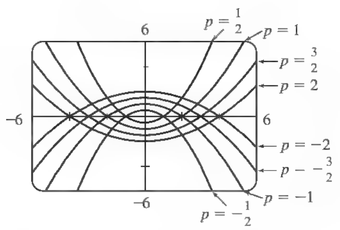


**37.**



**39.** **(a)** $F < 17$ **(b)** $F = 17$ **(c)** $F > 17$

**41.** **(a)**

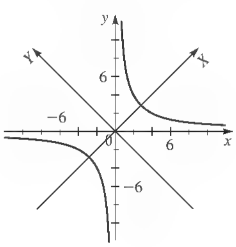


**(c)** Las parábolas se hacen más angostas.

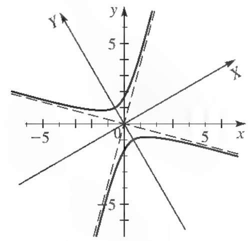
**43.** $\dfrac{(x + 150)^2}{18{,}062{,}500} + \dfrac{y^2}{18{,}040{,}000} = 1$

## SECCIÓN 11.5 ▪ PÁGINA 764

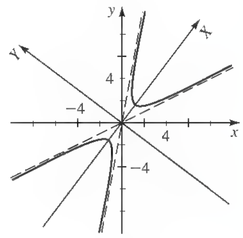
**1.** $x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi$, $y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$, $X = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi$, $Y = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$
**2.** **(a)** sección cónica **(b)** $(A - C)/B$
**(c)** $B^2 - 4AC$, parábola, elipse, hipérbola **3.** $(\sqrt{2}, 0)$
**5.** $(0, -2\sqrt{3})$ **7.** $(1.6383, 1.1472)$
**9.** $X^2 + \sqrt{3}XY + 2 = 0$
**11.** $7Y^2 - 48XY - 7X^2 - 40X - 30Y = 0$
**13.** $X^2 - Y^2 = 2$
**15.** **(a)** Hipérbola **(b)** $X^2 - Y^2 = 16$
**(c)** $\phi = 45°$



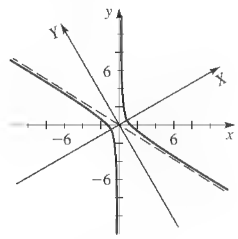
**17.** **(a)** Hipérbola
**(b)** $Y^2 - X^2 = 1$
**(c)** $\phi = 30°$



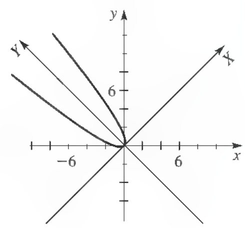
**19.** **(a)** Hipérbola
**(b)** $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$
**(c)** $\phi \approx 53°$



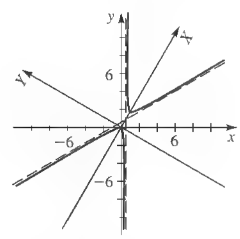
**21.** **(a)** Hipérbola
**(b)** $3X^2 - Y^2 = 2\sqrt{3}$
**(c)** $\phi = 30°$



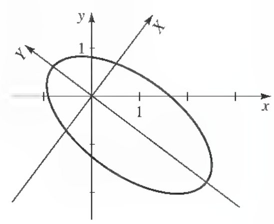
**23.** **(a)** Parábola
**(b)** $Y = \sqrt{2}X^2$
**(c)** $\phi = 45°$



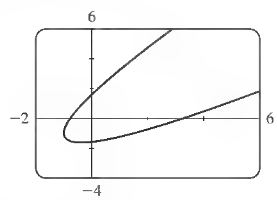
**25.** **(a)** Hipérbola
**(b)** $(X - 1)^2 - 3Y^2 = 1$
**(c)** $\phi = 60°$



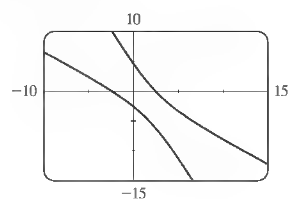
**27.** **(a)** Elipse
**(b)** $X^2 + \dfrac{(Y + 1)^2}{4} = 1$
**(c)** $\phi \approx 53°$



**29.** **(a)** Parábola
**(b)**



**31.** **(a)** Hipérbola
**(b)**



**33. (a)** $(X-5)^2 - Y^2 = 1$
**(b)** $XY$-coordenadas:
$C(5,0)$; $V_1(6,0)$, $V_2(4,0)$; $F(5 \pm \sqrt{2}, 0)$;
$xy$-coordenadas:
$C(4,3)$; $V_1(\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$, $V_2(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$; $F_1(4 + \frac{4}{5}\sqrt{2}, 3 + \frac{3}{5}\sqrt{2})$,
$F_2(4 - \frac{4}{5}\sqrt{2}, 3 - \frac{3}{5}\sqrt{2})$
**(c)** $Y = \pm(X-5)$; $7x - y - 25 = 0$, $x + 7y - 25 = 0$
**35.** $X = x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi$; $Y = -x \operatorname{sen}\phi + y \cos\phi$

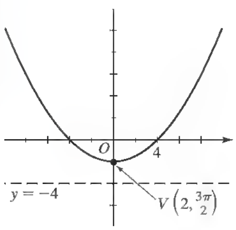
## SECCIÓN 11.6 ■ PÁGINA 770

**1.** foco, directriz; $\dfrac{\text{distancia de } P \text{ a } F}{\text{distancia de } P \text{ a } \ell}$, sección cónica; parábola, elipse, hipérbola, excentricidad

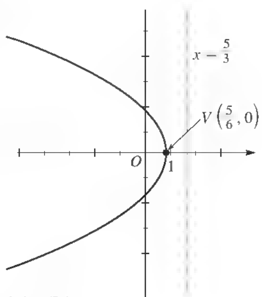
**2.** $\dfrac{ed}{1 \pm e\cos\theta}, \dfrac{ed}{1 \pm e \operatorname{sen}\theta}$

**3.** $r = 6/(3 + 2\cos\theta)$
**5.** $r = 2/(1 + \operatorname{sen}\theta)$
**7.** $r = 20/(1 + 4\cos\theta)$
**9.** $r = 10/(1 + \operatorname{sen}\theta)$
**11.** II **13.** VI **15.** IV

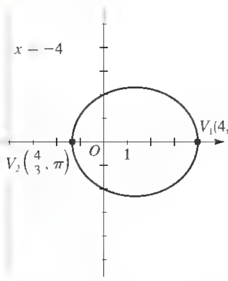
**17.**




**19.**

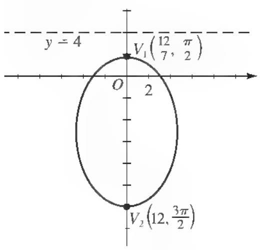



**21. (a), (b)**



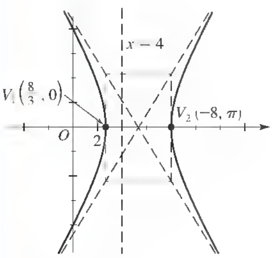

**(c)** $C\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, eje mayor: $\frac{16}{3}$, eje menor: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

**23. (a), (b)**



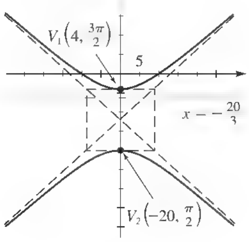

**(c)** $C\left(\frac{36}{7}, \frac{3\pi}{2}\right)$, eje mayor: $\frac{96}{7}$, eje menor: $\frac{24\sqrt{7}}{7}$

**25. (a), (b)**



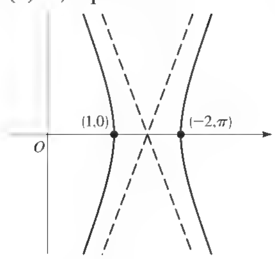

**(c)** $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$

**27. (a), (b)**

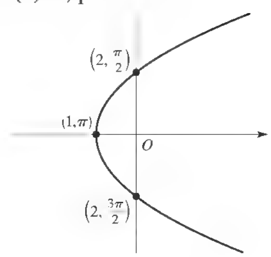



**(c)** $\left(12, \frac{3\pi}{2}\right)$

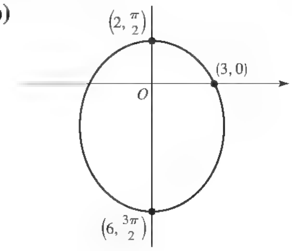
**29. (a)** 3, hipérbola
**(b)**



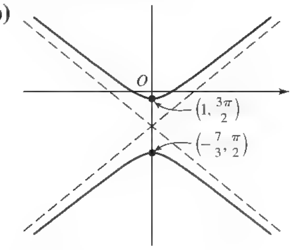

**31. (a)** 1, parábola
**(b)**



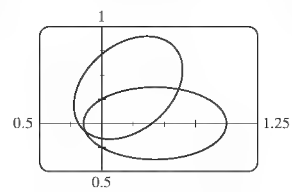

**33. (a)** $\frac{1}{2}$, elipse
**(b)**



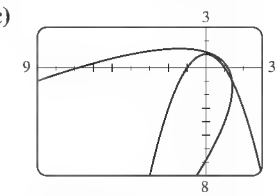

**35. (a)** $\frac{5}{2}$, hipérbola
**(b)**



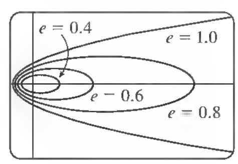

**37. (a)** excentricidad $\frac{3}{4}$, directriz $x = -\frac{1}{3}$
**(b)** $r = \dfrac{1}{4 - 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}$
**(c)**




**39. (a)** excentricidad 1, directriz $y = 2$
**(b)** $r = \dfrac{2}{1 + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}$
**(c)**



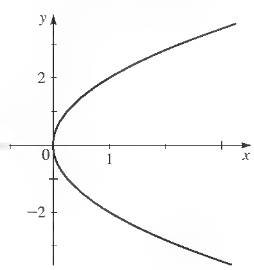

**41.** La elipse es casi circular cuando $e$ es cercana a 0 y se hace más alargada cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se hace una parábola.



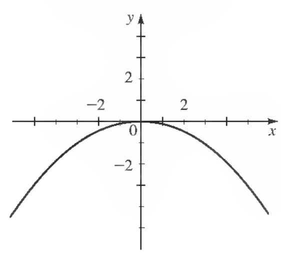

**43. (b)** $r = (1.49 \times 10^8)/(1 - 0.017\cos\theta)$
**45.** 0.25

## REPASO DEL CAPÍTULO 11 ■ PÁGINA 773

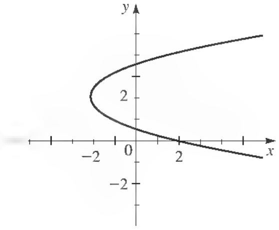
**1.** $V(0,0)$; $F(1,0)$; $x = -1$



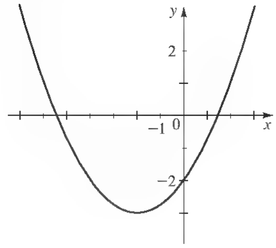

**3.** $V(0,0)$; $F(0,-2)$; $y = 2$



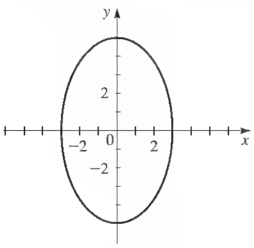
**5.** $V(-2, 2)$; $F(-\frac{7}{4}, 2)$; $x = -\frac{9}{4}$



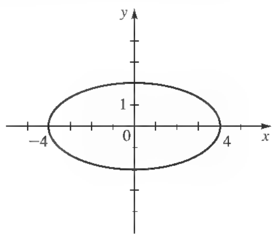
**7.** $V(-2, -3)$; $F(-2, -2)$; $y = -4$



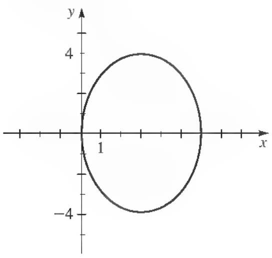
**9.** $C(0, 0)$; $V(0, \pm 5)$; $F(0, \pm 4)$; ejes 10, 6



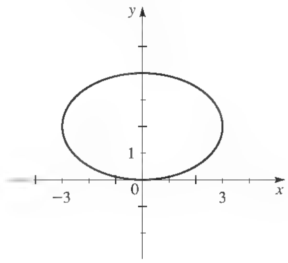
**11.** $C(0, 0)$; $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; ejes 8, 4



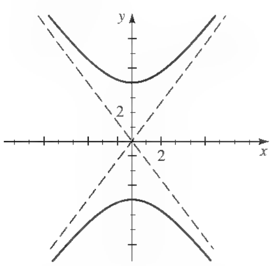
**13.** $C(3, 0)$; $V(3, \pm 4)$; $F(3, \pm\sqrt{7})$; ejes 8, 6



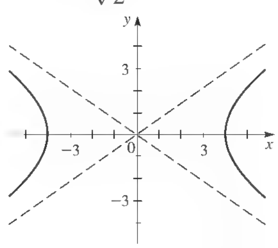
**15.** $C(0, 2)$; $V(\pm 3, 2)$; $F(\pm\sqrt{5}, 2)$; ejes 6, 4



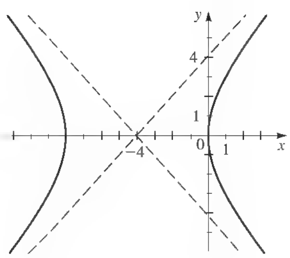
**17.** $C(0, 0)$; $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 5)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$



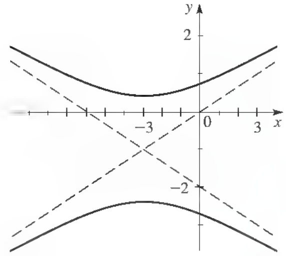
**19.** $C(0, 0)$; $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{6}, 0)$; asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$



**21.** $C(-4, 0)$; $V_1(-8, 0)$, $V_2(0, 0)$; $F(-4 \pm 4\sqrt{2}, 0)$; asíntotas $y = \pm(x + 4)$

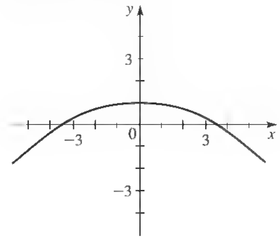


**23.** $C(-3, -1)$; $V(-3, -1 \pm \sqrt{2})$; $F(-3, -1 \pm 2\sqrt{5})$; asíntotas $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x - 2$

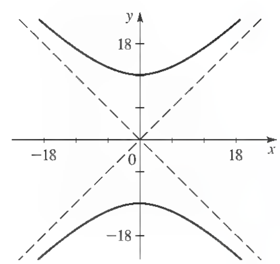


**25.** $y^2 = 8x$ **27.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ **29.** $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

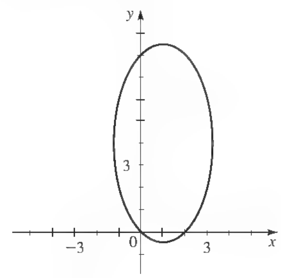
**31.** Parábola; $F(0, -2)$; $V(0, 1)$



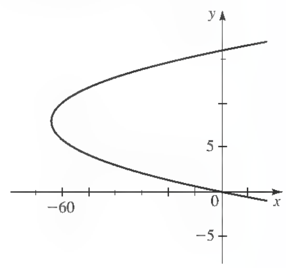
**33.** Hipérbola; $F(0, \pm 12\sqrt{2})$; $V(0, \pm 12)$



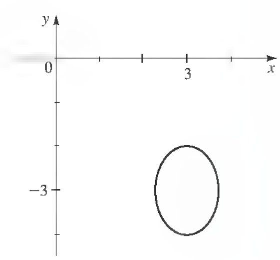
**35.** Elipse; $F(1, 4 \pm \sqrt{15})$; $V(1, 4 \pm 2\sqrt{5})$



**37.** Parábola; $F(-\frac{255}{4}, 8)$; $V(-64, 8)$



**39.** Elipse; $F(3, -3 \pm 1/\sqrt{2})$; $V_1(3,\ \ 4)$, $V_2(3,\ \ 2)$



**41.** No tiene gráfica

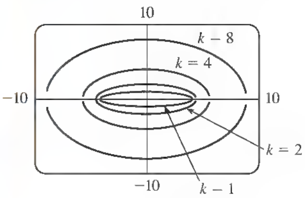
**43.** $x^2 = 4y$ **45.** $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

**47.** $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

**49.** $\dfrac{4(x-7)^2}{225} + \dfrac{(y-2)^2}{100} = 1$

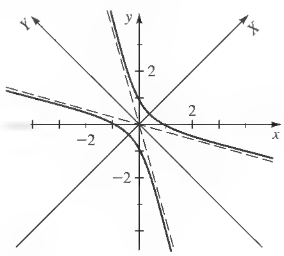
**51.** **(a)** 91,419,000 mi **(b)** 94,581,000 mi

**53.** **(a)**




**55.** **(a)** Hipérbola **(b)** $3X^2 - Y^2 = 1$

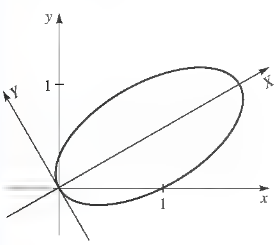
**(c)** $\phi = 45°$



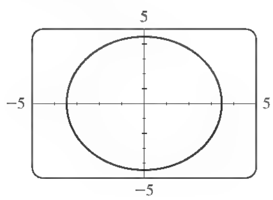
**57.** **(a)** Elipse

**(b)** $(X - 1)^2 + 4Y^2 = 1$

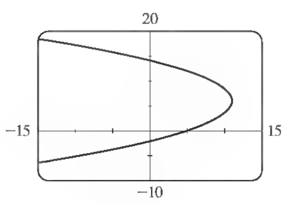
**(c)** $\phi = 30°$



**59.** Elipse

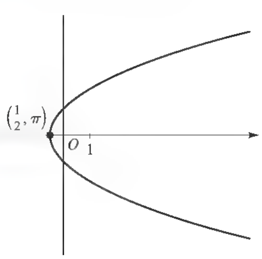



**61.** Parábola

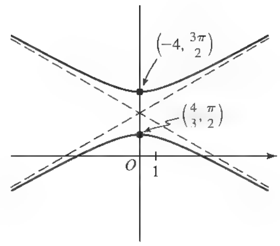



**63.** **(a)** $e = 1$, parábola

**(b)**

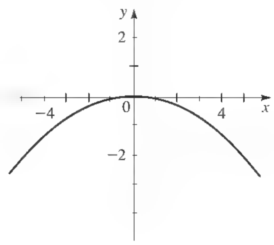


**65.** **(a)** $e = 2$, hipérbola

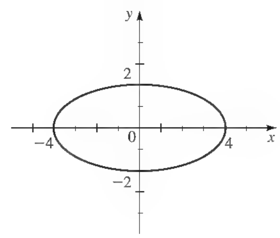


## EXAMEN DEL CAPÍTULO 11 ▪ PÁGINA 775

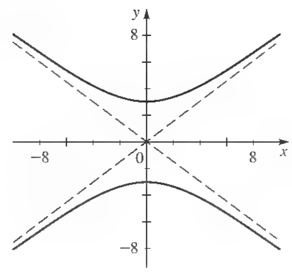
**1.** $F(0, -3)$, $y = 3$



**2.** $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; 8, 4

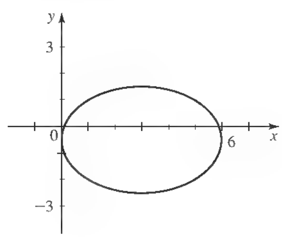


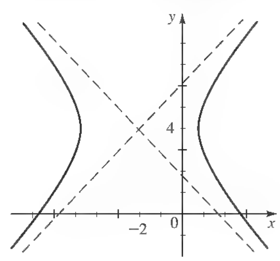
**3.** $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm 5)$; $y = \pm \frac{3}{4}x$



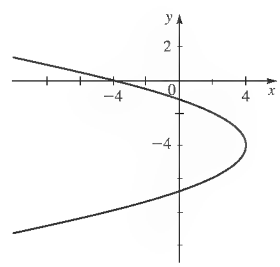
**4.** $y^2 = -x$ **5.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$ **6.** $(x - 2)^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

**7.** $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = 1$ **8.** $\dfrac{(x+2)^2}{8} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$





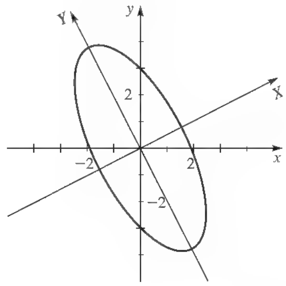
**9.** $(y + 4)^2 = -2(x - 4)$



**10.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **11.** $x^2 - 4x - 8y + 20 = 0$ **12.** $\frac{3}{4}$ pulg.

**13.** **(a)** Elipse **(b)** $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{18} = 1$

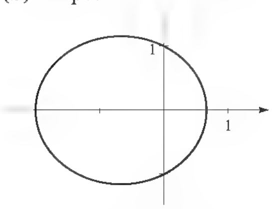
**(c)** $\phi \approx 27°$



**(d)** $(-3\sqrt{2/5}, 6\sqrt{2/5}), (3\sqrt{2/5}, -6\sqrt{2/5})$

**14.** **(a)** $r = \dfrac{1}{1 + 0.5 \cos\theta}$

**(b)** Elipse

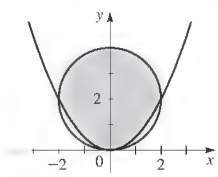


## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 778

**5.** **(c)** $x^2 - mx + (ma - a^2) = 0$, discriminante $m^2 - 4ma + 4a^2 = (m - 2a)^2$, $m = 2a$

## EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO PARA CAPÍTULOS 10 Y 11 ■ PÁGINA 780

**1.** **(a)** No lineal **(b)** $(0, 0), (2, 2), (-2, 2)$ **(c)** Círculo, parábola **(d), (e)**



**2.** **(a)** $(3, 0, 1)$ **(b)** $x = t - 1, y = t + 2, z = t$

**3.** Javier 4, Yolanda 10, Zacarías 6

**4.** **(a)** $A + B$ imposible; $C - D =$

$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 1 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; $CB$ imposible;

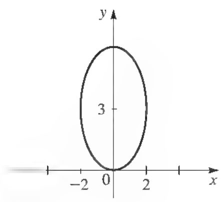
$BD = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $\det(B)$ imposible; $\det(C) = 2$; $\det(D) = 0$

**(b)** $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **5.** **(a)** $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

**(b)** $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ **(c)** $X = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$ **(d)** $x = 10, y = 15$

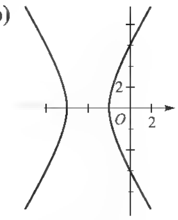
**6.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{x + 2}{x^2 + 4}$ **7.** $x^2 = 12y$

**8.** **(a)**



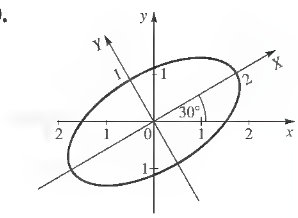
$F_1(0, 3 + \sqrt{5}), F_2(0, 3 - \sqrt{5})$, elipse

**(b)**



$F_1(0, 0), F_2(8, \pi)$, hipérbola

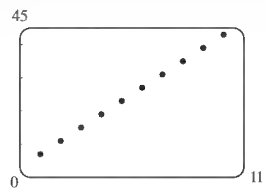
**9.** $\dfrac{(x - 5)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ **10.**



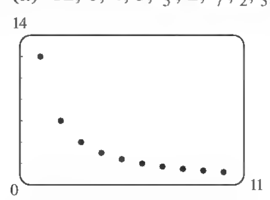
# CAPÍTULO 12

## SECCIÓN 12.1 ■ PÁGINA 792

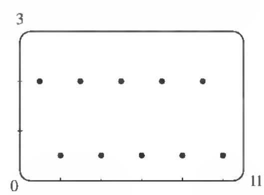
**1.** los números naturales **2.** $n$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
**3.** 2, 3, 4, 5; 101 **5.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}; \frac{1}{101}$ **7.** $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}; \frac{1}{10{,}000}$
**9.** 0, 2, 0, 2; 2 **11.** 1, 4, 27, 256; $100^{100}$ **13.** 3, 2, 0, −4, −12
**15.** 1, 3, 7, 15, 31 **17.** 1, 2, 3, 5, 8
**19.** **(a)** 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43
**(b)**



**21.** **(a)** 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$, 2, $\frac{12}{7}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}$
**(b)**



**23.** **(a)** 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{2}$
**(b)**



**25.** $2^n$ **27.** $3n - 2$ **29.** $(2n-1)/n^2$ **31.** $1 + (-1)^n$

**33.** 1, 4, 9, 16, 25, 36 **35.** $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \frac{121}{243}, \frac{364}{729}$

**37.** $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \frac{80}{81}; S_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$

**39.** $1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}, -1, 1 - \sqrt{5}; S_n = 1 - \sqrt{n+1}$

**41.** 10 **43.** $\frac{11}{6}$ **45.** 8 **47.** 31 **49.** 385 **51.** 46,438

**53.** 22 **55.** $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$

**57.** $\sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$

**59.** $x^3 + x^4 + \cdots + x^{100}$ **61.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k$ **63.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^2$

**65.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)}$ **67.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} x^k$ **69.** $2^{(2^n-1)/2^n}$

**71.** **(a)** 2004.00, 2008.01, 2012.02, 2016.05, 2020.08, 2024.12
**(b)** \$2149.16

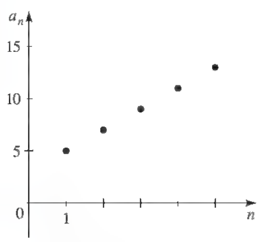
**73.** **(a)** 35,700, 36,414, 37,142, 37,885, 38,643 **(b)** 42,665

**75.** **(b)** 6898 **77.** **(a)** $S_n = S_{n-1} + 2000$ **(b)** \$38,000

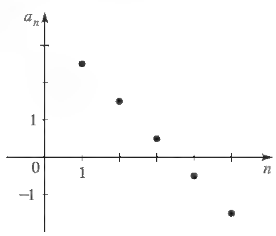
## SECCIÓN 12.2 ■ PÁGINA 798

**1.** diferencia **2.** diferencia común; 2, 5 **3.** Verdadero **4.** Verdadero

**5.** **(a)** 5, 7, 9, 11, 13
**(b)** 2
**(c)**




**7.** **(a)** $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$
**(b)** $-1$
**(c)**




**9.** $a_n = 3 + 5(n-1), a_{10} = 48$

**11.** $a_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(n-1), a_{10} = -2$

**13.** Aritmética, 3 **15.** No aritmética **17.** Aritmética, $-\frac{3}{2}$

**19.** Aritmética, 1.7

**21.** 11, 18, 25, 32, 39; 7; $a_n = 11 + 7(n-1)$

**23.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; no aritmética

**25.** $-4, 2, 8, 14, 20; 6; a_n = -4 + 6(n-1)$

**27.** $3, a_5 = 14, a_n = 2 + 3(n-1), a_{100} = 299$

**29.** $5, a_5 = 24, a_n = 4 + 5(n-1), a_{100} = 499$

**31.** $4, a_5 = 4, a_n = -12 + 4(n-1), a_{100} = 384$

**33.** $1.5, a_5 = 31, a_n = 25 + 1.5(n-1), a_{100} = 173.5$

**35.** $s, a_5 = 2 + 4s, a_n = 2 + (n-1)s, a_{100} = 2 + 99s$

**37.** $\frac{1}{2}$ **39.** $-100, -98, -96$ **41.** 30avo

**43.** 100 **45.** 460 **47.** 1090 **49.** 20,301 **51.** 832.3

**53.** 46.75 **57.** Sí **59.** 50 **61.** \$1250

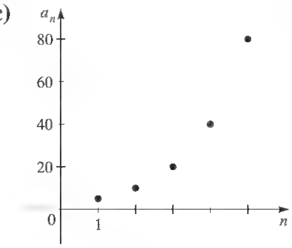
**63.** \$403,500 **65.** 20 **67.** 78

## SECCIÓN 12.3 ■ PÁGINA 805

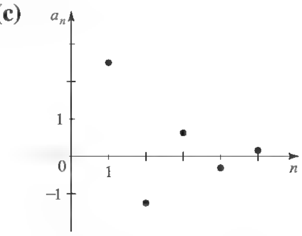
**1.** relación **2.** relación común; 2, 5 **3.** Verdadero **4.** **(a)** $a\left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)$

**(b)** geométrica; converge, $a/(1-r)$; diverge

**5.** **(a)** 5, 10, 20, 40, 80
**(b)** 2
**(c)**




**7.** **(a)** $\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{16}, \frac{5}{32}$
**(b)** $-\frac{1}{2}$
**(c)**




**9.** $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}, a_4 = 375$ **11.** $a_n = \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}, a_4 = -\frac{5}{16}$

**13.** Geométrica, 2 **15.** Geométrica, $\frac{1}{2}$

**17.** No geométrica **19.** Geométrica, 1.1

**21.** 6, 18, 54, 162, 486; geométrica, relación común 3; $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

**23.** $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}$; geométrica, relación común $\frac{1}{4}$; $a_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{4})^{n-1}$

**25.** 0, ln 5, 2 ln 5, 3 ln 5, 4 ln 5; no geométrica

**27.** $3, a_5 = 162, a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

**29.** $-0.3, a_5 = 0.00243, a_n = (0.3)(-0.3)^{n-1}$

**31.** $-\frac{1}{12}, a_5 = \frac{1}{144}, a_n = 144(-\frac{1}{12})^{n-1}$

**33.** $3^{2/3}, a_5 = 3^{11/3}, a_n = 3^{(2n+1)/3}$

**35.** $s^{2/7}, a_5 = s^{8/7}, a_n = s^{2(n-1)/7}$

**37.** $\frac{1}{2}$ **39.** $\frac{25}{4}$ **41.** 11th **43.** 315 **45.** 441

**47.** 3280

**49.** $\frac{6141}{1024}$ **51.** $\frac{3}{2}$ **53.** $\frac{3}{4}$ **55.** divergente

**57.** 2 **59.** divergente **61.** $\sqrt{2} + 1$ **63.** $\frac{7}{9}$ **65.** $\frac{1}{33}$

**67.** $\frac{112}{999}$ **69.** 10, 20, 40

**71.** **(a)** $V_n = 160{,}000(0.80)^{n-1}$ **(b)** 4° año

**73.** 19 pies, $80(\frac{3}{4})^n$ **75.** $\frac{64}{25}, \frac{1024}{625}, 5(\frac{4}{5})^n$

**77.** **(a)** $17\frac{8}{9}$ pies **(b)** $18 - (\frac{1}{3})^{n-3}$

**79.** 2801 **81.** 3 m

**83.** **(a)** 2 **(b)** $8 + 4\sqrt{2}$ **85.** 1

## SECCIÓN 12.4 ■ PÁGINA 812

**1.** cantidad **2.** valor presente **3.** \$13,180.79

**5.** \$360,262.21 **7.** \$5,591.79 **9.** \$572.34

**11.** \$13,007.94 **13.** \$2,601.59 **15.** \$307.24

**17.** \$733.76, \$264,153.60

**19.** \$583,770.65

**21.** \$9020.60

**23.** **(a)** \$859.15 **(b)** \$309,294.00 **(c)** \$1,841,519.29

**25.** 18.16% **27.** 11.68%

## SECCIÓN 12.5 ■ PÁGINA 819

**1.** natural; $P(1)$ **2.** (ii)

**3.** Denote con $P(n)$ el enunciado $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $2 = 1(1+1)$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$
\begin{aligned}
&2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k+1) \\
&= k(k+1) + 2(k+1) \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

Entonces $P(k+1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**5.** Denote con $P(n)$ el enunciado

$$5 + 8 + \cdots + (3n + 2) = \frac{n(3n + 7)}{2}.$$

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $5 = \frac{1(3 \cdot 1 + 7)}{2}$

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} &5 + 8 + \cdots + (3k + 2) + [3(k + 1) + 2] \\ &= \frac{k(3k + 7)}{2} + (3k + 5) \quad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= \frac{3k^2 + 13k + 10}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) + 7]}{2} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**7.** Denote con $P(n)$ el enunciado

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 2)}{3}$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) \\ &= \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k + 1)(k + 2) \quad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**9.** Denote con $P(n)$ el enunciado

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1^3 = \frac{1^2 \cdot (1 + 1)^2}{4}$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} &1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \quad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= \frac{(k + 1)^2[k^2 + 4(k + 1)]}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**11.** Denote con $P(n)$ el enunciado $2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $2^3 = 2 \cdot 1^2(1 + 1)^2$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} &2^3 + 4^3 + \cdots + (2k)^3 + [2(k + 1)]^3 \\ &= 2k^2(k + 1)^2 + [2(k + 1)]^3 \quad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= (k + 1)^2(2k^2 + 8k + 8) \\ &= 2(k + 1)^2(k + 2)^2 \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**13.** Denote con $P(n)$ el enunciado $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n = 2[1 + (n - 1)2^n]$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1 \cdot 2 = 2[1 + 0]$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} &1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^k + (k + 1) \cdot 2^{k+1} \\ &= 2[1 + (k - 1)2^k] + (k + 1) \cdot 2^{k+1} \quad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 2 + (k - 1)2^{k+1} + (k + 1) \cdot 2^{k+1} \\ &= 2 + 2k2^{k+1} = 2(1 + k2^{k+1}) \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**15.** Denote con $P(n)$ el enunciado $n^2 + n$ es divisible entre 2.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1^2 + 1$ es divisible entre 2.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora

$$\begin{aligned} (k + 1)^2 + (k + 1) &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\ &= (k^2 + k) + 2(k + 1) \end{aligned}$$

Pero $k^2 + k$ es divisible entre 2 (por la hipótesis de inducción), y $2(k + 1)$ es claramente divisible entre 2, y $(k + 1)^2 + (k + 1)$ es divisible entre 2. Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**17.** Denote con $P(n)$ el enunciado $n^2 - n + 41$ como impar.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1^2 - 1 + 41$ es impar.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora

$$(k + 1)^2 - (k + 1) + 41 = (k^2 - k + 41) + 2k$$

Pero $k^2 - k + 41$ es impar (por la hipótesis de inducción), y $2k$ es claramente par, de modo que su suma es impar. Por lo tanto, $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**19.** Denote con $P(n)$ el enunciado $8^n - 3^n$ es divisible entre 5.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $8^1 - 3^1$ es divisible entre 5.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 8 \cdot 8^k - (8 - 5) \cdot 3^k = 8 \cdot (8^k - 3^k) + 5 \cdot 3^k \end{aligned}$$

que es divisible entre 5 porque $8^k - 3^k$ es divisible entre 5 (por la hipótesis de inducción) y $5 \cdot 3^k$ es claramente divisible entre 5. Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**21.** Denote con $P(n)$ el enunciado $n < 2^n$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1 < 2^1$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} k + 1 &< 2^k + 1 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &< 2^k + 2^k && \text{Porque } 1 < 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**23.** Denote con $P(n)$ el enunciado $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para $x > -1$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \\ &\geq (1 + x)(1 + kx) && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**25.** Denote con $P(n)$ el enunciado de que $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $a_1 = 5 \cdot 3^0 = 5$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3 \cdot a_k && \text{Definición de } a_{k+1} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 3^{k-1} && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 5 \cdot 3^k \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**27.** Denote con $P(n)$ el enunciado de que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $x - y$ es un factor de $x^1 - y^1$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} \\ &= x^k(x - y) + (x^k - y^k)y \end{aligned}$$

Pero $x^k(x - y)$ es claramente divisible entre $x - y$, y $(x^k - y^k)y$ es divisible entre $x - y$ (por la hipótesis de inducción), de modo que su suma es divisible entre $x - y$. Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**29.** Denote con $P(n)$ el enunciado de que $F_{3n}$ es par.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $F_{3 \cdot 1} = 2$, que es par.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora, por la definición de la sucesión de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_{3(k+1)} &= F_{3k+3} = F_{3k+2} + F_{3k+1} \\ &= F_{3k+1} + F_{3k} + F_{3k+1} \\ &= F_{3k} + 2 \cdot F_{3k+1} \end{aligned}$$

Pero $F_{3k}$ es par (por la hipótesis de inducción), y $2 \cdot F_{3k+1}$ es claramente par, de modo que $F_{3(k+1)}$ es par. Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**31.** Denote con $P(n)$ el enunciado $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $F_1^2 = F_1 \cdot F_2$ (porque $F_1 = F_2 = 1$).
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora,

$$\begin{aligned} &F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 \\ &\quad = F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &\quad = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) && \text{Definición de la sucesión de Fibonacci} \\ &\quad = F_{k+1} \cdot F_{k+2} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**33.** Denote con $P(n)$ el enunciado $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

*Paso 1* $P(2)$ es verdadero, porque $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}$.
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} && \text{Definición de la sucesión de Fibonacci} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n \geq 2$.

**35.** Denote con $P(n)$ el enunciado $F_n \geq n$.

*Paso 1* $P(5)$ es verdadero, porque $F_5 \geq 5$ (porque $F_5 = 5$).
*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Ahora,

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{Definición de la sucesión de Fibonacci} \\ &\geq k + F_{k-1} && \text{Hipótesis de inducción} \\ &\geq k + 1 && \text{Porque } F_{k-1} \geq 1 \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n \geq 5$.

## SECCIÓN 12.6 ■ PÁGINA 827

**1.** binomio **2.** De Pascal; 1, 4, 6, 4, 1

**3.** $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$; $\dfrac{4!}{3!(4-3)!} = 4$

**4.** Binomio; $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$

**5.** $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

**7.** $x^4 + 4x^2 + 6 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$

**9.** $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
**11.** $x^{10}y^5 - 5x^8y^4 + 10x^6y^3 - 10x^4y^2 + 5x^2y - 1$
**13.** $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

**15.** $\dfrac{1}{x^5} - \dfrac{5}{x^{7/2}} + \dfrac{10}{x^2} - \dfrac{10}{x^{1/2}} + 5x - x^{5/2}$

**17.** 15 **19.** 4950 **21.** 18 **23.** 32

**25.** $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

**27.** $1 + \dfrac{6}{x} + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{20}{x^3} + \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{6}{x^5} + \dfrac{1}{x^6}$

**29.** $x^{20} + 40x^{19}y + 760x^{18}y^2$ **31.** $25a^{26/3} + a^{25/3}$

**33.** $48{,}620x^{18}$ **35.** $300a^2b^{23}$ **37.** $100y^{99}$ **39.** $13{,}440x^4y^6$

**41.** $495a^8b^8$ **43.** $(x + y)^4$ **45.** $(2a + b)^3$ **47.** $3x^2 + 3xh + h^2$

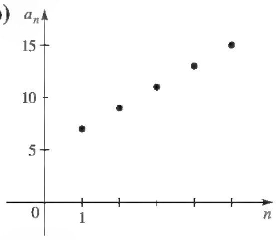
## REPASO DEL CAPÍTULO 12 ■ PÁGINA 829

**1.** $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}; \frac{100}{11}$ **3.** $0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{32}; \frac{1}{500}$ **5.** 1, 3, 15, 105; 654,729,075

**7.** 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 **9.** 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85

**11. (a)** 7, 9, 11, 13, 15

**(b)**

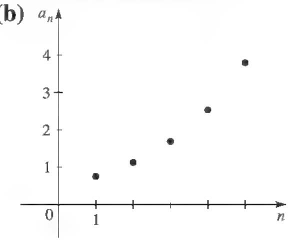



**(c)** 55

**(d)** Aritmética, diferencia común 2

**13. (a)** $\frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \frac{243}{64}$

**(b)**




**(c)** $\frac{633}{64}$

**(d)** ) Geométrica, relación común $\frac{3}{2}$

**15.** Aritmética, 7 **17.** Aritmética, $t + 1$ **19.** Geométrica, $\dfrac{1}{t}$

**21.** Geométrica, $\frac{4}{27}$ **23.** $2i$ **25.** 5 **27.** $\frac{81}{4}$

**29. (a)** $A_n = 32{,}000(1.05)^{n-1}$ **(b)** \$32,000, \$33,600, \$35,280, \$37,044, \$38,896.20, \$40,841.01, \$42,883.06, \$45,027.21

**31.** 12,288 **35. (a)** 9 **(b)** $\pm 6\sqrt{2}$ **37.** 126 **39.** 384

**41.** $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$ **43.** $\dfrac{3}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \dfrac{3^3}{2^4} + \cdots + \dfrac{3^{50}}{2^{51}}$

**45.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{33} 3k$ **47.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k2^{k+2}$ **49.** Geométrica; 4.68559

**51.** Aritmética, $5050\sqrt{5}$ **53.** Geométrica, 9831 **55.** $\frac{5}{7}$

**57.** Divergente **59.** Divergente **61.** 13 **63.** 65,534

**65.** \$2390.27

**67.** Denote con $P(n)$ el enunciado

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1 = \dfrac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2}$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned}
&1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] \\
&= \frac{k(3k - 1)}{2} + [3k + 1] \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} \\
&= \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2} \\
&= \frac{(k + 1)[3(k + 1) - 1]}{2}
\end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**69.** Denote con $P(n)$ el enunciado $(1 + \frac{1}{1})(1 + \frac{1}{2}) \cdots (1 + \frac{1}{n}) = n + 1$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $(1 + \frac{1}{1}) = 1 + 1$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) \\
&= (k + 1)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k + 1) + 1
\end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**71.** Denote con $P(n)$ el enunciado $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $a_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = 4$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_k + 4 \\
&= 3(2 \cdot 3^k - 2) + 4 \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= 2 \cdot 3^{k+1} - 2
\end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**73.** 100 **75.** 32 **77.** $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

**79.** $1 - 6x^2 + 15x^4 - 20x^6 + 15x^8 - 6x^{10} + x^{12}$

**81.** $1540a^3b^{19}$ **83.** $17{,}010A^6B^4$

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 12 ■ PÁGINA 832

**1.** 1, 6, 15, 28, 45, 66; 161 **2.** 2, 5, 13, 36, 104, 307 **3. (a)** 3 **(b)** $a_n = 2 + (n - 1)3$ **(c)** 104 **4. (a)** $\frac{1}{4}$ **(b)** $a_n = 12(\frac{1}{4})^{n-1}$

**(c)** $3/4^8$ **5. (a)** $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}$ **(b)** $\dfrac{5^8 - 1}{12{,}500}$ **6. (a)** $-\frac{8}{9}, -78$ **(b)** 60

**8. (a)** $(1 - 1^2) + (1 - 2^2) + (1 - 3^2) + (1 - 4^2) + (1 - 5^2) = -50$

**(b)** $(-1)^3 2^1 + (-1)^4 2^2 + (-1)^5 2^3 + (-1)^6 2^4 = 10$

**9. (a)** $\frac{58{,}025}{59{,}049}$ **(b)** $2 + \sqrt{2}$

**10.** Denote con $P(n)$ el enunciado

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

*Paso 1* $P(1)$ es verdadero, porque $1^2 = \dfrac{1(1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

*Paso 2* Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces

$$\begin{aligned}
&1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k + 1)^2 \\
&= \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \\
&= \frac{(k + 1)[k(2k + 1) + 6(k + 1)]}{6} \\
&= \frac{(k + 1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1][2(k + 1) + 1]}{6}
\end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se sigue de $P(k)$. Así, por el Principio de Inducción Matemática $P(n)$ se cumple para toda $n$.

**11.** $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

**12.** $\binom{10}{3}(3x)^3(-2)^7 = -414{,}720x^3$

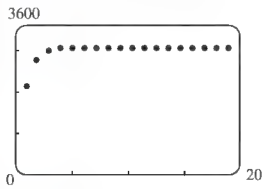
**13.** **(a)** $a_n = (0.85)(1.24)^n$ **(b)** 3.09 lb **(c)** Geométrica

## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 835

**1.** **(a)** $A_n = 1.0001A_{n-1}, A_0 = 275{,}000$ **(b)** $A_0 = 275{,}000$, $A_1 = 275{,}027.50$, $A_2 = 275{,}055.00$, $A_3 = 275{,}082.51$, $A_4 = 275{,}110.02$, $A_5 = 275{,}137.53$, $A_6 = 275{,}165.04$, $A_7 = 275{,}192.56$ **(c)** $A_n = 1.0001^n(275{,}000)$

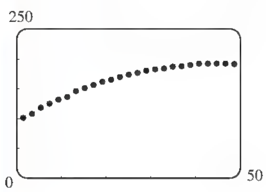
**3.** **(a)** $A_n = 1.0025A_{n-1} + 100, A_0 = 100$ **(b)** $A_0 = 100$, $A_1 = 200.25$, $A_2 = 300.75$, $A_3 = 401.50$, $A_4 = 502.51$ **(c)** $A_n = 100[(1.0025^{n+1} - 1)/0.0025]$ **(d)** \$6580.83

**5.** **(b)** $A_0 = 2400$, $A_1 = 3120$, $A_2 = 3336$, $A_3 = 3400.8$, $A_4 = 3420.2$ **(c)** $A_n = 3428.6(1 - 0.3^{n+1})$
**(d)** 3427.8 ton, 3428.6 ton
**(e)**




**7.** **(b)** En el 35avo año

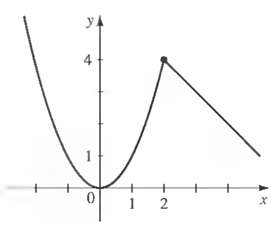
**9.** **(a)** $R_1 = 104$, $R_2 = 108$, $R_3 = 112$, $R_4 = 116$, $R_5 = 120$, $R_6 = 124$, $R_7 = 127$ **(b)** Aproximadamente 200.



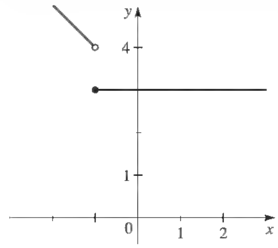

# CAPÍTULO 13

## SECCIÓN 13.1 ■ PÁGINA 846

**1.** $L, a$; 5, 1 **2.** límite, izquierdo, $L$; menor; izquierdo, derecho, igual
**3.** 10 **5.** $\frac{1}{4}$ **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** 1 **11.** 1 **13.** 0.51 **15.** $\frac{1}{2}$
**17.** **(a)** 2 **(b)** 3 **(c)** No existe **(d)** 4 **(e)** No está definido
**19.** **(a)** $-1$ **(b)** $-2$ **(c)** No existe **(d)** 2 **(e)** 0 **(f)** No existe **(g)** 1 **(h)** 3
**21.** $-8$ **23.** No existe
**25.** No existe
**27.** No existe
**29.** **(a)** 4 **(b)** 4 **(c)** 4

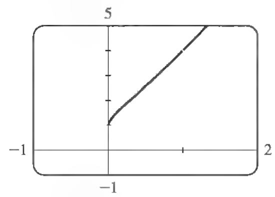



**31.** **(a)** 4 **(b)** 3 **(c)** No existe

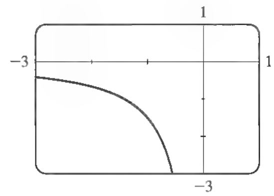



## SECCIÓN 13.2 ■ PÁGINA 855

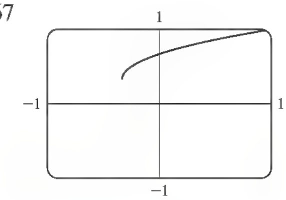
**1.** $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$; suma, producto **2.** $f(a)$
**3.** **(a)** 5 **(b)** 9 **(c)** 2 **(d)** $-\frac{1}{3}$ **(e)** $-\frac{3}{8}$ **(f)** 0 **(g)** No existe **(h)** $-\frac{6}{11}$
**5.** 75 **7.** $\frac{1}{2}$ **9.** $-3$ **11.** 5 **13.** 2
**15.** $\frac{6}{5}$ **17.** 12 **19.** $\frac{1}{6}$ **21.** $-\frac{1}{16}$
**23.** 4




**25.** $-\frac{3}{2}$




**27.** **(a)** 0.667

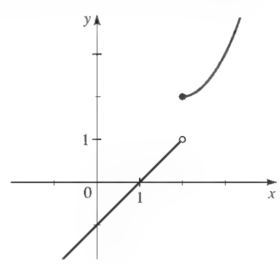



**(b)** 0.667

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0.1 | 0.71339 |
| 0.01 | 0.67163 |
| 0.001 | 0.66717 |
| 0.0001 | 0.66672 |

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| −0.1 | 0.61222 |
| −0.01 | 0.66163 |
| −0.001 | 0.66617 |
| −0.0001 | 0.66662 |

**(c)** $\frac{2}{3}$
**29.** 0 **31.** No existe
**33.** No existe
**35.** **(a)** 1, 2 **(b)** No existe
**(c)**

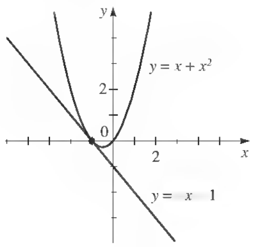


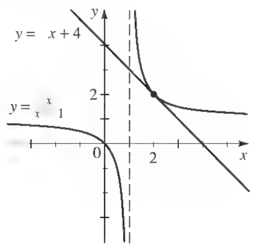
## SECCIÓN 13.3 ■ PÁGINA 863

**1.** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$; pendiente, $(a, f(a))$

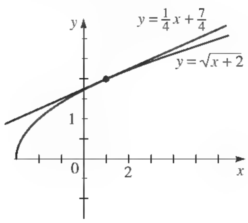
**2.** $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, instantáneo, $a$ **3.** 3 **5.** $-11$ **7.** 24

**9.** $y = -x - 1$ **11.** $y = -x + 4$





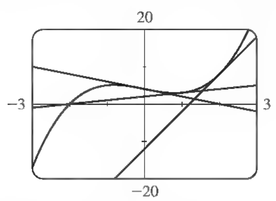
**13.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$



**15.** $f'(2) = -12$ **17.** $g'(1) = 4$ **19.** $F'(4) = -\frac{1}{16}$

**21.** $f'(a) = 2a + 2$ **23.** $f'(a) = \dfrac{1}{(a+1)^2}$

**25.** **(a)** $f'(a) = 3a^2 - 2$
**(b)** $y = -2x + 4$, $y = x + 2$, $y = 10x - 12$
**(c)**



**27.** $-24$ pies/s **29.** $12a^2 + 6$ m/s, 18 m/s, 54 m/s, 114 m/s
**31.** 0.75°/min **33.** **(a)** $-38.3$ gal/min, $-27.8$ gal/min
**(b)** $-33.3$ gal/min

## SECCIÓN 13.4 ■ PÁGINA 871

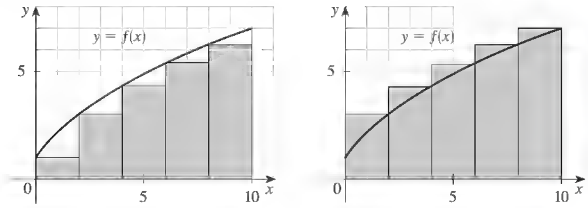
**1.** $L$, $x$; asíntota horizontal; 0, 0 **2.** $L$, grande; converge, diverge **3.** **(a)** $-1, 2$ **(b)** $y = -1, y = 2$ **5.** 0 **7.** $\frac{2}{5}$ **9.** $\frac{4}{3}$
**11.** 2 **13.** No existe **15.** 7 **17.** No existe
**19.** $-\frac{1}{4}$ **21.** 0 **23.** 0 **25.** Divergente **27.** 0 **29.** Divergente
**31.** $\frac{3}{2}$ **33.** 8 **35.** **(b)** 30 g/L

## SECCIÓN 13.5 ■ PÁGINA 879

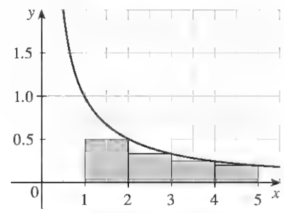
**1.** rectángulos;
$f(x_1)(x_1 - a) + f(x_2)(x_2 - x_1) + f(x_3)(x_3 - x_2) + f(b)(b - x_3)$

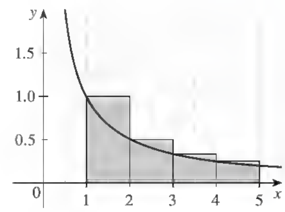
**2.** $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

**3.** **(a)** 40, 52

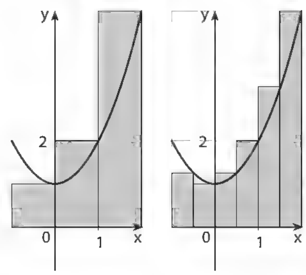


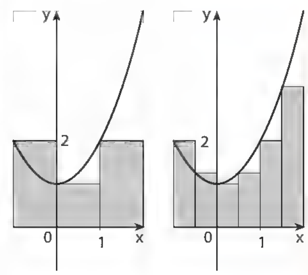
**(b)** 43.2, 49.2
**5.** 5.25 **7.** $\frac{223}{35}$
**9.** **(a)** $\frac{77}{60}$, subestimado **(b)** $\frac{25}{12}$, sobreestimado





**11.** **(a)** 8, 6.875 **(b)** 5, 5.375





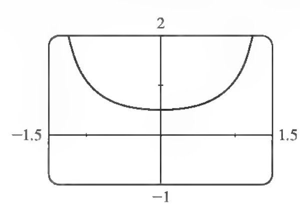
**13.** 37.5 **15.** 8 **17.** 166.25 **19.** 133.5

## REPASO DEL CAPÍTULO 13 ■ PÁGINA 881

**1.** 1 **3.** 0.69 **5.** No existe **7.** **(a)** No existe
**(b)** 2.4 **(c)** 2.4 **(d)** 2.4 **(e)** 0.5 **(f)** 1 **(g)** 2 **(h)** 0
**9.** $-3$ **11.** 7 **13.** 2 **15.** $-1$ **17.** 2 **19.** No existe
**21.** $f'(4) = 3$ **23.** $f'(16) = \frac{1}{8}$
**25.** **(a)** $f'(a) = -2$ **(b)** $-2, -2$
**27.** **(a)** $f'(a) = 1/(2\sqrt{a+6})$ **(b)** $1/(4\sqrt{2}), 1/4$
**29.** $y = 2x + 1$ **31.** $y = 2x$ **33.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$
**35.** **(a)** $-64$ pies/s **(b)** $-32a$ pies/s **(c)** $\sqrt{40} \approx 6.32$ s
**(d)** $-202.4$ pies/s **37.** $\frac{1}{5}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** Divergente
**43.** 3.83 **45.** 10 **47.** $\frac{5}{6}$

## EXAMEN DEL CAPÍTULO 13 ■ PÁGINA 883

**1.** **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)**



**2. (a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 1 **(d)** 0 **(e)** 0 **(f)** 0 **(g)** 4 **(h)** 2 **(i)** No existe **3. (a)** 6 **(b)** −2 **(c)** No existe **(d)** No existe **(e)** $\frac{1}{4}$ **(f)** 2 **4. (a)** $f'(x) = 2x - 2$ **(b)** 4, 0, 2 **5.** $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ **6. (a)** 0 **(b)** No existe **7. (a)** $\frac{89}{25}$ **(b)** $\frac{11}{3}$

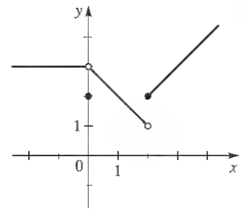
## ENFOQUE SOBRE MODELADO ■ PÁGINA 886

**1.** $57{,}333\frac{1}{3}$ pies-lb **3. (b)** Área bajo la gráfica de $p(x) = 375x$ entre $x = 0$ y $x = 4$ **(c)** 3000 lb **(d)** 1500 lb
**5. (a)** 1625.28 horas-grado de calentamiento **(b)** 70°F **(c)** 1488 horas-grado de calentamiento **(d)** 75°F **(e)** El día en el inciso (a)

## EXAMEN ACUMULATIVO DE REPASO PARA LOS CAPÍTULOS 12 Y 13 ■ PÁGINA 888

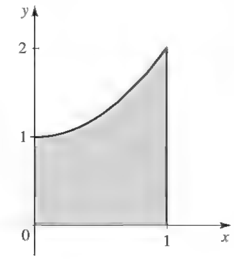
**1. (a)** $\frac{7}{15}, \frac{20}{41}, \frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{99}{340}, \frac{801}{7984}, 0$ **(c)** $\frac{37}{2}, \frac{115}{2}$, no hay límite **(d)** $12(\frac{5}{6})^6, 12(\frac{5}{6})^{19}, 0$ **(e)** 0.64, −5242.88, no hay límite
**2. (a)** 41.4 **(b)** 88.572 **(c)** 5115/512 **(d)** 9
**3.** \$2658.15 **4.** Sugerencia: El paso de inducción es $a_{n+1} = a_n + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.
**5. (a)** $32x^5 - 40x^4 + 20x^3 - 5x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{32}$ **(b)** $\frac{495}{16}x^4$

**6. (a)**




**(b) (i)** 2 **(ii)** 3 **(iii)** 2 **(iv)** 1 **(v)** 2

**7.** $\frac{1}{2}$ **8. (a)** 10 **(b)** 4 **(c)** No existe
**9. (a)** $3x^2$ **(b)** 27, 0, $3a^2$ **(c)** $y = 12x - 16$
**10. (a)**




**(b)** *A* se encuentra entre el cuadrado $1 \times 1$ en el primer cuadrante, con esquina en el origen, que tiene área 1, y el trapecio con esquinas (0, 0), (1, 0), (1, 2) y (0, 1), que tiene área $\frac{3}{2}$.
**(c)** 78/64 **(d)** 4/3

# ÍNDICE

## EXPONENTES Y RADICALES

$x^m x^n = x^{m+n}$

$(x^m)^n = x^{mn}$

$(xy)^n = x^n y^n$

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

## PRODUCTOS NOTABLES

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

## FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

## FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$.

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$.

$|x| > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$.

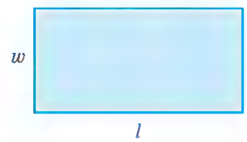
## FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas para el área $A$, perímetro $P$, circunferencia $C$, volumen $V$:

### Rectángulo

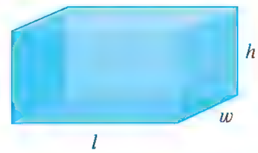
$A = lw$

$P = 2l + 2w$



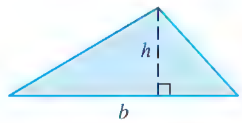

### Caja

$V = lwh$



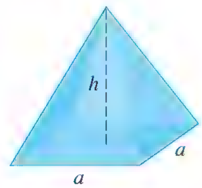

### Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$




### Pirámide

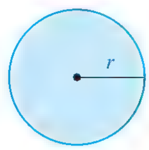
$V = \frac{1}{3}ha^2$




### Círculo

$A = \pi r^2$

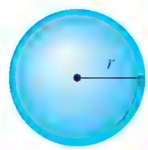
$C = 2\pi r$




### Esfera

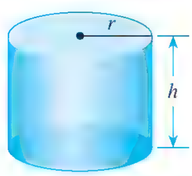
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



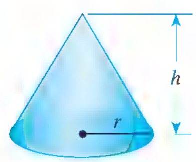

### Cilindro

$V = \pi r^2 h$




### Cono

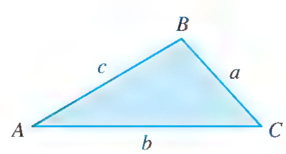
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$




## FÓRMULA DE HERÓN

Área $= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

donde $s = \dfrac{a + b + c}{2}$



## FÓRMULAS DE DISTANCIA Y PUNTO MEDIO

**Distancia** entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Punto medio** de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

## RECTAS

**Pendiente de una recta** que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ $\qquad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

**Ecuación de punto-pendiente** de una recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente $m$ $\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$

**Ecuación de pendiente e intercepción** de recta con pendiente $m$ y punto de intercepción $y$ en $b$ $\qquad y = mx + b$

**Ecuación de dos puntos de intercepción** de recta con punto de intercepción $x$ en $a$ y punto de intercepción $y$ en $b$ $\qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

## LOGARITMOS

$y = \log_a x \quad$ significa $\quad a^y = x$

$\log_a a^x = x \qquad a^{\log_a x} = x$

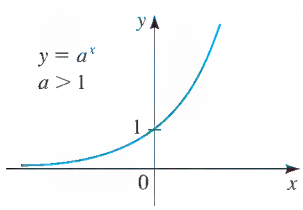
$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

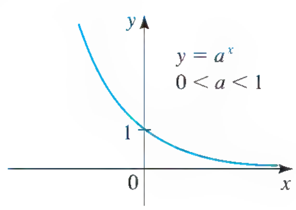
$\log x = \log_{10} x \qquad \ln x = \log_e x$

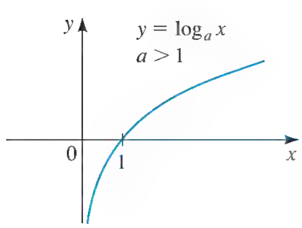
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

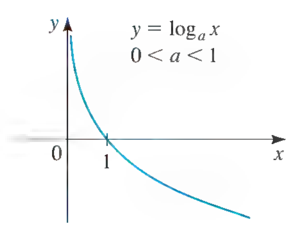
$\log_a x^b = b \log_a x \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

## FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



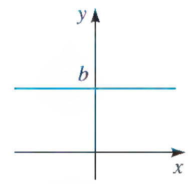



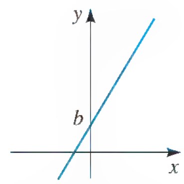




## GRÁFICAS DE FUNCIONES

Funciones lineales: $f(x) = mx + b$

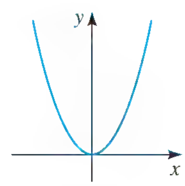



$f(x) = b$

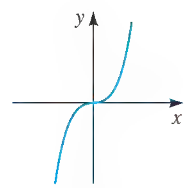



$f(x) = mx + b$

Funciones potencia: $f(x) = x^n$

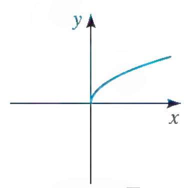



$f(x) = x^2$

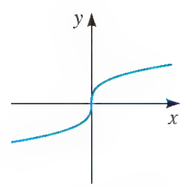



$f(x) = x^3$

Funciones raiz: $f(x) = \sqrt[n]{x}$

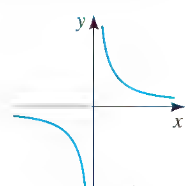



$f(x) = \sqrt{x}$

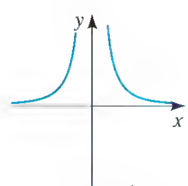



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Funciones recíprocas: $f(x) = 1/x^n$

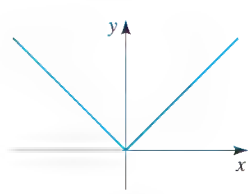



$f(x) = \frac{1}{x}$



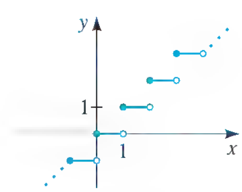

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Función valor absoluto




$f(x) = |x|$

Función entero mayor




$f(x) = [\![x]\!]$

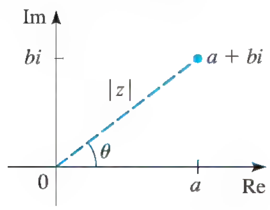
## NÚMEROS COMPLEJOS

Para el número complejo $z = a + bi$

el **conjugado** es $\bar{z} = a - bi$

el **módulo** es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

el **argumento** es $\theta$, donde $\tan\theta = b/a$




### Forma polar de un número complejo

Para $z = a + bi$, la **forma polar** es

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

donde $r = |z|$ es el módulo de $z$ y $\theta$ es el argumento de $z$

### Teorema de De Moivre

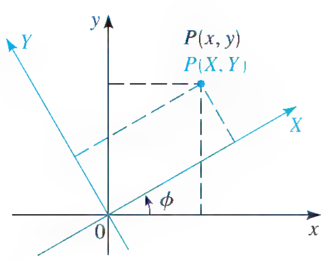
$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$\sqrt[n]{z} = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

## ROTACIÓN DE EJES




### Fórmulas de rotación de ejes

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$$
$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$$

### Fórmula de ángulo de rotación para secciones cónicas

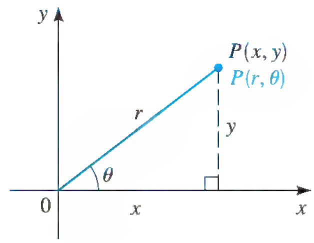
Para eliminar el término $xy$ en la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

girar el eje en el ángulo $\phi$ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

## COORDENADAS POLARES




$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

## SUMAS DE POTENCIAS DE ENTEROS

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

## LA DERIVADA

La **razón de cambio promedio** de $f$ entre $a$ y $b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La **derivada** de $f$ en $a$ es

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

## ÁREA BAJO LA GRÁFICA DE $f$

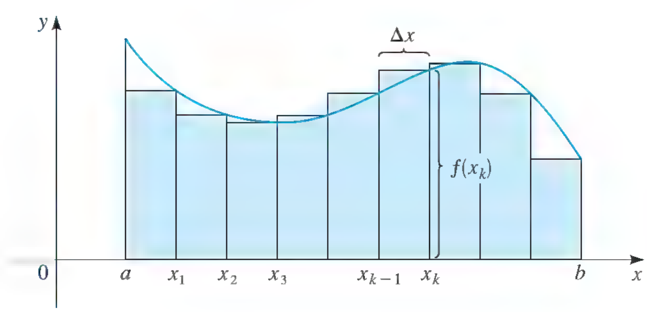
El **área bajo la gráfica de $f$** sobre el intervalo $[a, b]$ es el límite de la suma de las áreas de rectángulos de aproximación

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

donde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_k = a + k\,\Delta x$$



## SUCESIONES Y SERIES

### Aritmética

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$$

### Geométrica

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Si $|r| < 1$, entonces la suma de una serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

## EL TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

## FINANZAS

### Interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde $A$ es la cantidad después de $t$ años, $P$ es el principal, $r$ es la tasa de interés, y el interés se capitaliza $n$ veces por año.

### Cantidad de una anualidad

$$A_f = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

donde $A_f$ es la cantidad final, $i$ es la tasa de interés por período, y hay $n$ pagos de monto $R$.

### Valor presente de una anualidad

$$A_p = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

donde $A_p$ es el valor presente, $i$ la tasa de interés por período, y hay $n$ pagos de monto $R$.

### Compras a plazos

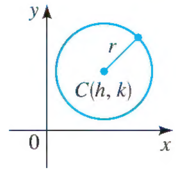
$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donde $R$ es el monto de cada pago, $i$ es la tasa de interés por período, $A_p$ es la cantidad del préstamo, y $n$ es el número de pagos.

## SECCIONES CÓNICAS

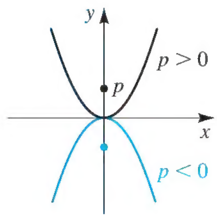
### Circunferencias

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

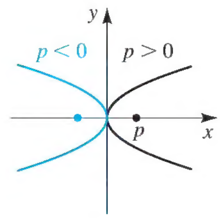



### Parábolas

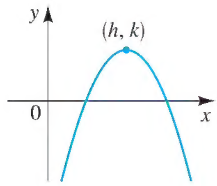
$$x^2 = 4py \qquad\qquad y^2 = 4px$$



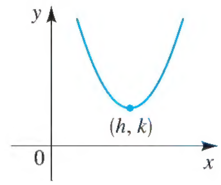

Foco $(0, p)$, directriz $y = -p$




Foco $(p, 0)$, directriz $x = -p$



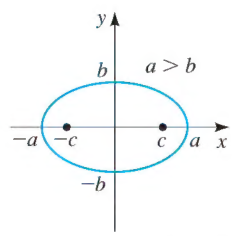

$y = a(x - h)^2 + k$, $a < 0$, $h > 0$, $k > 0$



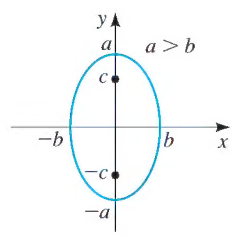

$y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$, $h > 0$, $k > 0$

### Elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



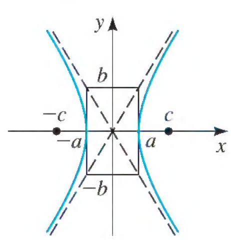

Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$



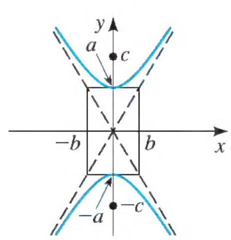

Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$

### Hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$




Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$



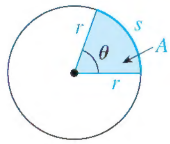

Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$

## MEDIDAS DE ÁNGULOS

$\pi$ radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ rad $\qquad 1 \text{ rad} = \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta \qquad A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad$ ($\theta$ en radianes)




Para convertir de grados a radianes, multiplicar por $\dfrac{\pi}{180}$.

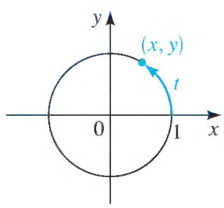
Para convertir de radianes a grados, multiplicar por $\dfrac{180}{\pi}$.

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

$\text{sen } t = y \qquad \csc t = \dfrac{1}{y}$

$\cos t = x \qquad \sec t = \dfrac{1}{x}$

$\tan t = \dfrac{y}{x} \qquad \cot t = \dfrac{x}{y}$

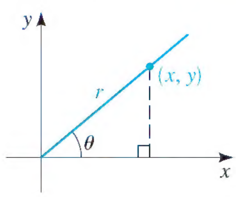



## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

$\text{sen } \theta = \dfrac{y}{r} \qquad \csc \theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos \theta = \dfrac{x}{r} \qquad \sec \theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan \theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot \theta = \dfrac{x}{y}$

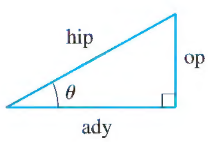



## TRIGONOMETRÍA DE UN ÁNGULO RECTO

$\text{sen } \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{op}}$

$\cos \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec \theta = \dfrac{\text{hip}}{\text{ady}}$

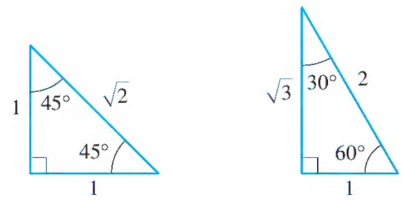
$\tan \theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot \theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{op}}$



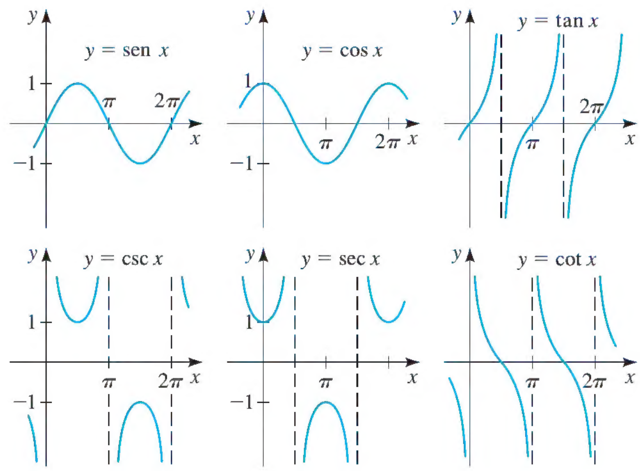

## VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

| $\theta$ | radianes | sen $\theta$ | cos $\theta$ | tan $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30° | $\pi/6$ | $1/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{3}/3$ |
| 45° | $\pi/4$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1 |
| 60° | $\pi/3$ | $\sqrt{3}/2$ | $1/2$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | $\pi/2$ | 1 | 0 | — |
| 180° | $\pi$ | 0 | $-1$ | 0 |
| 270° | $3\pi/2$ | $-1$ | 0 | — |

## TRIÁNGULOS ESPECIALES

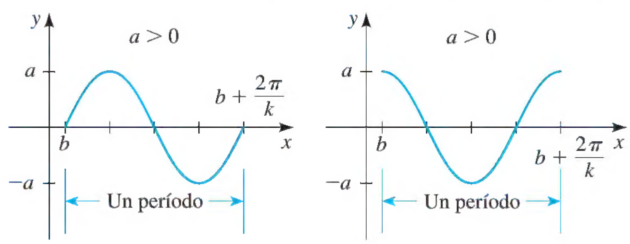



## GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



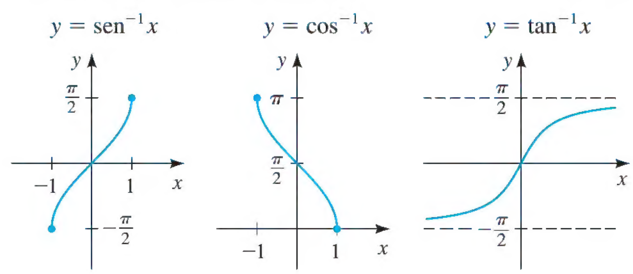

## CURVAS SENO Y COSENO

$y = a \text{ sen } k(x - b) \quad (k > 0) \qquad y = a \cos k(x - b) \quad (k > 0)$




amplitud: $|a|$ período: $2\pi/k$ desfase: $b$

## GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS



## IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad$ $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad$ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$

## IDENTIDADES DE COFUNCIONES

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

$\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$ $\qquad$ $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$

## IDENTIDADES DE REDUCCIÓN

$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\qquad$ $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\qquad$ $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

## FÓRMULAS PARA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $\qquad$ $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

## FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\qquad$ $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ $\qquad$ $= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

## FÓRMULAS PARA REDUCIR POTENCIAS

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

## FÓRMULAS DE ÁNGULO MEDIO

$\operatorname{sen} \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos u}{2}}$ $\qquad$ $\cos \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos u}{2}}$

$\tan \dfrac{u}{2} = \dfrac{1 - \cos u}{\sin u} = \dfrac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$

## IDENTIDADES DE PRODUCTO A SUMA Y SUMA A PRODUCTO

$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x - y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x - y}{2}$

## LAS LEYES DE SENOS Y COSENOS

### La Ley de Senos

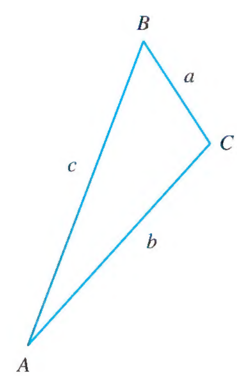
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

### La Ley de Cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



Stewart y su equipo explican los conceptos de manera sencilla y clara, sin restar importancia a los puntos difíciles. La resolución de problemas y la modelación matemática se introducen al principio y se refuerzan a lo largo del libro, ofreciendo a los estudiantes una base sólida en los principios del pensamiento matemático. Claro y de ritmo uniforme, el libro proporciona una cobertura completa del concepto de función, e integra una gran cantidad de materiales con calculadora gráfica para ayudar a los estudiantes a desarrollar comprensión de las ideas matemáticas. La atención de los autores a los detalles y la claridad, la misma que se encuentra en el texto de James Stewart Cálculo, es lo que hace este texto, el líder del mercado.

## *Características*

- Las secciones *Enfoque en el modelado* muestran técnicas de modelado, al igual que la forma en cómo las matemáticas se pueden aplicar al modelo de la vida real. Estas secciones, así como las demás, se dedican a enseñar a los estudiantes cómo crear sus propios modelos matemáticos, en lugar de utilizar fórmulas prefabricadas.
- Aplicaciones del mundo real de la ingeniería, física, química, negocios, biología, estudios ambientales y otros campos demuestran cómo se utilizan las matemáticas para modelar situaciones cotidianas.
- Los capítulos sobre trigonometría se han escrito para que los profesores pueden comenzar con el planteamiento de triángulo rectángulo o el enfoque de círculo unitario.
- Cada acercamiento a la trigonometría se acompaña de las aplicaciones adecuadas para ese planteamiento, aclarando el motivo de los diferentes enfoques de la trigonometría.
- Las viñetas *Matemáticas en el mundo moderno* muestran que las matemáticas son una ciencia viva crucial para el progreso científico y tecnológico de los últimos tiempos, así como a las ciencias sociales, de comportamiento y de vida.
- Problemas de *Descubrimiento / Debate / Redacción* al final de cada sección animan a los estudiantes a utilizar y desarrollar el pensamiento conceptual, crítico y habilidades de escritura.
- Los *Proyectos de descubrimiento* que anteriormente estaban en el texto están ahora en el sitio web que acompaña al libro. Estos proyectos involucran a los estudiantes, proporcionando un conjunto difícil, pero accesible de actividades que les permitan (tal vez el trabajo en grupo) profundizar en un aspecto interesante del tema que acaban de aprender.
- Las secciones de revisión y los exámenes al final de cada capítulo ayudan a los estudiantes medir su progreso en el aprendizaje. Breves respuestas a los ejercicios impares en cada sección y a todas las preguntas en los exámenes de capítulo se proporcionan en la parte posterior del libro.

CENGAGE Learning

http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-6074818260
ISBN-10: 607481826-6

9 786074 818260